

АКАДЕМИЯ  
НАУК  
УКРАИНСКОЙ ССР

ИНСТИТУТ  
ПРОБЛЕМ  
ПРОЧНОСТИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКОВА ДУМКА»

*Г. С. Писаренко,  
А. А. Лебедев*

---

ДЕФОРМИРОВАНИЕ  
И ПРОЧНОСТЬ  
МАТЕРИАЛОВ  
ПРИ СЛОЖНОМ  
НАПРЯЖЕННОМ  
СОСТОЯНИИ

КИЕВ — 1976

606  
ПЗ4  
УДК 539.4

Р е ц е н з е н т ы:

чл.-кор. АН УССР *В. Т. Трощенко*  
д-р техн. наук *В. В. Хильчевский*

Редакция физико-математической литературы

П  $\frac{30106-300}{M221(04)-76}$  221—76

© Издательство «Наукова думка», 1976

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Исследования, направленные на снижение весовых показателей машин при одновременном повышении их надежности, в последнее время стали особенно актуальны. Практическое решение задачи осуществляется путем рационального применения новых прочных и сверхпрочных материалов и совершенствования методов расчета и оптимального конструирования элементов изделий с учетом особенностей поведения материала в реальных условиях.

Основные размеры детали обычно определяются расчетом на прочность. В зависимости от аспекта, в котором исследуется прочность, в это понятие вкладывается различный смысл.

Вопросы прочности могут рассматриваться в физическом аспекте, образуя отдельную область физики твердого тела. Современный уровень развития физики, благодаря широкому использованию аппарата математики, а также результатов сложных опытов, позволяет вплотную подойти к непосредственному изучению атомарного механизма деформирования и разрушения материала и на основе развиваемых представлений давать качественные оценки его механических свойств.

Проблема прочности в инженерных приложениях объединяет широкий круг научных и технических задач и сводится к учету факторов, лимитирующих несущую способность конструкции. Такими факторами могут быть: значительное формоизменение детали в результате пластических деформаций, разрушение материала от превышения допускаемого значения нагрузки, постепенное разрушение детали вследствие износа или вредного действия среды, а также в результате ползучести или усталости материала, потери устойчивости и т. п. Определение несущей способности элементов конструкций с учетом всех этих факторов обычно отождествляют с понятием расчета прочности. Учитывая, что прочность реальной детали часто полностью определяется предельным состоянием материала, мы в дальнейшем ограничим рамки понятия «расчет прочности» и под этим термином будем понимать лишь установление тех напря-



женных (или деформированных) состояний, при которых наступает течение или разрушение материала.

Как известно, подавляющее большинство реальных деталей машин подвержено действию сложного комплекса механических и тепловых воздействий, обуславливающих сложное (плоское или объемное) напряженное состояние материала. В связи с этим возникает необходимость в разработке критериев для сопоставления механических характеристик, которые получены при простейших нагружениях (растяжении, сжатии, резе — кручении) и являются основной информацией о материале при расчете, с его сопротивлением пластическим деформациям и разрушению в условиях действия любой сложной системы напряжений.

Известные результаты исследования микромеханизмов пластической деформации и разрушения пока недостаточны для выполнения инженерных расчетов. Поэтому закономерности деформирования и разрушения твердых тел изучаются, как правило, на основе усредненных характеристик механических свойств материала.

В механике твердых деформируемых тел решение задачи связывается с изучением законов упрочнения материала и соответствующих условий эквивалентности на упрощенных моделях. Исследования проводятся с позиций механики континуума, механики стохастически неоднородных тел, линейной и нелинейной механики разрушения. Многие прикладные аспекты проблемы решаются на основе испытаний специальных образцов в условиях, максимально приближающихся к эксплуатационным.

В настоящее время предложено много гипотез относительно критериев равнопрочности. Большинство этих критериев получено при использовании основных соотношений механики сплошной среды. Поэтому в первом разделе книги, посвященном систематизации, анализу и дальнейшему развитию критериев прочности материалов при сложном напряженном состоянии, кратко изложены некоторые вопросы теории напряжений и деформаций с акцентом на характеристики, которые впоследствии используются для описания предельных состояний материала.

Вопрос об установлении эквивалентных напряжений (о критериях прочности) имеет свою историю. Первые предложения в этой области были сделаны Галилеем и Лейбницем. Развитию теорий прочности посвящены работы Сен-Венана, Мариотта, Ляме, Клебша, Баушингера, Бельтрами, Мизеса, Генки и других выдающихся механиков. Работы этих исследователей обобщены в виде теорий прочности, которые впоследствии были названы классическими.

Развитие теорий происходило в основном по пути модификации гипотезы Мизеса — Генки с применением различных форм

учета влияния шарового тензора (П. П. Баландин, И. М. Беляев, И. Н. Миролюбов, М. М. Филоненко-Бородич, Ю. И. Ягн, Бужинский, Метсура, Стасси, Фрейденталь, Шлейхер и др.).

Статистическое обобщение теории Кулона — Мора проведено С. Д. Волковым на основе новой модели микроскопически-неоднородной среды. Гипотеза слабого звена является исходной предпосылкой статистической теории Фишера и Холломона. Интересные подходы при описании прочности стохастически неоднородных тел развиваются в работах В. В. Болотина. Попытка построения критерия хрупкой прочности при сложном напряженном состоянии с позиций линейной механики разрушения сделана В. В. Панасюком.

Среди предложенных критериев трудно выбрать наиболее обоснованные. Достоверность каждого из них ограничена как по кругу материалов, так и по диапазону соотношений главных напряжений. В научной и технической литературе отсутствуют какие-либо рекомендации по выбору критериев предельного состояния материалов при низких и высоких температурах. Мало данных о влиянии анизотропии материала, режима нагружения, градиентов напряжений, масштабного фактора.

В книге рассмотрены некоторые новые подходы, основанные, с одной стороны, на известных экспериментальных данных и современных представлениях о кинетике деформирования и разрушения материалов, и с другой — на феноменологическом анализе общих свойств и геометрии предельных поверхностей, интерпретирующих критерии прочности в пространстве напряжений. Такой подход позволил установить параметры напряженного состояния, от уровня которых зависит интенсивность протекания процессов в материале при его деформировании, а также форму предельной поверхности, которая отражает общие механические свойства материалов, и путем аналитического описания этой поверхности определить структуру критерия.

Статистические аспекты прочности существенно неоднородных тел в связи с наличием в них различного рода дефектов отражены в критерии функцией влияния, для которой получено выражение на основе описания стохастической модели тела с неоднородной структурой.

Второй раздел книги посвящен обзору и анализу экспериментальных работ по исследованию закономерностей деформирования и разрушения материалов в условиях сложного напряженного состояния при нормальной, низких и высоких температурах.

Интенсивное развитие феноменологических подходов при решении задач прочности в критериальном аспекте значительно опередило соответствующие работы по исследованию механических свойств материалов. В результате этого разрыва создано положение, при котором из-за отсутствия необходимых

данных о физико-механических свойствах материалов целый ряд выдвинутых практикой задач не имеет научно обоснованных решений.

Точность любого критерия оценивается путем сопоставления результатов расчета и данных опыта. Известные экспериментальные данные о закономерностях деформирования и разрушения материалов при сложном напряженном состоянии весьма ограничены, что объясняется большими методическими трудностями при постановке опыта. Эти трудности значительно возрастают при проведении испытаний в условиях высоких и низких температур. По низко- и высокотемпературной прочности материалов при сложном напряженном состоянии в литературе опубликованы лишь качественные результаты, практически полностью отсутствуют какие-либо данные о принципах конструирования соответствующих испытательных средств. Этим вопросам во втором разделе уделено особое внимание. Здесь, в частности, подробно описаны методики и экспериментальные установки, разработанные и созданные в Институте проблем прочности АН УССР под руководством и при непосредственном участии авторов, проведен анализ основных экспериментальных результатов по изучению законов упрочнения и критериев предельного состояния наиболее типичных представителей отдельных групп конструкционных материалов в различных условиях механического и теплового нагружения.

Впервые публикуемый обширный фактический материал представляет существенную дополнительную информацию для расчета и оптимального конструирования изделий, работающих при низких и высоких температурах; он позволяет внести экспериментально обоснованные коррективы (в связи с влиянием температуры) в математические модели деформирования и разрушения твердых тел, уточнить оптимальные режимы отдельных технологических операций, связанных с обработкой давлением и механо-термическим упрочнением материалов.

*Раздел первый*

---

МЕХАНИКА ТВЕРДЫХ  
ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ  
И ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ  
ПРИ СЛОЖНОМ  
НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ



## Глава I

### ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

#### § 1. Гипотезы и принципы механики твердых деформируемых тел

В механике деформируемых тел среда рассматривается как сплошная с непрерывным распределением вещества. Поэтому напряжения, деформации и перемещения считаются непрерывными и дифференцируемыми функциями координат точек тела. Предполагается, что любые сколь угодно малые частицы твердого тела обладают одинаковыми свойствами. Такое толкование строения и свойств тел, строго говоря, противоречит действительности, так как все существующие в природе тела в микроскопическом смысле являются неоднородными. Под дефектами структуры («неоднородностью») следует понимать поликристаллическое строение материала, местные нарушения постоянства химического состава, наличие «инородных» примесей, микротрещины и другие дефекты, приводящие к локальным возмущениям поля напряжений. Однако в силу статистических законов относительные перемещения точек реального тела можно считать практически совпадающими с перемещениями соответствующих точек однородной модели. Чем меньше относительные размеры дефектов, тем больше оснований считать приемлемыми методы механики сплошной среды, оперирующей усредненными характеристиками механических свойств материала.

Вопрос о возможной величине погрешности, возникающей в результате замены реальной среды идеальной при решении задач механики методами теории упругости, был поставлен и решен Ф. С. Ясинским в 1897 г. [514]. Ф. С. Ясинский показал, что величина возможной ошибки зависит от размеров тела и степени неоднородности свойств микрообъемов материала. Согласно его концепции, реальную среду можно считать идеальной (в смысле применимости уравнений теории упругости), если сохраняется неравенство  $\frac{L}{\tau} \geq a^2$ , где  $L$  — некоторая выбранная для сравнения конечная длина одного порядка с размерами рассматриваемого тела;  $\tau$  — длина одного порядка с размерами элемента, сохраняющего характерные для тела физические свойства;  $a$  — достаточно большое число, выбранное с таким расчетом, чтобы при

принятой степени точности величиной  $1/a$  можно было пренебречь по сравнению с единицей.

О порядке величины  $\tau$  можно судить по результатам более поздних опытов. Было, например, показано, что проволока из специальной стали с ясно выраженной зернистой структурой имеет по длине достаточно одинаковые механические свойства при наличии в поперечном сечении более 30 зерен. Есть и другие попытки оценить погрешность результатов, подтверждающие практическую пригодность гипотез сплошности и однородности [464].

В соответствии с гипотезой изотропности рассматриваемые тела обладают одинаковыми свойствами в любом направлении. В действительности изотропны только аморфные тела. Многие материалы кристаллического строения, хотя их можно считать в макроскопическом смысле изотропными, имеют ясно выраженную текстуру. Так, механические свойства листовой стали, ковального металла далеко не одинаковы в разных направлениях. Для таких материалов разработаны особые методы исследования.

Одной из важных предпосылок многих разделов механики деформируемых тел является принцип независимости действия сил, согласно которому внутренние усилия и деформации в упругом теле не зависят от порядка приложения внешних сил, а сумма эффектов от сил, взятых в отдельности, эквивалентна действию всей системы сил. При этом предполагается, что начальные (остаточные) напряжения в теле отсутствуют.

Постулируя применимость законов статики в каждой точке тела и к телу в целом, считают, что деформации от внешних нагрузок малы по сравнению с размерами тела, поэтому высшими степенями перемещений часто пренебрегают. Нельзя забывать при этом, что статически эквивалентные системы внешних сил, действующих на деформируемое тело, дают разный эффект. Если, например, перенести силу вдоль линии ее действия или разложить на составляющие, то напряженное и деформированное состояния тела могут измениться.

Наличие внешних сил не является обязательным условием роста внутренних усилий в теле. Уравновешенные в отдельных объемах системы напряжений могут возникать в реальных телах, например при изменении температуры, благодаря стесненному расширению — сжатию элементов тел (деталей) сложной геометрии или наличию в них фаз с различными теплофизическими константами, при фазовых превращениях и др. [109].

В дальнейшем будем пользоваться другими идеализированными понятиями. Допущения и гипотезы применительно к рассмотрению отдельных разделов механики твердого тела изложены в соответствующих главах.

## § 2. Напряженное состояние в точке. Тензор напряжений

В соответствии с гипотезой об однородности материала, заключенного в объеме рассматриваемого тела, внутренние связи, возникающие в материале при деформировании тела, можно формально характеризовать величиной усилия, приходящегося на единицу площади. Интенсивность внутренних сил в данной точке обычно называют напряжением  $\sigma$ , которое можно определить как предел отношения  $\frac{\Delta P}{\Delta F}$  при стягивании площадки  $\Delta F$  в точку (рис. 1).

Говоря о напряжении в точке, необходимо указать его направление, которое в общем случае не совпадает с направлением внешней нормали к площадке, проходящей через данную точку. За направление напряжения принимается направление равнодействующей  $\Delta P$ .

Если окрестность точки  $O$  ограничить шестью взаимно перпендикулярными плоскостями и полученный элементарный параллелепипед сориентировать так, чтобы направления его ребер совпадали с направлениями осей координат, то на каждой из граней параллелепипеда будут действовать соответствующие напряжения. Полные напряжения в плоскостях  $xy$ ,  $xz$  и  $yz$  можно разложить по направлениям, параллельным осям координат (рис. 2). Полученные девять компонентов напряжений полностью определяют напряженное состояние и образуют тензор напряжений, который можно представить в виде

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (I.1)$$

Индекс в значениях нормальных напряжений указывает на ось, параллельно которой направлено напряжение. Первый индекс при касательных напряжениях обозначает направление нормали к площадке, в плоскости которой действует рассматриваемое напряжение, а второй — направление, которому параллельно это напряжение.

Таким образом, в каждой из строк матрицы (I.1) помещаются проекции на координатные оси соответствующего вектора напряжения, а в каждом столбце — проекции трех векторов напряжения на соответствующие оси.

Нормальное напряжение считается положительным, если оно

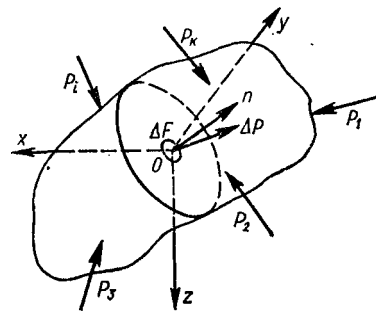


Рис. 1. Метод сечений в механике деформируемых тел.



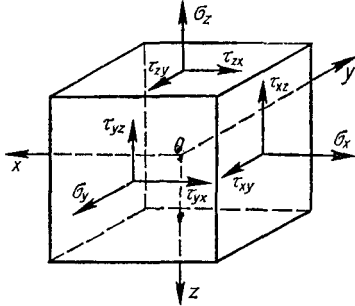


Рис. 2. Напряжения на гранях элементарного параллелепипеда.

действует в направлении внешней нормали. Знак касательного напряжения зависит от выбора координатных осей. За положительное направление касательного напряжения принимается направление соответствующей оси координат, если положительное направление нормального напряжения на той же площадке совпадает с направлением оси, параллельно которой оно действует. На рис. 2 касательные напряжения направлены в сторону, противоположную направлению соответствующих осей. Однако они положительные, так как направления нормальных напряжений и координатных осей не совпадают.

Можно показать, что касательные напряжения, имеющие индексы, состоящие из одних и тех же букв, равны между собой:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Отсюда следует закон взаимности (или парности) касательных напряжений, впервые сформулированный и доказанный Коши: в каждой точке деформированного тела составляющие касательного напряжения, действующие в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и перпендикулярные к линии пересечения этих плоскостей, численно равны между собой, т. е. компоненты тензора напряжений, расположенные симметрично относительно главной диагонали тензора (диагонали, проходящей через  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ), равны.

Следовательно, для полного определения напряженного состояния в рассматриваемой точке необходимо знать не девять, а шесть величин:

$$\sigma_x, \quad \sigma_y, \quad \sigma_z, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

При изменении наклона граней параллелепипеда по отношению к осям координат будет изменяться величина как нормальных, так и касательных напряжений. В каждой точке тела существуют три такие взаимно перпендикулярные площадки, касательные напряжения на которых равны нулю. Эти площадки называются главными. Действующие по этим площадкам нормальные напряжения называются главными нормальными напряжениями, а их направления — главными направлениями (или главными осями) в рассматриваемой точке. Главные напряжения обозначаются  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ . Их нумерация обычно выбирается так, чтобы сохранилось неравенство  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Заметим, что говорить о главных направлениях имеет смысл лишь в том случае, если главные напряжения не равны между

собой. При гидростатическом растяжении или гидростатическом сжатии, когда  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , любая система ортогональных осей может быть принята за главные оси. Если два главных напряжения равны, то задача становится осесимметричной.

Можно показать, что имеется три пары площадок, на которых касательные напряжения достигают экстремума. Эти напряжения называются главными касательными напряжениями и записываются в виде

$$\tau' = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau'' = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau''' = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (I.2)$$

Нормальные напряжения, действующие на указанных площадках, будут соответственно

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}; \quad \sigma'' = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}; \quad \sigma''' = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \quad (I.2a)$$

Представляет интерес характер изменения напряжений, действующих на произвольно ориентированной площадке при ее повороте относительно главных осей. Рассмотрим напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  на наклонной площадке  $dF$  элементарного тетраэдра, направление нормалей к боковым граням которого совпадает с направлением главных осей (рис. 3). Пусть площадка сориентирована таким образом, что углы между нормалью  $On$  и координатными осями равны соответственно  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ .

Условие равновесия тетраэдра:

$$\sum X = -\sigma_1 dF \cos \alpha + \sigma_x dF = 0;$$

$$\sum Y = -\sigma_2 dF \cos \beta + \sigma_y dF = 0;$$

$$\sum Z = -\sigma_3 dF \cos \gamma + \sigma_z dF = 0,$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{\sigma_x}{\sigma_1}; \quad \cos \beta = \frac{\sigma_y}{\sigma_2}; \quad \cos \gamma = \frac{\sigma_z}{\sigma_3}.$$

Возводя в квадрат и складывая, получаем

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_2^2} + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_3^2} = 1.$$

Полученное уравнение — уравнение эллипсоида напряжений (эллипсоид Ляме). На поверхности этого эллипсоида лежат концы векторов полных напряжений  $P_n$  для всевозможных площадок,

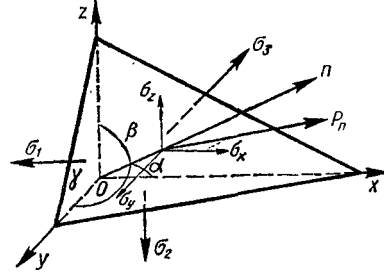


Рис. 3. Напряжения на произвольно ориентированной площадке.

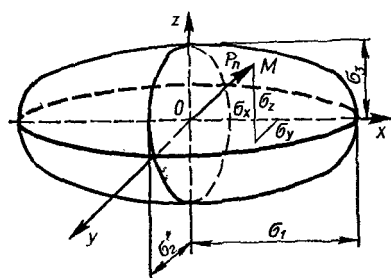


Рис. 4. Эллипсоид напряжений.

проходящих через точку  $O$ , а его полуосями являются главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  (рис. 4).

Если одно из напряжений, например  $\sigma_y$ , равно нулю (плоская задача), то эллипсоид напряжений обращается в эллипс напряжений, уравнение которого

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_3^2} = 1.$$

Для случая линейного напряженного состояния, когда два нормальных напряжения равны нулю,  $\sigma_x = \pm \sigma_1$ .

Между компонентами тензора напряжений, а следовательно, и между главными напряжениями существуют определенные зависимости. Рассмотрим эти зависимости.

**Л и н е й н о е (о д н о о с н о е) н а п р я ж е н н о е с о с т о я н и е.** В этом случае только одно из главных напряжений не равно нулю. Линейное напряженное состояние можно получить при растяжении ( $\sigma_1 \neq 0$ ), сжатии ( $\sigma_3 \neq 0$ ) или изгибе (частный случай растяжения — сжатия) стержня.

Нормальные и касательные напряжения, действующие по любой площадке, нормаль к которой образует с направлением главного напряжения  $\sigma$  угол  $\alpha$ , определяются по формулам

$$\sigma_\alpha = P_\alpha \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \sigma (1 + \cos 2\alpha);$$

$$\tau_\alpha = P_\alpha \sin \alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha.$$

При этом

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}} = \sigma, \quad \tau_\alpha = -\tau_{\alpha + \frac{\pi}{2}},$$

т. е. сумма нормальных напряжений по любым двум взаимно перпендикулярным площадкам — величина постоянная, а касательные напряжения, действующие на этих площадках, равны по ве-

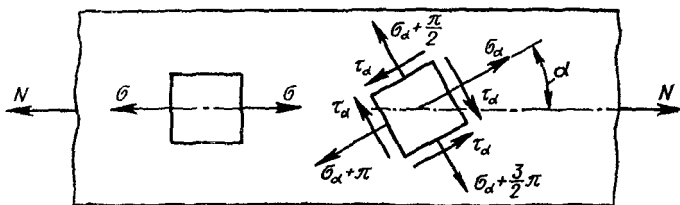


Рис. 5. Напряжения на гранях плоского элемента при одноосном растяжении.

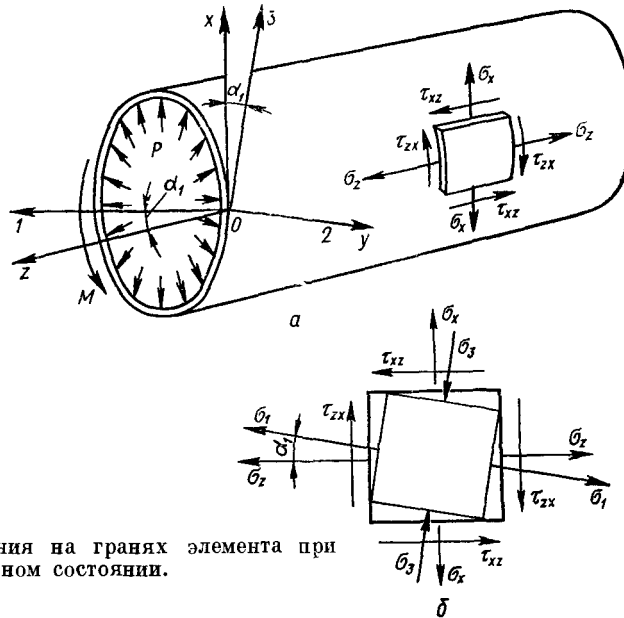


Рис. 6. Напряжения на гранях элемента при плоском напряженном состоянии.

личине и направлены или к линии пересечения, или от линии пересечения этих площадок.

Значения главных касательных напряжений в элементе с линейным напряженным состоянием (при  $\alpha = \pm 45^\circ$ )

$$\tau_{\max} = +\frac{\sigma}{2}, \quad \tau_{\min} = -\frac{\sigma}{2}.$$

По площадкам, параллельным  $\sigma$ , нормальные и касательные напряжения равны нулю (рис. 5).

Плоское (двухосное) напряженное состояние. При плоском напряженном состоянии одна из площадок свободна от напряжений, а по двум другим в общем случае действуют нормальные и касательные напряжения.

На рис. 6, а показана тонкостенная труба, нагруженная внутренним давлением и скручивающим моментом. На гранях элементарного объема стенки трубы действуют нормальные и касательные напряжения, которые при заданных величинах  $P$  и  $M$  определяются по следующим формулам:

$$\sigma_x = \frac{Pd}{2\delta}; \quad \sigma_z = \frac{Pd}{4\delta}; \quad \tau_{xz} = \frac{2M}{\pi d^2 \delta},$$

где  $d$  — диаметр трубы;  $\delta$  — толщина стенки.

Если отношение  $\frac{\delta}{d}$  достаточно мало, то напряженное состояние в стенке можно считать плоским ( $\sigma_x = 0$ ) и однородным (напряжения во всех объемах трубы одинаковы).

Связь между нормальными и касательными напряжениями по площадкам с нормальными  $x$  и  $z$  и напряжениями по любым площадкам, нормали к которым составляют с осью  $z$  угол  $\alpha$ , выражается следующими формулами:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xz} \sin 2\alpha; \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xz} \cos 2\alpha.\end{aligned}\quad (I.3)$$

Из рис. 6, б, на котором показано напряженное состояние элементарного параллелепипеда, следует, что главные оси 1 и 3 расположены в плоскости  $xz$ , а ось 2 совпадает с осью  $y$ .

Направление главных осей можно найти из условия, что на главных площадках касательные напряжения  $\tau_\alpha$  и  $\tau_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$  равны нулю, а следовательно,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} . \quad (I.4)$$

Углы, определяемые по формуле (I.4), отличаются друг от друга на  $\frac{\pi}{2}$ . Одно значение угла соответствует площадке, на которой действует максимальное напряжение, а другое — площадке, на которой действует минимальное напряжение. Подставляя значение угла  $\alpha$  в выражение для  $\sigma_\alpha$ , после тригонометрических преобразований получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} = \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}; \\ \sigma_{\min} = \sigma_3 &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}.\end{aligned}\quad (I.5)$$

Из выражения для  $\tau_\alpha$  в (I.3) следует, что максимальные касательные напряжения действуют под углом  $45^\circ$  к направлению главных напряжений. При этом

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} . \quad (I.6)$$

Из формул (I.3) и (I.5) следует, что

$$\sigma_x + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}} .$$

Следовательно, в общем случае плоского напряженного состояния сумма нормальных напряжений по любым двум взаимно перпендикулярным площадкам равна сумме главных напряжений. Если известны только главные напряжения (пластинка, растягиваемая в двух направлениях), используя зависимости (I.3) и (I.5), можно найти напряжения по любым взаимно перпендику-

лярным площадкам, а из выражения (I.6) — величину максимальных касательных напряжений.

Объемное (трехосное) напряженное состояние. В общем случае пространственного напряженного состояния тела по всем трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через точку, напряжение в которой исследуется, действуют как нормальные, так и касательные напряжения. Связь между главными напряжениями и напряжениями по любой наклонной площадке, проходящей через эту точку, описывается следующим кубическим уравнением:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0, \quad (\text{I.7})$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.8})$$

Корнями этого уравнения являются главные нормальные напряжения. Поскольку главные напряжения не изменяются при повороте координатных осей, т. е. не зависят от метода их нахождения, коэффициенты уравнения (I.7)  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  также не зависят от выбора координатной системы, иначе говоря, они являются инвариантами тензора напряжений по отношению к повороту координатных осей.

Из анализа структуры выражений (I.8) следует, что первый (или линейный) инвариант представляет собой сумму компонентов тензора напряжений, расположенных на главной диагонали. Второй (или квадратичный) инвариант можно получить, разложив по главной диагонали квадратную матрицу тензора напряжений, и представить в виде суммы миноров

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Третий (или кубический) инвариант можно рассматривать как развернутый в строку определитель, составленный из компонентов тензора напряжений,

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Если за оси координат принять главные оси, то тензор напряжений примет вид

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix},$$

а инварианты тензора напряжений запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (I.9)$$

Из первых соотношений выражений (I.8) и (I.9) следует, что  $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ , т. е. сумма трех нормальных напряжений для любых трех взаимно перпендикулярных площадок, проходящих через данную точку, есть величина постоянная.

Кроме выражений (I.8), имеются и другие комбинации из компонентов тензора напряжений, которые инвариантны повороту координатных осей. Однако все они могут быть представлены как функции трех приведенных выше инвариантов. Строго говоря, любая функция от трех главных напряжений инвариантна по отношению к координатной системе, поэтому может быть названа инвариантом напряженного состояния.

Для наглядности описания закономерностей деформирования при сложном напряженном состоянии введем понятие «среднее напряжение», которое равно среднему арифметическому от нормальных напряжений,

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (I.10)$$

Среднее напряжение характеризует собой равноосное растяжение — сжатие и, следовательно, ответственно только за изменение объема в окрестности точки. Если от компонентов тензора напряжений отделим те, которые связаны только с объемной деформацией, то получим компоненты напряжений  $\sigma_x - \sigma_0$ ,  $\sigma_y - \sigma_0$ ,  $\sigma_z - \sigma_0$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ , имеющие отношение только к изменению формы.

Таким образом, общий случай напряженного состояния в точке, представленный на рис. 2, можно рассматривать как напряженное состояние с компонентами напряжений, связанными только с изменением формы (рис. 7, а), на которое «наложено» гидростатическое растяжение — сжатие (рис. 7, б).

Приведенные соображения о возможности разложения напряженного состояния позволяют представить тензор напряжений в виде двух составляющих:  $T_\sigma = T_\sigma^0 + D_\sigma$ , где  $T_\sigma^0$  — шаровой тензор напряжений, составленный из компонентов, связанных

с изменением объема (рис. 7, б),

$$T_{\sigma}^0 = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix}; \quad (I.11)$$

$D_{\sigma}$  — девиатор напряжений, составленный из компонентов, связанных с изменением формы (рис. 7, а),

$$D_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{vmatrix}. \quad (I.12)$$

Поскольку первый инвариант шарового тензора совпадает с первым инвариантом тензора напряжений,

$$I_1^0 = \sigma_0 + \sigma_0 + \sigma_0 = 3\sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = I_1, \quad (I.11a)$$

то первый инвариант девиатора напряжений равен нулю:

$$I_1' = (\sigma_x - \sigma_0) + (\sigma_y - \sigma_0) + (\sigma_z - \sigma_0) = 0. \quad (I.12a)$$

Из этого следует, что при напряженном состоянии, описываемом девиатором, среднее напряжение равно нулю, т. е. объем не изменяется.

Второй инвариант девиатора напряжений

$$I_2' = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \quad (I.13)$$

Соотношениями вида (I.13) часто пользуются при решении многих задач теории пластичности.

Некоторые соображения о физическом смысле инвариантов напряжения можно найти в работе [321], где также показано,

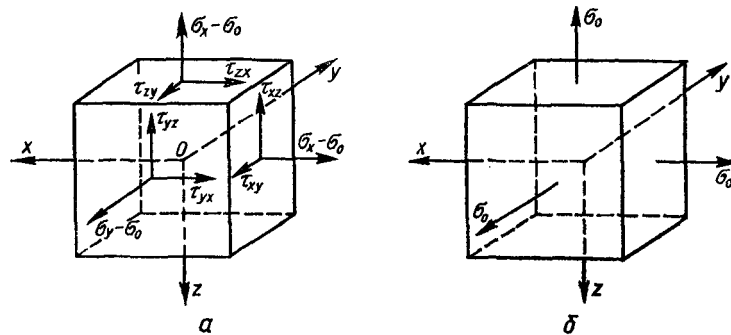


Рис. 7. Разложение тензора напряжений на девиаторную и шаровую части.



что второй инвариант девиатора напряжений при некоторой определенной величине постоянного множителя  $\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)$  равен среднему значению касательного напряжения в рассматриваемой точке.

### § 3. Деформированное состояние в окрестности точки. Тензор деформаций

Изменение формы и размеров тела — его деформация — складывается из деформаций элементарных объемов, составляющих это тело. Деформация элементарного параллелепипеда определяется изменением длины ребер (рис. 8, а) и сдвигами параллельных плоскостей (рис. 8, б)<sup>1</sup>.

Относительные деформации ребер в направлении осей и относительные сдвиги в соответствующих плоскостях обозначаются следующим образом:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l_x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta l_y}{l_y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta l_z}{l_z};$$

$$\gamma_{xy} \approx \operatorname{tg} \gamma_{xy}; \quad \gamma_{yz} \approx \operatorname{tg} \gamma_{yz}; \quad \gamma_{zx} = \operatorname{tg} \gamma_{zx}.$$

Если предположить, что длины ребер параллелепипеда стремятся к нулю, то составляющие деформации будут определять полную деформацию в окрестности рассматриваемой точки и образуют тензор деформаций, который обычно записывается в виде следующей симметричной матрицы:

$$T_e = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (\text{I.14})$$

В выражении (I.14) компонентами тензора деформаций являются не полные сдвиги (угловые деформации), а их половины. При этом теория деформированного состояния оказывается подобной теории напряженного состояния.

Главные относительные удлинения (деформации)  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$  находятся как корни кубического уравнения относительно  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon^3 - \theta_1 \varepsilon^2 + \theta_2 \varepsilon - \theta_3 = 0. \quad (\text{I.15})$$

<sup>1</sup> На рис. 8, б показано относительное смещение только **граней**, параллельных плоскости  $xOy$  системы координат.

