ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра загальної математики

Індивідуальна робота

з математичного моделювання

на тему:

«Метод потенціалів розв'язування транспортної задачі»

Виконали:

студентки 4-го курсу

групи 4214

математичного факультету

спеціальності «Математика»

Красан М. Л.

Шапарь І. Ю.

Запоріжжя, 2017 р.

**Метод потенціалів розв’язування транспортної задачі**

Для того, щоб плани відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови доповнюючої нежорсткості:

, (1)

 (2)

Зауважимо, що друга група умов для транспортної задачі виконується автоматично, оскільки всі обмеження задачі є рівняннями.

Перша умова виконується у двох випадках:

a) якщо . Другий співмножник , бо ;

b) якщо , то за умовою транспортної задачі , тоді .

Необхідність і достатність виконання таких умов для оптимальності планів прямої та двоїстої задач було доведено. Отже, як наслідок другої теореми двоїстості для транспортної задачі отримали необхідні та достатні умови оптимальності плану.

Теорема (**умова оптимальності опорного плану транспортної задачі**). Якщо для деякого опорного плану  існують числа та , для яких виконуються умови:





для всіх  та , то він є оптимальним планом транспортної задачі.

Використовуючи наведені умови існування розв’язку транспортної задачі, методи побудови опорних планів та умову оптимальності опорного плану транспортної задачі, сформулюємо алгоритм методу потенціалів, який по суті повторює кроки алгоритму симплексного методу.

**Алгоритм методу потенціалів** складається з таких етапів:

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи закрита). За необхідності слід звести задачу до закритого типу.

2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі одним з відомих методів.

3. Перевірка опорного плану задачі на виродженість. За необхідності вводять нульові постачання.

4. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.

**Визначення потенціалів для кожного рядка і стовпчика таблиці транспортної задачі.** Потенціали опорного плану визначають із системи рівнянь , які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці, кількість яких дорівнює , а кількість невідомих — . Кількість рівнянь на одне менша, ніж невідомих, тому система є невизначеною, і одному з потенціалів надають нульове значення. Після цього всі інші потенціали розраховують однозначно.

**Перевірка виконання умови оптимальності для пустих клітин.** За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності  для незаповнених клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітини ця умова не виконується, тобто , то поточний план є неоптимальним, і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

**Вибір змінної для введення в базис на наступному кроці.** Загальне правило переходу від одного опорного плану до іншого полягає в тому, що з попереднього базису виводять певну змінну (вектор), а на її місце вводять іншу змінну (вектор), яка має покращити значення цільової функції. Аналогічна операція здійснюється і в алгоритмі методу потенціалів.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок кілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто .

**Побудова циклу і перехід до наступного опорного плану.**

Вибрана порожня клітина разом з іншими заповненими становить , отже, з цих клітин обов’язково утвориться цикл. У межах даного циклу здійснюють перерахування, які приводять до перерозподілу постачань продукції. Кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці — знак «+», а всім іншим — за черговістю знаки «–» та «+». У клітинках зі знаком «–» вибирають значення  і переносять його у порожню клітинку. Одночасно це число додають до відповідних чисел, які містяться в клітинках зі знаком «+», та віднімають від чисел, що позначені знаком «–». Якщо значенню q відповідає кілька однакових перевезень, то при відніманні залишаємо у відповідних клітинках нульові величини перевезень у такій кількості, що дає змогу зберегти невиродженість опорного плану.

Внаслідок наведеного правила вибору  дістаємо новий опорний план, який не містить від’ємних перевезень і задовольняє умови транспортної задачі. Оскільки кількість всіх клітин таблиці, що входять у цикл, є парною і до половини з них те саме число  додається, а від половини віднімається, то загальна сума перевезень по всіх колонках і рядках залишається незмінною.

Клітинка, що була вільною, стає заповненою, а відповідна клітинка з мінімальною величиною  вважається порожньою. У результаті такого перерозподілу перевезень продукції дістанемо новий опорний план транспортної задачі.

**Перевірка умови оптимальності наступного опорного плану.**

Якщо умова оптимальності виконується — маємо оптимальний план транспортної задачі, інакше необхідно перейти до наступного опорного плану.

Зауважимо, що аналогічно з розв’язуванням загальної задачі лінійного програмування симплексним методом, якщо за перевірки оптимального плану транспортної задачі для деяких клітин виконується рівність , то це означає, що задача має альтернативні оптимальні плани. Отримати їх можна, якщо побудувати цикли перерозподілу обсягів перевезень для відповідних клітин.

