

Найбільш поширеною моделлю прикладної теорії логістики є модель оптимального або економічного розміру замовлення EOQ (Economic Order Quantity). Розрахунок EOQ здійснюється на основі сумарних загальних витрат, які можна представити у вигляді функції:

$$C_{\Sigma} = C_{\text{Придб}} + C_{\text{Замовл}} + C_{\text{Збер}} + C_{\text{Д}}. \quad (2.2)$$

Витрати на придбання $C_{\text{Придб}}$ визначаються вартістю одиниці продукції; в свою чергу, вартість може бути постійною або змінною при обліку оптових знижок, які залежать від обсягу замовлення.

Витрати на оформлення (виконання) замовлення $C_{\text{Замовл}}$ являють собою постійні витрати, які пов'язані з розміщенням замовлення у постачальників і його транспортуванням. Вважається, що витрати не залежать від обсягу замовлення.

Витрати на зберігання запасів $C_{\text{Збер}}$ містять витрати на утримання і вантажопереробку запасу на складі; витрати містять як відсоток на інвестований капітал, так і вартість зберігання, утримання і догляду.

Втрати від дефіциту запасу $C_{\text{Д}}$ включають, по-перше, потенційні втрати прибутку через відсутність запасу, по-друге, можливі втрати через втрату довіри покупців.

Розглянемо основну модель розрахунку оптимального розміру замовлення.

При формуванні основної моделі розрахунку EOQ як критерій оптимізації приймається мінімум загальних витрат, що включають витрати на виконання замовлення і витрати на зберігання запасу на складі протягом певного періоду часу (рік, квартал тощо):

$$C_{\Sigma} = C_{\text{Замовл}} + C_{\text{Збер}} = \frac{C_0 S}{q} + C_u i \frac{q}{2} \rightarrow \min, \quad (2.3)$$

де C_0 – витрати на виконання одного замовлення (гр. од.);

S – потреба у замовленні продукту протягом даного періоду (шт., т);

C_u – ціна одиниці продукції, що зберігається на складі (гр. од.);

i – частка від ціни, що припадає на витрати по зберіганню (%);

q – шукана величина замовлення (шт., т).

Оптимальна величина замовлення розраховується за формулою:

$$q_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{2C_0 S}{C_u i}}. \quad (2.4)$$

При цьому мінімальні сумарні витрати за аналізований період складатимуть

$$C_{\text{min}} = \sqrt{2C_0 S C_u i}. \quad (2.5)$$

Формула (2.4) зустрічається в різних джерелах під такими назвами: Уїлсона (найпоширеніше) або Вільсона, Харріса, Кампа.

Формула (2.4) одержана при великій кількості припущень:

– витрати на виконання замовлення C_0 , ціна продукції C_u , що поставляється, і витрати на зберігання одиниці продукції протягом аналізованого періоду постійні;

– період між замовленнями (поставками) постійний, тобто $T = \text{const}$;

– замовлення q_{opt} виконується повністю миттєво;

– інтенсивність попиту $\lambda = \frac{q_{\text{opt}}}{T}$ – постійна;

– ємність складу не обмежена;

– розглядаються тільки поточні (регулярні) запаси, інші види запасів (страхові, підготовчі, сезонні, транзитні і т.д.) не враховуються.

Трактування витрат C_0 , пов'язаних із замовленням, носить дискусійний характер. Так, в більшості випадків C_0 включає транспортно-заготівельні витрати: від витрат на укладання договору і пошуку постачальників до оплати послуг з доставки. Наприклад, витрати на постачання одиниці продукту, що замовляється, включають наступні елементи:

- вартість транспортування замовлення;
- витрати на розробку умов поставки;
- вартість контролю виконання замовлення;
- витрати на випуск каталогів;
- вартість форм документів.

В інших випадках, наприклад, транспортні витрати не входять у C_o і представлені у вигляді додаткових доданків: витрат на транспортування і витрат, пов'язаних із запасами на час у дорозі.