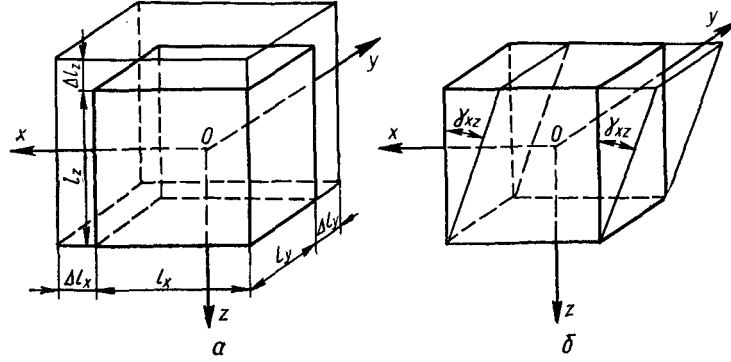


Рис. 8. Деформации элементарного параллелепипеда.

Величины  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  и  $\theta_3$  называются соответственно первым, вторым и третьим инвариантами тензора деформаций и выражаются через относительные деформации следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \\ \theta_2 &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2); \\ \theta_3 &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} (\gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \varepsilon_z \gamma_{xy}^2). \end{aligned} \right\} \quad (I.16)$$

Направления главных удлинений называются главными направлениями, или главными осями деформаций.

Если деформированное тело изотропно, то направления главных деформаций совпадают с соответствующими направлениями главных напряжений. Как будет показано ниже, при определенных условиях деформирования это правило может нарушаться.

При совпадении осей координат по направлению с главными осями деформаций тензор деформаций имеет вид

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}, \quad (I.14a)$$

а выражения для инвариантов тензора деформаций запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ \theta_2 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1; \\ \theta_3 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned} \right\} \quad (I.17)$$

Первый инвариант тензора деформаций пропорционален среднему удлинению и характеризует объемное расширение материала

(относительное изменение объема):

$$\frac{\Delta V}{V} = \theta = 3\varepsilon_0, \quad (I.18)$$

где  $\varepsilon_0$  — среднее относительное удлинение.

Если  $\rho_0$  и  $\rho$  — соответственно плотность тела до деформирования и после деформирования, то из условия постоянства массы получим

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \theta} \approx \rho_0 (1 - \theta). \quad (I.19)$$

По относительным удлинениям в главных направлениях определяются главные сдвиги:

$$\gamma_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2; \quad \gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3; \quad \gamma_{13} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3. \quad (I.20)$$

Для наибольшего сдвига по аналогии с выражением (I.6)

$$\gamma_{\max} = \gamma_{13} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3.$$

Сравнивая первые соотношения выражений (I.16) и (I.17), находим

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (I.21)$$

Если материал несжимаем, то, как следует из выражения (I.18),

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.$$

Тензор деформаций так же, как и тензор напряжений, разлагается на шаровой тензор деформаций

$$T_\varepsilon^0 = \begin{vmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{vmatrix} \quad (I.22)$$

и девиатор деформаций

$$D_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{vmatrix}. \quad (I.23)$$

Девиатором деформаций оценивается степень отклонения данного деформированного состояния, которое описывается тензором деформаций, от гидростатического растяжения — сжатия при главных деформациях, равных среднему арифметическому от линейных деформаций исследуемого деформированного состояния.

Таким образом, если тело находится в однородном деформированном состоянии, описываемом шаровым тензором деформаций,

форма тела не изменяется. Если деформированное состояние описывается девиатором деформаций, то не изменяется объем.

Выражения для инвариантов шарового тензора деформаций и девиатора деформаций можно написать по аналогии с выражениями (I.11a), (I.12a) и (I.13).

Процесс деформирования протекает во времени. Поскольку каждая текущая стадия деформированного состояния тела является результатом перехода из весьма близкой к ней предшествующей стадии, целесообразно ввести понятие «скорость деформации». Линейная скорость деформации представляет собой относительное линейное удлинение, отнесенное ко времени, в течение которого оно произошло,

$$\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt} \quad (\text{сек}^{-1}).$$

Компоненты линейной скорости деформации  $\dot{\epsilon}_x$ ,  $\dot{\epsilon}_y$ ,  $\dot{\epsilon}_z$  в направлении координатных осей могут быть различны как по величине, так и по знаку.

Скоростями сдвига  $\dot{\gamma}_{xy}$ ,  $\dot{\gamma}_{yz}$ ,  $\dot{\gamma}_{zx}$  называют скорости изменения углов между двумя прямолинейными ребрами, параллельными координатным осям. Главными осями скорости деформации называют три взаимно перпендикулярных направления, для которых  $\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zx} = 0$ . По двум из главных направлений скорости деформаций имеют экстремальные значения. Если  $\dot{\epsilon}_1$ ,  $\dot{\epsilon}_2$ ,  $\dot{\epsilon}_3$  — скорости деформаций в направлении главных осей, то по аналогии с выражением (I.21) запишем

$$\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3. \quad (\text{I.24})$$

Для несжимаемого материала

$$\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 = 0.$$

Данное здесь понятие о деформациях имеет смысл лишь в случае, когда величины  $\epsilon$  и  $\gamma$  настолько малы, что их квадратами и произведениями можно пренебречь, если деформация тела однородна и все линии, прямые и параллельные до деформации, остаются таковыми и после деформации, хотя их направление может изменяться. Если не делать указанных ограничений, то выражения для компонентов деформации значительно усложнились бы. При решении ряда так называемых нелинейных задач (когда перемещения отдельных точек сравнимы с размерами тела) соотношения линейной теории упругости становятся непригодными.

При исследовании свойств пластичных материалов часто пользуются натуральными, или логарифмическими, деформациями. Натуральная деформация  $e$  определяется как приращение, отнесенное к переменной во время деформирования длине. Полное

относительное удлинение выражается интегралом

$$e = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon) = 2,3 \lg(1 + \varepsilon). \quad (\text{I.25})$$

Если  $F_0$ ,  $F$  и  $l_0$ ,  $l$  — площади сечения и длины рабочей части образца соответственно в исходном состоянии и в процессе деформирования, то из условия постоянства объема  $F_0 l_0 = Fl$  можно получить следующее соотношение между истинными и условными напряжениями при линейном напряженном состоянии:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{P}{F_0} \cdot \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = \sigma_0(1 + \varepsilon).$$

Использование натуральной деформации  $e$  вместо условной  $\varepsilon$  позволяет определить истинные скорости деформаций:

$$\dot{e} = \frac{de}{dt} = \frac{1}{1 + \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\dot{\varepsilon}}{1 + \varepsilon}. \quad (\text{I.26})$$

Для истинных сдвигов по аналогии с выражением (I.20)

$$q_{12} = e_1 - e_2; \quad q_{23} = e_2 - e_3; \quad q_{13} = e_1 - e_3.$$

Соотношения между различными характеристиками деформированного состояния приведены в табл. 1, где для упрощения принято  $k = \frac{e_2}{e_1}$ ;  $m = 2 \sqrt{\frac{2}{3}(1 + k + k^2)}$  [334]. Приведенные соотношения справедливы при больших деформациях, когда изменением объема можно пренебречь.

Натуральные (истинные) деформации более полно отражают энергетическую сторону процесса деформирования, чем условные; в отдельных случаях использование условных деформаций вообще неприемлемо [94, 336], так как приводит к значительным погрешностям в расчетах.

Т а б л и ц а 1

	$\varepsilon_1$	$\gamma$	$e_1$	$q$
$\varepsilon_1$		$\varepsilon_1 = (\gamma + \sqrt{1 + \gamma^2})^{\frac{1}{1-k}} - 1$	$\varepsilon_1 = e^{e_1} - 1$	$\varepsilon_1 = e^{\frac{q}{1-k}} - 1$
$\gamma$	$\gamma = \text{sh}(1 - k) \times \ln(1 + \varepsilon_1)$		$\gamma = \text{sh}(1 - k) e_1$	$\gamma = \text{sh} q$
$e_1$	$e_1 = \ln(1 + \varepsilon_1)$	$e_1 = \frac{1}{1-k} \ln(\gamma + \sqrt{1 + \gamma^2})$		$e_1 = \frac{1}{1-k} q$
$q$	$q = (1 - k) \times \ln(1 + \varepsilon_1)$	$q = \ln(\gamma + \sqrt{1 + \gamma^2})$	$q = (1 - k) e_1$	

## § 4. Октаэдрические напряжения и деформации

Наряду с главными площадками представляют интерес плоскости, равно наклоненные к главным осям. Существуют четыре пары таких плоскостей. Если все восемь плоскостей провести на одинаковом расстоянии от исследуемой точки, то они образуют в пространстве октаэдр, вершины которого лежат на главных осях (рис. 9). Нормальные напряжения, действующие по октаэдрическим площадкам, равны среднему арифметическому от трех главных нормальных напряжений,

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad (\text{I.27})$$

а касательные напряжения в тех же плоскостях — среднему квадратичному от трех главных касательных напряжений:

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2}. \quad (\text{I.28})$$

Формулу (I.28) можно также представить в виде

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (\text{I.28a})$$

или

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 3(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}. \quad (\text{I.28б})$$

Из выражений (I.27) и (I.28б) видно, что октаэдрическое нормальное напряжение<sup>1</sup> пропорционально первому инварианту тензора напряжений, а касательное октаэдрическое напряжение зависит как от первого, так и от второго инварианта. Сравнив выражения (I.27) и (I.28б) с (I.8), найдем

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3} I_1; \quad \tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{I_1^2 - 3I_2}.$$

Напряжения на октаэдрических площадках можно выразить также через шесть компонентов тензора напряжений. В этом случае выражения для  $\sigma_{\text{окт}}$  и  $\tau_{\text{окт}}$  будут иметь вид

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}; \quad (\text{I.29})$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}.$$

<sup>1</sup> Понятие «октаэдрическое напряжение» впервые было введено Рошем и Эйхингером [622], которые установили, что при наступлении текучести некоторых кристаллов скольжение происходит по грани октаэдра (плоскость {111}), построенного на главных осях.

В теории пластичности оказалось удобным вводить в расчеты некоторую фиктивную величину  $\sigma_i$ , называемую интенсивностью напряжений и связанную с  $\tau_{\text{окт}}$  зависимостью

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{окт}}. \quad (1.30)$$

Фиктивность величины  $\sigma_i$  заключается в том, что она не может быть определена как напряжение, действующее на какой-либо площадке. Однако интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{I_1^2 - 3I_2} \quad (1.31)$$

по сравнению с другими комплексными характеристиками напряженного состояния имеет ряд преимуществ. Например, при простом растяжении ( $\sigma_1 = \sigma$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) или сжатии ( $\sigma_3 = -\sigma$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ )  $\sigma_i$  равно растягивающему или сжимающему напряжению ( $\sigma_i = \sigma$ ).

При произвольном направлении осей выражение для интенсивности нормальных напряжений имеет вид

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\underbrace{(\sigma_x - \sigma_y)^2}_{+} + \underbrace{(\sigma_y - \sigma_z)^2}_{+} + \underbrace{(\sigma_z - \sigma_x)^2}_{+} + 6 \underbrace{(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}_{+}}. \quad (1.31a)$$

Октаэдрические нормальные напряжения, равные на всех восьми гранях октаэдра, приводят к изменению его объема. Линейная октаэдрическая деформация в направлении нормали к грани октаэдра приводит к изменению первоначального прямого угла между нормалью к грани и гранью. Октаэдрическая деформация сдвига

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{окт}} &= \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2} + \frac{2}{3} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2). \end{aligned} \quad (1.32)$$

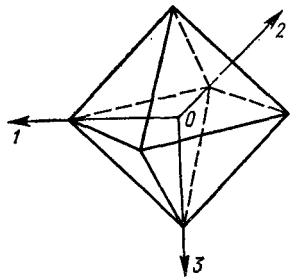


Рис. 9. Октаэдр с гранями, равнонаклоненными к главным осям.

или (при совпадении осей октаэдра с главными)

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{окт}} &= \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2}. \end{aligned} \quad (1.32a)$$

Если, как и в § 3 настоящей главы, ввести обозначения  $k = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$  и  $m = 2 \times$

$\times \sqrt{\frac{2}{3} (1 + k + k^2)}$ , то можно установить [334] соотношения между истинным окта-

эдрическим сдвигом

$$q_{\text{окт}} = 2 \sqrt{\frac{2}{3} (e_1^2 + e_1 e_2 + e_2^2)} \quad (1.33)$$

и другими характеристиками деформированного состояния:

$$\left. \begin{aligned} q_{\text{окт}} &= m \ln(1 + e_1); \\ q_{\text{окт}} &= \frac{m}{1-k} \ln(\gamma + \sqrt{1 + \gamma^2}); \\ q_{\text{окт}} &= m e_1; \quad q_{\text{окт}} = \frac{m}{1-k} q \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

или

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= e \frac{q_{\text{окт}}}{m} - 1; \\ \gamma &= \text{sh} \frac{1-k}{m} q_{\text{окт}}; \\ e_1 &= \frac{1}{m} q_{\text{окт}}; \\ q &= \frac{1-k}{m} q_{\text{окт}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.34a)$$

Приведенные соотношения справедливы при условии постоянства объема.

В теории пластичности обычно пользуются величиной, пропорциональной октаэдрическому сдвигу,

$$\underline{\varepsilon}_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}, \quad (1.35)$$

которую называют интенсивностью деформаций. При произвольном направлении осей

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (1.35a)$$

Если оперировать истинными деформациями, то разность между интенсивностью деформаций и максимальной главной деформацией не превышает 15 % величины последней [303]. Степень расхождений зависит от значений двух других главных деформаций.

При одноосном растяжении ( $\varepsilon_x = \varepsilon$ ;  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\varepsilon - 3\varepsilon_0}{2}$ ;  $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ ) на основании (1.35a) получаем  $\varepsilon_i = \varepsilon - \varepsilon_0$ . Если уровень пластических деформаций достаточно высок,



то изменением объема можно пренебречь ( $\mu = 0,5$ ;  $\varepsilon_0 = 0$ ). В этом случае  $\varepsilon_i = \varepsilon$ .

По аналогии с выражением (I.35) можно записать выражение для интенсивности скоростей деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2)^2 + (\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3)^2 + (\dot{\varepsilon}_3 - \dot{\varepsilon}_1)^2}. \quad (\text{I.36})$$

Интенсивность напряжений и интенсивность деформаций являются квадратичными функциями характеристик напряженного и деформированного состояний. Использование их в расчетах и при обработке экспериментальных данных связано с определенными математическими трудностями. Поэтому иногда с учетом выражений (I.31), (I.35) вместо  $\sigma_i$  и  $\varepsilon_i$  используют линейные функции

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \gamma_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3.$$

Для уменьшения ошибки от такой замены можно ввести корректировочный коэффициент, учитывающий вид напряженного состояния, и пользоваться более точными соотношениями. Выражение для этого коэффициента формально может быть получено путем следующих элементарных преобразований:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) \sigma_i}{2 \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1}} = \\ &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) \sigma_i}{\sqrt{3(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)^2}} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3 + \left(\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} \sigma_i. \end{aligned}$$

По аналогии

$$\begin{aligned} \gamma_{\max} &= \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \frac{3(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \varepsilon_i}{2 \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1}} = \\ &= \frac{3\varepsilon_i}{\sqrt{3 + \left(\frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3 + \mu_\varepsilon^2}} \varepsilon_i. \end{aligned}$$

В полученных соотношениях

$$\frac{\sigma_i}{\tau_{\max}} = \sqrt{3 + \mu_\sigma^2} \quad \text{и} \quad \frac{\varepsilon_i}{\gamma_{\max}} = \frac{1}{3} \sqrt{3 + \mu_\varepsilon^2} \quad (\text{I.37})$$

величины

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad \text{и} \quad \mu_\varepsilon = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \quad (\text{I.37a})$$

называются параметрами Лоде — Надаи или параметрами вида девиатора. Значения этих параметров могут изменяться от 0 до  $\pm 1$ . Этими значениями и определяются пределы изменений отношений (1.37):

$$\sqrt{3} \leq \frac{\sigma_i}{\tau_{\max}} \leq 2; \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{\varepsilon_i}{\gamma_{\max}} \leq \frac{2}{3}.$$

Средние значения отношений составляют

$$\left| \frac{\sigma_i}{\tau_{\max}} \right|_{\text{ср}} = \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 2) = 1,866;$$

$$\left| \frac{\varepsilon_i}{\gamma_{\max}} \right|_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} \right) = 0,622.$$

Они отличаются от крайних значений примерно на 7%.

### § 5. Геометрическая интерпретация напряженного и деформированного состояний

При известном направлении главных осей напряженное состояние элемента можно охарактеризовать главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Если выбрать систему координат, совпадающую с главными осями (рис. 10, а), то точка  $P_i$  с координатами  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  полностью определит напряженное состояние.

Процесс нагружения осуществляется путем перехода от состояния  $P_i(0, 0, 0)$  к состоянию  $P_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Путь нагружения может быть представлен отрезком  $OP_i$ , который является совокупностью последовательных положений точки  $P_i$  при нагружении. При некотором критическом значении главных напряжений наступит предельное состояние материала. Это состояние на рис. 10, а отмечено точкой  $Q_i$ .

Производя нагружение при различных соотношениях главных напряжений, получаем совокупность точек  $Q_i$ , лежащих на неко-

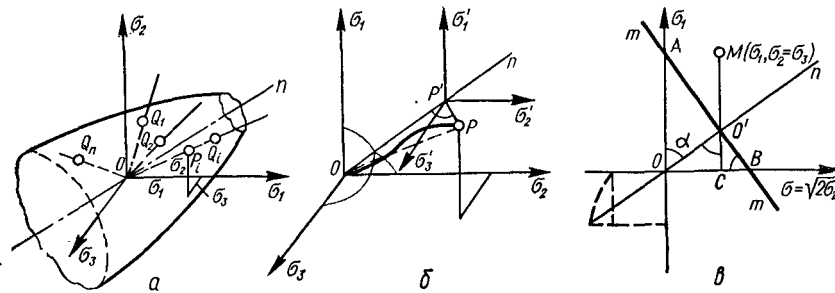


Рис. 10. Пространство напряжений:

а — поверхность предельных состояний; б — геометрия пространства напряжений; в — параметры напряженного состояния в плоскости  $\sigma_2 = \sigma_3$ .

торой поверхности. Эту поверхность можно назвать предельной, так как она ограничивает область напряженных состояний (внутри поверхности), безопасных для заранее оговоренных условий (см. § 2 гл. III).

Если  $OP_1$  — прямая, то нагружение происходит при пропорциональном возрастании напряжений. Такое нагружение, согласно классификации А. А. Ильюшина, называют простым. Если точка  $P$  равноудалена от осей, то  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , а напряженное состояние, характеризуемое координатами этой точки, называется гидростатическим растяжением (если все компоненты напряжений положительны) или гидростатическим сжатием (если все компоненты отрицательны). Следовательно, гидростатическому растяжению или сжатию соответствуют все точки луча  $Op$ , равнонаклоненного к осям (рис. 10, б).

Опустим из точки  $P$  перпендикуляр на луч  $Op$  и примем точку  $P'$  за начало новой системы координат  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ , о и которой параллельны главным осям. Координаты точки  $P$  в новой системе будут  $\sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_0$ ;  $\sigma'_2 = \sigma_2 - \sigma_0$ ;  $\sigma'_3 = \sigma_3 - \sigma_0$ .

Таким образом, напряженное состояние, характеризуемое координатами произвольной точки в пространстве напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , можно рассматривать как результат последовательных наложений двух напряженных состояний: гидростатического растяжения — сжатия, характеризуемого шаровым тензором, и девиаторной компоненты.

При анализе пространства напряжений удобно пользоваться сечением, равнонаклоненным к главным осям (девиаторное сечение или плоскость Ильюшина), и сечением, проходящим через одну из главных осей и равнонаклоненным к двум другим главным осям (см. гл. IV). В последнем случае направление луча  $Op$  определяется путем несложного построения, показанного на рис. 10, в штриховыми линиями [425]. След девиаторной плоскости представлен на рисунке прямой  $mt$ , уравнение которой может быть записано в виде

$$\sigma_1 = 3\sigma_0 - \sqrt{2}\sigma,$$

откуда получаем соотношения

$$OA = 3\sigma_0; \quad OB = \frac{3}{\sqrt{2}} \sigma_0.$$

Следовательно,

$$OO' = OA \cos \alpha = \sqrt{3}\sigma_0,$$

$$OC = OO' \sin \alpha = \sqrt{2}\sigma_0,$$

$$O'C = OO' \cos \alpha = \sigma_0,$$

$$O'B = \frac{O'C}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sigma_0,$$

$$AB = 3O'B = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sigma_0.$$

Легко показать, что абсциссы любой точки, лежащей в рассматриваемой плоскости, равны соответствующим значениям среднего нормального напряжения. Так, абсциссы точки  $M$  (как и других точек, принадлежащих прямой  $CM$ ) равны ординате точки  $O'$ , т. е.  $\sigma_0$ .

Аналогичная геометрическая интерпретация проводится для деформированного состояния. Каждой точке  $M_i$  ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) пространства напряжений соответствует точка  $N_i$  ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ) пространства деформаций. Если оба пространства привести к одному началу, а оси совместить, то в случае простого нагружения отрезки  $OM$  и  $ON$  будут расположены в одной плоскости, проходящей через равнонаклоненный к осям луч  $Op$ .

Широко распространенным геометрическим представлением напряжений является круговая диаграмма Мора [600], позволяющая графически найти напряжения в любой наклонной площадке.

Рассмотрим случай плоского напряженного состояния. Вычисление напряжений по наклонным площадкам (рис. 11, а) может быть заменено графическим построением круга Мора (рис. 11, б). Если возведем в квадрат и сложим оба соотношения (1.3), получим соотношение

$$\left( \sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2, \quad (1.38)$$

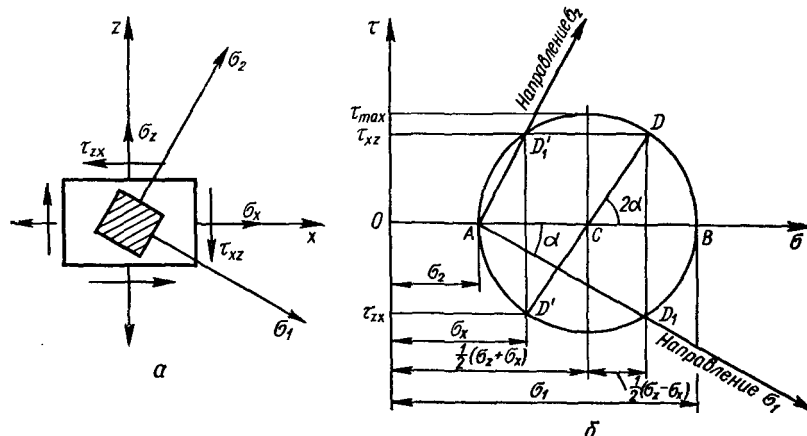


Рис. 11. Круг Мора для плоского напряженного состояния.

которое является уравнением круга с радиусом  $R$ , равным гипотенузе прямоугольного треугольника, построенного на катетах  $\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}$  и  $\tau_{xz}$ ,

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}.$$

Центр этого круга находится на оси  $\sigma$  в точке  $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}, 0\right)$ . Нормальные и касательные напряжения  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  определяются координатами точек, лежащих на окружности круга Мора. Так, координаты точек  $D$  и  $D'$ , симметричных относительно центра круга и лежащих на диаметре, наклоненном под углом  $2\alpha$  к оси, соответствуют напряжениям  $\sigma_x, \tau_{xz}$  и  $\sigma_z, \tau_{zx}$ .

Круг напряжений Мора может быть построен и по известным главным напряжениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Из рис. 11 видно, что нормальные напряжения достигают экстремальных значений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в точках  $B$  и  $A$  пересечения круга с осью  $\sigma$ , а наибольшее касательное напряжение равно радиусу круга.

По диаграмме Мора можно найти и направление главных напряжений. Для этого из крайней левой точки  $A$  круга проводим луч через точку  $D_1$ , симметричную  $D$  относительно оси абсцисс. Угол  $\alpha$  определяет направление главной площадки, на которой действует алгебраически большее главное нормальное напряжение. Направление луча  $AD_1$  определяет положение второй главной площадки.

Графически можно найти напряжения на произвольно ориентированной площадке и при объемном напряженном состоянии. Пусть напряженное состояние в точке задано главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Напряженному состоянию на всех площадках, параллельных одному из главных напряжений, соответствует круг Мора, построенный на двух других главных напряжениях.

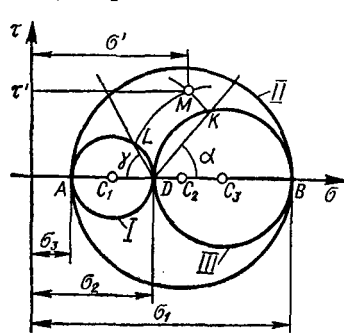


Рис. 12. Круговая диаграмма Мора для объемного напряженного состояния.

Так, рассматривая площадки, параллельные главному напряжению  $\sigma_1$ , получаем круг напряжений  $I$  (рис. 12), построенный на отрезке  $\sigma_2 - \sigma_3$  как на диаметре. Аналогично строим круги напряжений  $II$  и  $III$ , соответствующие площадкам, параллельным  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Можно доказать (см., например, работы [309, 461]), что нормальное и касательное напряжения  $\sigma'$  и  $\tau'$  на произвольно наклоненной к главным осям площадке определяются на плоскости  $\sigma, \tau$  координатами

точки  $M$ , лежащей внутри наибольшего круга Мора и вне двух других кругов.

Положение точки  $M$ , соответствующей напряженному состоянию на площадке с нормалью, составляющей с главными осями углы  $\alpha, \beta, \gamma$ , определяется путем следующих геометрических построений [66]. От оси  $\sigma$  (рис. 12) в точке  $D$  отложим угол  $BDK$ , равный углу  $\alpha$  между нормалью к площадке и направлением напряжения  $\sigma_1$ , и угол  $ADL$ , равный углу  $\gamma$  между нормалью к площадке и направлением напряжения  $\sigma_3$ . Точку  $M$  определяем как точку пересечения дуг, проведенных из центров  $C_1$  и  $C_3$  радиусами  $C_1K$  и  $C_3L$ .

Из диаграммы Мора видно, что при любом напряженном состоянии максимальное касательное напряжение равно ординате наиболее удаленной от оси точки внешнего круга, т. е. его радиусу:

$$\tau_{\max} = R_{II} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

и действует по площадке, параллельной главному напряжению  $\sigma_2$  (поскольку внешний круг соответствует площадкам, параллельным этому главному напряжению). Из положения точки, для которой  $\tau = \tau_{\max}$ , видно, что указанная площадка наклонена к главным напряжениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  под углом  $45^\circ$  (рис. 13).

Решение обратной задачи (об определении главных напряжений по заданным напряжениям в наклонных площадках) для случая объемного напряженного состояния невозможно, так как оно сводится к графическому решению уравнения третьей степени (см. уравнение (I.7)), что практически неосуществимо.

Графический метод определения напряжений по наклонным площадкам используется и для установления зависимости угловых деформаций от линейных. В этом случае по оси абсцисс откладываются линейные деформации, а по оси ординат — половины угловых деформаций.

Таким образом, для построения круга деформаций необходимо располагать значениями деформаций для двух взаимно перпендикулярных направлений  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_z$  и угла  $\gamma_{xz}$ .

При экспериментальном определении напряжений, в частности при использовании метода тензометрии, исходными параметрами часто являются не два удлинения и угол, а удлинения

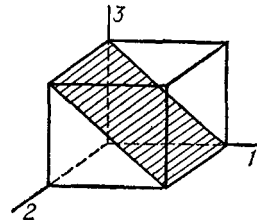


Рис. 13. Площадка максимального касательного напряжения.

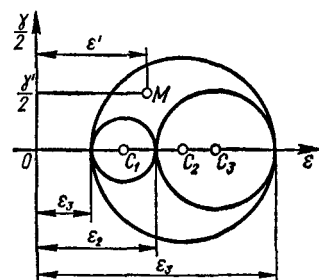


Рис. 14. Круговая диаграмма Мора для объемного деформированного состояния.

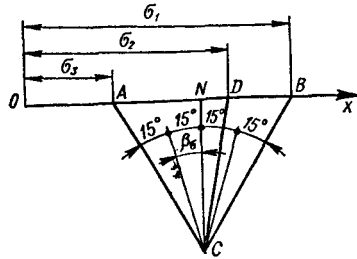


Рис. 15. Графическая интерпретация характеристик напряженного состояния по Розенбергу.

по трем любым направлениям. Располагая этими параметрами, также можно построить круг деформаций, а от круга деформаций легко перейти к кругу напряжений, имея в виду (см. гл. II), что

$$\sigma_{\max} + \sigma_{\min} = \frac{E}{1 - \mu} (\epsilon_{\max} + \epsilon_{\min}),$$

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \frac{E}{1 + \mu} (\epsilon_{\max} - \epsilon_{\min}).$$

Подробное описание методики построений диаграммы Мора по трем удлинениям имеется в работе [401].

Графическое решение указанной задачи значительно упрощается, если два направления, по которым измеряются деформации, перпендикулярны друг к другу, а третье направление находится под углом  $45^\circ$  к первым двум [42].

На рис. 14 для случая трехосного деформированного состояния представлена круговая диаграмма Мора. По аналогии с круговой диаграммой для напряженного состояния линейные и угловые деформации на произвольно ориентированной по отношению к главным осям деформации площадке определяются также координатами точки  $M$ , лежащей внутри области, ограниченной тремя окружностями.

Следует заметить, что вид деформированного состояния не всегда соответствует виду напряженного состояния. Так, при растяжении образца постоянного сечения осевой силой одноосному напряженному состоянию соответствует трехосное деформированное состояние.

В. М. Розенберг и Г. А. Смирновым-Аляевым предложена [414] графическая интерпретация зависимости некоторых характеристик напряженного состояния от главных напряжений, основанная на следующих элементарных графических построениях.

Приняв точку  $O$  (рис. 15) за начало отсчета, на луче  $Ox$  отложим отрезки  $OA$ ,  $OD$  и  $OB$ , численно равные (в заданном масштабе) значениям главных нормальных напряжений. На отрезке  $AB$ , длина которого равна максимальной разности главных напряжений  $\sigma_1 - \sigma_3$ , как на основании строим равносторонний треугольник. Если точку  $D$ , делящую отрезок  $AB$  в отношении  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_3}$ , соединить с вершиной  $C$  треугольника, то длина отрезка  $CD$  будет численно равна (в принятом масштабе) значению интенсивности напряжений  $\sigma_i$ . Действительно,

$$CD = \sqrt{CB^2 - NB^2 + ND^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2} = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_i.
\end{aligned}$$

Значение параметра Лоде — Надаи  $\mu_\sigma$  определится как отношение длины отрезка  $ND$  к длине отрезка  $NB$ :

$$\frac{ND}{NB} = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \mu_\sigma.$$

Параметр  $\mu_\sigma$  связан однозначной зависимостью с углом  $\beta_\sigma$ , равным углу  $ACD$ :

$$\mu_\sigma = \frac{\operatorname{tg}(\beta_\sigma - 30^\circ)}{\operatorname{tg} 30^\circ}.$$

Угол  $\beta_\sigma$ , как и параметр  $\mu_\sigma$ , полностью определяет вид напряженного состояния.

Аналогичное построение может быть проведено и при графической интерпретации зависимости характеристик деформированного состояния от главных удлинений. Такое построение показано на рис. 16.

Г. А. Смирнов-Аляев предложил различать три основных вида напряженного и деформированного состояний: растяжение, если среднее главное напряжение точно или приближенно равно наименьшему с учетом знака главному напряжению ( $0 < \beta < 15^\circ$ ); сдвиг, если среднее главное напряжение (точно или приближенно) равно полусумме двух главных напряжений ( $15^\circ < \beta < 45^\circ$ ); сжатие, если среднее главное напряжение (точно или приближенно) равно максимальному с учетом знака главному напряжению ( $45^\circ < \beta < 60^\circ$ ).

Такая формальная классификация видов напряженного состояния может оказаться целесообразной при исследовании соответствия между напряженным состоянием и изменением деформированного состояния вещества. Так, разделение возможных деформированных состояний на три основных вида позволило Г. А. Смирнову-Аляеву [414] с достаточно высокой

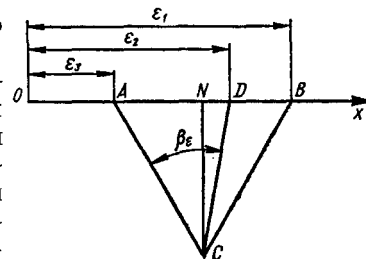


Рис. 16. Графическая интерпретация характеристик деформированного состояния по Розенбергу.



точно аппроксимировать условие пластичности  $\sigma_i = \text{const}$  группой линейных относительно главных компонент тензора выражений:

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \quad \text{при } 0 \leq \beta < 15^\circ \text{ (растяжение);} \\ \sigma_i &= \sqrt{3} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \text{при } 15^\circ < \beta < 45^\circ \text{ (сдвиг);} \\ \sigma_i &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \sigma_2 \quad \text{при } 45^\circ < \beta \leq 60^\circ \text{ (сжатие).}\end{aligned}$$

Максимальная ошибка при такой аппроксимации не превышает 3%.