### Практична частина

**Задача 1.**

Компанія контролює три фабрики , , , здатні виготовляти відповідно 150, 60 та 80 тис. од. продукції щотижня. Вона уклала договір із чотирма замовниками , , , , яким потрібно щотижня доставляти відповідно 110, 40, 60 та 80 тис. од. продукції. Вартість транспортування 1000 од. продукції замовникам з кожної фабрики наведена в табл. 1.

#### Таблиця 1 - Вартість транспортування продукції

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Фабрика | Вартість транспортування 1000 од. продукції замовнику | | | |
|  |  |  |  |
|  | 4 | 4 | 2 | 5 |
|  | 5 | 3 | 1 | 2 |
|  | 2 | 1 | 4 | 2 |

Визначити оптимальний план перевезень продукції від кожної фабрики до замовників, що мінімізує загальну вартість транспортних послуг.

**Побудова математичної моделі**. Нехай  — кількість продукції, що перевозиться з -ї фабрики до -го замовника . Оскільки транспортна задача за умовою є збалансованою, закритою , то математична модель задачі матиме вигляд:



Економічний зміст записаних обмежень полягає в тому, що вся вироблена на фабриках продукція має вивозитися до замовників повністю.

Аналогічні обмеження можна записати відносно замовників: продукція, що може надходити до споживача від трьох фабрик, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:



Загальні витрати, пов’язані з транспортуванням продукції, визначаються як сума добутків обсягів перевезеної продукції на вартості транспортування 1000 од. продукції до відповідного замовника і за умовою задачі мають бути мінімальними. Тому формально це можна записати так:



Загалом математична модель сформульованої задачі має вигляд:



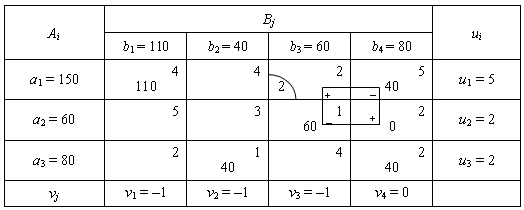
за умов:



.

Розв’язання. Запишемо умови задачі у вигляді транспортної таблиці (табл. 2) та складемо її перший опорний план у цій таблиці методом мінімальної вартості.

#### Таблиця 2



Загальна вартість перевезень продукції згідно з першим опорним планом визначається у такий спосіб:

.

Перший опорний план транспортної задачі вироджений, оскільки кількість заповнених клітинок у таблиці дорівнює п’яти, а .

Для подальшого розв’язування задачі необхідно в одну з порожніх клітинок записати «нульове перевезення» так, щоб не порушити опорності плану, тобто можна зайняти будь-яку пусту клітинку, яка не утворює замкненого циклу із заповненими клітинами. Наприклад, заповнимо нулем клітинку . Тепер перший план транспортної задачі є невиродженим, і його можна перевірити на оптимальність методом потенціалів.

На основі першої умови оптимальності  складемо систему рівнянь (для заповнених клітин таблиці) для визначення потенціалів першого опорного плану:



Записана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв’язків дістанемо, узявши, наприклад, . Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються з цієї системи рівнянь: , , , , , . Ці значення потенціалів першого опорного плану записуємо у транспортну таблицю.

Потім згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності  (для порожніх клітинок таблиці):













Умова оптимальності не виконується для клітинки . Порушення  записуємо в лівому нижньому кутку відповідної клітинки.

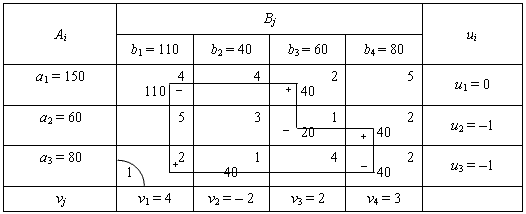
Отже, перший опорний план транспортної задачі неоптимальний. Тому від нього необхідно перейти до другого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх клітинок таблиці.