У моделі (2.3) передбачається, що оплата за зберігання одиниці продукції пропорційна її ціні, а середня кількість продукції, яка перебуває на зберіганні, при постійній інтенсивності попиту на даний період часу дорівнює

$$\bar{q} = \frac{q}{2}. \quad (2.6)$$

Однак практика оренди складських приміщень, а також розрахунки витрат на зберігання на складах фірм говорять про те, що, як правило, враховується не середній розмір партії, а площа (або об'єм) складу, яка потрібна для всієї партії:

$$C_{збер} = \alpha k q, \quad (2.7)$$

де α – витрати на зберігання одиниці продукції з урахуванням займаної площі (обсягу) складу за певний період, гр. од./ м² на добу (гр. од./ м³ на добу);

k – коефіцієнт, який враховує просторові габарити одиниці продукції, м²/ шт. (м³/ шт.).

При підстановці (2.7) у формулу (2.3) отримаємо

$$C_{\Sigma} = \frac{C_0 S}{q} + \alpha k q \rightarrow \min. \quad (2.8)$$

Визначимо оптимальний розмір замовлення з використанням стандартної процедури і після необхідних перетворень знаходимо

$$q_{opt} = \sqrt{\frac{C_0 S}{\alpha k}}. \quad (2.9)$$

Величина мінімальних витрат розраховується за формулою

$$C_{min} = 2\sqrt{C_0 S \alpha k}. \quad (2.10)$$

Не менш важливою умовою, яку необхідно враховувати при розрахунку EOQ, є знижки. Відомо, що при покупці партії товару більшість фірм надає знижки, величина яких залежить від розміру замовлення q . Для визначення EOQ у випадку надання знижок можна використовувати такий підхід:

1. Для кожного рівня ціни за формулою Уїлсона (2.4) розраховують розмір замовлення.
2. Одержані розміри замовлення перевіряють на оптимальність: якщо рівень замовлення попадає в інтервал надання знижки, то він є оптимальний для даного рівня ціни. В іншому випадку як оптимальний розмір замовлення беруть нижню границю інтервалу надання знижки.
3. Для кожного рівня ціни і відповідного йому рівня замовлення розраховують загальні витрати на замовлення, зберігання запасу та закупівлю за формулою:

$$C_{\Sigma} = C_{Замовл} + C_{Зберіг} + C_{Закуп} = \frac{C_0 S}{q} + C_u i \frac{q}{2} + C_u S \rightarrow \min.$$

Оптимальним розміром замовлення (EOQ) є той, при якому витрати на виконання замовлення, зберігання запасу на складі і закупівлю товару будуть мінімальними.

Приклад. Обсяг продажів магазину складає 200 одиниць товару на рік. Вартість подачі кожного замовлення складає 380 у.о., а витрати на збереження складають 20% від закупівельної ціни. Якщо величина замовлення менше 50 одиниць товару, то закупівельна ціна однієї одиниці товару складає 7000 у.о. У тому випадку, коли величина замовлення коливається від 50 до 99

одиниць, надається знижка на закупівельну ціну в 5%. Замовленням, величина яких складає 100 і більше одиниць товару, відповідає знижка в 7%. Визначити оптимальну величину замовлення.

Таблиця 2.3

Розмір замовлення, од.	Знижка, %	Ціна одиниці продукції, у.о.
1-49	0	7000
50-99	5	6650
100 і більше	7	6510

При виведенні формул (2.4) – (2.5) вважалося, що кожен вид продукції не залежить від інших і зберігається на складі самостійно. Однак для промислових підприємств, а також підприємств оптової та роздрібної торгівлі умови незалежності видів продукції один від одного можуть бути порушені. Основними причинами виникнення взаємозв'язку між видами продукції, що поставляється на склад, є наступні обмеження:

- максимальний розмір капіталу B , який передбачається вкласти в запаси;
- площа (об'єм) складу, де розміщуються одночасно N видів продукції;
- верхня межа загального числа замовлень за певний період та ін.

Розглянемо задачу, що враховує обмеження на максимальний розмір капіталу.

На першому етапі розв'язання задачі розраховуються оптимальні партії поставок $q_{opt i}$ по кожному i - му виду продукції за формулою (2.4).

На другому етапі порівнюються витрати, пов'язані з запасами продукції і капіталом B , виділеним на придбання продукції:

$$\sum_{i=1}^N C_{ui} q_{opt i} \leq B. \quad (2.11)$$

Якщо нерівність (2.11) виконується, то поставки здійснюються в обсягах, які розраховуються за формулою (2.4).