Известны и другие геометрические интерпретации отдельных параметров напряженного состояния и соотношений между ними. Так, связь между интенсивностью напряжений, главными нормальными и главными касательными напряжениями может быть графически представлена звездой Пельгинского [279, 614] для напряжений, построение которой значительно упрощает анализ напряженного состояния в исследуемой точке и обработку экспериментальных данных.

## *Глава II*

### **СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ**

#### **§ 1. Линейно-упругое тело**

Приведенные в предыдущей главе математические соотношения справедливы для любых сплошных сред: твердых, жидких, газообразных, упругих, пластических, вязких, изотропных, анизотропных и т. п. Однако наши рассуждения ограничивались статическими и геометрическими представлениями. Мы не учитывали характер взаимосвязи между частицами сплошной среды и фактор времени.

Одна из задач теории упругости и теории пластичности — определение перемещений по заданным напряжениям. Возможна и обратная задача, когда по известным изменениям взаимного расположения частиц тела необходимо охарактеризовать его напряженное состояние. Решение подобных задач требует прежде всего установления физических закономерностей сопротивления тела всевозможным видам деформаций, т. е. выявления взаимосвязи между напряжениями и деформациями. От точности найденных закономерностей зависит достоверность инженерных расчетов на прочность, деформируемость и, следовательно, «надежность» оценки несущей способности деталей машин и сооружений, а также расчета тех или иных технологических операций. К сожалению, однозначное описание законов деформирования всех или хотя бы большинства физических сред оказывается практически невыполнимой задачей. Поэтому возникла необходимость в условном разделении этих сред на упругие и неупругие.

Условность такой классификации в том, что она не учитывает многих свойств реальных тел. Так, упругие тела можно подразделять еще на линейно-упругие и нелинейно-упругие; неупругие — на упруго-пластические, пластические и т. д. Заметим, что многие материалы при определенных условиях обладают свойствами любого из названных тел. Достаточно проследить характер зависимости  $\sigma = f(\epsilon)$  для малоуглеродистой стали, чтобы убедиться, что на отдельных этапах деформирования материал может быть линейно-упругим, нелинейно-упругим, упруго-пластическим и пластическим. В каждом отдельном случае связь между напряжениями и деформациями различная.

В основе классической теории упругости лежит представление об упругом линейно-деформируемом теле. Основным законом, определяющим общую зависимость между напряжениями и деформациями для линейно-упругого тела, сформулирован в 1678 г. Робертом Гуком в такой форме: каково перемещение, такова сила. В современной формулировке этот закон для сложнапряженного состояния звучит так: в каждой точке деформируемого тела компоненты тензора деформаций являются линейными функциями от компонентов тензора напряжений.

Таким образом, чтобы выразить соотношения между напряжениями и деформациями для линейно-упругого тела, необходимо знать 21 упругую постоянную. Однако большинство реальных материалов можно считать практически изотропными. При этом условия указанные соотношения значительно упрощаются. Как показал Кирхгоф, если связь между напряжениями и деформациями не зависит от ориентации координатных осей, то необходимое число упругих постоянных сократится до двух. Эти постоянные называются модулями упругости первого и второго рода и обозначаются соответственно  $E$  и  $G$ .

Модули упругости связаны известным соотношением

$$\frac{E}{G} = 2(1 + \mu), \quad (\text{II.1})$$

где  $\mu$  — коэффициент Пуассона,  $\mu = -\frac{\varepsilon_{\text{попер}}}{\varepsilon_{\text{прод}}}$ .

Коэффициент Пуассона, характеризующий относительное изменение поперечных размеров тела в упругой области при основном напряженном состоянии, не может быть меньше нуля, так как в противном случае при растяжении тела происходило бы его расширение в направлении, перпендикулярном к приложенной силе. Коэффициент Пуассона не может быть также больше 0,5, так как иначе при гидростатическом сжатии тела его объем увеличивался бы<sup>1</sup>.

Используя принцип независимости действия сил и предполагая, что главные оси напряжений и деформаций совпадают, обобщенный закон Гука для объемного напряженного состояния запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.2})$$

<sup>1</sup> Если материал имеет большое количество макропор, трещин и т. п. (например, отдельные металлокерамические композиции), то из-за направленного изменения размеров этих дефектов при деформировании тела можно получить отрицательное значение коэффициента Пуассона или  $\mu > 0,5$ .

Для произвольно ориентированной площадки

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.2a})$$

Выражения (II.2) и (II.2a) можно записать в виде, удобном для вычисления напряжений по деформациям,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1+\mu} \left( \varepsilon_1 + \frac{3\mu}{1-2\mu} \varepsilon_0 \right); \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1+\mu} \left( \varepsilon_2 + \frac{3\mu}{1-2\mu} \varepsilon_0 \right); \\ \sigma_3 &= \frac{E}{1+\mu} \left( \varepsilon_3 + \frac{3\mu}{1-2\mu} \varepsilon_0 \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.3})$$

Складывая левые и правые части соотношений (II.3) и выражая главные напряжения и главные деформации через средние, получаем

$$\sigma_0 = \frac{E}{1-2\mu} \varepsilon_0, \quad (\text{II.4})$$

т. е. шаровой тензор напряжений пропорционален шаровому тензору деформаций:

$$T_\sigma^0 = \frac{E}{1-2\mu} T_\varepsilon^0. \quad (\text{II.4a})$$

Из выражений (I.18) и (II.4) находим

$$\sigma_0 = \frac{E}{3(1-2\mu)} \theta = K\theta. \quad (\text{II.5})$$

Таким образом, относительное изменение объема упруго-деформированного тела линейно зависит от среднего напряжения. Величину  $K$  называют модулем объемной деформации,

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \quad (\text{II.6})$$

Для произвольно ориентированной площадки выражения (II.3) запишутся таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\mu} \left( \varepsilon_x + \frac{3\mu}{1-2\mu} \varepsilon_0 \right); & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\mu} \left( \varepsilon_y + \frac{3\mu}{1-2\mu} \varepsilon_0 \right); & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left( \varepsilon_z + \frac{3\mu}{1-2\mu} \varepsilon_0 \right); & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.7})$$

После элементарных преобразований выражения (II.7) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y &= \frac{E}{1+\mu} (\varepsilon_x - \varepsilon_y); & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} (\varepsilon_y - \varepsilon_z); & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_x &= \frac{E}{1+\mu} (\varepsilon_z - \varepsilon_x); & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.8})$$

Вводя средние напряжения и средние деформации и учитывая (II.4), получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_0); & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_0); & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_0); & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.9})$$

Если для краткости записи использовать понятия девиатора напряжений и девиатора деформаций, то выражения (II.9) запишутся так:

$$D_\sigma = 2GD_\varepsilon. \quad (\text{II.10})$$

Из выражения (II.10) следует важный закон: компоненты девиатора напряжений пропорциональны соответствующим компонентам девиатора деформаций, т. е.

$$\frac{\sigma_x - \sigma_0}{\varepsilon_x - \varepsilon_0} = \frac{\sigma_y - \sigma_0}{\varepsilon_y - \varepsilon_0} = \frac{\sigma_z - \sigma_0}{\varepsilon_z - \varepsilon_0} = \frac{2\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{2\tau_{yz}}{\gamma_{yz}} = \frac{2\tau_{zx}}{\gamma_{zx}} = 2G. \quad (\text{II.10a})$$

Для упрощения соотношений между напряжениями и деформациями иногда вводят обозначение

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \frac{2\mu G}{1-2\mu}. \quad (\text{II.11})$$

Коэффициент  $\lambda$  называется константой Ляме.

Учитывая выражения (I.18), (II.4) и (II.11), первые три соотношения уравнений (II.8) можно записать в виде

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\theta; \quad \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\theta; \quad \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\theta. \quad (\text{II.12})$$

Уравнения (II.7) справедливы при любом направлении координатных осей. Если координатные оси сориентировать так, чтобы они были равнонаклонены к главным, то напряжения на всех трех площадках будут равны между собой и совпадут по величине и направлению с октаэдрическими напряжениями, действующими на соответствующих площадках:  $P_x = P_y = P_z = P_{\text{окт}}$ . Следо-

вательно, согласно выражениям (II.7),

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{E}{1+\mu} \left( \varepsilon_{\text{окт}} + \frac{3\mu}{1-2\mu} \varepsilon_0 \right); \quad (II.13)$$

$$\tau_{\text{окт}} = G\gamma_{\text{окт}}.$$

Если в соотношениях (I.29) напряжения выразить через деформации, то, учитывая, что  $\frac{E}{3(1-2\mu)} = K$ ,  $\frac{E}{2(1+\mu)} = G$ , а  $\varepsilon_{\text{окт}} = \varepsilon_0$ , получим

$$\sigma_{\text{окт}} = 3K\varepsilon_{\text{окт}}. \quad (II.13a)$$

На основании выражений (I.30), (I.35) и (II.4) второе соотношение (II.13) записываем в следующей простой форме:

$$\sigma_i = E\varepsilon_i. \quad (II.14)$$

Соотношения вида (II.14) широко используются при расчетах элементов конструкций, работающих в пластической области.

Если все компоненты девиатора напряжений разделим на величину октаэдрического касательного напряжения, то получим тензор, составленный из частных от деления. Этот тензор называется направляющим тензором напряжений

$$\bar{D}_\sigma = \frac{1}{\tau_{\text{окт}}} D_\sigma. \quad (II.15)$$

При делении всех компонентов девиатора деформаций на величину, равную половине октаэдрической деформации сдвига, получим так называемый направляющий тензор деформаций

$$\bar{D}_\varepsilon = \frac{2}{\gamma_{\text{окт}}} D_\varepsilon. \quad (II.16)$$

Подставляя выражения (II.15) и (II.16) в (II.10) и учитывая второе соотношение (II.13), получаем

$$\bar{D}_\sigma = \bar{D}_\varepsilon, \quad (II.17)$$

т. е. направляющие тензоры напряжений и деформаций совпадают.

Компоненты направляющего тензора напряжений и направляющего тензора деформаций не имеют размерности и характеризуют направление главных осей напряжений и деформаций. Поэтому уравнение (II.17) является аналитической записью следующего важного положения: направления главных удлинений совпадают с направлениями главных напряжений.

Вывод о совпадении главных напряжений и главных осей деформаций можно сделать и на основании того, что в изотропном теле нет причин для асимметричного перемещения относительно главных осей напряжений, так как напряжения в направлении этих осей не имеют касательных составляющих.

Если напряженное тело подвержено тепловому воздействию, то к компонентам деформаций, определяемых тензором напряжений, добавляются температурные деформации. Тогда зависимости (II.2a) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)] + \varepsilon_T; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [(\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x))] + \varepsilon_T; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)] + \varepsilon_T; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.18})$$

Температурная деформация, соответствующая изменению температуры от  $T_1$  до  $T_2$ ,

$$\varepsilon_T = \int_{T_1}^{T_2} \alpha(T) dT,$$

или, при введении среднего значения коэффициента  $\alpha_{\text{ср}}$  линейного теплового расширения в интервале температур,

$$\varepsilon_T = \alpha_{\text{ср}} (T_2 - T_1).$$

Объемная деформация при наличии теплового фактора равна сумме трех линейных деформаций:  $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ . Учитывая выражения (II.6) и (II.18), можно записать

$$\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3K} + 3\varepsilon_T. \quad (\text{II.19})$$

Температурные напряжения возрастают с увеличением коэффициента линейного расширения. Если величина этих напряжений с учетом эффекта от наложения внешних связей не превышает предела пропорциональности материала, то приведенные выше варианты записи обобщенного закона Гука остаются справедливыми при условии учета влияния температуры на упругие постоянные.

## § 2. Напряжения и деформации в нелинейно-упругом и неупругом телах

Характерный признак упругих тел — отсутствие остаточной деформации при снятии нагрузки. Неупругое тело<sup>1</sup> после снятия нагрузки в исходное состояние не возвращается, деформации сохраняются полностью (пластическое тело) или частично (упруго-пластическое тело), причем величина деформации в общем случае зависит не только от конечных значений сил, но и от порядка их приложения, т. е. от всей истории нагружения.

<sup>1</sup> Неупругие тела, обладающие вязким течением, в этом параграфе не рассматриваются.

В нелинейно-упругом теле напряжения и деформации связаны нелинейными зависимостями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= f_1(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z); \\ \sigma_y &= f_2(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z); \\ \sigma_z &= f_3(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.20})$$

В неупругих телах в общем случае связь между напряжениями и деформациями может быть установлена лишь в дифференциальной форме в виде неинтегрируемых уравнений. Только в случае простого нагружения, когда все усилия, действующие на тело, возрастают пропорционально одному параметру [167], уравнения вида (II.20) можно распространить также на неупругие тела. Кроме того, соотношения для нелинейно-упругого тела действительны как при нагружении, так и при разгрузке, в то время как для упруго-пластических тел при нагружении и разгрузке соотношения между напряжениями и деформациями носят принципиально иной характер. Если явлениями релаксации и последствий пренебречь, то процесс разгрузки и повторного нагружения до уровня напряжений, с которого началась разгрузка, можно считать линейно-упругим. На этом участке связь между напряжениями и деформациями определяется законом Гука. Для простого растяжения, например, закон Гука запишется в виде  $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p)$ , где  $\varepsilon_p$  — остаточная пластическая деформация.

Строгое решение задачи о связи между напряжениями и деформациями в окрестности заданной точки для неупругих тел (а следовательно, и для нелинейно-упругих) даже при простом нагружении сложно и вряд ли выполнимо в том виде, который может оказаться приемлемым для прикладных задач.

Значительное упрощение задачи достигается на основе ряда научно обоснованных гипотез. Основные гипотезы, на базе которых можно установить взаимосвязь между напряжениями и деформациями для нелинейно-упругого тела (при нагружении и разгрузке) и для неупругих тел (но при простом нагружении), следующие:

1. Шаровой тензор деформаций прямо пропорционален шаровому тензору напряжений. Коэффициент пропорциональности для нелинейно-упругих и неупругих тел тот же, что и для тел, подчиняющихся закону Гука. Первая гипотеза в скалярной форме, согласно выражению (II.4), записывается в виде

$$\sigma_0 = \frac{E}{1 - 2\mu} \varepsilon_0.$$

2. В каждой точке тела девиатор напряжений прямо пропорционален девиатору деформаций. Эта гипотеза в скалярной форме,



согласно выражению (II.10a), записывается так:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_0}{\varepsilon_x - \varepsilon_0} = \frac{\sigma_y - \sigma_0}{\varepsilon_y - \varepsilon_0} = \frac{\sigma_z - \sigma_0}{\varepsilon_z - \varepsilon_0} = \frac{2\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{2\tau_{yz}}{\gamma_{yz}} = \frac{2\tau_{zx}}{\gamma_{zx}} = 2G'.$$

Коэффициент пропорциональности  $G'$  для нелинейно-упругих и неупругих тел (при простом нагружении) в свою очередь зависит от компонентов напряжений и деформаций и поэтому в общем случае напряженного состояния от точки к точке изменяется.

3. Интенсивность напряжений является вполне определенной, не зависящей от вида напряженного состояния функцией интенсивности деформаций, т. е.

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i). \quad (\text{II.21})$$

Поскольку функция  $\Phi(\varepsilon_i)$  зависит только от материала, то любой вид объемного напряженного состояния как в области нелинейно-упругих, так и в области неупругих деформаций можно свести к простейшим видам нагружения, построив кривую  $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$  по результатам опытов на одноосное растяжение образца или на кручение тонкостенной трубы. В последнем случае обобщенную кривую деформирования получают из диаграммы кручения  $\tau = f(\gamma)$ , используя при этом соотношения (I.31a) и (I.36a). При чистом сдвиге изменения объема не происходит. Как следует из формулы (II.5), равенство нулю объемной деформации соответствует предположению, что коэффициент поперечной деформации  $\mu = 0,5$ . Поэтому соотношения (I.31a) и (I.36a) для кручения примут простой вид:

$$\sigma_i = \sqrt{3}\tau; \quad \varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma,$$

т. е. ординаты кривой необходимо увеличить в  $\sqrt{3}$  раз, а абсциссы уменьшить в такое же число раз.

При построении обобщенной кривой по результатам опытов на растяжение наряду с диаграммой  $\sigma = f_1(\varepsilon)$  необходимо иметь кривую  $\mu = f_2(\varepsilon)$ , так как в процессе опыта коэффициент поперечной деформации будет возрастать, приближаясь к своему максимальному значению  $\mu = 0,5$ . Соотношения (I.31a) и (I.36a) для одноосного растяжения ( $\sigma_x = \sigma$ ;  $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ ;  $\varepsilon_x = \varepsilon$ ;  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon$ ;  $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ ) примут вид

$$\sigma_i = \sigma; \quad \varepsilon_i = \frac{2(1+\mu)}{3}\varepsilon.$$

Графическое построение обобщенной кривой по диаграмме растяжения или диаграмме сдвига описано в работе [481].

Обобщенная кривая деформирования фактически отражает общую связь между напряжениями и деформациями при любом виде напряженного состояния на всех стадиях деформирования. Выражение (II.21) для текущей точки обобщенной кривой можно записать в виде

$$\sigma_i = E' e_i, \quad (\text{II.22})$$

где  $E'$  — секущий модуль первого рода. Если кривую деформирования построить в координатах октаэдрические напряжения — октаэдрические сдвиги, то по аналогии с выражением (II.22)

$$\tau_{\text{окт}} = G' \gamma_{\text{окт}}, \quad (\text{II.23})$$

где  $G'$  — секущий модуль второго рода.

Из выражений (II.22) и (II.23), учитывая соотношения

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_i; \quad \gamma_{\text{окт}} = \frac{2}{\sqrt{2}} e_i,$$

после соответствующих преобразований устанавливаем

$$G' = \frac{\sigma_i}{3e_i}. \quad (\text{II.24})$$

Подставляя (II.24) в выражение, вытекающее из пропорциональности девиаторов (вторая гипотеза), получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3e_i} (e_x - e_0); & \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{3e_i} \gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3e_i} (e_y - e_0); & \tau_{yz} &= \frac{\sigma_i}{3e_i} \gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3e_i} (e_z - e_0); & \tau_{zx} &= \frac{\sigma_i}{3e_i} \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.25})$$

В этих выражениях средняя линейная деформация и среднее нормальное напряжение, определяемые по формулам

$$e_0 = \frac{e_x + e_y + e_z}{3}; \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3},$$

связаны соотношением

$$\sigma_0 = \frac{E}{1 - 2\mu} e_0,$$

вытекающим из пропорциональности шаровых тензоров (первая гипотеза).

Уравнения (II.25) можно решить относительно компонентов деформаций и записать их в форме, аналогичной закону Гука:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \left( \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} + \frac{1-2\mu}{3E} \right) \sigma_x - \left( \frac{\varepsilon_i}{2\sigma_i} - \frac{1-2\mu}{3E} \right) (\sigma_y + \sigma_z); \\ \gamma_{xy} &= \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \left( \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} + \frac{1-2\mu}{3E} \right) \sigma_y - \left( \frac{\varepsilon_i}{2\sigma_i} - \frac{1-2\mu}{3E} \right) (\sigma_z + \sigma_x); \\ \gamma_{yz} &= \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \left( \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} + \frac{1-2\mu}{3E} \right) \sigma_z - \left( \frac{\varepsilon_i}{2\sigma_i} - \frac{1-2\mu}{3E} \right) (\sigma_x + \sigma_y); \\ \gamma_{zx} &= \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.26})$$

Соотношения между напряжениями и деформациями значительно упростятся, если пренебречь изменением объема, т. е. положить  $\varepsilon_0 = \frac{1-2\mu}{E} \sigma_0 = 0$  или  $\mu = 0,5$ . Тогда вместо выражений (II.25) получим

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_x; & \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_y; & \tau_{yz} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_z; & \tau_{zx} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{zx}. \end{aligned}$$

Полученные зависимости, в отличие от известных соотношений обобщенного закона Гука, нелинейны, так как отношение  $\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$  само по себе зависит от компонентов напряжений и деформаций.

Таким образом, если отношение  $\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$  на основании опытных данных при простейших видах испытаний известно и выражено либо через  $\varepsilon_i$ , либо через  $\sigma_i$ , то можно считать, что уравнения (II.25) и (II.26) полностью устанавливают зависимость между напряжениями и деформациями для нелинейно-упругих тел и для неупругих — при простом нагружении.

Обычно функцию  $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$  определяют на основании обработки экспериментальных данных в виде аналитических зависимостей напряжения от деформации. Бюльфингер еще в 1729 г. в качестве гипотезы выдвинул такой степенной закон [127]:

$$\epsilon = \alpha \sigma^n. \quad (\text{II.27})$$

Коэффициент  $\alpha$  является общим для большой группы материалов, а показатель степени  $n$  может изменяться в широких пределах. При  $n > 1$  выражение (II.27) удовлетворительно описывает кривые деформирования таких материалов, как чугун, камень, цемент (рис. 17). Для таких материалов, как кожа, пенька,  $n < 1$ , при  $n = 1$  зависимость (II.27) переходит в закон Гука.

Для аппроксимации обобщенных кривых наибольшее распространение получили следующие выражения [167, 309, 325, 421, 423, 469]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= K\epsilon^n; \quad \sigma = a + (b - a)(1 - e^{-c\epsilon}); \\ \sigma &= E(1 - \omega)\epsilon; \quad \epsilon = \frac{A(B^\sigma - 1)}{B - 1}; \\ \sigma &= \frac{K\epsilon}{\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon}{m}\right)^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.28})$$

где  $E$  — модуль упругости первого рода;  $\omega = f(\epsilon)$  — некоторая безразмерная функция деформации, отличная от нуля только за пределом упругости;  $e = 2,72$ , а все остальные коэффициенты — константы материала.

Широко применяется при решении упруго-пластических задач выражение, содержащее функцию деформации  $\omega$ . Если кривую  $\sigma = f(\epsilon)$  с достаточной точностью заменить ломаной с точкой перелома, соответствующей пределу текучести  $\epsilon_T$ , то

$$\begin{aligned} \omega &= 0 \quad \text{при } \epsilon \leq \epsilon_T; \\ \omega &= \left(1 - \frac{E_1}{E}\right) \left(1 - \frac{\epsilon_T}{\epsilon}\right) \quad \text{при } \epsilon \geq \epsilon_T, \end{aligned}$$

где  $E_1$  — модуль упрочнения.

Функцию  $\omega$  обычно записывают в виде

$$\begin{aligned} \omega &= \lambda \left(1 - \frac{\epsilon_T}{\epsilon}\right), \\ \text{где} \quad \lambda &= 1 - \frac{E_1}{E}. \end{aligned}$$

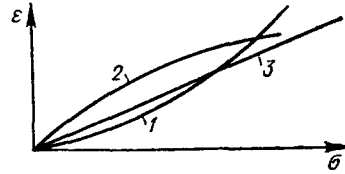


Рис. 17. Кривые деформирования различных материалов:  
1 —  $n > 1$ ; 2 —  $n < 1$ ; 3 —  $n = 1$ .

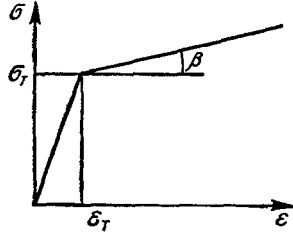


Рис. 18. Аппроксимация кривой деформирования прямыми.

Величины интенсивности напряжений и интенсивности деформаций при изменении знаков напряжений и деформаций не изменяются, поэтому зависимости вида  $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$  не учитывают различия свойств материала при растяжении и сжатии. Изложенная выше теория исключает также возможность учета влияния шарового тензора и вида девиатора на процесс деформирования, хотя результаты испытаний ряда материалов (см. гл. VI) свидетельствуют о том, что влияние указанных пара-

метров может быть существенным. Для таких материалов аналитическое выражение кривой деформирования значительно усложняется.

При решении многих прикладных задач для упрощения решений часто пренебрегают упрочнением, принимая  $E_1 = \tan \beta = 0$  (рис. 18). В этом случае диаграмма  $\sigma = f(\epsilon)$  за пределом текучести представляется в виде прямой с постоянной ординатой  $\sigma = \sigma_T$ , а закон деформирования для идеально пластического тела записывается в виде равенства приведенного напряжения пределу текучести:  $\sigma_{\text{прив}} = \sigma_T$ . Соотношения такого вида называются условиями пластичности и будут рассмотрены подробно в следующей главе.

Приведенные выше уравнения, связывающие напряжения и деформации, являются основой деформационной теории пластичности, получившей широкое развитие в работах А. А. Ильюшина и его учеников. Вопросы развития общей теории упруго-пластических деформаций и экспериментального обоснования ее основных постулатов коротко рассмотрены в гл. VI.

Соотношения между напряжениями и деформациями в дифференциальной форме устанавливаются в теории пластического течения. В соответствии с этой теорией связь между тензорами имеет вид

$$d\epsilon_{ij}'' = H \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} df, \quad (\text{II.29})$$

где  $\epsilon_{ij}''$  — тензор пластических деформаций;  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений;  $F$  — уравнение поверхности текучести;  $H$  — некоторая скалярная функция напряжений и деформаций, зависящая от истории нагружения.

В общем случае соотношение (II.29) приводит к трудно разрешимым математическим задачам. Для упрощения математических решений были сделаны предположения о характере изменения поверхности текучести в процессе деформирования.

На предположении о том, что в результате предварительной пластической деформации поверхность текучести независимо от

направления деформации равномерно расширяется, сохраняя свою форму, положение центра и ориентацию, основана теория изотропного упрочнения.

Теория трансляционного, или кинематического, упрочнения предполагает перемещение поверхности текучести (форма, размеры и ориентация остаются неизменными) в направлении деформирования твердого тела.

Наряду с теорией малых упруго-пластических деформаций и теорией течения, основанных на гипотезах формального характера, следует упомянуть о теории пластического скольжения [520], основанной на физическом представлении о пластической деформации тела как результате сдвигов в отдельных хаотически расположенных зернах с одной системой скольжения. В соответствии с этой теорией поверхность текучести в области, примыкающей к лучу деформирования, вытягивается в направлении деформирования, образуя «угловую особенность» — угол текучести.

Теория пластического скольжения, получившая развитие в работах американских и английских ученых, пока правильно предсказывает лишь качественные эффекты [382]. Вариант теории пластичности, основанный на концепции скольжения с учетом взаимодействия отдельных зерен в процессе деформирования, рассмотрен в работе [398].

Идея усреднения локальных пластических сдвигов, возникающих в отдельных кристаллитах, для получения тензора макродеформаций положена в основу «теории локальной деформации» А. К. Малмейстера [280] и «теории плоскопластической среды» Я. М. Леонова и Н. Ю. Швайко [263].

### § 3. Влияние времени и скорости деформирования

До сих пор мы рассматривали напряженно-деформированное состояние тел с учетом только упругих и пластических свойств. Реальные материалы, кроме того, обладают вязкостью. Это свойство в большей или меньшей мере проявляется во влиянии на напряженное и деформированное состояние тела времени и скорости нагружения или скорости деформирования. При решении многих технических задач этим свойством можно пренебречь. Однако в ряде случаев, например при работе детали в условиях высоких температур в широком диапазоне скоростей нагружения или при расчете прочности большинства материалов с аморфной структурой, влияние вязкости оказывается существенным. Математическое описание указанного явления необходимо в реологических расчетах.

Поведение различных материалов под нагрузкой можно упрощенно рассмотреть с помощью механических моделей. Деформа-

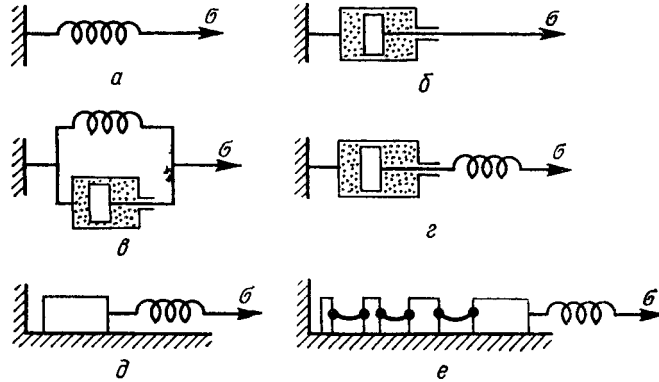


Рис. 19. Механические модели поведения материалов под нагрузкой.

ционные свойства идеально упругого тела, подчиняющегося закону Гука, при простом растяжении полностью моделируются пружиной (рис. 19, а), жесткость которой и усилие растяжения эквивалентны соответственно модулю Юнга и напряжению. Идеально вязкая среда может быть представлена демпфером (рис. 19, б). Модель Кельвина — Фойхта (рис. 19, в), представляющая пружину и демпфер, работающие параллельно, и схема демпфер — пружина, предложенная Максвеллом (рис. 19, г), имитируют отдельные свойства упруго-вязких тел.

Идеально-пластическая среда может быть охарактеризована моделью (рис. 19, д), включающей в себя пружину и элемент трения, который при  $\sigma \geq \sigma_T$  начинает перемещаться. Упрочнение материала можно имитировать на модели включением некоторого числа таких элементов, связанных свободными от натяжения тяжелыми нитями (рис. 19, е).

Простейшим представителем вязких тел является вязкая жидкость, для которой, согласно расчетной модели Ньютона (рис. 19, б), скорость деформации  $\dot{\epsilon}$  связана с напряжением  $\sigma$  линейной зависимостью  $\sigma = \lambda \dot{\epsilon}$ , где  $\lambda$  — константа, аналогичная модулю  $E$  для упругого тела.

Следовательно, для линейно-упругого тела, обладающего свойством вязкости, т. е. сочетающего в себе свойства упругого тела и вязкой жидкости (механическая модель Кельвина — Фойхта), связь между напряжениями и деформациями и их скоростями при линейном напряженном состоянии выразится линейным дифференциальным уравнением

$$\sigma = E\epsilon + \lambda \dot{\epsilon}, \quad (\text{II.30})$$

где первый член правой части представляет собой упругое сопротивление, второй член — вязкое сопротивление, пропорциональ-

ное скорости. Решение уравнения (II.30) можно записать [6] в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\frac{E(t-t_0)}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} \int_{t_0}^t \sigma(t) e^{-\frac{E(t-t_0)}{\lambda}} dt. \quad (\text{II.31})$$

Принимая  $\varepsilon_0 = 0$  при  $t_0 = 0$  и вводя обозначение  $\frac{\lambda}{E} = T$  для случая, когда напряжения сохраняют постоянное значение  $\sigma(t) = \sigma_0$ , находим

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\frac{t}{T}}). \quad (\text{II.31a})$$

Из выражения (II.31a) видно, что при мгновенном приложении нагрузки ( $T = 0$ , т. е.  $\lambda = 0$ ) в случае упругого тела соответствующая деформация достигается сразу же после приложения нагрузки. Для упруго-вязкого тела даже при мгновенном приложении нагрузки деформация достигает своего максимального значения лишь при  $t = \infty$  (рис. 20).

Если в момент  $t = t_1$ , соответствующий деформации

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\frac{t_1}{T}}),$$

нагрузка снята, то, подставляя в выражение (II.31)  $\sigma(t) = 0$  и  $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$  при  $t_0 = t_1$ , получаем закон, по которому должна протекать дальнейшая деформация:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 e^{-\frac{t_1-t}{T}},$$

т. е.  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Рассматриваемое явление «запаздывания» упругих свойств называется упругим последствием. Константа  $T = \frac{\lambda}{E}$  характеризует тот промежуток времени, в течение которого деформация уменьшается в  $e$  раз и может быть названа периодом последствия.

Рассмотрим модель упруго-вязкого тела, представленную на рис. 21. Эта модель включает в себя, как частные случаи, первые четыре модели (см. рис. 19) и является обобщенной линейной моделью упруго-вязкого тела, характеризующей его основные свойства.

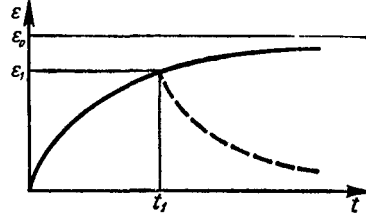


Рис. 20. Характер протекания деформаций в упруго-вязком теле.

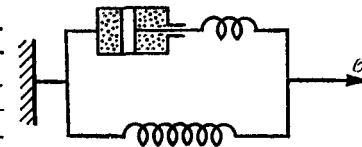


Рис. 21. Модель упруго-вязкого тела.