Потрібно заповнити клітинку , в якій є єдине порушення умови оптимальності. Ставимо в ній знак «+». Для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл, починаючи з клітинки , та позначаємо вершини циклу почергово знаками «–» і «+». Тепер необхідно перемістити продукцію в межах побудованого циклу. Для цього у порожню клітинку  переносимо менше з чисел , які розміщені в клітинках зі знаком «–». Одночасно це саме число  додаємо до відповідних чисел, що розміщені в клітинках зі знаком «+», та віднімаємо від чисел, що розміщені в клітинках, позначених знаком «–».

У даному разі , тобто  . Виконавши перерозподіл перевезень продукції згідно із записаними правилами, дістанемо такі нові значення: для клітинки  — 40 од. продукції, а для  – (60 – 40) = 20 од., а для  – (0 + 40) = 40 од. Клітинка  звільняється і в новій таблиці буде порожньою. Усі інші заповнені клітинки першої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у другу таблицю без змін. Кількість заповнених клітинок у новій таблиці також має відповідати умові невиродженості плану, тобто дорівнювати .

Отже, другий опорний план транспортної задачі матиме такий вигляд (табл. 3):

Таблиця 3



Розрахуємо значення цільової функції відповідно до другого опорного плану задачі:

.

Новий план знову перевіряємо на оптимальність, тобто повторюємо описані раніше дії. Другий опорний план транспортної задачі також неоптимальний (має місце порушення для клітинки ). За допомогою побудованого циклу, виконавши перехід до третього опорного плану транспортної задачі, отримуємо табл. 4:

#### Таблиця 4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | |  |
|  |  |  |  |
| a1 = 150 | 4  90 | 4 | 2  60 | 5 | u1 = 2 |
| a2 = 60 | 5 | 3 | 1 | 2  60 | u2 = 0 |
| a3 = 80 | 2  20 | 1  40 | 4 | 2  20 | u3 = 0 |
| vj | v1 = 2 | v2 = 1 | v3 = 0 | v4 = 2 |  |

Визначимо загальну вартість витрат на транспортування продукції згідно з третім опорним планом:

.

Перевірка останнього плану на оптимальність за допомогою методу потенціалів показує, що він оптимальний. Тому:

.

За оптимальним планом перевезень перший замовник отримує 90 тис. од. продукції з першої фабрики та 20 тис. од. — з третьої. Другий споживач задовольняє свій попит за рахунок виробництва та перевезення 40 тис. од. продукції з третьої фабрики і т. д. При цьому загальна вартість перевезень всієї продукції є найменшою і становить 720 ум. од.

**Задача 2.**

Розглянемо приклад розв'язання відкритої транспортної задачі, вихідні дані якої представлені в табл. 5:

Таблиця 5

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Потужності постачальника | Потужності споживачів | | | |
| 30 | 100 | 40 | 100 |
| 60 | 4 | 5 | 2 | 3 |
| 100 | 1 | 3 | 6 | 2 |
| 120 | 6 | 2 | 7 | 4 |

*Розв'язання:* Перевіримо виконання умови балансу, що :





Умова балансу не виконується, отже, завдання дійсно є відкритою. *Сформулюємо економіко-математичну модель цієї задачі.*

Нехай  - обсяги перевезень від -го постачальника -му споживачеві. Цільова функція задачі матиме вигляд:



а обмеження виглядають наступним чином: по постачальникам:

;

по споживачам:



прямі обмеження: .

Зведемо цю задачу до закритої, ввівши фіктивного споживача з потужністю 280 - 270 = 10; вартість перевезень одиниці вантажу у відповідних (фіктивних) клітинах приймаються рівними нулю, і ці клітини при складанні початкового розподілу перевезень заповнюються в саму останню чергу. Початковий план перевезень але методом найменших вартостей представлений в табл. 6.

Матриця оцінок клітин цього плану у відповідності з методом потенціалів має вигляд:



Таблиця 6

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Потужності постачальника | Потужності споживачів | | | | |  |
| 30 | 100 | 40 | 100 | 10 |
| 60 | 4 | 5 | 2 40 | 3 20 | 0 | 0 |
| 100 | 1 30 | 3 | 6 | 2 70 | 0 | 1 |
| 120 | 6 | 2 100 | 7 | 4 70 | 0 10 | -1 |
|  | 2 | 1 | 2 | 3 | -1 |  |

Аналіз елементів матриці оцінок клітин свідчить про те, що план перевезень в табл. 6 є оптимальним і єдиним. Вартість перевезень за цим планом складе 550, при цьому потужності споживачів будуть задоволені повністю, а у третього постачальника залишаться невывезенными 10 одиниць вантажу.