Відповідно витрати на виконання замовлення і зберігання при багатопродуктовій поставці визначаються за формулою:

$$C_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N \sqrt{2 C_{0i} S_i C_{ui} \beta}, \quad (2.12)$$

де β – частка від ціни C_{ui} , що припадає на витрати по зберіганню.

Третій етап, коли нерівність (2.11) не виконується. Для розрахунку оптимальних значень $q_{opt i}$ застосовується метод множників Лагранжа. Функція Лагранжа записується у вигляді:

$$C_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{C_{0i} S_i}{q_i} + C_{ui} \beta \frac{q_i}{2} \right) + z \left(B - \sum_{i=1}^N C_{ui} q_i \right) \rightarrow \min, \quad (2.13)$$

де z – невизначений множник Лагранжа, $z \leq 0$.

Оптимальні значення $q_{opt i}$ визначаються за формулою

$$q_{opt i} = \sqrt{\frac{2 C_{0i} S_i}{C_{ui} (\beta - 2 z^*)}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.14)$$

де z^* – таке значення множника z , при якому виконується рівність (2.11).

Для визначення множника Лагранжа z використовуються різні методи. Перший, найбільш поширений, базується на чисельному методі розв'язання. Другий дає рішення у вигляді:

$$z^* = \frac{\left[\beta - \left(\frac{V}{B} \right)^2 \right]}{2}, \quad (2.15)$$

$$\text{де } V = \sum_{i=1}^N \sqrt{2 C_{0i} S_i C_{ui}}.$$

Сумарні витрати, які включають витрати на придбання запасів B , витрати на виконання замовлення і зберігання запасів, будуть дорівнювати

$$C^*_{\Sigma} = B + \sum_{i=1}^N \sqrt{2 C_{0i} S_i C_{ui}} \left(\frac{\beta - z}{\sqrt{\beta - 2z}} \right). \quad (2.16)$$

На підставі значень $q_{opt i}$ (2.14) здійснюються розрахунки кількості поставок N_i і періодичності поставок T_i протягом аналізованого періоду D для кожного виду продукції:

$$N_i = \frac{S_i}{q_{opt i}}, \quad (2.17)$$

$$T_i = \frac{D}{N_i}. \quad (2.18)$$

Приклад. В кафе на закупівлю алкогольних напоїв, які користуються найбільшим попитом серед клієнтів, а саме вина «Легенда Інкерману, біле, напівсухе», горілки «Nemiroff Штоф» та коньяку «Шустов***», на місяць в середньому виділяється 2000 грн. У таблиці 2.4 представлені дані для розрахунку багатопродуктової поставки з урахуванням обмежень на максимальний розмір коштів. Витрати на зберігання продукції на складі прийняті на рівні 3% від закупівельної ціни.

Таблиця 2.4

Дані для розрахунку оптимальної партії напоїв
при обмеженому розмірі коштів

Вид напою	Річна потреба	Закупівельна ціна	Витрати на виконання замовлення
Вино «Легенда Інкерману»	120 пляшок	46 грн.	20 грн.
Горілка «Nemiroff Штоф»	692 пляшки	26 грн.	50 грн.
Коньяк «Шустов***»	272 пляшки	32 грн.	20 грн.

При наявності на складі постачальника широкої номенклатури продукції (товарів) постає питання про можливу організацію одночасної поставки споживачу n товарних груп. Аргументами на користь об'єднання різних товарних груп в одне замовлення є:

- вимога постачальника про вартість кожного замовлення не нижче деякої граничної величини;
- реалізація повного завантаження використовуваних транспортних засобів;
- обмеження кількості відправлень та їх періодичності кожному клієнту (синхронізація поставок);
- зниження витрат на організацію, комплектацію партій, що постачаються клієнту.

Розглянемо складову витрат, пов'язану з багатомономенклатурною поставкою від одного партнера. Очевидно, ці витрати можна представити у вигляді двох складових: постійної C_0 (яка визначається, головним чином, вартістю транспортування) і змінної C_i , що залежить від обсягу виконуваних на складі операцій при формуванні замовлення. Тоді для кожної i -ї номенклатури витрати, які пов'язані з організацією однієї поставки, визначатимуться за формулою

$$C_i^* = C_0 + C_i, \quad (2.19)$$

а для всієї номенклатури у вигляді однієї поставки:

$$C^*(n) = C_0 + \sum_{i=1}^n C_i = \sum_{i=0}^n C_i. \quad (2.20)$$

При одночасному постачанні n позицій номенклатури періодичність T відрізнятиметься від оптимальних періодичностей незалежних поставок T_i по кожній позиції.