Полное напряжение  $\sigma$  состоит из напряжения  $\sigma_1$  в пружине и напряжения  $\sigma_2$  в элементе Максвелла:  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ . С другой стороны, удлинение пружины равно удлинению в элементе Максвелла  $\varepsilon_{\text{пр}} = \varepsilon_2$ . В пружине и демпфере элемента Максвелла возникают одинаковые напряжения  $\sigma_2$ . Если их деформации обозначить соответственно  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , то

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_2}{E}; \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\sigma_2}{\lambda}.$$

Полная деформация

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_2}{E} + \frac{\sigma_2}{\lambda},$$

Если учесть, что  $\sigma_2 = \sigma - \sigma_1 = \sigma - E\varepsilon$  и, следовательно,  $\dot{\sigma}_2 = \dot{\sigma} - E\dot{\varepsilon}$ , после элементарных преобразований получим

$$\sigma + n\dot{\sigma} = E\varepsilon + Bn\dot{\varepsilon}, \quad (\text{II.32})$$

где

$$n = \frac{\lambda}{E}; \quad B = \frac{\lambda + nE}{n}.$$

Выражение (II.32) дает математическое описание свойств рассмотренной модели упруго-вязкого тела. При малых скоростях деформирования, когда влиянием скоростей  $\sigma$  и  $\dot{\varepsilon}$  можно пренебречь, величина деформации будет пропорциональна приложенному напряжению и уравнение (II.32) примет вид  $\sigma = E\varepsilon$ . Константу  $E$  будем называть здесь длительным модулем упругости.

При внезапном приложении нагрузки тотчас возникает мгновенная деформация. В этом случае скорости роста напряжений и деформаций велики по сравнению с самими напряжениями  $\sigma$  и деформациями  $\varepsilon$ , поэтому последними можно пренебречь. Тогда уравнение (II.32) примет вид  $n\dot{\sigma} = Bn\dot{\varepsilon}$  или  $\sigma = B\varepsilon$ . В дальнейшем константу  $B$  будем называть мгновенным модулем упругости.

Обычные механические испытания материалов производятся либо при постоянной скорости нагружения, либо при постоянной скорости деформирования. В первом случае, когда напряжение растет пропорционально времени ( $\sigma = v_\sigma t$ ), уравнение (II.32) запишется в виде

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{Bn}\varepsilon = \frac{v_\sigma}{B} + \frac{v_\sigma}{Bn}t. \quad (\text{II.33})$$

Решение этого уравнения при  $\varepsilon = 0$  и  $t = 0$  следующее:

$$\varepsilon = \frac{v_\sigma t}{E} + \frac{nv_\sigma}{E} \left(1 - \frac{B}{E}\right) \left(1 - e^{-\frac{Et}{Bn}}\right).$$

После подстановки  $t = \frac{\sigma}{v_\sigma}$  и простейших преобразований оно может быть записано в виде, удобном для исследования:

$$\varepsilon = \sigma \left[ \frac{1}{E} + \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{E} \right) \frac{1 - e^{-\frac{E\sigma}{Bnv_\sigma}}}{\frac{E\sigma}{Bnv_\sigma}} \right]. \quad (\text{II.33a})$$

При малых скоростях нагружения (когда  $v_\sigma \rightarrow 0$ ) зависимость между напряжениями и деформациями обратится в линейную  $\sigma = E\varepsilon$ . Если  $v_\sigma \rightarrow \infty$ , то кривая  $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$  обратится в прямую  $\sigma = B\varepsilon$ .

При постоянной скорости деформирования, когда деформация увеличивается пропорционально времени

$$\varepsilon = v_\varepsilon t,$$

уравнение (II.32) примет вид

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{n} \sigma = Bv_\varepsilon + \frac{Ev_\varepsilon}{n} t. \quad (\text{II.34})$$

Полагая, что при  $t = 0$   $\varepsilon = 0$ , решение этого уравнения получим в виде

$$\sigma = E\varepsilon + (B - E)nv_\varepsilon(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{nv_\varepsilon}})$$

или

$$\sigma = \varepsilon \left[ E + (B - E) \frac{1 - e^{-\frac{\varepsilon}{nv_\varepsilon}}}{\frac{\varepsilon}{nv_\varepsilon}} \right]. \quad (\text{II.34a})$$

Из анализа этого уравнения следует, что при  $v_\varepsilon \rightarrow 0$  деформирование будет протекать (рис. 22) согласно прямой  $\sigma = E\varepsilon$  (1), а при  $v_\varepsilon \rightarrow \infty$  кривая  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  (2) обращается в прямую  $\sigma = B\varepsilon$  (3).

Таким образом, в обоих случаях положение кривой ограничено прямыми  $\sigma = B\varepsilon$  и  $\sigma = E\varepsilon$ . Однако, сравнивая уравнения (II.33a) и (II.34a), легко заметить, что характер зависимости между напряжениями и деформациями при разных способах испытания неодинаков. Это различие становится менее существенным при очень малых скоростях деформирования и нагружения.

Если тело подвергнуть мгновенному нагружению до напряжения  $\sigma_0$  и полученную деформацию  $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{B}$  сохранить неизменной во времени ( $\varepsilon = 0$ ),

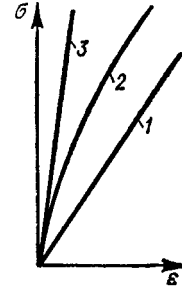


Рис. 22. Влияние скорости нагружения на соотношения между напряжениями и деформациями.

то выражение (II.32) получим в виде

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{n} \sigma = \frac{E}{n} \varepsilon_0. \quad (\text{II.35})$$

Интеграл этого уравнения при  $\sigma_{t=0} = \sigma_0$  будет

$$\sigma = E\varepsilon_0 + (\sigma_0 - E\varepsilon_0) e^{-\frac{t}{n}}. \quad (\text{II.35a})$$

На рис. 23, а приведена кривая, построенная по уравнению (II.35a). Как видно из рис. 23, напряжения в элементе, длина которого сохраняется постоянной, с течением времени уменьшаются до величины  $\sigma' = E\varepsilon_0$ . Это явление самопроизвольного падения напряжений во времени при постоянной деформации называется релаксацией. Постоянную  $n$  называют временем релаксации.

Теперь в теле, подвергнутом мгновенному нагружению до деформации  $\varepsilon_0$ , сохраним неизменным во времени напряжение  $\sigma_0 = B\varepsilon_0$ . При этом  $\dot{\sigma} = 0$ , а выражение (II.32) примет вид

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{Bn} \varepsilon = \frac{\sigma_0}{Bn}. \quad (\text{II.36})$$

Интеграл этого уравнения при условии  $\varepsilon_{t=0} = \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{B}$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} + \sigma_0 \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{E} \right) e^{-\frac{E}{Bn} t}. \quad (\text{II.36a})$$

Из анализа уравнения (II. 36a) следует, что с течением времени деформация увеличивается от  $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{B}$  при  $t = 0$  до  $\varepsilon_{\max} = \frac{\sigma_0}{E}$  при  $t = \infty$ .

На рис. 23, б приведена кривая, построенная по уравнению (II. 36a). Явление необратимого роста деформаций во времени при постоянном уровне напряжений называется ползучестью (или крипом). Если в некоторый момент времени  $t = t_1$  нагрузка снимается, то элемент мгновенно укорачивается на величину мгновенной деформации  $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{B}$ . Дальнейшее уменьшение деформации

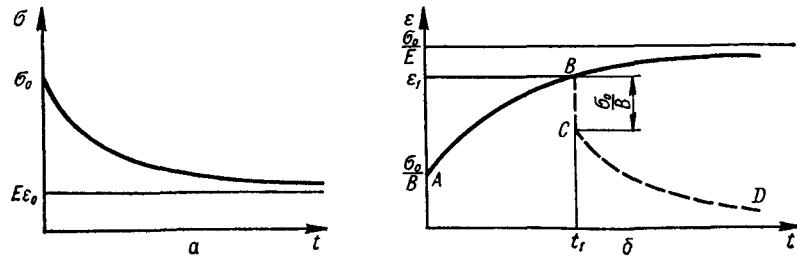


Рис. 23. Кривые релаксации (а) и ползучести (б).

происходит по закону

$$\varepsilon = \varepsilon_1 e^{\frac{E(t_1 - t)}{Bn}}. \quad (\text{II.36б})$$

На рис. 23, б уравнению (II. 36б) соответствует кривая  $CD$ , для которой ось абсцисс является асимптотой. Такое поведение материала называют обратной ползучестью.

В отличие от многих пластических и высокомолекулярных полимеров, в металлах не происходит полного восстановления первоначальной формы и размеров тела; процесс обратной ползучести происходит до некоторого предельного значения.

Таким образом, комбинированная модель, представленная на рис. 21, является обобщенной линейной моделью среды и отражает основные свойства упруго-вязкого тела. Эта модель может быть усовершенствована путем введения переменных во времени коэффициентов вязкости для учета внутреннего трения [208] и некоторых кинематических факторов [45]. В результате свойства ползучести и неполного восстановления первоначальных размеров после разгрузки (реологические свойства линейно-упруго-вязкого тела) описываются лучше.

Соотношения между напряжениями и деформациями для линейно-деформируемых упруго-вязких тел при объемном напряженном состоянии можно написать по аналогии с полученными выше зависимостями для одноосного напряженного состояния.

Как было показано в § 1 настоящей главы, для упругого тела компоненты девиатора напряжений пропорциональны компонентам девиатора деформаций, а шаровой тензор напряжений пропорционален шаровому тензору деформаций. По аналогии с выражениями (II.4) и (II.9) для вязкой жидкости, у которой роль модуля сдвига играет коэффициент вязкости, заменяя деформации на их скорости, можно написать

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= 2\eta(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_0); & \tau_{xy} &= \eta\dot{\gamma}_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_0 &= 2\eta(\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_0); & \tau_{yz} &= \eta\dot{\gamma}_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= 2\eta(\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_0); & \tau_{zx} &= \eta\dot{\gamma}_{zx}; \\ \sigma_0 &= 3\eta_v\dot{\varepsilon}_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.37})$$

Обобщая уравнение (II.32) на случай объемного напряженного состояния упруго-вязкого тела, получаем

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_0) + n(\dot{\sigma}_x - \dot{\sigma}_0) &= 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_0) + 2Hn(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_0); \\ (\sigma_y - \sigma_0) + n(\dot{\sigma}_y - \dot{\sigma}_0) &= 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_0) + 2Hn(\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_0); \\ (\sigma_z - \sigma_0) + n(\dot{\sigma}_z - \dot{\sigma}_0) &= 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_0) + 2Hn(\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_0); \\ \tau_{xy} + n\dot{\tau}_{xy} &= G\dot{\gamma}_{xy} + Hn\dot{\gamma}_{xy}; \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.38})$$

$$\begin{aligned}\tau_{yz} + n\dot{\tau}_{yz} &= G\dot{\gamma}_{yz} + Hn\dot{\gamma}_{yz}; \\ \tau_{zx} + n\dot{\tau}_{zx} &= G\dot{\gamma}_{zx} + Hn\dot{\gamma}_{zx}; \\ \sigma_0 &= 3K\sigma_0,\end{aligned}$$

где  $n = \frac{\eta}{G}$ ; величина  $H$  имеет тот же смысл, что и  $B$  в уравнении (II.32).

Для вязко-пластического тела, не обладающего упрочнением, принимая условие пластичности  $\sigma_i = \sigma_T$ , запишем

$$\sigma_i = \sigma_T + 2\eta \sqrt{\frac{1}{2}[(\dot{e}_1 - \dot{e}_2)^2 + (\dot{e}_2 - \dot{e}_3)^2 + (\dot{e}_3 - \dot{e}_1)^2]}, \quad (\text{II.39})$$

или

$$\sigma_i = \sigma_T + \sqrt{2}\eta \sqrt{(\dot{e}_1 - \dot{e}_2)^2 + (\dot{e}_2 - \dot{e}_3)^2 + (\dot{e}_3 - \dot{e}_1)^2}.$$

Если объемная вязкость отсутствует, то  $\eta = \frac{\lambda'}{3}$ , где  $\lambda'$  — коэффициент линейной вязкости.

Опыт показывает, что действительные зависимости между напряжениями и деформациями и их скоростями в упруго-вязких телах носят нелинейный характер. Однако для большинства реальных упруго-вязких тел рассмотренные линейные зависимости позволяют качественно описать все основные свойства упруго-вязкого тела.

При расчетах, требующих повышенной точности, пользуются нелинейными зависимостями, полученными путем обобщения экспериментальных данных.

#### § 4. Упругая энергия и работа пластической деформации

Под влиянием внешних воздействий элементарные частицы тела перемещаются; между ними возникают дополнительные силы взаимодействия, которые противодействуют деформации и уравновешивают внешние силы. Работу внутренних сил в окрестности данной точки на соответствующих перемещениях можно выразить через напряжения и деформации. В общем случае напряженного состояния удельную работу деформации можно рассматривать как сумму удельных работ главных нормальных напряжений на перемещениях  $e_1, e_2, e_3$ .

В упругих телах работа внутренних сил упругости превращается в потенциальную энергию и численно равна ей. Если связь между напряжениями и деформациями линейна (линейно-упругое тело), то выражение для потенциальной энергии деформации, накапливаемой в единице объема, запишется в виде

$$U_{уд} = \frac{1}{2}(\sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \sigma_z e_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (\text{II.40})$$

Используя соотношения обобщенного закона Гука, упругую энергию можно выразить только через напряжения или только через деформации. На основании (II.2a) и (II.7) выражение (II.40) можно записать так:

$$U_{уд} = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \\ + 2(1 + \mu) (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \quad (\text{II.40a})$$

или

$$U_{уд} = G \left[ \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]. \quad (\text{II.40б})$$

Полагая компоненты касательных напряжений и сдвигов равными нулю и заменяя нормальные напряжения и относительные удлинения главными, получаем

$$U_{уд} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)] \quad (\text{II.40в})$$

или

$$U_{уд} = G \left[ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 \right].$$

Полную удельную потенциальную энергию можно разбить на две части, соответствующие девиаторной и гидростатической частям тензора напряжений. Первая из них

$$U_{уд}^{\Phi} = \frac{1+\mu}{E\sigma} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (\text{II.41})$$

представляет упругую энергию изменения формы, а вторая

$$U_{уд}^0 = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (\text{II.42})$$

— упругую энергию изменения объема.

Сопоставляя равенство (II.41) с (I.13) и (I.31), а (II.42) — с первым выражением (I.9), можно установить, что удельная потенциальная энергия изменения формы с точностью до постоянного коэффициента равна второму инварианту девиатора напряжений или квадрату интенсивности напряжений

$$U_{уд}^{\Phi} = \frac{1+\mu}{E} I_2' = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_i^2,$$

а удельная потенциальная энергия изменения объема — квадрату первого инварианта тензора напряжений:

$$U_{уд}^0 = \frac{1-2\mu}{6E} I_1^2.$$

Полную потенциальную энергию деформаций выразим через октаэдрические напряжения

$$U_{уд} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1-2\mu}{E} \sigma_{окт}^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1+\mu}{E} \tau_{окт}^2.$$

Вводя модуль объемного сжатия  $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$  и модуль сдвига  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ , получаем

$$U_{уд} = \frac{1}{2K} \sigma_{окт}^2 + \frac{3}{4G} \tau_{окт}^2$$

или, подставляя выражение (II.13a), —

$$U_{уд} = \frac{3}{2} (\sigma_{окт} \epsilon_{окт} + \tau_{окт} \gamma_{окт}).$$

Формулы (II.41) и (II.42) справедливы и в области пластических деформаций, так как в этом случае связь между напряжениями и упругими компонентами полных деформаций по-прежнему описывается законом Гука.

Удельная механическая работа, затрачиваемая на пластическое деформирование единицы объема вещества при данном температурно-скоростном режиме деформирования, также находится в определенной функциональной связи с интенсивностью напряжений. Элементарное приращение удельной работы  $dP_{уд} = \sigma_i de_i$ . Предполагая функциональную зависимость  $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$  не зависящей от вида напряженного и деформированного состояний, запишем в интегральной форме выражение для удельной работы пластического деформирования

$$P_{уд} = \int_0^{\epsilon_i} \Phi(\epsilon_i) d\epsilon_i, \quad (II.43)$$

откуда можно определить механическую работу, затраченную на деформацию на определенной стадии пластического деформирования.

## Глава III

### МЕХАНИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

#### § 1. Пластическая деформация и разрушение

Современные инженерные методы расчета основаны преимущественно на макроскопических понятиях и представлениях. В действительности разрушению (в смысле отделения одной части тела от другой) предшествуют сложные микро- и субмикроскопические процессы в материале, характер протекания которых зависит от природы и физического состояния деформируемого тела, вида и режима механического нагружения, температурных условий испытания, среды и многих других факторов. Интенсивность этих процессов в значительной степени зависит от уровня соответствующих напряжений, которые можно подразделить на три группы [105]: напряжения первого, второго и третьего рода. Напряжения первого рода уравниваются в объемах одного порядка с объемами тела, напряжения второго рода уравниваются в объемах нескольких кристаллитов, а напряжения третьего рода — в объемах одной или нескольких кристаллических ячеек.

Характеристики механических свойств также подразделяются на макроскопические (1-го рода), микроскопические (2-го рода) и субмикроскопические (3-го рода). Микроскопическое разрушение с увеличением внешней нагрузки переходит в макроскопическое, приводящее к разделению тела на части.

Рассматривая влияние пластической деформации на сопротивление разрушению, Н. Н. Давиденков [105] подразделял разрушение на «хрупкое» (кристаллический излом; отражение света от плоскостей спайности, по которым произошло разрушение, придает блеск зернам) и «вязкое» (матовый, волокнистый излом по плоскостям скольжения, предварительно разрыхленным пластическим сдвигом). При этом разрушение может происходить путем «отрыва» и путем «среза». Процесс разрушения отрывом представляется следующим образом [337, 340, 400, 451]. Под действием нормальных напряжений появляются начальные микротрещины. Если из-за исходных свойств материала или неблагоприятной схемы напряженного состояния пластическая деформация затруднена, то микротрещины быстро прорастают, образуя макроскопи-



ческий излом. Когда материал пластически деформируется, образовавшиеся под действием нормальных напряжений микротрещины поворачиваются и, сливаясь друг с другом, образуют поверхность раздела, совпадающую с плоскостью действия максимальных касательных напряжений. При разрушении срезом образование микротрещины подготавливается в процессе пластической деформации под действием касательных напряжений (2-го рода). Происходит «разрыхление» материала, и силы сцепления по площадкам скольжения снижаются до нуля.

Бывают случаи, когда одно и то же тело в зависимости от вида напряженного состояния разрушается двумя способами — отрывом или срезом. Н. Н. Давиденков [104] приводит такой пример. При растяжении стеклянных палочек отрыв происходит по плоскостям, перпендикулярным к оси, и является результатом действия нормальных напряжений. Если же приложить сосредоточенную силу к краю стеклянной пластинки, то разрушение происходит по кругам равных касательных напряжений (круги Буссинеска). Поэтому следует говорить не о хрупких и вязких телах, а о хрупком и вязком их состоянии. Исходя из этой концепции, Н. Н. Давиденков [105] предложил схему, описывающую переход материала из вязкого состояния в хрупкое. Позже эта схема была использована Я. Б. Фридманом [465] при создании «единой теории прочности».

Таким образом, пока еще нет решающего подтверждения в пользу тех или иных представлений о физической картине разрушения. Однако наличие и роль пластической деформации в процессе разрушения представляется весьма важной. Даже самый хрупкий излом надрезанного образца стали в жидком воздухе при рентгенографическом исследовании обнаруживает заметную остаточную деформацию [478]. В связи с этим Н. Н. Давиденковым высказана мысль о том, что пора отказаться от попыток сопоставления «теоретической» и «практической» прочности, так как разорвать неповрежденный пластической деформацией кристалл, по-видимому, вообще невозможно.

Способность материала к пластической деформации зависит от многих факторов, и в первую очередь от вида напряженного состояния, температуры, скорости деформирования и др. Это объясняется сложностью процессов, происходящих при пластическом деформировании. В настоящее время только для поликристаллических металлов исследованы десятки механизмов пластической деформации, которые можно объединить в три группы [328]: сдвиговые, пограничные и диффузионные.

К сдвиговым механизмам пластической деформации относятся такие, как сдвиг одной части кристалла (зерна) по отношению к другой, механизм сброса (изгиба) [121] и пластикование [330].

Если процессы, сопровождающие пластическую деформацию

путем сдвигов, происходят внутри зерна, т. е. являются транс-кристаллическими, то само название второй группы указывает на то, что она объединяет процессы, происходящие на границах зерен и связанные только с интеркристаллической пластичностью. Этот механизм представляет собой относительное перемещение зерен вследствие их дробления (полигонизации), поворота мозаичных блоков, а также в результате упругих искажений кристаллической решетки, рекристаллизации и т. п.

Процесс деформирования сопровождается физико-химическими явлениями. Наиболее существенную роль в пластической деформации металлов, особенно при высоких температурах, играют диффузионные процессы. Причиной диффузионных токов является «градиент химического потенциала», зависящий от градиента концентрации фазы, градиентов упругой деформации и температуры в ней. Механизм переноса вещества в процессе диффузии еще точно не установлен. Наибольшее распространение получила теория «вакантных мест», согласно которой перенос вещества происходит путем последовательного замещения атомами вакантных мест в кристаллической решетке.

Еще менее ясен вопрос о влиянии диффузионных токов на формоизменение образца. Имеющиеся гипотезы [41, 260] не могут дать исчерпывающего ответа на этот вопрос.

Как известно, большой практический интерес представляет изучение причин значительного расхождения между теоретической прочностью идеальных кристаллов и прочностью реальных тел. Различными методами расчета теоретической прочности кристаллов получены величины, превышающие техническую прочность в 100—1000 раз. Некоторые исследователи объясняют этот факт, во-первых, несовершенством метода расчета прочности, вытекающим из того, что современная теория идеального кристалла не учитывает таких факторов, как последовательность смещения атомов [121, 464], возможность местной потери устойчивости кристаллической решетки [135, 426], изменения в процессе деформирования упругих постоянных [203, 464] и т. п., и, во-вторых, наличием в реальном кристалле особого рода дефектов кристаллической решетки — дислокаций, которые при деформировании превращаются в ультрамикроскопические нарушения сплошности.

Представление о дефектах решетки, по-видимому, впервые было введено Прандтлем в 1928 г. [617]. Дальнейшее развитие этой теории было обобщено в работах Котрелла [209], Рида [390], Ван Бюрена [48] и других ученых [121, 163, 464]. Порожденные при застывании металла дислокации пронизывают кристаллическую решетку, образуя объемную сетку. Пересекая плоскости скольжения и частично располагаясь в них, дислокации образуют так называемые источники Франка — Рида. При возникновении

в плоскости скольжения напряжения  $\tau = \frac{Gb}{l}$  ( $G$  — модуль сдвига металла,  $b$  — вектор Бюргерса,  $l$  — длина источника дислокаций) источники Франка — Рида начинают генерировать новые дислокации, движение которых и обуславливает пластическую деформацию<sup>1</sup>. Движение дислокаций затрудняется рядом других несовершенств («стопоров»), возле которых происходит скопление целой группы дислокаций.

При дальнейшем повышении нагрузки вблизи заблокированных дислокаций будут возникать пики напряжений, приводящие к образованию трещин. Стро [633] показал, что величину критических скалывающих напряжений вдоль плоскости скольжения, необходимых для образования трещин, можно записать в виде  $\tau = \alpha \times G \sqrt{\frac{a}{L}}$ , где  $\alpha \approx 1$ ;  $a$  — межатомное расстояние;  $L$  — длина полосы сдвига при перемещении дислокаций.

К сожалению, теория дислокаций на современном уровне развития почти не выходит за рамки качественного объяснения наблюдаемых фактов. Количественную оценку прочности и пластичности материала теория дислокаций в лучшем случае дает лишь в отношении порядка величины, характеризующей прочность материала.

Ограниченные возможности дислокационной теории объясняются прежде всего тем, что на прочность и пластичность кроме дислокаций существенно влияют многие другие факторы. Особенно заметно проявляется влияние структуры материала. Из структурных факторов наиболее полно изучено влияние размеров зерна [371, 488]. Установлено, что увеличение размеров зерна сильно понижает сопротивление хрупкому разрушению. При вязком изломе величина зерна мало влияет на прочность.

Для объяснения влияния на прочность размеров зерна при транскристаллическом разрушении можно принять схему Е. М. Шевандина [488]. Согласно этой схеме транскристаллическая трещина, дойдя до границы зерна, останавливается. В крупнозернистом материале концентрация напряжений в вершине трещины больше, чем в мелкозернистом, так как длина трещины, равная размерам зерна, в первом случае больше. Следовательно, при более крупном зерне условие распространения трещины лучше.

В случае интеркристаллического разрушения роль величины зерна может быть двойной. При нормальных температурах увеличение размеров зерна приводит к снижению хрупкой прочности, в то время как при высоких температурах может наблюдаться противоположное. Например, жаропрочные сплавы, разрушаю-

<sup>1</sup> Движение дислокаций в металлах начинается при напряжениях, значительно меньших предела упругости [126].

щиеся по границам зерен, с увеличением размеров зерна имеют повышенные пределы длительной прочности.

Принципы механического подхода к изучению внутренних явлений, протекающих в нагруженном материале, наиболее полно выражены в теории трещин, объясняющей низкую прочность реальных тел наличием в материале мельчайших трещин. Начало исследований в области трещин было положено 50 лет назад С. Е. Инглисом [565], решившим методами теории упругости задачу о равновесии тела с изолированной эллиптической полостью при однородном поле напряжений. Задача о критических напряжениях при однородном плоском напряженном состоянии с учетом молекулярных сил сцепления, действующих у края трещин, впервые была решена Гриффитсом [559]. Механизм разрушения пластичных материалов при наличии трещин исследован Орованом и Ирвином [566, 609].

Значительный вклад в развитие теории трещин внесли советские ученые [48, 136, 189, 342]. П. А. Ребиндер [388] впервые обратил внимание на роль растворенных в основном металле примесей, выделяющихся на границах раздела полости и способствующих ее дальнейшему развитию.

Большой практический интерес представляют исследования влияния температурно-временных факторов, учет которых необходим при расчете реальных элементов конструкции.

В последнее время все больше сторонников находит идея построения статистической теории прочности, впервые высказанная А. П. Александровым и С. Н. Журковым в 1933 г. [3] и нашедшая дальнейшее развитие в работах Вейбулла, Конторовой и Френкеля, Фишера и Холломоуна, Афанасьева, Волкова, Болотина и др. Несмотря на существенное развитие теории дислокаций и теории трещин, современные методы, основанные на этих теориях, не позволяют проводить инженерные расчеты. Практически не приемлемы для инженерных расчетов и теории прочности, основанные на статистическом подходе. Оценка несущей способности реальной конструкции расчетным путем пока оказывается возможной лишь при использовании той или иной, часто феноменологической, теории, основанной на методах механики сплошной среды. Механические теории прочности, как правило, требуют значительно меньшей информации о материале, чем любые микроскопические или атомические теории, и формулируются критериями, удобными для практического применения.

## § 2. Условия прочности. Предельные поверхности

Внутренние связи, возникающие в квазиоднородном материале, заключенном в объеме деформируемого тела, и соответствующие деформации можно формально описать с помощью трех главных

нормальных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , действующих в трех взаимно перпендикулярных плоскостях, проходящих через рассматриваемую точку, и трех главных удлинений  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ . Напряженное и деформированное состояния в точке также известны, если для данной точки заданы тензоры напряжений и деформаций. Механическими характеристиками конструкционного материала являются данные о его макросвойствах, получаемые путем испытаний стандартных образцов на растяжение, сжатие, реже — чистый сдвиг. При расчете предельного состояния материала в условиях произвольной системы напряжений используются критерии, основанные на той или иной теории прочности.

Проблема рационального выбора критерия сводится к определению некоторой функции  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , величина которой не зависит от соотношения главных напряжений, если их значения соответствуют разрушению или заданному допуску на остаточную деформацию. Если эти значения соответствуют состоянию текучести, то условие

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, m_i) \leq K \quad (\text{III.1})$$

называется условием текучести; если рассматривается состояние, предшествующее разрушению, то говорят об условии разрушения.

В условии (III.1) величина  $K$  — критерий прочности — обычно имеет определенную физическую интерпретацию: максимальное нормальное или касательное напряжение, максимальное удлинение, энергия формоизменения и т. д. Впрочем, иногда критерий прочности не имеет прямого физического смысла.

Константы материала  $m_i$  определяются по результатам испытаний при простейших нагружениях путем совместного решения уравнений, написанных в виде (III.1), применительно к каждому из проведенных испытаний. Число констант, подлежащих определению, для большинства гипотез не превышает трех.

В случае необходимости определения трех констант испытания материалов, как правило, проводятся при одноосном растяжении, одноосном сжатии и кручении. Для этих видов нагружений условие (III.1) запишется следующим образом:

$$F_1(\sigma_p, m_i) = K; \quad F_2(\sigma_c, m_i) = K; \quad F_3(\tau_k, m_i) = K. \quad (\text{III.2})$$

Система уравнений (III.2) позволяет исходные константы представить в виде функций пределов прочности при соответствующих нагружениях.

Прочность материала можно оценить также параметрами, характеризующими деформированное состояние. При этом нельзя забывать, что если в упругой области эти параметры являются однозначными функциями компонент тензора напряжений, то в неупругой области они зависят не только от конечного напряженного состояния, но и от пути нагружения.

Условие (III.1) в предельном случае переходит в уравнение, которое в трехмерном пространстве  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  интерпретируется поверхностью, ограничивающей область безопасных напряженных состояний.

Предельная поверхность разрушения является геометрическим местом точек, координаты которых равны пределам прочности, а точки, лежащие на предельной поверхности пластического течения (или предельной поверхности текучести), соответствуют пределам текучести материала при разных напряженных состояниях. Если одно из главных напряжений равно нулю, то предельное состояние будет описываться плоской кривой, которая в этом случае называется предельной кривой разрушения или предельной кривой текучести.

Кроме напряженного состояния на прочность материала оказывают влияние температура, градиенты напряжений, масштабный фактор и т. п. Поэтому поверхности равной прочности следовало бы строить в пространстве с максимальным количеством измерений. Однако выдвинутые до последнего времени гипотезы позволяют составить уравнения предельной поверхности лишь в трехмерном пространстве напряжений.

Геометрическая интерпретация условий прочности<sup>1</sup>, впервые предложенная Хейфом и Вестергардом, позволяет более ясно представить закономерности влияния вида напряженного состояния на сопротивление материала и установить расхождение между различными теориями, а также судить о логичности математической формулировки той или иной теории прочности. Учитывая эти обстоятельства, рассмотрим отдельно теории, которые в трехмерном пространстве напряжений представляются сингулярными поверхностями, имеющими ребра и угловые точки, и теории, интерпретирующиеся регулярными (гладкими) поверхностями, в каждой точке которых можно провести единственную касательную гиперплоскость.

Вопрос об установлении эквивалентных напряженных состояний имеет богатую историю; он находился в поле зрения многих выдающихся исследователей. Здесь мы, естественно, не сможем остановиться на всех предложениях, которые были сделаны различными авторами, а соблюдая, по возможности, хронологическую последовательность, осветим лишь теории, предложенные советскими и зарубежными исследователями, в основном для статических расчетов.

---

<sup>1</sup> В зависимости от величины, с которой сопоставляется эквивалентное напряжение, термин «условие прочности» может иметь смысл условия текучести, условия разрушения, условия, соответствующего заданному допуску на деформацию или заданному коэффициенту запаса по отношению к пределу текучести или пределу прочности.

### § 3. Теории прочности, интерпретирующиеся многогранниками

Идеи, положенные в основу той или иной теории прочности, должны иметь определенный физический смысл. Однако разработку теории очень сдерживает отсутствие необходимого экспериментального и теоретического материала о механизме деформации. Поэтому чисто феноменологический подход многих исследователей при выдвижении новых гипотез можно считать на данном этапе развития науки вполне справедливым.

Первой и наиболее простой теорией прочности явилась теория наибольших нормальных напряжений, ведущая свое начало от Галлилея и Лейбница [625]. Согласно этой теории опасное состояние материала наступает тогда, когда одно из главных нормальных напряжений примет значение, равное пределу прочности (или пределу текучести), определенному из простейших опытов. Это приводит к неравенству

$$\sigma_c \leq \sigma_1 \leq \sigma_p \quad (\text{III.3})$$

при условии  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , где  $\sigma_p$ ,  $\sigma_c$  — предельные напряжения при растяжении и сжатии (предел текучести, предел прочности или допускаемое напряжение).

Сторонниками этой теории были Ляме, Клебш. Позднее Ренкин предложил добавить три аналогичных условия для поля отрицательных напряжений. Под его именем теория была распространена в англо-американской литературе.

Соотношение (III.3) определяет в пространстве напряжений шесть плоскостей, параллельных координатным осям. Пересекаясь, эти плоскости образуют куб (рис. 24, а), на поверхности которого лежат точки, соответствующие предельным состояниям материала. На рис. 24, б показана область (ограничена квадратом) безопасных напряженных состояний для случая, когда  $\sigma_3 = 0$ .

Эта теория плохо соответствует данным испытаний многих реальных материалов. Она не объясняет, например, практически неограниченную прочность при высоких гидростатических давлениях.

Основы второй теории прочности впервые высказал Мариотт (1662 г.). Согласно его гипотезе, критерием прочности является наибольшее относительное удлинение. Такого же взгляда придерживались Поселье, Навье и Сен-Венан. Позднее Грасгофом [557] и Ресалем [619] было показано, что расчет материалов, одинаково сопротивляющихся

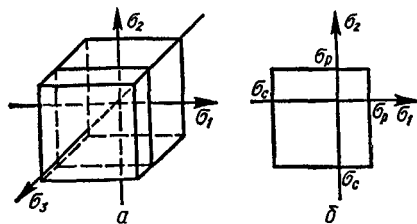


Рис. 24. Геометрическая интерпретация теории максимальных нормальных напряжений: а — в пространстве напряжений; б — на плоскости.

растяжению и сжатию, должен вестись по абсолютной величине деформации (без учета знака).

Условие прочности по этой теории, известной в литературе под названием теории приведенных напряжений, запишется таким образом:

$$\varepsilon_c \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_p$$

при  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$  или в напряжениях

$$\sigma_c \leq \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_p \quad (\text{III.4})$$

при условии, что  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

В свое время теория максимальных нормальных удлинений получила большое распространение в России, а также в некоторых западноевропейских странах, хотя против нее также имелись возражения.

Соотношение (III.4) в пространстве напряжений интерпретируется трехгранной пирамидой, а с учетом поправки Грасгофа — шестью парами плоскостей, которые, пересекаясь, образуют равносторонний косоугольный параллелепипед (ромбоид) с осью симметрии, равнонаклоненной к координатным осям (рис. 25, а). Предельная кривая для случая плоского напряженного состояния представлена на рис. 25, б. Как видно из рисунка, в случае двухосного растяжения прочность материала должна быть больше, чем при простом растяжении. Между тем опыты не подтверждают этого.

В третьей теории прочности в качестве критерия принято наибольшее касательное напряжение. Эта теория, предложенная Кулоном в 1773 г., обратила на себя внимание лишь после известных опытов Баушингера, которые показали, что сопротивление стали сдвигу близко к половине ее сопротивления растяжению. В теории Кулона нашел свое объяснение и факт высокой прочности материалов при всестороннем сжатии.

Условие наступления предельного состояния, согласно теории максимальных касательных напряжений, будет

$$\sigma_c \leq \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_p \quad (\text{III.5})$$

где, как и прежде,  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Соответствующие соотношениям (III.5) шесть плоскостей

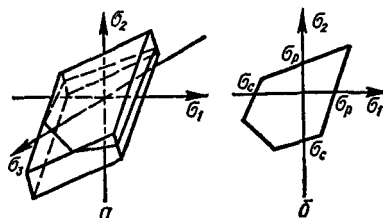


Рис. 25. Геометрическая интерпретация теории максимальных нормальных удлинений:

а — в пространстве напряжений; б — на плоскости.

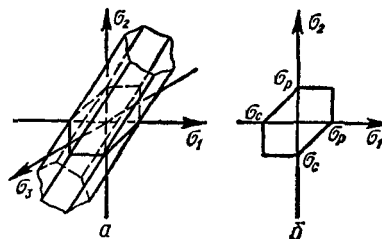


Рис. 26. Геометрическая интерпретация теории максимальных касательных напряжений:

а — в пространстве напряжений; б — на плоскости.



(рис. 26, а) при пересечении образуют правильную шестигранную призму (призма Кулона). На рис. 26, б представлена предельная кривая для случая плоского напряженного состояния. Условие постоянства максимального касательного напряжения предлагалось также в 1868 г. Треска, а в 1900 г. Гестом [372]. В 1870 г. условие Кулона — Треска использовал Леви для решения задач о давлении грунтов. Сен-Венан в 1871 г. применил это условие при построении теории пластического течения. В 1909 г. Людвиг [585] предложил обобщенную кривую  $\tau_{\max} = f(\gamma_{\max})$  и тем самым распространил рассматриваемое условие пластичности на всю пластическую зону.

Чтобы распространить теорию максимальных касательных напряжений на материалы, по-разному сопротивляющиеся растяжению и сжатию, Кулон предположил, что в случае сжатия (среднее напряжение с отрицательным знаком) максимальное касательное напряжение является линейной функцией среднего нормального напряжения в плоскости расположения  $\tau_{\max}$ :

$$\tau_{\max} = a\sigma'_0 + b. \quad (\text{III.6})$$

Для случая одноосного растяжения и одноосного сжатия уравнение (III.6) запишется так:

$$\frac{\sigma_p}{2} = a \frac{\sigma_p}{2} + b; \quad \frac{\sigma_c}{2} = -a \frac{\sigma_c}{2} + b,$$

откуда

$$a = \frac{\sigma_p - \sigma_c}{\sigma_p + \sigma_c}; \quad b = \frac{\sigma_p \sigma_c}{\sigma_p + \sigma_c}. \quad (\text{III.7})$$

Подставляя выражения (III.7) в уравнение (III.6) и имея в виду, что

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad a \quad \sigma'_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2},$$

окончательно получаем

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_c} \sigma_3 \leq \sigma_p. \quad (\text{III.8})$$

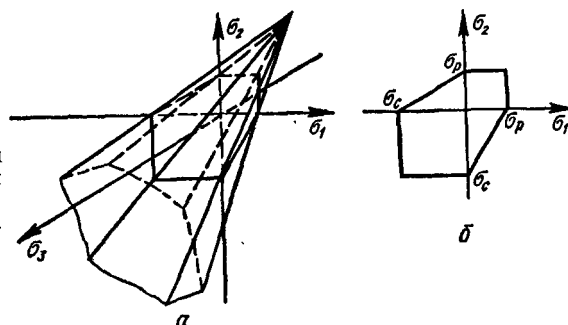
Позже критерий Кулона был распространен на произвольную систему напряжений [549, 606].

Предельная поверхность, соответствующая условию (III.8), — шестигранная равнонаклоненная к осям пирамида — представлена на рис. 27.

К уравнению (III.8) приводит также теория прочности Мора, если предположить, что предельная кривая, огибающая круги напряжений — прямая линия. Это предположение является грубым упрощением, не имеющим физического обоснования. Идею о замене предельных кривых Мора прямыми поддерживал

Рис. 27. Геометрическая интерпретация теории Кулона — Мора:

$a$  — в пространстве напряжений;  $b$  — на плоскости.



Прандтль [617], предложивший условие  $\sigma_1 - \sigma_3 = c_1 - c_2 \times (\sigma_1 + \sigma_3)$ , которое после выражения постоянных  $c_1$  и  $c_2$  через предельные напряжения при растяжении и сжатии также приводится к условию (III.8)

Основной смысл теории Мора сводится к эмпирическому определению кривой  $\tau = f(\sigma)$ , огибающей семейство предельных главных кругов Мора и состоящей из двух симметричных ветвей (рис. 28). Абсциссы  $\sigma$  и ординаты  $\tau$  точек касания кругов огибающими представляют нормальные и касательные напряжения, при которых начинается пластический сдвиг или разрушение. Таким образом, физический смысл теории Мора можно сформулировать так: нарушение прочности материала наступает либо при достижении касательными напряжениями  $\tau$  некоторой критической величины, зависящей от нормальных напряжений  $\sigma$ , действующих по тем же плоскостям скольжения, либо при достижении наибольшим нормальным напряжением  $\sigma_1$  предельного для данного материала значения.

Огибающие кругов Мора можно аппроксимировать аналитически различными кривыми, значительно расширив возможности теории. Предлагались различные виды огибающей главных кругов Мора как частные выражения зависимости  $\tau = f(\sigma)$ : парабола [422], циклоида [420], кривая Перлина [397] и др.

Отличаясь большой широтой в смысле охвата явлений, наблюдаемых при опыте, теория Мора продолжает совершенствоваться и развиваться [79, 309, 397, 412, 452, 460, 461, 526 и др.].

А. Ю. Ишлинским [176] предложена «гипотеза прочности формоизменения», которая, как отметил сам автор, в известном смысле сочетает идеи Губера — Мизеса и Кулона. За факторы, определяющие начало текучести, здесь принимаются величины, характери-

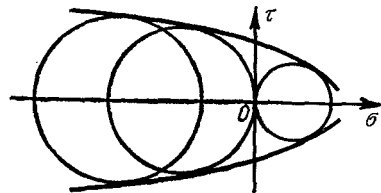


Рис. 28. Огибающая предельных кругов Мора.

зующие формоизменение элемента материала:

$$\gamma_1 = \varepsilon_1 - \theta; \quad \gamma_2 = \varepsilon_2 - \theta; \quad \gamma_3 = \varepsilon_3 - \theta,$$

где

$$\theta = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}.$$

Переходя к напряжениям и обозначая через  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  величины, пропорциональные  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ , получаем

$$S_1 = \frac{E}{1+\mu} \gamma_1 = \frac{2}{3} \sigma_1 - \frac{1}{3} \sigma_2 - \frac{1}{3} \sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_0.$$

Аналогично выражаются величины  $S_2$  и  $S_3$ . Условия отсутствия текучести можно записать в форме следующих неравенств:  $|S_1| < S_s$ ;  $|S_2| < S_s$ ;  $|S_3| < S_s$ . Величина  $S_s$  связана с пределом текучести  $\sigma_T$  материала. Действительно, при простом растяжении

$$S_1 = \frac{2}{3} \sigma; \quad S_2 = S_3 = -\frac{1}{3} \sigma.$$

Величина  $S_1$  обладает большим абсолютным значением и, следовательно, раньше остальных достигает значения  $S_s$  при  $\sigma = \sigma_T$ .

Таким образом, условие наступления предельного состояния имеет вид

$$2\sigma_1 - (\sigma_2 + \sigma_3) = \pm 2\sigma_T, \quad (\text{III.9})$$

причем  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . В пространстве напряжений это условие интерпретируется равнонаклоненной к осям правильной шестигранной призмой, в которую вписан цилиндр Мизеса, а на плоскости с координатами  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  — шестиугольником (рис. 29), образованным прямыми

$$2\sigma_1 - \sigma_2 = \pm 2\sigma_T; \quad \sigma_1 - 2\sigma_2 = \mp 2\sigma_T; \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \mp 2\sigma_T.$$

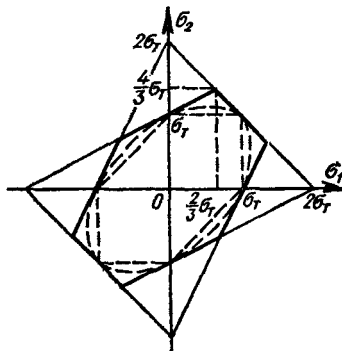


Рис. 29. Интерпретация теории энергии формоизменения А. Ю. Ишлинского на плоскости.

На рис. 29 для сравнения показаны также эллипс Мизеса и шестиугольник Кулона (штриховые линии).

Предел текучести при чистом сдвиге, согласно этой теории, должен составлять  $2/3$  предела текучести при растяжении:  $\tau_K = 0,667\sigma_T$  (по гипотезе Кулона  $\tau_K = 0,5\sigma_T$ , а по гипотезе Губера — Мизеса  $\tau_K = 0,577\sigma_T$ ).

Условие (III.9) рассматривалось Л. М. Седоковым [409] как обобщение деформационной теории. В работе [180] сделана попытка экспериментально получить условие, пригодное для описания предельного состояния квазихрупких материалов. Получен-

ное уравнение для плоского напряженного состояния имеет вид

$$\sigma_1^2 + \left( \frac{\sigma_p}{\sigma_c} \right)^2 \sigma_2^2 - 0,25 \frac{\sigma_p}{\sigma_c} \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_p^2. \quad (\text{III.10})$$

В работе [185] описана гипотеза А. Ф. Липатова, основанная на учете изменчивости хрупко-пластических свойств материала в зависимости от шарового тензора: с увеличением всестороннего сжатия хрупкий материал приобретает пластические свойства и, начиная с определенной величины гидростатического давления, ведет себя как пластическое тело, разрушаясь при значительных деформациях. В условиях всестороннего растяжения такой пластичный материал может разрушаться хрупко, при этом деформации формоизменения практически отсутствуют. Поэтому критерий прочности должен содержать в себе механические характеристики, описывающие хрупкие и пластические свойства материала. На основании обработки экспериментальных данных, полученных при испытании ряда хрупких материалов на сжатие при боковом давлении, А. Ф. Липатов вывел уравнение

$$\sigma_1^2 + 2\sigma_{пл}\sigma_1 + \sigma_c^2 = \sigma_3^2, \quad (\text{III.11})$$

которое в системе координат  $\sigma_1 - \sigma_3$  представляет квадратную гиперболу с асимптотами, наклоненными к осям координат под углом  $45^\circ$  (рис. 30, а). В уравнении (III.11)  $\sigma_{пл}$  — предел текучести материала в идеально пластичном состоянии;  $\sigma_c$  — предел прочности материала при сжатии.

Для случая одноосного растяжения ( $\sigma_3 = 0$ ) уравнение (III.11) примет вид

$$\sigma_p^2 + 2\sigma_{пл}\sigma_p + \sigma_c^2 = 0,$$

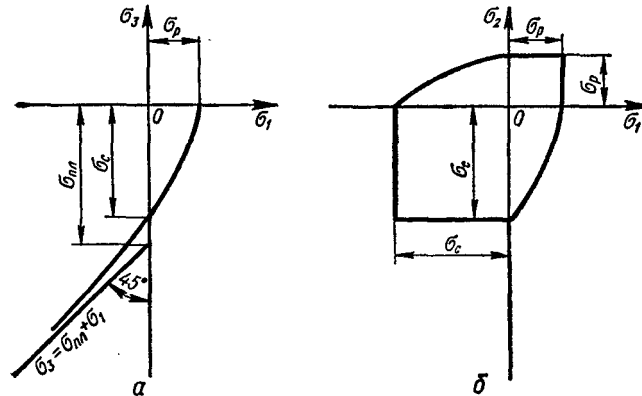


Рис. 30. Интерпретация гипотезы А. Ф. Липатова:

а — экспериментальная кривая; б — область безопасных напряжений.

откуда

$$\sigma_{пл} = - \frac{\sigma_c^2 + \sigma_p^2}{2\sigma_p}.$$

Тогда выражение для критерия можно записать следующим образом:

$$\sigma_1^2 - \frac{\sigma_c^2 + \sigma_p^2}{\sigma_p} \sigma_1 + \sigma_c^2 = \sigma_3^2. \quad (\text{III.11a})$$

Если материал обладает идеально пластичными свойствами ( $\sigma_p = \sigma_c$ ), то расчетное уравнение (III.11a) переходит в условие прочности Кулона (теория максимальных касательных напряжений)  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_p$ .

Предельная поверхность критерия, предложенного А. Ф. Липатовым, представляет собой равнонаклоненную к осям пространственную фигуру, имеющую в нормальном сечении правильный шестиугольник, размеры которого увеличиваются с увеличением гидростатического сжатия. При этом стороны шестиугольника асимптотически приближаются к граням призмы Кулона.

При равномерном трехосном растяжении ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$ ) площадь нормального сечения предельной поверхности стягивается в точку с координатами

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\sigma_c^2 \sigma_p}{\sigma_c^2 + \sigma_p^2} \approx \sigma_p.$$

Предельная кривая, соответствующая уравнению (III.11a) для случая плоского напряженного состояния, представлена на рис. 30, б.

Недостатком теории Липатова является игнорирование промежуточного нормального напряжения  $\sigma_2$ , влияние которого на предельное состояние материала можно считать доказанным.

Гипотеза Зенделя [632], описанная в работах [391] и [411], основывается на предположении, что предельное состояние материала возникает, когда максимальная деформация сдвига  $\gamma_{\max}$  достигает определенной, зависящей от средней линейной деформации, величины,

$$\gamma_{\max} = a - b(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)$$

или, после перехода к главным напряжениям,

$$\frac{1+\mu}{E}(\sigma_1 - \sigma_3) = a - b \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Выражая постоянные  $a$  и  $b$  через механические характеристики при растяжении и сжатии, получаем следующее расчетное урав-

нение, соответствующее гипотезе Зенделя:

$$\sigma_1 + \left(1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_c}\right) \frac{\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_p}{\sigma_0} \sigma_3 = \sigma_p. \quad (\text{III.12})$$

Условие (III.12) в пространстве напряжений соответствует поверхности шестигранной пирамиды, вписанной в круговой конус.

К аналогичному условию прочности пришли Н. Н. Давиденков [102] и И. И. Тарасенко [435], приняв условие наступления предельного состояния в форме

$$\tau_{\max} + a\sigma_0 = b. \quad (\text{III.13})$$

Для хрупких материалов условие прочности, по мнению И. И. Тарасенко [436], следует искать в виде

$$\sigma_1 + a\sigma_0 = b. \quad (\text{III.14})$$

Выразив постоянные через пределы прочности при растяжении — сжатии, после алгебраических преобразований условие прочности материалов в хрупком состоянии представим таким образом:

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_c} (\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_p. \quad (\text{III.15})$$

Дальнейшее развитие теории И. И. Тарасенко видит в учете девиатора напряжений, характеризующегося параметром Надаи—Люде (параметр вида девиатора).

#### § 4. Теории прочности, интерпретирующиеся поверхностями вращения

К этой группе теорий прочности относятся прежде всего теории, основанные на энергетических концепциях.

Мысль о том, что опасное состояние материала наступает при достижении удельной потенциальной энергией некоторого предела, впервые была высказана Бельтрами в 1885 г. К этому мнению в 1919—1921 гг. присоединился Хейг. Исходя из указанного предположения, расчетные уравнения теории Бельтрами — Хейга можно записать в виде

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \sigma_t^2, \quad (\text{III.16})$$

где  $\sigma_t^2$  — предел текучести материала. Уравнение (III.16) в пространстве напряжений представляется эллипсоидом вращения с центром в начале координат. Замкнутая форма предельной поверхности указывает на непригодность теории применительно к хрупким материалам.

Чтобы получить согласие этой теории с тем фактом, что материалы могут выдерживать значительные гидростатические давления, не приходя в состояние текучести, Губер в 1904 г. предложил,

в случае отрицательного шарового тензора, за критерий прочности принимать не полную величину потенциальной энергии, а только ту ее часть, которая соответствует изменению формы<sup>1</sup>. Таким образом, для указанного случая условие прочности, по Губеру, имеет вид

$$3(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2. \quad (\text{III.17})$$

Изучая вопросы пластической деформации материалов, Мизес в 1913 г. и Генки в 1914 г. обобщили теорию Губера и независимо друг от друга пришли к выводу, что условие (III.17) справедливо как при отрицательном, так и при положительном шаровом тензоре. Следовательно, условие (III.17) предполагает наступление критического состояния при достижении энергией формоизменения некоторой предельной величины. Однако этим не исчерпывается трактовка физического смысла рассматриваемой теории. Уравнение (III.17) можно получить, принимая за критерий любую величину, которая формально эквивалентна энергии формоизменения. К таким величинам можно отнести касательное напряжение в октаэдрической площадке [622], «среднее» касательное напряжение на поверхности элементарной сферы, введенное В. В. Новожиловым [319],

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{15}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$$

площадь трех кругов Мора, построенных для данного напряженного состояния [278],

$$F = \frac{\pi}{4} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2],$$

максимальное среднеквадратичное отклонение главных напряжений исследуемого напряженного состояния от напряжения, характеризующего ближайшее гидростатическое растяжение — сжатие [373],

$$\Delta_{\min} = \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

Наконец, критерий теории «энергии формоизменения» пропорционален второму инварианту девиатора напряжений

$$I_2' = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

Условие пластичности Мизеса — Генки, как и условие постоянства максимальных касательных напряжений, было распространено на всю область пластических деформаций. Интересно, что урав-

<sup>1</sup> В работе [102] приведено письмо Максвелла, написанное в 1856 г., в котором высказывается предположение о том, что пластическое состояние материала наступает при достижении предельного значения энергии формоизменения.

нение (III.17) выведено в предположении, что между напряжениями и деформациями существует линейная зависимость, поэтому оно, казалось бы, теряет логический смысл за пределом пропорциональности и тем более за пределом текучести. Однако последняя трактовка теории (о пропорциональности критерия второму инварианту девиатора напряжений) дает основание использовать уравнение (III.17)

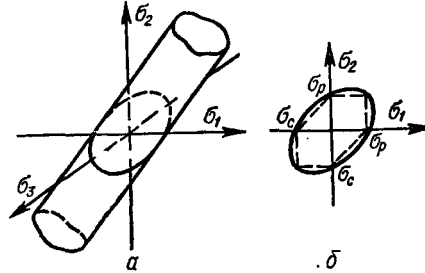


Рис. 31. Цилиндр (а) и эллипс (б) Мизеса.

для выполнения «пластических» расчетов, т. е. за пределами применимости закона Гука, что равносильно принятию в качестве критерия не полной энергии изменения формы, а только упругой ее части, зависящей от указанных компонентов полных деформаций при пластическом деформировании. При этом необходимо учитывать возможное влияние деформационной анизотропии. Было, например, обнаружено, что в случаях сложного нагружения возникающая при пластическом деформировании анизотропия иногда приводит к парадоксальным результатам: уменьшению интенсивности напряжений (при наложении второй нагрузки) может сопутствовать увеличение интенсивности деформации [440], коэффициент поперечной деформации при втором нагружении может принимать различные значения, вплоть до отрицательных [16].

Уравнение (III.17) в пространстве напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  определяет поверхность равнонаклоненного к осям кругового цилиндра, описанного вокруг призмы Кулона (рис. 31). При плоском напряженном состоянии предельная кривая представляется эллипсом. Штриховой линией на рис. 31, б показан для сравнения шестиугольник, соответствующий теории максимальных касательных напряжений.

Большинство новейших энергетических теорий укладывается в рамки высказанной А. Надаи [309] гипотезы о том, что в предельном состоянии октаэдрическое касательное напряжение

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

является функцией октаэдрического нормального напряжения:

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Таким образом, согласно А. Надаи, условие наступления предельного состояния следует искать в виде

$$\tau_{\text{окт}} = f(\sigma_{\text{окт}}). \quad (\text{III.18})$$



В системе координат  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  это уравнение описывает поверхность вращения, равнонаклоненную к осям.

Гипотезу Надаи можно рассматривать как более общую формулировку теории прочности Мора. Если по Мору наступление предельного состояния происходит, когда касательное напряжение  $\tau$  в плоскостях скольжения увеличивается до определенной величины, зависящей от нормального напряжения  $\sigma$ , которое действует по тем же плоскостям, то по гипотезе Надаи аналогичные условия должны выполняться на октаэдрической площадке.

Учитывая, что октаэдрические касательные напряжения с точностью до коэффициента равны интенсивности напряжений, а октаэдрические нормальные напряжения равны среднему нормальному напряжению (шаровому тензору), гипотезу Надаи можно также записать в виде

$$\sigma_i = \Psi(\sigma_0). \quad (\text{III.18a})$$

Влияние октаэдрического нормального напряжения (шарового тензора) на сопротивление материала деформированию было обнаружено еще в работах Лоде [438].

Первая гипотеза вида (III.18a) была предложена в 1925 г. Ф. Шлейхером [627]. По мнению Шлейхера, опасное состояние материала наступает при определенном значении полной удельной потенциальной энергии, причем критическое для нее значение является функцией шарового тензора. Разлагая полную удельную потенциальную энергию на упругую энергию изменения объема и упругую энергию изменения формы, гипотезу Шлейхера представим в виде

$$U_{\text{уд}}^{\Phi} = f(\sigma_0) - U_{\text{уд}}^0$$

или для линейно-упругого изотропного тела

$$\frac{\sigma_i^2}{6G} = f(\sigma_0) - \frac{\sigma_0^2}{2K}. \quad (\text{III.19})$$

Из предложенной Шлейхером зависимости вида (III.19) вытекает следующее условие прочности:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + \\ + (\sigma_c - \sigma_p)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_p\sigma_c, \end{aligned} \quad (\text{III.19a})$$

откуда

$$\tau_k = \sqrt{\frac{\sigma_p\sigma_c}{2(1+\mu)}}.$$

В пространстве напряжений уравнению (III.19a) соответствует эллипсоид вращения, центр которого смещен от начала координат.

Эта теория, равно как и все описанные ниже новейшие теории, применима к материалам с любым соотношением  $\chi = \frac{\sigma_p}{\sigma_c}$  в пределах  $1 > \chi > 0$ . Легко видеть, что при  $\sigma_p = \sigma_c$  уравнение (III.19a) соответствует теории Бельтрами — Хейга.

Гипотеза Шлейхера плохо подтверждается имеющимися экспериментальными данными, и поэтому не получила распространения.

Еще более универсальной является гипотеза Бужинского [525], согласно которой опасное состояние материала наступает при достижении энергией, состоящей из энергии формоизменения и некоторой части энергии изменения объема, определенного критического значения, являющегося в свою очередь линейной функцией шарового тензора.

Применительно к интенсивности напряжений и шаровому тензору гипотезу Бужинского можно представить уравнением

$$\sigma_i^2 = A + B\sigma_0 + C\sigma_0^2. \quad (\text{III.20})$$

Если коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  определить из опытов на растяжение, сжатие и кручение, то, переходя к главным напряжениям, получим следующее расчетное уравнение:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \left( \frac{\sigma_c \sigma_p}{2\tau_k^2} - 1 \right) (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) + \\ + (\sigma_c - \sigma_p) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c \sigma_p. \end{aligned} \quad (\text{III.20a})$$

При определенных соотношениях между константами, найденными из опыта на растяжение, сжатие и кручение, предельная поверхность может обращаться в любую из поверхностей вращения: сферу (при  $\tau_k = \sqrt{\frac{\sigma_p \sigma_c}{2}}$ ), эллипсоид (при  $\tau_k > \sqrt{\frac{\sigma_p \sigma_c}{3}}$ ), параболоид (при  $\tau_k = \sqrt{\frac{\sigma_p \sigma_c}{3}}$ ), круговой цилиндр (при  $\tau_k = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}$  и  $\sigma_c = \sigma_p$ ), двуполый гиперболоид (при  $\sqrt{\frac{\sigma_p \sigma_c}{3}} > \tau_k > \frac{2\sigma_p \sigma_c}{\sqrt{3}(\sigma_p + \sigma_c)}$ ), круговой конус (при  $\tau_k = \frac{2\sigma_p \sigma_c}{\sqrt{3}(\sigma_p + \sigma_c)}$ ), однополый гиперболоид (при  $\tau_k < \frac{2\sigma_p \sigma_c}{\sqrt{3}(\sigma_p + \sigma_c)}$ ). Если отношение  $\frac{\sigma_p}{\sigma_c}$  стремится к нулю, то предельная поверхность вырождается в девиаторную плоскость.

Таким образом, уравнение (III.20a) — более общее уравнение поверхностей вращения второго порядка, а гипотеза Бужинского содержит в себе как частные случаи все предложенные энергетические теории вида (III.18).

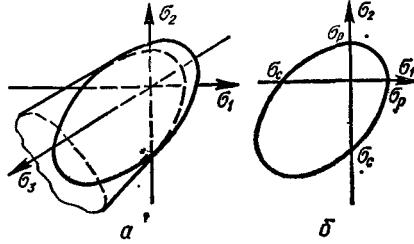


Рис. 32. Интерпретация гипотезы П. П. Баландина:  
а — в пространстве напряжений; б — на плоскости.

С гипотезой Бужинского тождественно совпадает теория прочности Ю. И. Ягна [506], хотя она базируется на совершенно других представлениях. Исходя из геометрических соображений о форме предельной поверхности изотропных материалов, Ю. И. Ягн полагает, что уравнение поверхности, интерпретирующей теорию прочности в пространстве напряжений, необходимо искать в виде уравнения второй степени, которое

симметрично по отношению к трем главным напряжениям. Этому требованию удовлетворяет следующее уравнение:

$$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + a(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + b(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = c.$$

Определяя константы  $a$ ,  $b$  и  $c$  из простейших опытов, получаем условие прочности, которое легко приводится к виду (III.20а):

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + \frac{6\tau_k^2 - 2\sigma_p\sigma_c}{\sigma_p\sigma_c}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \frac{6\tau_k^2(\sigma_c - \sigma_p)}{\sigma_p\sigma_c}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 6\tau_k^2. \quad (\text{III.21})$$

Уравнение (III.20) рассматривалось и другими авторами [272, 459, 618].

П. П. Баландиным [12] была предложена теория прочности, основанная на предположении, что предельное значение удельной потенциальной энергии формоизменения является функцией шарового тензора, причем в первом приближении эта функция принята линейной. Легко доказать, что такая гипотеза является частным случаем гипотезы Бужинского (в уравнении (III.20) коэффициент  $c = 0$ ) и приводит к следующему условию прочности:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + (\sigma_c - \sigma_p)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_p\sigma_c. \quad (\text{III.22})$$

В пространстве  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  теория Баландина интерпретируется параболоидом вращения (рис. 32).

Аналогичное уравнение было предложено в 1958 г. Г. А. Гениевым [68], как своего рода обобщение теории прочности Мора и теории наибольших нормальных напряжений. Систему предельных поверхностей, составленную тремя парами плоскостей, параллельных координатным (теория наибольших нормальных напряжений), и поверхностью, интерпретирующей в пространстве напряжений

теорию Мора, Г. А. Гензель предлагает аппроксимировать параболоидом вращения, ось которого равнонаклонена к осям координат, а вершина находится в точке, соответствующей пределу прочности при всестороннем растяжении. Уравнение этого параболоида в виде (III.22) принимается за условие прочности.

Критерии, интерпретирующиеся в пространстве напряжений параболоидами вращения, предлагались также в 1949 г. Торре и в 1950 г. Стасси [425].

Некоторыми авторами были предложены теории, в основу которых положено условие (III.18) в более простом виде. Эти работы также можно рассматривать как обобщение энергетических теорий для распространения их на материалы, по-разному сопротивляющиеся растяжению и сжатию.

Большая группа теорий прочности основывается, в частности, на линейной зависимости между касательными и нормальными напряжениями в октаэдрической плоскости. Впервые такого вида зависимость была, по-видимому, предложена с соответствующим физическим обоснованием в 1940 г. А. И. Боткиным [40], хотя на возможность использования линейной связи указывал еще в 1934 г. Клебовский [574].

А. И. Боткин рассматривает октаэдрические напряжения как инвариантные величины вида  $\sqrt{\frac{1}{3}(I_1^2 - 2I_2)}$  для шарового тензора и девиатора напряжений. Эти величины он принимает в качестве критериев для оценки «интенсивности гидростатического напряжения» и «интенсивности напряжения сдвига», оказывающих различное влияние на сопротивление материалов. Если интенсивность гидростатического напряжения сама по себе безопасна для прочности, а лишь возбуждает в материале «междучастичные» силы трения и тем самым повышает сопротивление, то интенсивность напряжения сдвига стремится преодолеть эти силы и силы сцепления и разрушить элемент.

Для оценки прочности пластичных материалов, внутреннее трение которых незначительно по сравнению с силами сцепления, необходима одна постоянная — коэффициент сцепления, а прочность, например сыпучих материалов, обеспечивается исключительно междучастичными силами трения. В соответствии с этим для оценки прочности сыпучих материалов необходима только одна постоянная — коэффициент внутреннего трения. А. И. Боткин считает, что большинство реальных материалов («хрупкие материалы») занимает промежуточное положение между пластичными и сыпучими. Поэтому для оценки их прочности необходимо знать две константы.

Предполагая, что разрушение наступает тогда, когда величина напряжения сдвига достаточна для преодоления сил трения и сцепления между частицами, Боткин записывает условие прочности

в виде линейной зависимости<sup>1</sup>  $\tau_{\text{окт}} \leq m(n + \sigma_{\text{окт}})$ , которая после выражения коэффициентов  $m$  и  $n$  через пределы прочности при растяжении и сжатии и перехода к главным напряжениям преобразуется в следующее условие прочности:

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \frac{2\sqrt{2}\sigma_c\sigma_p}{\sigma_c + \sigma_p} - \frac{\sqrt{2}(\sigma_c - \sigma_p)}{\sigma_c + \sigma_p} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (\text{III.23})$$

Легко показать, что уравнение (III.23) является уравнением кругового конуса (рис. 33), ось которого равнонаклонена к осям  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , а вершина имеет координаты

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_c\sigma_p}{\sigma_c - \sigma_p}.$$

При  $\sigma_3 = 0$  (плоское напряженное состояние) предельная кривая в системе координат  $\sigma_1 - \sigma_2$  в зависимости от значения  $\frac{\sigma_p}{\sigma_c}$  может быть эллипсом ( $1 \leq \frac{\sigma_p}{\sigma_c} \leq 0,27$ ), параболой ( $\frac{\sigma_p}{\sigma_c} = 0,27$ ), гиперболой ( $\frac{\sigma_p}{\sigma_c} \leq 0,27$ ).

Таким образом, основными характеристиками, определяющими прочность материала, являются, по мнению автора гипотезы, коэффициент внутреннего трения  $m$  и коэффициент сцепления  $n$ .