Запишемо основне рівняння для сумарних витрат i -ої позиції у вигляді

$$C_{\sum i} = \frac{(C_0 + C_i)S_i}{q_i} + C_{xi} \frac{q_i}{2} \rightarrow \min. \quad (2.21)$$

Розмір i -ої позиції номенклатури можна визначити за формулою

$$q_i = T_i \frac{S_i}{D}. \quad (2.22)$$

При підстановці (2.22) в формулу (2.21) отримаємо

$$C_{\sum i} = D \frac{(C_0 + C_i)}{T_i} + \frac{C_{xi} T_i S_i}{2D} \rightarrow \min. \quad (2.23)$$

За умови одночасної поставки n позицій номенклатури $T_i = T$. Рівняння для сумарних витрат можна представити у вигляді

$$C_{\sum} = \frac{D}{T} \sum_{i=0}^n C_i + \frac{T}{2D} \sum_{i=1}^n S_i C_{xi} \rightarrow \min. \quad (2.24)$$

Оптимальне значення періодичності багатноменклатурної поставки T_{opt}^* визначається за формулою (2.25):

$$T_{opt}^* = D \sqrt{\frac{2 \sum_{i=0}^n C_i}{\sum_{i=1}^n S_i C_{xi}}}, \quad (2.25)$$

а кількість поставок – за формулою (2.26)

$$N^* = \frac{D}{T_{opt}^*}. \quad (2.26)$$

При підстановці T_{opt}^* (2.25) у формулу (2.24) після перетворень одержимо вираз для визначення величини мінімальних сумарних витрат:

$$C^*_{\sum n} = \sqrt{2 \sum_{i=0}^n C_i \sum_{i=1}^n S_i C_{xi}}. \quad (2.27)$$

При розрахунку багатноменклатурних поставок особливого значення набуває урахування обмежень, пов'язаних з обсягом (площею) і вантажопідйомністю транспортних засобів, об'ємом (площею) складських приміщень, наявністю коштів для придбання всієї партії і т.д.

У загальному вигляді урахування обмежень зазначених параметрів здійснюється з використанням формули

$$T_V = \frac{G_V}{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i}, \quad (2.28)$$

де G_V – граничні значення фізичного або економічного показника;

$\lambda_i = \frac{S_i}{D}$ – інтенсивність споживання (витрати) i -го продукту (од./добу);

a_i – фізичний або економічний показник i -го продукту.

Якщо період багатомономенклатурної поставки $T_{opt}^* \leq T_V$, то її параметри розраховуються за формулами (2.25) – (2.27).

Якщо $T_{opt}^* > T_V$, то як розрахунковий період приймається T_V і здійснюється коректування N^* , q_i^* і $C_{\Sigma}^*(T_V)$ за формулами:

$$N^* = \frac{D}{T_V}, \quad (2.29)$$

$$q_i^* = T_V \frac{S_i}{D}, \quad (2.30)$$

$$C_{\Sigma}^*(T_V) = \frac{D}{T_V} \sum_{i=0}^n C_i + \frac{T_V}{2D} \sum_{i=1}^n S_i C_{xi}. \quad (2.31)$$

За наявності декількох критеріїв вибір варіанта здійснюється за формулою:

$$T_V^* = \min(T_V, T_r, T_h, \dots), \quad (2.32)$$

де T_V, T_r, T_h – періоди часу, розраховані за формулою (2.28) з урахуванням різних критеріїв: обсяг, вага, витрати і т.п.

Приклад. Визначити, що є більш вигідним для компанії: здійснювати незалежні поставки двох видів продукції або об'єднати їх. Дані для розрахунку наведені в таблиці 2.5.

Таблиця 2.5

Вид продукції	Річна потреба, од. S_i	Витрати на виконання замовлення, грош. од.		Витрати на зберігання одиниці продукції, грош. од./рік C_{xi}
		C_0	C_i	
1	3200	50	14	15
2	2100	50	12	10