Линейную зависимость между октаэдрическими касательными и нормальными напряжениями исходя из различных концепций предлагали также в 1941 г. С. В. Серенсен [411] (как обобщение теории Мора), в 1951 г. Фрейденваль [555], в 1953 г. И. Н. Миролюбов [298] (определяя прочность материала его сопротивлением сдвигу в октаэдрической плоскости), а в 1955 г. Блейки и Биресфорд [521], Бреслер и Пистер [523] (как обобщение результатов испытания бетона при сложном напряженном состоянии).

К. К. Шкарбелис [498] предлагает следующий вид функциональной зависимости между октаэдрическими напряжениями:

$$\tau_{\text{окт}}^\alpha + a\sigma_{\text{окт}}^\beta \leq b, \quad (\text{III.24})$$

<sup>1</sup> В работе С. В. Серенсена [411] имеется ссылка на то, что условие подобного типа предлагалось ранее И. М. Беляевым в докладе на совещании по теории упругости и пластичности АН СССР в декабре 1938 г.

где  $a, b, \alpha, \beta$  — константы материала, определяемые из четырех опытов при различных видах напряженного состояния.

На основании обработки экспериментальных данных по исследованию прочности материалов типа бетона показано, что в условиях двухмерного напряженного состояния связь между октаэдрическими нормальными и касательными напряжениями в первом приближении можно принять линейной:

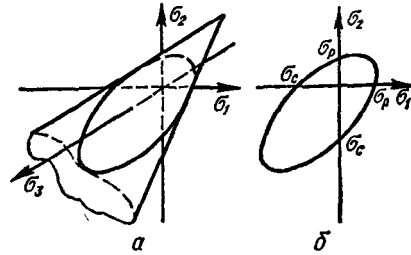


Рис. 33. Геометрическая интерпретация линейной зависимости между нормальными и касательными октаэдрическими напряжениями:  
а — в пространстве; б — на плоскости.

$$\tau_{\text{окт}} + a\sigma_{\text{окт}} \leq b.$$

Условие прочности бетона для случая объемного напряженного состояния предлагается в виде

$$\tau_{\text{окт}}^{\alpha} + a\sigma_{\text{окт}} \leq b$$

при  $\alpha = 1,4 \div 1,6$ .

Условие прочности в виде зависимости (III.24) при  $\alpha = \beta = 2$  было предложено в 1953 г. китайским ученым Лю Шу И на основе представлений о переходе энергии деформаций в поверхностную энергию трещин. Критерий Лю Шу И сводится к условиям

$$\begin{aligned} U_{\text{уд}}^{\Phi} + U_{\text{уд}}^0 &= \text{const при } \sigma_0 > 0; \\ U_{\text{уд}}^{\Phi} - U_{\text{уд}}^0 &= \text{const при } \sigma_0 < 0. \end{aligned}$$

Выражая энергию через компоненты тензора напряжений, получаем

$$\begin{aligned} (1 - \mu)[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \pm \\ \pm (1 - 2\mu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \text{const} \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

или, принимая  $\mu = 0,25$  и вводя величины

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2};$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

уравнение (III.25) записываем в более простой форме:

$$2,5\sigma_i^2 \pm 4,5\sigma_0^2 = \text{const}.$$

В 1952 г. Друккер и Прагер [547] предложили условие, которое можно привести к виду

$$\tau_{\text{окт}} = (a - b\sigma_{\text{окт}})^2, \quad (\text{III.26})$$

а в 1960 г. Метсура [598] обобщил это условие, показав, что применительно к грунтам лучше использовать следующее соотношение между октаэдрическими напряжениями:

$$\tau_{\text{окт}} = (a - b\sigma_{\text{окт}})^2 - c\sigma_{\text{окт}}^2. \quad (\text{III.27})$$

Аналогичное условие в виде

$$\tau_{\text{окт}} = a + b\sigma_{\text{окт}} + c\sigma_{\text{окт}}^2 \quad (\text{III.28})$$

предлагали в 1963 г. Ху и Пей [564]. В этих уравнениях константы материала  $a$ ,  $b$  и  $c$  определяются экспериментально.

Различные варианты учета влияния шарового тензора для расширения возможностей энергетических теорий предлагались также авторами работ [9, 47, 67, 151, 285, 509, 586, 637, 641 и др.].

Критерии прочности, интерпретирующиеся поверхностями вращения, были получены также на основе предпосылок, не связанных с энергетическими представлениями. Так, Г. А. Дошинский [124] считает, что наступление предельного состояния материала определяется величиной абсолютных значений компонентов деформаций. Общей мерой этой величины может служить среднее квадратичное от  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$

$$\epsilon_{\text{ср}}^{\text{кв}} = \sqrt{\frac{1}{3}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)}.$$

Соответствующее этому критерию условие эквивалентности в напряжениях примет вид

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2\mu(2-\mu)}{1+2\mu^2}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \sigma_p^2. \quad (\text{III.29})$$

В пространстве напряжений уравнение (III.29) представляется вытянутым в направлении оси симметрии пространства эллипсоидом вращения, вырождающимся при  $\mu = 0,5$  в цилиндр Губера — Мизеса — Генки.

Для хрупких материалов предельное значение средней деформации не является постоянным, а, как следует из опытов, возрастает при переходе от растяжения к сжатию. Поэтому для распространения условия (III.29) на хрупкие материалы Г. А. Дошинский [125] принимает предельное значение среднеквадратичной деформации линейно зависящим от относительной величины объемной деформации:

$$\epsilon_{\text{ср}}^{\text{кв}} = A\theta + B. \quad (\text{III.30})$$

Определяя значения постоянных  $A$  и  $B$  по результатам испытаний материала на растяжение и сжатие и выражая деформации через напряжения, переходим к следующей форме условия прочности:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2\mu(2-\mu)}{1+2\mu^2}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} + \frac{\sigma_c - \sigma_p}{\sigma_c + \sigma_p}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{2\sigma_p\sigma_c}{\sigma_c + \sigma_p}. \quad (\text{III.30a})$$

В зависимости от соотношений между константами материалов  $\mu$ ,  $\sigma_p$ ,  $\sigma_c$  возможными предельными поверхностями будут цилиндр, конус (при  $\mu = 0,5$ ), эллипсоид, параболоид, гиперboloид (при  $\mu \neq 0,5$ ). В отличие от теории Боткина [см. уравнение (III.23)] условие Дошинского учитывает влияние на прочность упругих характеристик материала. Это имеет смысл, так как упругое поведение хрупких материалов наблюдается почти до разрушения.

Пределы применимости линейной зависимости (III.30) ограничены интервалом  $\sigma_c \leq (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_p$ . Расчеты вне этого интервала могут привести к значительным ошибкам [125].

Н. И. Волковым [58] рассматривалось условие

$$\varepsilon_\gamma^2 = A\theta + B, \quad (\text{III.31})$$

где  $\varepsilon_\gamma$  — некоторый результирующий сдвиг ( $\varepsilon_\gamma = \sqrt{3} \varepsilon_{\text{ср}}^{\text{кв}}$ ).

Используя соотношения Гука и выразив константы  $A$  и  $B$  через предельные напряжения при растяжении и сжатии, получим следующее условие прочности в напряжениях:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2\mu(2-\mu)}{1+2\mu^2} (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + \\ + (\sigma_c - \sigma_p)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_p\sigma_c. \end{aligned} \quad (\text{III.31a})$$

Легко заметить, что условие (III.31a) отличается от условия (III.20a) только коэффициентом при втором слагаемом левой части и, в зависимости от значения коэффициента поперечной деформации, интерпретируется сферой (при  $\mu = 0$ ), эллипсоидом (при  $0 < \mu < 0,5$ ) или параболоидом (при  $\mu = 0,5$ ).

## § 5. Объединенные теории прочности

При сравнении результатов теоретических расчетов с экспериментальными данными было замечено, что для каждой гипотезы есть область напряженных состояний, в которой теория наиболее хорошо согласуется с опытом. Это обстоятельство привело к мысли о целесообразности разделения предельной поверхности на ряд поясов, из которых один может оказаться, например, цилиндром, другой — конусом и т. д. (рис. 34).

Концепция о невозможности описания предельного состояния материала одним уравнением наиболее ярко выражена в объединенной теории прочности Давиденкова — Фридмана. Эта теория основана на следующих основных положениях [465]:

1. В зависимости от характера напряженного состояния материал может разрушаться как от нормальных напряжений (хрупкое разрушение или разрушение отрывом), так и от касательных напряжений (пластическое разрушение — разрушение срезом).

2. Для каждого материала существует не зависящая от вида напряженного состояния связь между напряжениями и деформациями



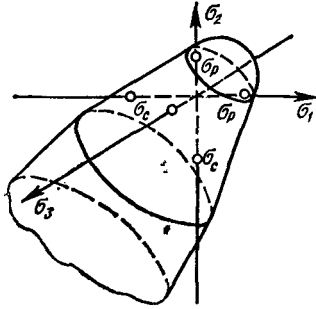


Рис. 34. Общий вид предельной поверхности, состоящей из отдельных поясов.

в координатах касательное напряжение — сдвиг. Для пластичных материалов конечная ордината кривой деформирования, представляющей собой предельное сопротивление срезу, является константой материала.

Эту теорию удобно представить графически в виде известной диаграммы механического состояния, в которой отражены основные свойства материала (рис. 35). В правой части диаграммы помещается кривая течения, не зависящая от вида напряженного состояния, а в левой части прямыми, параллельными координатным осям системы  $\tau_{\max} - S$ , представлены предельные состояния текучести и разрушения. Здесь  $S$  — эквивалентное напряжение, соответствующее наибольшей линейной положительной деформации. Каждому напряженному состоянию соответствует луч, исходящий из начала координат. Так, например, луч, наклоненный к оси под углом, тангенс которого  $\frac{1}{2\mu}$ , соответствует одноосному сжатию. В зависимости от того, какую предельную кривую пересекает этот луч, определяют вид разрушения (путем отрыва или путем сдвига), а значит, и теорию прочности, по которой следует вести расчет.

Таким образом, предельная поверхность, соответствующая гипотезе Фридмана, представляет собой равнонаклоненную шестигранную призму, ограниченную с противоположных сторон трехгранной пирамидой.

Пельчинский [613, 614] считает, что при разрушении срезом вместо теории максимальных касательных напряжений лучше использовать энергетическую теорию Мизеса — Генки; в этом случае соответствующая предельная поверхность имеет вид за-

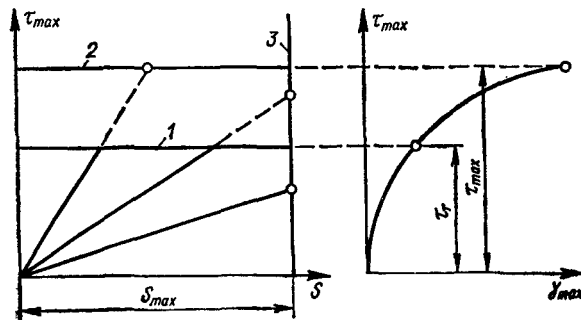


Рис. 35. Диаграмма механического состояния по Фридману:

1 — начало текучести; 2 — разрушение сдвигом; 3 — разрушение отрывом.

чиненного цилиндрического карандаша. К аналогичному выводу о виде поверхности пришел Клебовский [573].

На целесообразность разделения предельной поверхности на ряд поясов указывали также Бекер [28], Буртон [526], Давиденков [110], Вайглер [640] и др.

На рис. 36 показана предельная поверхность, соответствующая модифицированной теории прочности Кулона — Мора [526]. Здесь вершина шестигранной пирамиды Кулона срезана тремя плоскостями, параллельными координатным. Буртон указывает также на возможность замены поверхности разрушения поверхностью текучести в зоне всестороннего сжатия, где благодаря большому гидростатическим давлениям материал становится более пластичным.

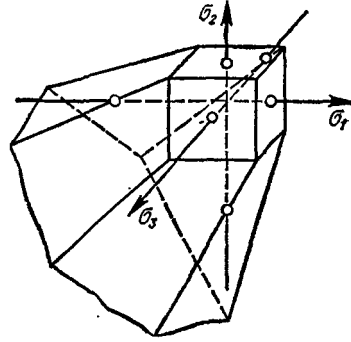


Рис. 36. Предельная поверхность, соответствующая модифицированной теории Кулона — Мора.

## § 6. Сравнительный анализ теорий прочности

Справедливость той или иной гипотезы можно подтвердить только путем сопоставления результатов расчета с экспериментально известными фактами. Надежных экспериментальных данных при сложном напряженном состоянии пока недостаточно, поэтому здесь мы рассмотрим лишь некоторые общие положения, относящиеся к теориям прочности, и сформулируем основные требования к ним. О степени пригодности той или иной теории можно в какой-то мере судить по их соответствию этим требованиям.

Теория прочности должна иметь четкий физический смысл. Нельзя считать убедительными те приемы при построении теории, которые базируются на абстрактных математических операциях с последующим определением неизвестных параметров — констант материала.

Для понимания сути сложных процессов и получения необходимой информации о веществе иногда целесообразно исследовать его физические свойства в возможно более общей форме, т. е. охарактеризовать вещество, воплощенное в реальное тело, с которым мы встречаемся в повседневной жизни. Именно такой подход с элементами идеализации некоторых свойств твердых тел и характерен для механических подходов при исследовании критериев прочности.

Из бесконечного числа факторов, прямо или косвенно влияющих на закономерности деформирования и величину прочности, очень важно выбрать те, которые являются определяющими для

рассматриваемых процессов. От правильного, физически обоснованного выбора отправных гипотез зависит точность полученных на основе данной теории расчетных формул.

Теория прочности должна формулироваться уравнением с минимальным количеством констант материала, определяемых из простейших опытов. Вряд ли есть смысл искать инвариантные к виду напряженного состояния функции, содержащие одну константу. Такие функции в лучшем случае могут описать сопротивление лишь тех материалов, которые находятся в состоянии, близком к состоянию идеально пластичного или идеально хрупкого тела.

Если сопротивление материала считается функцией только напряженного состояния, то основные механические свойства подавляющего числа реальных материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению — сжатию, можно отразить в расчетном уравнении двумя константами.

Учет таких факторов, как температура, скорость нагружения, градиент напряжений, масштаб и другие, не всегда представляется возможным. Поэтому параметры, отражающие влияние указанных факторов, должны входить в критерий прочности в виде, удобном для их исключения при отсутствии необходимой информации о влиянии того или иного фактора.

Теория прочности должна формулироваться уравнениями, удобными для практического применения. Это требование, на первый взгляд кажущееся второстепенным, иногда бывает определяющим при решении конкретных задач. Дело в том, что при некоторых расчетах, например в пластической области или при расчетах на ползучесть, использование сложных инвариантных функций вызывает значительные математические трудности. В ряде случаев отдают предпочтение теориям прочности, в которых компоненты тензора напряжений представлены в виде независимых инвариантов тензора напряжений.

Необходимым требованием к теории прочности является удовлетворительное совпадение с опытом. Идеального совпадения результатов теоретических расчетов с опытными данными быть не может. Это объясняется не только идеализацией свойств материала при создании теории, но и неизбежным разбросом результатов опыта. Поэтому при экспериментальной проверке теории прочности следует пользоваться лишь теми статистически обработанными данными, которые не вызывают сомнений.

Практика инженерных расчетов показывает, что основным параметром, на который до сих пор часто ориентируются при выборе теории прочности, является остаточная деформация при разрушении. В зависимости от величины этой деформации материалы подразделяются на пластичные и хрупкие.

Как уже отмечалось, такое деление является условным, поскольку величина остаточной деформации зависит от вида напря-

женного состояния, при котором производится испытание, от режима испытаний — скорости нагружения, среды, температуры и т. п.

Этот вопрос требует специального исследования. Однако всегда следует иметь в виду, что один и тот же материал при одних напряженных состояниях течет, а при других — хрупко разрушается, причем резкого перехода от одного класса напряженных состояний к другим нет. Общая тенденция такова, что для напряженных состояний, при которых материал течет, характерно наличие больших сжимающих напряжений, а хрупкое разрушение характерно для нагружений, при которых напряжения положительны.

Большинство предложенных теорий прочности не нашло распространения в научной и технической литературе. Это объясняется не только отсутствием достаточного экспериментального обоснования того или иного предложения, но и часто громоздкостью их расчетных уравнений, а также необходимостью опытного определения большого числа констант материала.

Для пластичных материалов широкое распространение в расчетной практике, в том числе при пластических расчетах и при расчетах в условиях ползучести, получили теория максимальных касательных напряжений (условие Кулона) и теория энергии формоизменения (условие Мизеса — Генки).

Вначале полагали, что физические процессы, протекающие в материале, более полно отражают условие Кулона, а условие Мизеса было введено формально и использовалось лишь как математически удобное приближение, поскольку оно представляется одним уравнением. Впоследствии оказалось, что для ряда материалов условие Мизеса лучше согласуется с опытными данными, чем условие Кулона. В связи с этим возникла необходимость в выяснении физического смысла условия Мизеса. Эквивалентную функцию этого условия стали трактовать как октаэдрическое касательное напряжение, удельную энергию формоизменения и т. д.

Сравнивая инвариантные функции указанных теорий, можно обнаружить их некоторое сходство. В обеих теориях дается значение разности главных напряжений, но с тем отличием, что энергетическая теория принимает во внимание все три разности, а теория максимальных касательных напряжений учитывает только разность наибольшего и наименьшего из трех главных нормальных напряжений. Таким образом, оба условия связывают сопротивление материала деформированию только с касательными напряжениями: первое — с максимальными, второе — с октаэдрическими.

Известны попытки вывести расчетные уравнения Мизеса и Кулона, исходя из одного и того же энергетического начала. В работе [151] указывается, что при двухмерном протекании процесса деформирования (плоская деформация) можно использовать условие Кулона, а нестесненное деформирование лучше описывается усло-

вием Мизеса. В работе [472] условия Кулона и Мизеса обобщены в форме

$$\left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^n + (\sigma_2 - \sigma_3)^n + (\sigma_1 - \sigma_3)^n}{2} \right]^{\frac{1}{n}} = \sigma_p^n,$$

где показатель степени  $n$  не обязательно должен быть целым числом. При  $n = 1$  условие сводится к критерию Треска, при  $n = 2$  — к критерию Мизеса. Промежуточным значениям соответствуют предельные поверхности, расположенные между призмой Кулона и цилиндром Мизеса.

По мнению Д. Д. Ивлева [162], условие Кулона является более обоснованным с точки зрения общих экстремальных принципов механики деформируемых сред. Однако, как показано в работе [490], тем же принципам не в меньшей мере соответствует и условие Мизеса.

Для выяснения, какой из этих теорий надо отдать предпочтение, ставились специальные опыты. Результаты опытов не дали конкретного ответа в пользу той или иной теории. Локальность пластических деформаций и их развитие главным образом по плоскостям действия максимальных касательных напряжений позволяют предполагать, что начало образования пластических деформаций для пластичных материалов лучше согласуется с теорией наибольших касательных напряжений. С другой стороны, серьезное обоснование для применения энергетической теории можно найти в известных опытах Турнера, Лоде, Надаи и др.

Опыты А. М. Жукова [141, 142] над сталью 30ХН3А и сплавом ЭИ415 показали, что условие наступления текучести лучше согласуется с теорией Мизеса — Генки, а условие разрушения — с условием Кулона. Такие же результаты были получены Рошем и Эйхингером в опытах над углеродистыми сталями, а также Интерсоном на стальных образцах специальной формы [568].

В связи с противоречивостью экспериментальных результатов в некоторых работах делались попытки ввести «промежуточные» условия путем замены шестигранной призмы Кулона двенадцатигранной [423] (вписанной в цилиндр Мизеса), а также путем коррекции условия Мизеса дополнительными коэффициентами [67]. Г. В. Ужик [451] обратил внимание на принципиальное противоречие теории Мизеса — Генки, заключающееся в отрицании возможности остаточных объемных деформаций. Однако, как показали опыты Бриджмена и других исследователей, заметные остаточные объемные деформации подавляющего большинства конструктивных материалов отмечаются лишь при очень высоких гидростатических давлениях.

Естественно, что у отдельных материалов, для структуры которых характерно нарушение сплошности (например, некоторые металлокерамические и пористые композиции), влияние остаточных

объемных деформаций может быть весьма существенным. В этом случае лучшее соответствие с опытными данными обеспечивает, очевидно, гипотеза Г. А. Дошинского, связывающая наступление предельного состояния материала с величиной абсолютных значений компонент деформаций. Для расчета по критерию Дошинского достаточно иметь кривую деформирования при одноосном растяжении и найденный из этого же опыта характер изменения коэффициента поперечной деформации в зависимости от относительного удлинения.

Во многих нормах расчета и справочниках можно найти рекомендации о целесообразности использования применительно к хрупким материалам теории максимальных нормальных напряжений (первая теория прочности) и теории максимальных нормальных удлинений (вторая теория прочности). Как показывает анализ экспериментальных данных, теория максимальных нормальных напряжений применима только для таких очень хрупких материалов, как стекло, гипс и другие, а использование теории максимальных удлинений совершенно не обосновано [53, 110], хотя в литературе имеются указания на то, что разрушение таких материалов, как фарфор, удовлетворительно описывается этой теорией.

Развитие теорий прочности с целью распространения их на хрупкие материалы происходило в основном по пути модификации энергетической теории Мизеса — Генки и теории Кулона путем учета влияния шарового тензора.

Если теории первой группы укладываются в рамки гипотезы Надаи [309] в виде

$$f_1(\tau_{\text{окт}}, \sigma_{\text{окт}}, m_i) = 0,$$

то теории прочности второй группы можно объединить обобщенной зависимостью

$$f_2(\tau_{\text{max}}, \sigma_{\text{окт}}, m_i) = 0.$$

Легко показать, что теории прочности второй группы интерпретируются в пространстве напряжений многогранниками, вписанными в поверхности вращения  $f_1$  с образующими в виде кривых соответствующего порядка. Так, например, многогранник  $\tau_{\text{max}} = \text{const}$  (теория максимальных касательных напряжений) вписан в цилиндр Мизеса — Генки  $\tau_{\text{окт}} = \text{const}$ , многогранник  $\tau_{\text{max}} = m'_1 + m'_2 \sigma_{\text{окт}}$  (гипотеза И. И. Тарасенко) вписан в конус, интерпретирующий в пространстве напряжений гипотезу А. И. Боткина

$$\tau_{\text{окт}} = m''_1 + m''_2 \sigma_{\text{окт}}.$$

Теории второй группы следует, очевидно, рассматривать как некоторые приближения к соответствующим энергетическим теориям, геометрическая интерпретация которых плавными поверхностями более логична (этот вопрос подробно рассмотрен в § 2 следующей главы).

Поверхности предельного состояния, соответствующие теориям второй группы, ограничены плоскими гранями, поэтому соответствующие условия прочности для самых общих случаев не могут быть выражены одной формулой, в которой все главные напряжения равноправны. Этого недостатка не имеют теории первой группы, для которых условия предельного состояния выражены аналитическими функциями, что облегчает их использование при построении математического аппарата в соответствующих расчетах.

Основываясь на результатах исследования прочности хрупких материалов в условиях плоского напряженного состояния, некоторые авторы отдают предпочтение теории Бужинского — Ягна. Однако не следует забывать, что необходимость экспериментального определения трех констант материала уже предопределяет лучшее соответствие теории опытным данным. Кроме того, как было отмечено П. П. Баландиным [12], в расчетном уравнении этой теории нарушена логическая необходимость постепенности перехода одного вида поверхности в другой; в результате при малом изменении одной из характеристик материала ( $\sigma_p$ ,  $\sigma_c$  или  $\tau_k$ ) можно получить бесконечное приращение в области прочных состояний. Это обстоятельство требует особой осторожности при практическом использовании расчетных уравнений, так как никогда не может быть полной уверенности в абсолютно точном значении определяемых из опыта механических характеристик материала. Все указанные недостатки присущи и гипотезе Дошинского [103] применительно к хрупким материалам, которая также не имеет однозначной геометрической интерпретации.

В свете отмеченных недостатков теории Бужинского — Ягна представляют интерес теории, в основу которых положены более простые соотношения между октаэдрическими напряжениями. Сюда можно отнести критерии вида  $\sigma_i^2 = A_1 + B_1 \sigma_{\text{окт}}$  и  $\sigma_i = A_2 + B_2 \sigma_{\text{окт}}$ , которым в пространстве напряжений соответствуют параболоид вращения (теория Баландина) и круговой конус (теория Боткина — Миролюбова), равнонаклоненные к главным осям. Из сравнения этих теорий с результатами опытов (см. рис. 53) видно, что теория Баландина находится в лучшем соответствии с опытом для материала с отношением критических напряжений при растяжении к критическим напряжениям при сжатии в пределах  $0,2 < \frac{\sigma_p}{\sigma_c} < 1$ . При  $0 < \frac{\sigma_p}{\sigma_c} < 0,2$  в лучшем соответствии с опытом находится теория Боткина — Миролюбова.

Широкое распространение в инженерной практике, особенно в горном деле, получила теория Мора. Эта теория носит полуэмпирический характер, так как для достаточно точной аналитической аппроксимации огибающих кругов напряжений необходима

постановка соответствующих опытов, что и предопределяет ее хорошее соответствие эксперименту.

Подробный критический анализ этой теории можно найти в работах [110, 111, 184, 212, 309, 397, 412, 461, 526 и др.], где рассмотрены также пути ее дальнейшего развития и модификации. Здесь лишь отметим, что замена огибающих кругов напряжений прямыми линиями вряд ли целесообразна, так как она приводит к значительному занижению расчетной прочности в широком диапазоне напряженных состояний (см. рис. 52 и 54).

Объединенная теория прочности Я. Б. Фридмана, являясь большим шагом в развитии теорий прочности, имеет существенные недостатки, значительно сужающие круг материалов, на которые она может быть распространена. К таким недостаткам прежде всего следует отнести приближенный характер положенных в ее основу критериев прочности. Еще Людвиг, предложивший кривые  $\tau_{\max} - \gamma_{\max}$  как абсолютные характеристики материала, подчеркивал их приближенный характер [585]. Об этом же говорят работы и других исследователей. Критерий, постулирующий постоянство максимальных удлинений, как уже отмечалось, также не подтверждается опытом. Поэтому объединенная теория Фридмана представляет скорее научный, чем технический интерес [96, 101, 103, 385 и др.].

Пока нет достаточного экспериментального обоснования для применения в расчетной практике и других объединенных теорий прочности.

Некоторыми авторами [13, 410, 412, 642] рассматривался вопрос о введении в расчетные формулы, вытекающие из различных гипотез прочности, поправочных коэффициентов. Однако эта попытка устранить несоответствие теоретических и опытных данных, приводившая, как правило, к увеличению числа констант, подлежащих экспериментальному определению, оказалась малоэффективной и не получила серьезного развития.

Вопрос о возможности применения статистических теорий прочности для оценки предельного состояния материала рассмотрен в гл. V.

Таким образом, если для пластичных изотропных материалов за условие наступления предельного напряженного состояния с достаточным приближением может быть принято условие Мизеса — Генки, то для хрупких материалов пока трудно отдать предпочтение какой-либо теории. Исследование критериев разрушения материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, остается одним из актуальнейших вопросов механики деформируемых тел.



## Глава IV

### ОБОБЩЕНИЕ УСЛОВИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ И ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

#### § 1. Параметры напряженного состояния, определяющие общие свойства предельных поверхностей

Логичная математическая формулировка (критерий прочности должен интерпретироваться в пространстве напряжений поверхностью, имеющей логичную форму)—одно из важнейших требований к теориям прочности.

Обобщение накопившегося экспериментального материала и анализ геометрических интерпретаций предложенных теорий позволяют высказать некоторые априорные соображения о рациональной форме и наиболее характерных свойствах предельной поверхности, а также выявить основные расчетные показатели, которые могут быть приняты в качестве параметров напряженного состояния при разработке новых критериев.

В изотропных материалах главные направления эквивалентны. Поэтому предельная поверхность должна представлять равнонаклоненную к осям  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  пространственную фигуру, симметричную к направлениям главных напряжений. На основании того, что условие прочности не зависит от системы координат, в которой рассматривается тело, высказывались предположения [397, 459], что компоненты тензора напряжений могут входить в это условие только в виде функций, симметричных относительно индексов 1, 2, 3. Такой же концепции фактически придерживались и авторы работ [12, 40, 212, 368, 524].

✕ Указанные ограничения, наложенные на параметры инвариантной функции, равносильны требованию симметричности предельной поверхности по отношению к пространственной диагонали. Из этого следует, что предельная поверхность должна быть поверхностью вращения. Однако легко заметить, что условию симметрии поверхности к направлениям  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  удовлетворяют критерии более общего вида.

Чтобы выявить параметры напряженного состояния, определяющие форму поверхности, воспользуемся цилиндрической системой координат. Для этого осуществим предварительный поворот главных осей таким образом, чтобы одна из них совпала с диагональю пространства напряжений. Если такой осью явля-

ется ось  $x$ , то переход можем произвести по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y + \frac{1}{\sqrt{6}} z; \\ \sigma_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} x - \frac{2}{\sqrt{6}} z; \\ \sigma_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} x - \frac{1}{\sqrt{2}} y + \frac{1}{\sqrt{6}} z, \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.1})$$

из которых легко получить обратную связь

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 - \sigma_3); \\ z &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} (\sigma_1 - \sigma_2). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.2})$$

Тогда, как видно из рис. 37, цилиндрические координаты  $l$ ,  $r$  и  $\alpha$  будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} l &= x = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \\ r &= \sqrt{y^2 + z^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \\ \alpha &= \arctg \frac{z}{y} = \arctg \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.3})$$

Из полученных соотношений видно, что координаты введенной цилиндрической системы имеют четкий механический смысл. Координата  $l$  связана с октаэдрическим нормальным напряжением

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

а следовательно, с энергией объемной деформации,  $r$  — с октаэдрическим касательным напряжением

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \times \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

или любой другой величиной, которая с точностью до постоянного коэффициента равна  $\tau_{\text{окт}}$  (см. § 4 гл. III), а угол  $\alpha$  — с параметром

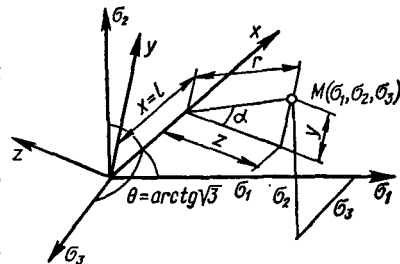


Рис. 37. Геометрия пространства напряжений.

Лоде — Надаи  $\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$ , т. е. характеризует вид девиатора напряжений.

Таким образом, форма предельной поверхности, а следовательно, и ее свойства полностью определяются тремя параметрами напряженного состояния:  $\tau_{\text{окт}}$ ,  $\sigma_{\text{окт}}$ ,  $\mu_\sigma$ . Уравнение этой поверхности может быть записано в виде

$$F(\tau_{\text{окт}}, \sigma_{\text{окт}}, \mu_\sigma, m_i) = 0. \quad (\text{IV.4})$$

Можно найти и обратную связь между параметрами  $\tau_{\text{окт}}$ ,  $\sigma_{\text{окт}}$  и  $\mu_\sigma$ , входящими в уравнение (IV.4), и главными компонентами тензора напряжений. Решая совместно известные выражения (I.27) и (I.37а) для октаэдрического нормального напряжения и параметра  $\mu_\sigma$ , находим

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{окт}} + \frac{3 - \mu_\sigma}{3} \tau_{\text{max}}, \quad (\text{IV.5})$$

откуда, с учетом соотношений (I.30) и (I.37), получаем окончательно

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{окт}} + \frac{3 + \mu_\sigma}{\sqrt{2} \sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} \tau_{\text{окт}}. \quad (\text{IV.5a})$$

Подставляя выражение (IV.5а) в формулы для  $\tau_{\text{max}}$  и  $\sigma_{\text{окт}}$  и решая полученные уравнения относительно  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , получаем

$$\sigma_2 = \sigma_{\text{окт}} + \frac{\sqrt{2} \mu_\sigma}{\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} \tau_{\text{окт}}; \quad (\text{IV.5б})$$

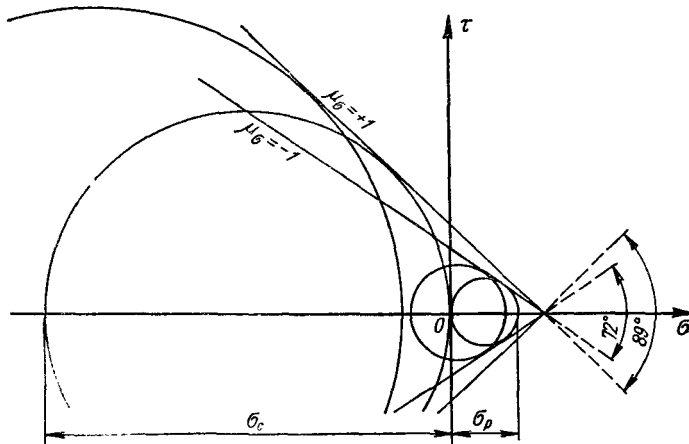


Рис. 38. Диаграмма Мора по данным Давена [547].

$$\sigma_3 = \sigma_{\text{окт}} - \frac{3 + \mu_\sigma}{\sqrt{2}\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} \tau_{\text{окт}}. \quad (\text{IV.5в})$$

Из (IV.4) видно, что уравнения перспективных, по мнению многих авторов, энергетических теорий прочности, интерпретирующихся в пространстве напряжений поверхностями вращения, являются функциями только нормального и касательного октаэдрических напряжений и не учитывают вида девиатора напряжений.

Влияние вида девиатора напряжений на предельное состояние материала, по-видимому, впервые теоретически обосновано М. Давеном [542], рассматривавшим разрушение материалов сложной структуры как потерю устойчивости при упругой деформации. На основании проведенного анализа показано, что огибающие кругов Мора необходимо строить для каждого значения  $\mu_\sigma$  отдельно. Так, если огибающие заменить прямыми, то для материала, у которого  $\chi = \frac{\sigma_p}{\sigma_c} = 0,156$ , огибающие, построенные для

случая растяжения с боковым давлением ( $\mu_\sigma = -1$ ), пересекаются под углом  $72^\circ$ , а огибающие, построенные для случая сжатия с боковым давлением ( $\mu_\sigma = +1$ ), — под углом  $89^\circ$  (рис. 38).

Следует отметить, что учет вида девиатора напряжений при построении предельных поверхностей эквивалентен предположению о том, что наступление предельного состояния материала определяется не только октаэдрическим касательным напряжением, критическое значение которого зависит от уровня октаэдрического нормального напряжения (шарового тензора), но и от ориентации октаэдрического касательного напряжения по отношению к направлениям главных нормальных напряжений.

На целесообразность учета параметра  $\mu_\sigma$  при разработке критериев прочности обращали внимание авторы работ [436, 480, 507]. Некоторые известные экспериментальные результаты рассмотрены в § 2 и 3 настоящей главы.

Из изложенного следует, что предельная поверхность механического критерия прочности должна представлять собой равнонаклоненную к главным осям пространственную фигуру, имеющую в сечении, перпендикулярном к ее оси, не окружность (поверхности вращения), а более сложную замкнутую кривую, инвариантную к направлениям  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

## § 2. Форма предельной поверхности в девиаторной плоскости

Девиаторная плоскость

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \text{const} \text{ или } \sigma_{\text{окт}} = \text{const} \quad (\text{IV.6})$$

равнонаклонена к главным осям, т. е. перпендикулярна к диагонали пространства напряжений. Уравнение предельной кривой

(следа предельной поверхности) в этой плоскости на основании (IV.4) и (IV.6) имеет вид

$$f(\tau_{\text{окт}}, \mu_{\sigma}, m_i) = 0. \quad (\text{IV.7})$$

Величина  $\sigma_{\text{окт}} = \text{const}$  отражена в уравнении (IV.7) константами  $m_i$ . Поэтому при переходе от одного девиаторного сечения к другому параметры предельной кривой изменяются таким образом, что проекции этих кривых на одну из девиаторных плоскостей представляются коаксиальными кривыми. Их взаимное расположение (внешнее или внутреннее) определяется характером влияния шарового тензора на значения компонентов девиатора напряжений, соответствующих предельному состоянию материала.

Будем исходить из того, что предельная поверхность выпуклая, т. е. всегда лежит по одну сторону любой касательной к ней плоскости (или опорной плоскости, если поверхность имеет плоские участки). Требование выпуклости предельной поверхности (соответствующей любой стадии деформирования) естественно вытекает из постулата Друккера [128] о неотрицательности приращения работы пластической деформации в процессе дополнительного нагружения.

Действительно, в области устойчивой пластической деформации увеличение напряжения всегда вызывает увеличение деформации. Совершаемая при этом работа должна быть положительна или в крайнем случае равна нулю. При деформировании материала от некоторого исходного состояния  $A$  до состояния  $B$  будет

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\sigma_{ij}^B - \sigma_{ij}^A) \cdot d\varepsilon_{ij}^P \geq 0. \quad (\text{IV.8})$$

Левая часть неравенства (IV.8) представляет собой скалярное произведение вектора добавочных напряжений на вектор приращений пластических деформаций. Эти векторы всегда образуют острый угол, так как в соответствии с (IV.8) их скалярное произведение в любом случае положительно.

В то же время, если предельная поверхность в рассматриваемой области не имеет изломов, то вектор приращения пластической деформации должен быть перпендикулярен предельной поверхности в точке ее пересечения с траекторией нагружения. Следовательно, острый угол между векторами  $(\sigma_{ij}^B - \sigma_{ij}^A)$  и  $d\varepsilon_{ij}^P$  может быть только в том случае, если предельная поверхность является выпуклой.

Из свойства выпуклости предельной поверхности естественно вытекает ее свойство непрерывности [31]. При этом в общем случае предельная поверхность может быть как регулярной (гладкой), так и сингулярной (имеющей ребра, грани).

Можно предполагать, что предельные поверхности в виде многогранников характерны для неупрочняющихся материалов и монокристаллов. Образец в этом случае при деформировании пересекается линиями Чернова — Людерса, деформация становится неоднородной.

Очевидно, каждой грани многогранника соответствует такая система скольжения, при которой вектор приращения деформации перпендикулярен этой грани. Если напряженное состояние определено точкой, лежащей на ребре, то скольжение может происходить по двум кристаллографическим плоскостям, соответствующим примыкающим к ребру граням.

У поликристаллических упрочняющихся материалов, из которых изготавливается подавляющее большинство машиностроительных конструкций, акты пластических деформаций происходят в большом числе произвольно ориентированных ячеек. При изменении системы действующих напряжений изменяется «доля вклада» каждой ячейки в общую деформацию. Монотонность процесса перераспределения деформаций и соответствующего ему увеличения или уменьшения сопротивления материала обеспечивает плавность предельной поверхности.

Таким образом, наиболее логичной геометрической интерпретацией критериев предельного состояния являются регулярные (гладкие) поверхности, в каждой точке которых можно построить одну и только одну касательную плоскость. Предельные поверхности, имеющие плоские грани, в свете проведенного анализа представляются некоторыми приближениями. Использование их в расчетах, очевидно, оправдано в том случае, если это приводит к заметным математическим упрощениям при решении отдельных прикладных задач.

Известно, что выпуклое тело пересекается с секущей его плоскостью по выпуклой фигуре. Учитывая также плавность предельной поверхности, приходим к выводу, что предельная поверхность в девиаторной плоскости должна быть плавной выпуклой кривой.

Для выяснения характера этой кривой изменим напряженное состояние таким образом, чтобы параметр  $\sigma_{\text{окт}}$  (шаровой тензор) оставался постоянным, т. е. переход от одного напряженного состояния к другому осуществим за счет изменения компонент

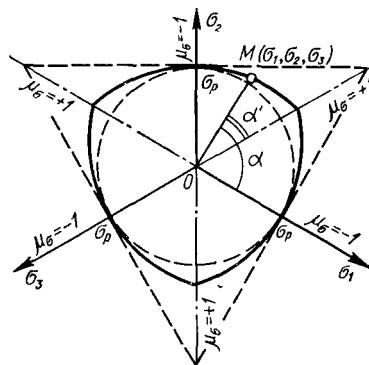


Рис. 39. Сечение предельной поверхности девиаторной плоскостью  $\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}$ .

девиатора напряжений. При этом параметр  $\mu_\sigma$  будем изменять так, чтобы координата  $\alpha$  (рис. 39) монотонно возрастала.

Поскольку параметр Лоде — Надаи изменяется в пределах  $-1 \leq \mu_\sigma \leq +1$ , то величина  $\alpha = \operatorname{arccotg} \frac{\mu_\sigma}{\sqrt{3}}$  должна удовлетворять неравенству  $\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3}\pi$ . Введя новую координату  $\alpha' = \alpha - \frac{\pi}{3}$ , запишем последнее выражение (IV.3) в виде

$$\mu_\sigma = \sqrt{3} \operatorname{ctg} \left( \alpha' - \frac{\pi}{3} \right).$$

Углы  $\alpha$  и  $\alpha'$  показаны на рис. 39, где изображена система координат  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  со стороны оси  $Ox$  (см. рис. 37.)

При дальнейших рассуждениях будем исходить из того, что для пластичных материалов, не обладающих деформационным упрочнением, справедливо условие Мизеса — Генки (окружность на рис. 39). Предположим, что пластичный материал, для которого предельные напряжения при растяжении и сжатии равны, претерпевает такие изменения, что в каждый новый момент времени отношение  $\frac{\sigma_p}{\sigma_c}$  уменьшается за счет увеличения  $\sigma_c$ . Тогда предельная поверхность будет, естественно, расширяться в направлении лучей  $\mu_\sigma = +1$  (рис. 39). При этом очевидно, что общей точкой конгруэнции текущих положений предельной кривой в девиаторной плоскости будет точка, лежащая на лучах  $\mu_\sigma = -1$ , так как эти лучи с точностью до шарового тензора соответствуют одноосному растяжению, при котором предельные напряжения, как мы условились, оставались неизменными.

На участке, определяемом неравенством  $0 < \alpha' < \frac{\pi}{3}$ , которому удовлетворяет величина  $\alpha'$ , кривая  $\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}r = f(\alpha')$ , благодаря очевидной постепенности изменения предельной поверхности при постепенном изменении соотношений между компонентами девиатора напряжений, должна быть плавной, а при выполнении постулата Друккера, в то же время, — выпуклой. Следовательно, по мере увеличения  $\alpha'$  исследуемая кривая будет монотонно приближаться к окружности  $\tau_{\text{окт}} = \text{const}$  и касаться ее при  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ . Таким образом, в направлении луча  $\mu_\sigma = -1$  на предельной кривой не может быть угловой точки.

Из требования симметричности предельной поверхности к главным осям следует, что на участке  $\frac{\pi}{3} < \alpha' < \frac{2}{3}\pi$  след этой поверхности должен быть зеркальным отображением следа на участке

$0 < \alpha' < \frac{\pi}{3}$ , а из требования инвариантности предельной поверхности для изотропных материалов к направлениям главных осей следует инвариантность кривой к направлениям  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . На рис. 39 сплошными линиями показан след предельной поверхности на девиаторной плоскости для материала, поразному сопротивляющегося растяжению и сжатию. Из рисунка видно, что форма этого следа представляет собой замкнутый криволинейный треугольник, инвариантный к направлениям главных осей. Штриховыми линиями показаны след цилиндра Мизеса и треугольник, соответствующий теории максимальных нормальных напряжений. Область, в которой предельная кривая имеет смысл, ограничена штриховыми линиями: изнутри — кругом, так как при  $\frac{\sigma_p}{\sigma_c} = 1$  выполняется условие Мизеса, снаружи — прямой, так как в случае выхода за пределы этой прямой предельная кривая становится вогнутой.

В литературе практически отсутствуют экспериментальные результаты прямых исследований предельных кривых в девиаторной плоскости. Имеющиеся данные в основном относятся к экспериментальной проверке условия подобия девиаторов и получены на пластичных материалах. В связи с этим особый интерес представляют экспериментальные данные о характере предельных кривых в девиаторной плоскости (при  $\sigma_{\text{окт}} = \text{const}$ ), приведенные в работах [463, 562]. Эти результаты получены при испытании образцов в виде кубиков на трехосное сжатие и относятся к различного рода строительным материалам.

На рис. 40 показана круговая диаграмма, характеризующая изменение интенсивности предельных напряжений в зависимости от угла

$$\alpha' = \alpha - \frac{\pi}{3}, \quad \left( \alpha = \arctg \frac{\mu_\sigma}{\sqrt{3}} \right)$$

для песчаного грунта, полученная на основании обработки опытов Э. Д. Фрадиса [463]. Там же указаны значения параметра  $\mu_\sigma$ , при которых получены экспериментальные точки в плоскости  $\sigma_0 = 3 \text{ кг/см}^2$ .

Из рисунка видно, что по мере увеличения угла  $\alpha'$  предельное значение интенсивности напряжений монотонно уменьшается и

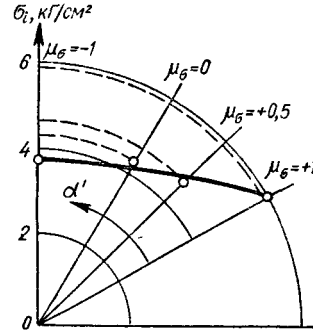


Рис. 40. Результаты испытаний песчанника [468].



при  $\alpha' = \frac{\pi}{3}$  ( $\mu_\sigma = -1$ ) составляет около 65% соответствующего значения  $\sigma_i$  при  $\alpha = 0$  ( $\mu_\sigma = +1$ ).

Аналогичный вид предельной кривой в девиаторной плоскости получен в работе [562]. Эти данные являются экспериментальным подтверждением результатов проведенного в настоящем параграфе анализа характера изменения предельной поверхности в связи с влиянием параметра вида девиатора.

### § 3. Форма предельной кривой в плоскости $\mu_\sigma = \text{const}$

Исследование предельных кривых

$$f(\tau_{\text{окт}}, \sigma_{\text{окт}}, m_i) = 0 \quad (\text{IV.9})$$

сводится к изучению характера изменения девиаторного сечения предельной поверхности и изменения шарового тензора.

Из условия выпуклости предельной поверхности следует, что кривые (IV.9) не могут быть вогнутыми по отношению к диагонали  $Ox$  пространства напряжений (рис. 37). Экспериментально установлено, что предельное состояние подавляющего большинства пластичных материалов удовлетворительно описывается критерием Мизеса (цилиндр, ось которого совпадает с пространственной диагональю). В то же время обнаружено, что для материалов, находящихся в малопластичном состоянии (для них, как правило,  $\sigma_s > \sigma_p$ ), размеры нормального сечения предельной поверхности увеличиваются с увеличением гидростатического сжатия [43, 500]. При этом кривая (IV.9) может быть заменена прямой, наклоненной к девиаторной плоскости, хотя в ряде случаев такое упрощение является приближением.

Влияние октаэдрического нормального напряжения (шарового тензора) на сопротивление материала деформированию было обнаружено еще в работах Лоде [438]. Однако до настоящего времени систематических целенаправленных исследований проведено крайне мало. Результаты, обобщенные в работах [43, 324, 500], в основном относятся к изучению влияния высоких гидростатических давлений на общие свойства твердых тел. Вопросы, связанные с предельным состоянием материалов, в этих работах практически не рассматривались.

Опыты Бриджмена [43] по растяжению и сжатию чистых металлов, углеродистых и специальных сталей при высоких гидростатических давлениях показали, что сопротивление деформированию при больших пластических деформациях возрастает с увеличением гидростатического сжатия. Увеличение гидростатического давления на  $10\,000 \text{ кг/см}^2$  приводит к возрастанию предела прочности на 6—7% и заметному расхождению обобщенных кривых деформирования.

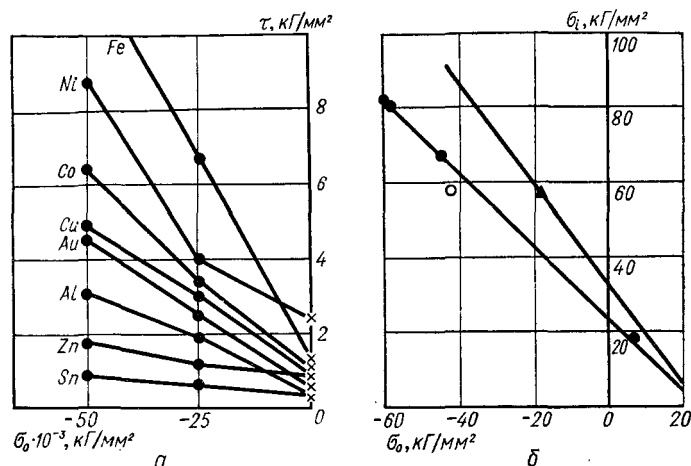


Рис. 41. Влияние шарового тензора на предельное состояние металлических материалов:

а — по данным Бриджмена; б — по данным В. В. Евстратова; × — предельные значения максимального касательного напряжения при испытаниях на растяжение; ● —  $\mu_\sigma = -1$ ; ○ —  $\mu_\sigma = -0,5$ ; ▲ —  $\mu_\sigma = +1$ .

На рис. 41, а приведены результаты опытов Бриджмена по испытанию некоторых металлов на сдвиг при высоком гидростатическом давлении. Несмотря на приближенный характер этих данных (в процессе опыта гидростатическое давление не поддерживалось строго постоянным, а методика проведения испытаний и подсчета напряжений не позволяла исключить влияние касательных сил трения в уплотнениях), из рисунка следует, что при наложении гидростатического давления сопротивление сдвигу заметно повышается, причем для более прочных металлов влияние гидростатического давления более существенно.

Значительное увеличение пластичности и максимальных напряжений при гидростатическом давлении по сравнению с их значениями при простом сжатии наблюдалось при испытании меди, алюминия и цинка [561]. Испытания углеродистой стали (С — 0,5%) при давлениях до  $2400 \text{ кг/см}^2$ , проведенные В. А. Гладковским [80], показали, что наложение гидростатического давления повышает предел текучести стали. Вследствие быстрой потери устойчивости пластического деформирования (локализация деформации и образование шейки) величина равномерной деформации при повышении давления уменьшается, хотя предел прочности стали остается без изменений. Значительно больший эффект оказывает шаровой тензор на прочностные и пластические свойства хрупких материалов.

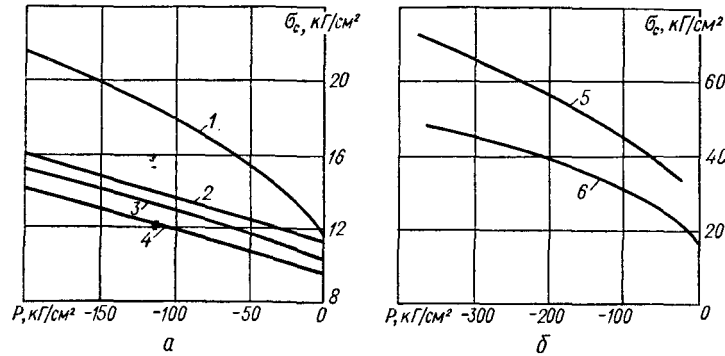


Рис. 42. Влияние бокового давления на прочность при сжатии неметаллических материалов:

*a* — по данным А. И. Сливака; *б* — по данным Ходжсона и Кука; 1 — 4 — плотные горные породы; 5 — базальт Карро; 6 — кварцит.

Испытания кубиков из чугуна на трехосное сжатие проведены В. В. Евстратовым [131]. Программа испытаний была составлена с учетом возможности получения экспериментальных кривых  $\sigma_i = f(\sigma_{\text{окт}})$  при  $\mu_\sigma = \text{const}$ . К сожалению, не все образцы доводились до разрушения. Поэтому данные, пригодные для анализа, фактически получены только при  $\mu_\sigma = -1$ . Эти данные приведены на рис. 41, б, из которого видно, что на всем исследованном диапазоне изменения  $\sigma_{\text{окт}}$  интенсивность напряжений (касательное октаэдрическое напряжение) линейно зависит от шарового тензора (октаэдрическое нормальное напряжение).

В предыдущем параграфе было показано, что с увеличением параметра  $\mu_\sigma$  предельное значение октаэдрического касательного напряжения в общем случае увеличивается. Следовательно, указанные на рисунке точки, соответствующие  $\mu_\sigma = -0,5$  и  $\mu_\sigma = +1$ , должны быть расположены выше прямой  $\mu_\sigma = -1$ . Заниженное значение прочности при  $\mu_\sigma = -0,5$  связано, очевидно, с нарушением условий проведения опыта: в двух испытаниях из трех проведенных при  $\mu_\sigma = -0,5$  перед разрушением происходило падение нагрузки, сопровождавшееся изменением соотношения  $K = \frac{\sigma_{\text{окт}}}{\sigma_i}$ ; вместо  $K = 0,648$  (для  $\mu_\sigma = -0,5$ ) фактически было  $K = \frac{41,6}{58} = 0,718$ .

На рис. 42, а, б приведены результаты испытания некоторых горных пород на сжатие в условиях всестороннего давления при  $\mu_\sigma = +1$ . Эти данные также подтверждают существенное увеличение предельного сопротивления материала с возрастанием шарового тензора. При этом зависимости  $\tau_{\text{окт}} = f(\sigma_{\text{окт}})$ , как правило,

линейны или близки к линейным. Таким образом, можно считать экспериментально установленным, что для материалов, находящихся в малопластичном состоянии, размеры нормального сечения предельной поверхности увеличиваются с увеличением гидростатического сжатия. Остается предельная поверхность со стороны отрицательного октанта открытой или ее уширение имеет определенные пределы — пока не установлено. Вопрос о форме поверхности в области положительного октанта также может быть решен только после постановки соответствующих опытов. Если окажется, что при трехосном равномерном растяжении разрушить материал практически невозможно, то со стороны положительного октанта поверхность должна быть разомкнута. Если же допустить возможность разрушения материала при гидростатическом растяжении, то в области положительного октанта поверхность должна стягиваться в точку. Второе предположение представляется более приемлемым ввиду неизбежного наличия в реальном теле искажений кристаллической решетки, пор и других дефектов, которые в условиях идеально жесткого нагружения при трехосном равномерном растяжении ( $\frac{\tau_{\text{окт}}}{\sigma_{\text{окт}}} = 0$ ) могут явиться причиной развития трещин под действием только нормальных напряжений [58, 389].

При анализе экспериментальных данных о влиянии шарового тензора на сопротивление материала деформированию и разрушению необходимо иметь в виду, что сопоставимы только те результаты, которые получены при одинаковых значениях параметра  $\mu_{\sigma}$ . Наглядным в этом отношении примером могут служить данные испытаний силикальцита, полученные В. Д. Глебовым [77]. Результаты этих испытаний представлены на рис. 43 и в табл. 2.

Опыты проводились на трубах ( $D_{\text{ср}} = 285 \div 290$  мм,  $\delta = 11 \div 12$  мм,  $l \approx 550$  мм). При каждом соотношении главных напряжений испытывалось не менее трех образцов. Максимальные

Таблица 2

$\sigma_1$ , кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_2$ , кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_3$ , кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_{\text{окт}}$ , кг/мм <sup>2</sup>	$\mu_{\sigma}$
0	—191,4	191,4	—63,8	+1,00
10,8	—100,7	106,3	—29,7	+0,80
13,2	—61,3	68,8	—16,0	+0,66
14,9	—48,9	57,7	—11,3	+0,53
18,4	—33,3	53,7	—6,6	+0,29
21,3	—22,1	37,3	—0,3	+0,02
23,7	0	23,7	+7,9	—1,00

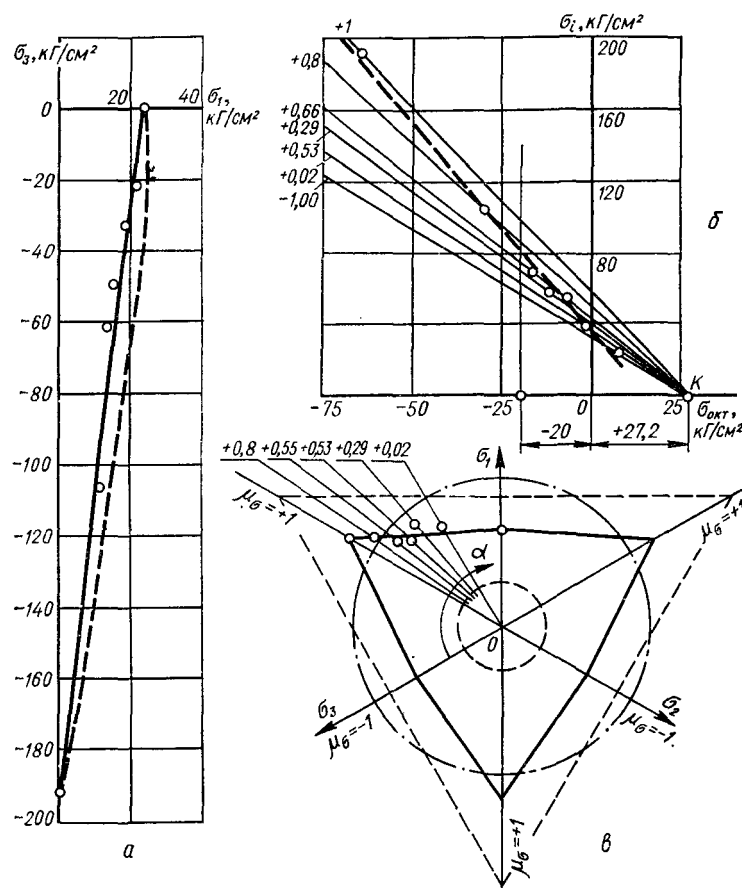


Рис. 43. Результаты испытаний силикальцита [82]:

а — на плоскости главных напряжений; б — в координатах интенсивности напряжений — шаровой тензор; в — на октаэдрической плоскости  $\sigma_{\text{окт}} = 20 \text{ кг/см}^2$ .

отклонения опытных данных (в результате разброса) от указанных в таблице средних значений напряжений не превышали 3%.

Если пренебречь влиянием вида девиатора, то, по данным рис. 43, б, предельным состояниям материала соответствует линейная зависимость между интенсивностью напряжений и шаровым тензором (штриховая линия). На этой зависимости, как известно, основана теория прочности Боткина — Миролюбова [244], исходное уравнение которой  $\sigma_i = a + b\sigma_0$  после выражения коэффициентов  $a$  и  $b$  через пределы прочности при растяжении и сжатии

и перехода к главным напряжениям преобразуется, как было показано выше, в следующее условие прочности:

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \frac{2\sqrt{2}\sigma_c\sigma_p}{\sigma_c + \sigma_p} - \frac{\sqrt{2}(\sigma_c - \sigma_p)}{\sigma_c + \sigma_p}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (\text{IV.10})$$

Условие (IV.10) на рис. 43, а представлено штриховой линией. Заметное отклонение экспериментальных точек от этой линии показывает, что теория Боткина — Миролюбова не описывает предельное состояние силикальцита, хотя формально линейная зависимость  $\sigma_i = f(\sigma_{\text{окт}})$  подтверждена экспериментально (см. рис. 40, б).

Кажущуюся противоречивость данных, представленных на рис. 43, а и б, легко объяснить на основе представлений, развиваемых в настоящей работе. Действительно, из рис. 43, а видно, что предельное состояние силикальцита находится в соответствии с критерием Кулона — Мора:

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_c} \sigma_3 = \sigma_p. \quad (\text{IV.11})$$

Для напряженного состояния, когда  $\sigma_i = 0$  (трехосное растяжение), по критерию (IV.11) получим следующее предельное значение шарового тензора:

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_c\sigma_p}{\sigma_c - \sigma_p} = \frac{191,4 \cdot 23,7}{191,4 - 23,7} = 27,2 \text{ кГ/см}^2.$$

В точку  $K(0; 27,2)$  стягивается девиаторное сечение предельной поверхности при увеличении шарового тензора (рис. 43, б). Поэтому эта точка является общей для всех линий пересечения пирамиды Кулона — Мора с плоскостями  $\mu_\sigma = \text{const}$ , а следовательно, и для тех линий, на которых лежат экспериментальные точки. Эти линии показаны на рис. 43, б в виде лучей, сходящихся в точке  $K$  (слева приведены соответствующие значения параметра  $\mu_\sigma$ ).

По данным рис. 43, б можно построить девиаторное сечение предельной поверхности силикальцита при любом значении шарового тензора. На рис. 43, в для примера показано сечение  $\sigma_{\text{окт}} = 20 \text{ кГ/см}^2$  в форме, аналогичной рис. 40. По значениям параметра Лоде — Надаи, при которых проводились испытания, рассчитаны углы вида девиатора  $\alpha = \text{arc ctg } \frac{\mu_\sigma}{\sqrt{3}}$  и построены соответствующие лучи. На этих лучах отложены точки, отстоящие от начала координат на расстояния, которые в масштабе рис. 43, б представляют значения интенсивностей напряжений  $\sigma_i$ , найденных по рис. 43, б для  $\sigma_{\text{окт}} = 20 \text{ кГ/см}^2$ . Здесь же для сравнения построены предельные кривые силикальцита в сечении  $\sigma_{\text{окт}} = 20 \text{ кГ/см}^2$ ,

рассчитанные по теории максимальных нормальных напряжений и критерию Мизеса (штриховые линии), критерию Боткина — Миролюбова (штрих-пунктирная линия) и критерию Кулона — Мора (сплошная линия).

Как видно из рис. 43, в, построенные точки группируются возле шестиугольника Кулона — Мора, что, с одной стороны, находится в соответствии с данными рис. 43, а (применимость к рассматриваемому материалу теории Кулона — Мора), а с другой стороны, дает косвенное подтверждение справедливости принятой линейной зависимости  $\sigma_i = f(\sigma_{\text{окт}})$  для каждого данного значения параметра Лоде — Надаи (см. лучи, исходящие из точки К, на рис. 43, б).

#### § 4. Обобщенные критерии прочности

При рассмотрении вопроса о рациональной форме предельной поверхности было показано, что механические критерии прочности должны учитывать вид девиатора напряжений. На целесообразность учета влияния вида девиатора напряжений указывали И. И. Тарасенко [436], а также Ю. И. Ягн и И. Н. Виноградов [507], предлагавшие отразить в исходном уравнении влияние вида девиатора дополнительным членом [436]  $B\sigma_{\text{окт}} \sin \pi \mu_\sigma$  или  $C(1 - \cos 2\pi \mu_\sigma)$ .

Мором (601) рассматривалось шесть условий вида

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_c - \sigma_p)(\sigma_1 - \sigma_2) = \sigma_p \sigma_c, \quad (\text{IV.12})$$

каждое из которых является уравнением цилиндра; линии пересечения этих цилиндров — параболы, сходящиеся в точке с координатами

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\sigma_p \sigma_c}{2(\sigma_p + \sigma_c)}.$$

В девиаторной плоскости условие Мора соответствует криволинейному шестиугольнику.

К рациональной форме предельной поверхности чисто феноменологически пришли Г. А. Гениев и В. Н. Киссюк [69], включившие в общее условие прочности третий инвариант девиатора напряжений

$$I_3 = -\frac{1}{27}[3(\sigma_1\sigma_2^2 + \sigma_2\sigma_3^2 + \sigma_3\sigma_1^2 + \sigma_2\sigma_1^2 + \sigma_3\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3^2) - \\ - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 2(\sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3)].$$

Уравнение предельной поверхности, по Гениеву и Киссюку, имеет вид

$$3I_2 = [AI_1 + B] \left\{ 1 - (1 - C) \left[ 1 - \frac{I_3}{2} \left( \frac{I_2}{3} \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \right\},$$

где  $A, B, C$  — постоянные коэффициенты, определяемые из простейших опытов. Если  $\sigma_p, \sigma_c, \tau_k$  — предел прочности при растяжении, сжатии и чистом сдвиге, то условие прочности запишется в виде

$$3I_2 = |\sigma_c \sigma_p - (\sigma_c - \sigma_p) I_1| \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{3\tau_k^2}{\sigma_c \sigma_p} \right) \left[ 1 - \frac{I_3}{2} \left( \frac{I_2}{3} \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \right\}. \quad (\text{IV.13})$$

Предельная поверхность, определяемая уравнением (IV.13), вписана в поверхность параболоида вращения (III.22) и при  $\tau_k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_c \sigma_p}$  совпадает с последней.

Условия, интерпретирующиеся в девиаторной плоскости равносторонним криволинейным треугольником, что соответствует форме, установленной в § 2, рассматривались также в работах [436, 463, 507]. Однако использование этих критериев в расчетной практике затруднено не только из-за их громоздкости, но часто и из-за необходимости опытного определения трех констант материала. Серьезным сдерживающим фактором является отсутствие физического обоснования вида инвариантной функции, а также недостаточное соответствие опыту.

В то же время достижения в области физики твердого тела пока не позволяют давать количественные оценки макросвойств материала. При сложившейся ситуации закономерности деформирования и разрушения твердых тел могут быть описаны в форме, пригодной для практического применения, лишь на основе упрощенных понятий и определений с использованием усредненных механических характеристик. Так, понятия о хрупком и вязком разрушении могут служить основой для введения тех или иных критериев прочности.

Основываясь на предположении о различном характере влияния на сопротивление материала отрыву и сопротивлению сдвигу нормальных и касательных напряжений, приходим к следующим двум условиям прочности: условию сопротивления сдвигу

$$f_1(\tau_{kl}) \leq m_1 \quad \text{при } k, l = 1, 2, 3$$

и условию сопротивления отрыву

$$f_2(\sigma_{\max}) \leq m_2,$$

где  $f_1(\tau_{kl})$  — некоторая функция касательных напряжений;  $f_2(\sigma_{\max})$  — функция максимальных с учетом знака нормальных напряжений;  $m_1, m_2$  — константы материала при заданных условиях нагружения.

Если принять, что сопротивление сдвигу определяется уровнем максимальных касательных напряжений, а сопротивление отрыву — максимальным нормальным напряжением, то переход от



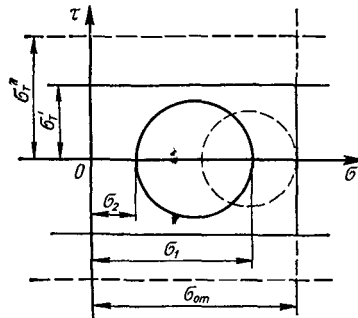


Рис. 44. Границы предельных напряжений по сдвигу и отрыву.

одного вида разрушения к другому можно иллюстрировать диаграммой Мора (рис. 44), где границы кругов предельных напряжений показаны прямыми линиями, параллельными осям координат. Из рисунка видно, что от разрушения сдвигом к разрушению отрывом можно прийти, понижая температуру, увеличивая скорость деформирования (границы показаны штриховой линией) или изменяя вид напряженного состояния в сторону увеличения значений нормальных напряжений при постоянной или уменьшающейся их разности (соответствующий круг Мора показан штриховой линией).

Принятая схема оценки прочности с учетом вида напряженного состояния, укладывающаяся в рамки учения о двух видах разрушения — отрывом и сдвигом, — не имеет противоречий с точки зрения формальной логики и находится в соответствии с современными физическими представлениями о кинетике разрушения.

В настоящее время можно считать установленным, что разрушение только от нормальных напряжений, как и только от касательных, практически невозможно. Если пластическая деформация, вызываемая касательными напряжениями, разрыхляет и готовит материал к разрыву, то нарушение сплошности материала происходит под действием нормальных растягивающих напряжений. Это достаточно убедительно показано в работах [340, 400], а также находится в соответствии с дислокационной теорией возникновения хрупкой трещины [209, 633].

Таким образом, наступление предельного состояния обусловлено способностью материала оказывать сопротивление как касательным, так и нормальным напряжениям и, следовательно, определяется двумя критериями: критерием возникновения трещин  $f_1$  ( $\tau_{hl}$ ) и критерием их распространения — нормальным растягивающим напряжением  $\sigma_1$ , как наибольшим из трех  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Вероятно, достижение касательными напряжениями критического значения оказывается только необходимым условием, но не достаточным. Второе условие связывается с величиной и ориентацией максимального нормального напряжения. Степень отклонения направления  $\sigma_1$  от наиболее благоприятной ориентации по отношению к зарождающимся трещинам определяет величину разброса, имеющего место при прочностных испытаниях материалов.

Здесь следует заметить, что роль касательных напряжений тем меньше, чем ближе состояние к идеально хрупкому. И наоборот, за критерий прочности материала, находящегося в идеально пла-

стичном состоянии, могут быть приняты функции только касательных напряжений, так как текучесть сама по себе, без разрушения, может оказаться в этом случае опасной.

Исходя из изложенных выше позиций приходим к выводу, что критерии прочности материалов следует искать в виде инвариантных по отношению к напряженному состоянию функций касательных напряжений, максимального нормального напряжения и некоторых констант материала, количество которых в расчетном уравнении должно быть минимальным.

Вопрос о конкретном виде уравнения

$$F(\tau_{kl}, \sigma_1, m_i) = 0 \quad (\text{IV.14})$$

пока нельзя считать окончательно решенным. Поэтому рассмотрим лишь некоторые частные случаи зависимости (IV.14), записанной в виде

$$\sigma_i^a + m_1 \sigma_1^b \leq m_2, \quad (\text{IV.15})$$

где за функцию касательных напряжений принята интенсивность напряжений;  $a, b$  — константы материала.

Если ограничиться испытаниями при одноосном растяжении и одноосном сжатии и через пределы прочности  $\sigma_p$  и  $\sigma_c$  выразить константы  $m_1$  и  $m_2$ , то уравнение (IV.15) примет вид

$$\sigma_i^a + \frac{\sigma_c^a - \sigma_p^a}{\sigma_p^b} \sigma_1^b \leq \sigma_c^a. \quad (\text{IV.16})$$

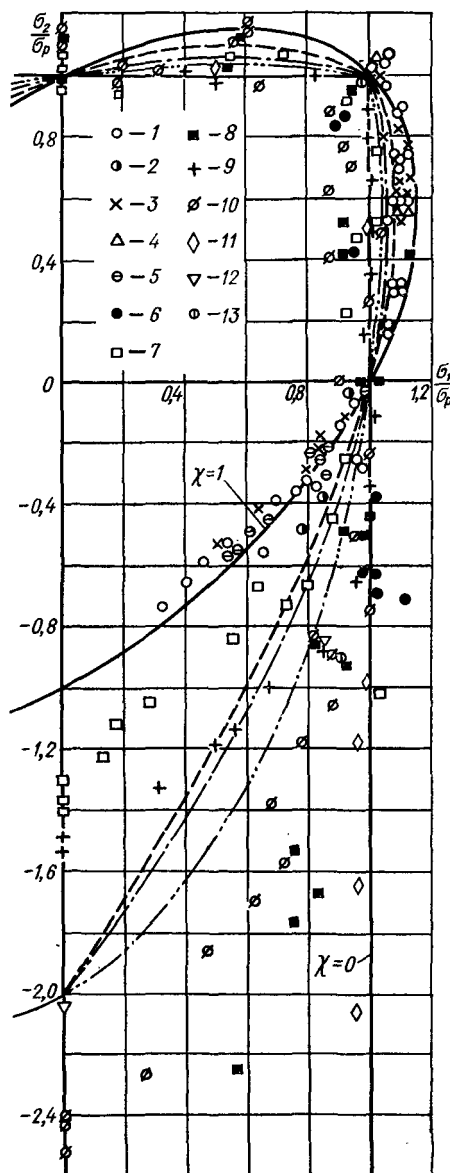


Рис. 45. Результаты экспериментального исследования прочности материалов при плоском напряженном состоянии:

1 — сталь; 2 — твердая сталь; 3 — медь; 4 — никель; 5 — 10 — чугуны; 11 — гипс; 12 — пористое железо; 13 — бетон.

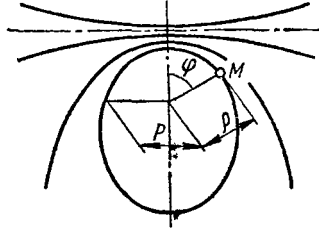


Рис. 46. Параметры конических сечений.

Проанализируем условие (IV.16) при различных значениях коэффициентов  $a$  и  $b$ . Очевидно, представляют интерес те значения указанных коэффициентов, при которых условие (IV.16) остается уравнением второго порядка относительно главных компонент тензора напряжений, так как в этом случае предельная поверхность по всей области выпукла. Здесь возможны три случая:  $a = b = 1$ ;  $a = 2, b = 1$  и  $a = b = 2$ .

При этом условия прочности, вытекающие из выражения (IV.16), могут быть записаны так:

$$\chi \sigma_i + (1 - \chi) \sigma_1 \leq \sigma_p; \quad (\text{IV.17a})$$

$$\chi^2 \sigma_i^2 + \sigma_p (1 - \chi^2) \sigma_1 \leq \sigma_p^2; \quad (\text{IV.17б})$$

$$\chi^2 \sigma_i^2 + (1 - \chi^2) \sigma_1^2 \leq \sigma_p^2, \quad (\text{IV.17в})$$

где  $\chi$  можно определить как величину, характеризующую степень участия в макроразрушении сдвиговой деформации, создающей благоприятные условия для разрыхления материала и образования трещин,  $\chi = \frac{\sigma_p}{\sigma_c}$ . Для материалов, находящихся в пластичном состоянии, когда  $\sigma_p = \sigma_c$  и  $\chi = 1$ , выражения (IV.17а) — (IV.17в) преобразуются в расчетные уравнения энергетической теории Мизеса — Генки. Если  $\chi = 0$  (идеально хрупкий материал), то выражения (IV.17а) — (IV.17в) преобразуются в соответствующие уравнения теории максимальных нормальных напряжений.

Для подавляющего большинства реальных материалов  $0 < \chi < 1$ . Следовательно, предельные поверхности, интерпретирующие в пространстве напряжений границу прочных напряженных состояний в соответствии с выражениями (IV.17а) — (IV.17в), находятся в области между цилиндром Мизеса — Генки и параллелепипедом, соответствующим первой теории прочности. Это обстоятельство находится в хорошем соответствии с известными опытными данными. На рис. 45 в относительных координатах  $\frac{\sigma_1}{\sigma_p}, \frac{\sigma_2}{\sigma_p}$ , где  $\sigma_1$

и  $\sigma_2$  — главные напряжения, представлены результаты опытов различных авторов при плоском напряженном состоянии [110, 206, 284, 309, 360, 369, 533 и др.]. За пределы прочности для одноосного растяжения в направлении  $\sigma_1$  принято среднее значение из числа имеющихся экспериментальных точек. Здесь же показаны предельные кривые, соответствующие уравнениям (IV.17а) — (IV.17в) при  $\chi = 0, \chi = 1$  и, для сравнения, при  $\chi = 0,5$ . Из рисунка видно, что экспериментальные точки находятся между

предельными кривыми  $\chi = 0$  и  $\chi = 1$ , причем чем меньше отношение  $\frac{\sigma_p}{\sigma_c} = \chi$ , тем они больше тяготеют к прямой  $\sigma_1 = \sigma_p$ .

Критерии (IV.17), полученные на основании достаточно ясных физических предпосылок, должны соответствовать результатам анализа общих свойств предельных поверхностей, проведенного в § 2 и 3. В связи с этим представляет интерес получить обобщенные критерии в виде (IV.17), руководствуясь установленными требованиями к форме продольного ( $\mu_\sigma = \text{const}$ ) и поперечного ( $\sigma_{\text{окт}} = \text{const}$ ) сечений.

Учитывая, что для многих материалов функция  $\tau_{\text{окт}}(\sigma_{\text{окт}})$  (сечение  $\mu_\sigma = \text{const}$ ) с достаточной точностью может быть принята линейной, рассмотрим возможные критерии, интерпретирующиеся в пространстве напряжений поверхностями, которые формируются конусами. В этом случае девиаторные сечения образованы кривыми второго порядка: эллипсами, параболами или гиперболами, если оси конусов пересекаются с лучом, равнонаклоненным к главным осям, и окружностями, если оси конусов параллельны указанному лучу.

Таким образом, если при  $\mu_\sigma = \text{const}$  функция (IV.4) линейна, то девиаторное сечение представляет собой равносторонний криволинейный треугольник, образованный выпуклыми по отношению к его центру тяжести кривыми. Такая форма девиаторного сечения находится в соответствии с данными § 2.

Общее уравнение конических сечений при пересекающихся осях формирующих конусов в полярных координатах имеет вид (рис. 46)

$$\rho = \frac{P}{1 - e \cos \varphi}, \quad (\text{IV.18})$$

где  $P$  — фокальный параметр;  $e$  — эксцентриситет.

Если рассматриваемая кривая интерпретирует девиаторное сечение предельной поверхности, то радиус-вектор  $\rho$  имеет смысл октаэдрического касательного напряжения. Параметр  $P$ , определяющий размеры сечения, является линейной функцией шарового тензора, так как предельная поверхность формируется конусами:

$$P = m_1 + m_2 \sigma_{\text{окт}}.$$

Следовательно, уравнение (IV.18) можно записать в виде

$$\tau_{\text{окт}}(1 - e \cos \varphi) = m_1 + m_2 \sigma_{\text{окт}}, \quad (\text{IV.19})$$

где коэффициент  $e$  характеризует величину приращения октаэдрического касательного напряжения при соответствующем изменении вида девиатора. Между  $e$  и  $m_2$  существует определенное соотношение, которое легко установить из анализа параметров пространства напряжений.

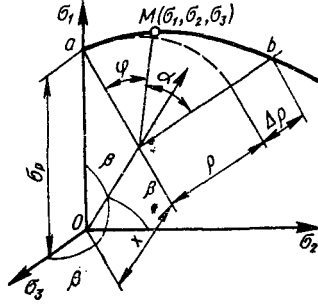


Рис. 47. Геометрия пространства напряжений.

Рассмотрим девиаторную плоскость  $\sigma_{\text{окт}} = \text{const}$  (рис. 47). Предельная кривая  $ab$  в этой плоскости задана функцией  $\rho = f(\varphi)$ . При  $\varphi = 0$  справедливы соотношения

$$\frac{x}{\sigma_p} = \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \frac{\rho}{\sigma_p} = \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

( $\beta = 54^\circ 40'$ ), откуда следует  $\rho = \sqrt{2}x$ , или, учитывая, что  $x = \sqrt{3} \sigma_{\text{окт}}$ ,  $\rho = \sqrt{3} \tau_{\text{окт}}$ , получаем для  $\varphi = 0$   $\tau_{\text{окт}} = \sqrt{2} \sigma_{\text{окт}}$ .

Таким образом, при изменении шарового тензора в  $n$  раз критическое значение октаэдрического напряжения будет изменяться в  $\sqrt{2}n$  раз. В такое же число раз должно изменяться и соответствующее приращение октаэдрического касательного напряжения при  $\varphi > 0$ . Следовательно,

$$e = \sqrt{2} m_2. \quad (\text{IV.20})$$

Величину  $\cos \varphi$ , учитывающую влияние вида девиатора, можно выразить через параметр Лоде — Надаи:

$$\cos \varphi = \cos(120^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha = \frac{3 - \sqrt{3} \text{ctg} \alpha}{2\sqrt{3 + 3 \text{ctg}^2 \alpha}}.$$

Поскольку  $\sqrt{3} \text{ctg} \alpha = \mu_\sigma$ ,

$$\cos \varphi = \frac{3 - \mu_\sigma}{2\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}}. \quad (\text{IV.21})$$

На основании выражений (IV.19) — (IV.21) можно записать

$$\tau_{\text{окт}} - m_2 \left( \sigma_{\text{окт}} + \frac{3 - \mu_\sigma}{\sqrt{2}\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} \tau_{\text{окт}} \right) = m_1. \quad (\text{IV.22})$$

Переходя к интенсивности напряжений  $\tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_i$  и учитывая, что выражение в скобках равно максимальному нормальному напряжению, получаем

$$\sigma_i - m_2' \sigma_1 = m_1'. \quad (\text{IV.23})$$

Коэффициенты  $m_1'$  и  $m_2'$  могут быть определены по результатам испытаний при простейших нагружениях. Для случаев одноосного растяжения и одноосного сжатия уравнение (IV.23) запишем соответственно

$$\sigma_p - m_2' \sigma_p = m_1'; \quad \sigma_c = m_1',$$

откуда находим  $m'_1 = \sigma_c$ ;  $m'_2 = \frac{\sigma_c}{\sigma_p} - 1$ . Подставляя эти значения коэффициентов в уравнение (IV.23), получаем окончательно

$$\chi \sigma_i + (1 - \chi) \sigma_1 = \sigma_p, \quad (\text{IV.24})$$

где  $\chi = \frac{\sigma_p}{\sigma_c}$ . Уравнение (IV.24)

тождественно совпадает с условием (IV.17a).

Если предельная поверхность формируется параболоидами вращения с осью, параллельной диагонали пространства напряжений, то сечение предельной поверхности девиаторной плоскости образовано окружностями (рис. 48). В соответствии с обозначениями на рис. 48 для косоугольного треугольника можно записать

$$\rho^2 - a\rho \cos \varphi = R^2 - a^2. \quad (\text{IV.25})$$

Здесь, как и выше,  $\rho$  имеет смысл октаэдрического касательного напряжения. Для того чтобы в плоскости  $\mu_\sigma = \text{const}$  ( $\cos \varphi = \text{const}$ ) уравнение (IV.25) было, как это требует наложенное выше условие, параболой, достаточно принять

$$R^2 - a^2 = n_1 + n_2 \sigma_{\text{окт}}.$$

Учитывая, что по аналогии с выражением (IV.20)  $a = \sqrt{2} n_2$ , получаем

$$\tau_{\text{окт}}^2 - \sqrt{2} n_2 \cos \varphi \tau_{\text{окт}} = n_1 + n_2 \sigma_{\text{окт}},$$

а на основании соотношения (IV.21)

$$\tau_{\text{окт}}^2 - n_2 \left( \sigma_{\text{окт}} + \frac{3 - \mu_\sigma}{\sqrt{2} \sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} \tau_{\text{окт}} \right) = n_1, \quad (\text{IV.26})$$

откуда

$$\tau_{\text{окт}}^2 - n_2 \sigma_1 = n_1$$

или

$$\sigma_i^2 - n'_2 \sigma_1 = n'_1.$$

Выражая коэффициенты  $n'_1$  и  $n'_2$  через предельные напряжения при одноосном растяжении и одноосном сжатии

$$n'_1 = \sigma_p^2; \quad n'_2 = \frac{\sigma_p^2 - \sigma_c^2}{\sigma_p}$$

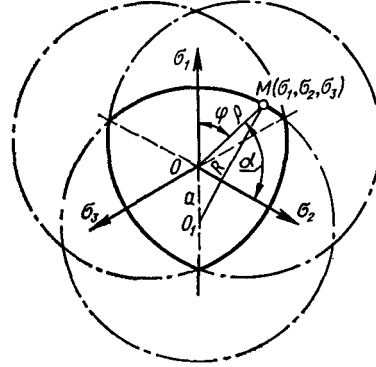


Рис. 48. Девиаторное сечение предельной поверхности, формируемое окружностями.

и подставляя  $\chi = \frac{\sigma_p}{\sigma_c}$ , получаем окончательно

$$\chi^2 \sigma_i^2 + \sigma_p (1 - \chi^2) \sigma_1 = \sigma_p^2. \quad (\text{IV.27})$$

Уравнение (IV.27) тождественно условию (IV.176).

Если в качестве формирующей поверхности принять эллипсоид, большая ось которого наклонена к пространственной диагонали, то, используя аналогичную методику, получим уравнение, совпадающее с условием (IV.17в).

Таким образом, на основании только геометрических соображений с учетом общих свойств предельных поверхностей также приходим к условиям предельного состояния, которые были получены путем обобщения условий пластичности и хрупкого разрушения. Очевидно, сторонами криволинейного треугольника в принципе могут быть участки других кривых, в достаточной степени отражающие результаты экспериментов и не приводящие к громоздким уравнениям предельных поверхностей.

Для исследования предельных поверхностей, соответствующих условиям (IV.17а) — (IV.17в), воспользуемся системой координат  $x, y, z$ , ось  $Ox$  которой совпадает с пространственной диагональю, ось  $Oy$  лежит в плоскости  $\sigma_1, \sigma_2$ , а ось  $Oz$  — в плоскости, равнонаклоненной к осям  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  и проходящей через ось  $\sigma_2$  (см. рис. 37). В этой системе координат

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sqrt{y^2 + z^2};$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y + \frac{1}{\sqrt{6}} z,$$

а уравнения (IV.17а) — (IV.17в) можно записать соответственно в виде

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\chi)^2}{3} x^2 + \frac{(1-\chi)^2 - 3\chi^2}{2} y^2 + \frac{(1-\chi)^2 - 9\chi^2}{6} z^2 + \\ & + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (1+\chi)^2 xy + \frac{1}{\sqrt{3}} (1-\chi)^2 yz + \frac{\sqrt{2}}{3} (1-\chi)^2 xz - \\ & - \frac{2}{\sqrt{3}} (1-\chi) \sigma_p x - \sqrt{2} (1-\chi) \sigma_p y - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (1-\chi) \sigma_p z + \sigma_p^2 = 0; \end{aligned} \quad (\text{IV.28a})$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \chi^2 (y^2 + z^2) + \sigma_p (1 - \chi^2) \left( \frac{1}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y + \frac{1}{\sqrt{6}} z \right) - \sigma_p = 0; \end{aligned} \quad (\text{IV.28б})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1-\chi^2}{3} x^2 + \frac{1+2\chi^2}{2} y^2 + \frac{1+8\chi^2}{6} z^2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (1-\chi^2) xy + \\ & + \frac{\sqrt{2}}{3} (1-\chi^2) xz + \frac{1-\chi^2}{\sqrt{3}} yz - \sigma_p^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.28в})$$

Анализ уравнений (IV.28а) — (IV.28в) показывает, что, пересекаясь с девиаторной плоскостью  $x = \text{const}$ , предельные поверхности оставляют на последней следы в виде кривых второго порядка. На рис. 49 представлены эти кривые в плоскостях  $x = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}$  (плоскость, отсекающая на осях  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  отрезки, соответствующие критическому напряжению при одноосном растяжении) и  $x = -\frac{\sigma_c}{\sqrt{3}}$  (плоскость, проходящая через точки  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_c = -\frac{\sigma_p}{\chi}$ ) при  $\chi = \frac{1}{2}$ . Ориентация осей  $Oy$  и  $Oz$  в пространстве напряжений показана на рис. 37.

Поскольку предельные поверхности для изотропных материалов должны быть симметричными по отношению к главным направлениям, то исследуемые кривые имеют смысл лишь в той области напряженных состояний, которая определена неравенствами

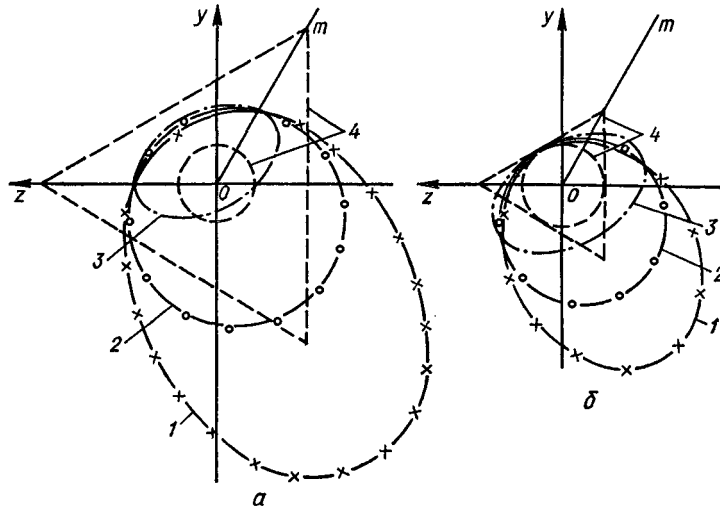


Рис. 49. Предельные кривые на девиаторных плоскостях

$$x = -\frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} \quad (a) \quad \text{и} \quad x = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}} \quad (b);$$

1 — по уравнению (IV.28а); 2 — по уравнению (IV.28б); 3 — по уравнению (IV.28в); 4 — след цилиндра Мизеса и параллелепипеда  $\sigma_{\max} = \text{const}$ .



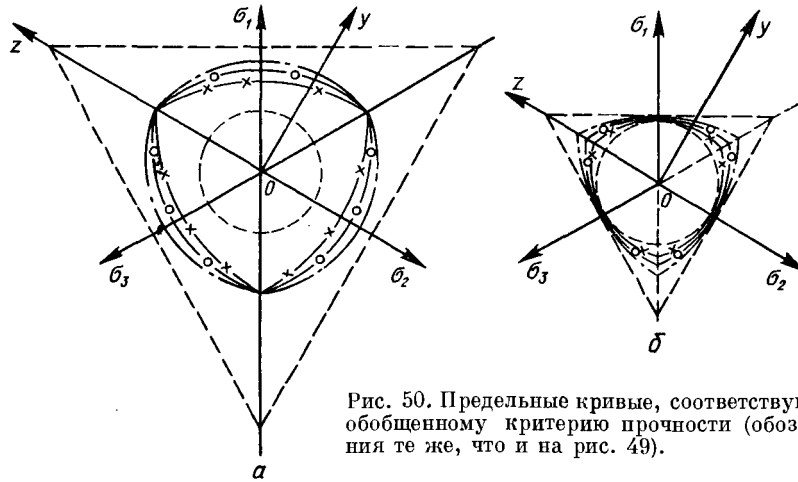


Рис. 50. Предельные кривые, соответствующие обобщенному критерию прочности (обозначения те же, что и на рис. 49).

$\sigma_1 > \sigma_2$  и  $\sigma_1 > \sigma_3$ . На рис. 49 лучом  $Om$ , направленным под углом  $\frac{2}{3}\pi$  к оси  $Oz$ , ограничен участок кривой, находящейся в районе указанной области. Поворачивая дуги, заключенные между осью  $Oz$  и лучом  $Om$ , относительно точки  $O$  сначала на угол  $\frac{2}{3}\pi$ , а затем на угол  $\frac{4}{3}\pi$  (что равносильно круговым перестановкам в уравнениях (IV.17a) — (IV.17в), получаем сечения соответствующих предельных поверхностей. Эти сечения представлены на рис. 50, где также показан вид системы координат  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и  $x, y, z$  со стороны оси  $Ox$ . Анализ уравнений (IV.28a) — (IV.28в) позволяет обнаружить следующее общее свойство предельных поверхностей, соответствующих исследуемым критериям прочности: с изменением характеристики материала  $\chi = \frac{\sigma_p}{\sigma_c}$  характер изменения формы предельных поверхностей качественно один и тот же. При  $\chi \rightarrow 0$  предельные поверхности распадаются на три пары плоскостей, т. е. каждый из критериев переходит в параллелепипед, соответствующий теории максимальных нормальных напряжений; при  $\chi \rightarrow 1$  вытянутые в направлении оси симметрии пространства предельные поверхности вырождаются в цилиндр Мизеса — Генки. Естественно, сечения предельных поверхностей на девиаторной плоскости также изменяются в соответствии с изменением параметра  $\chi$ . Однако эти сечения всегда сохраняют форму криволинейных треугольников, инвариантных к направлениям главных осей, и расположены между равносторонним треугольником ( $\chi = 0$ ) и окружностью ( $\chi = 1$ ), показанными на рис. 50 штриховыми линиями.

Таким образом, каждое из уравнений (IV.17а) — (IV.17в) определяет в пространстве напряжений три поверхности, которые, пересекаясь, образуют замкнутую фигуру, интерпретирующую в координатах  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  заданное условие прочности.

При изменении коэффициента  $\chi$  изменяется и расчетное значение сопротивления материала гидростатическому растяжению. Характер этого изменения можно выявить из уравнений (IV.28а) — (IV.28в), если учесть, что при гидростатическом растяжении  $y = z = 0$ . Расстояние от вершины поверхности до начала координат, как это следует из уравнений (IV.28а) — (IV.28в), будет

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{1-\chi} \sigma_p; \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{1-\chi^2} \sigma_p; \quad x_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\chi^2}} \sigma_p,$$

где индексы 1, 2, 3 показывают, что значения  $x$  взяты соответственно из уравнений (IV.17а), (IV.17б), (IV.17в). Следовательно, сопротивление гидростатическому растяжению

$$\sigma_{p_1}^0 = \frac{x_1}{\sqrt{3}} = \frac{\sigma_p}{1-\chi};$$

$$\sigma_{p_2}^0 = \frac{x_2}{\sqrt{3}} = \frac{\sigma_p}{1-\chi^2};$$

$$\sigma_{p_3}^0 = \frac{x_3}{\sqrt{3}} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{1-\chi^2}}$$

может изменяться от  $\sigma_p^0 = \sigma_p$  при  $\chi = 0$  до  $\sigma_p^0 = \infty$  при  $\chi = 1$ .

Легко заметить, что со стороны гидростатического сжатия критерии (IV.17а) и (IV.17б) не предполагают ограничения прочности материала при любых значениях параметра  $\chi$ , а в соответствии с критерием (IV.17в)

$$\sigma_{c_3}^0 = \frac{\sigma_p}{-\sqrt{1-\chi^2}} = -\sigma_{p_3}^0.$$

Для плоского напряженного состояния обобщенные критерии (IV.17а) — (IV.17в) интерпретируются предельными кривыми, состоящими из трех участков, два из которых описываются уравнениями

$$\chi \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} + (1-\chi) \sigma_1 = \sigma_p; \quad (\text{IV.29а})$$

$$\chi^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2) + \sigma_p (1-\chi^2) \sigma_1 = \sigma_p^2; \quad (\text{IV.29б})$$

$$\chi^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2) + (1-\chi^2) \sigma_1^2 = \sigma_p^2, \quad (\text{IV.29в})$$

а третий (в области отрицательных значений напряжений) является участком эллипса  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_p$  для всех трех условий.

Из уравнений (IV.17а) — (IV.17в) следует, что отношение предельных напряжений при одноосном растяжении к предельным напряжениям при чистом сдвиге изменяется согласно зависимостям

$$\frac{\sigma_p}{\tau_k} = 1 + \chi(\sqrt{3} - 1); \quad \frac{\sigma_p}{\tau_k} = \frac{1}{2} [1 - \chi^2 + \sqrt{(1 - \chi^2)^2 + 12\chi^2}];$$

$$\frac{\sigma_p}{\tau_k} = \sqrt{2\chi^2 + 1},$$

т. е. в пределах от  $\frac{\sigma_p}{\tau_k} = \sqrt{3}$  при  $\chi = 1$  до  $\frac{\sigma_p}{\tau_k} = 1$  при  $\chi = 0$ .

Если сдвиговая деформация определяется уровнем максимальных касательных напряжений, то вместо величины  $\sigma_i$  в выражения (IV.17а) — (IV.17в) для совмещенных критериев прочности следует поставить величину  $(\sigma_1 - \sigma_3)$ , пропорциональную  $\tau_{\max}$ . Тогда получим

$$\sigma_1 - \chi\sigma_3 = \sigma_p; \quad (\text{IV.30a})$$

$$\chi^2(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \sigma_p(1 - \chi^2)\sigma_1 = \sigma_p; \quad (\text{IV.30б})$$

$$\chi^2(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (1 - \chi^2)\sigma_1^2 = \sigma_p. \quad (\text{IV.30в})$$

Уравнение (IV.30а) совпадает с соответствующим уравнением упрощенной теории Мора, когда огибающие кругов Мора заме-

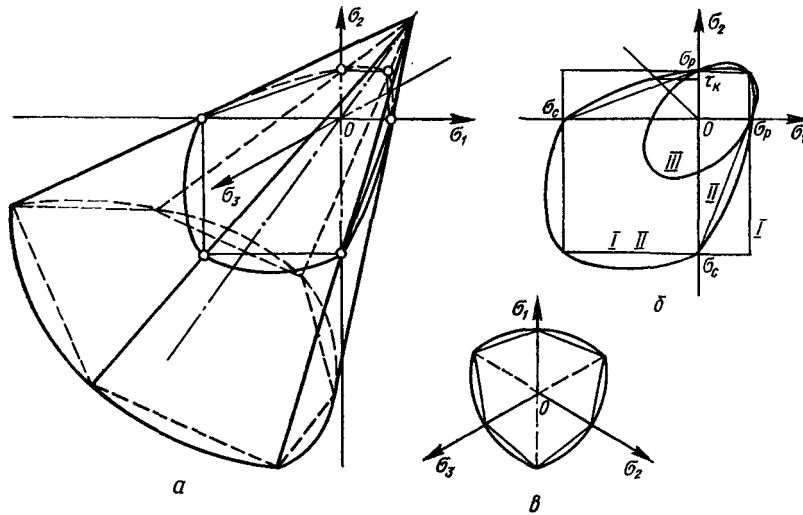


Рис. 51. Предельная поверхность, соответствующая критерию (IV.17а): а — в пространстве напряжений; б — плоская интерпретация (I — теория максимальных нормальных напряжений, II — теория Кулона — Мора, III — теория энергии формоизменения); в — в девиаторной плоскости.

нены прямыми. В пространстве напряжений оно интерпретируется шестигранной пирамидой, вписанной в предельную поверхность критерия (IV.17а) (рис. 51, а, б). Предельные поверхности, интерпретирующие условия (IV.30б) и (IV.30в), вписаны в соответствующие предельные поверхности, построенные по условиям (IV.17б) и (IV.17в). Общий случай сечения этих поверхностей девиаторной плоскостью показан на рис. 51, в ломаной линией.

Проведенный анализ свидетельствует о том, что критерии прочности, основанные на совмещении условий пластичности и хрупкого разрушения, интерпретируются в пространстве напряжений поверхностями, которые удовлетворяют всем необходимым требованиям, сформулированным в § 2 и 3 настоящей главы.

Геометрия обобщенных критериев подтверждает предположение Койтера [202] о том, что кажущийся угол на поверхности текучести возникает в результате пересечения двух или более гладких поверхностей.

#### § 5. Достоверность обобщенных критериев

Обобщенные критерии удовлетворяют основным требованиям, предъявляемым к теориям прочности, они базируются на ясных физических представлениях и интерпретируются в пространстве напряжений предельными поверхностями, имеющими теоретически (с точки зрения феноменологии) и экспериментально обоснованную форму. Следовательно, в этих критериях в определенной мере воплощен сформулированный Н. Н. Давиденковым [106] принцип сходимости решений, полученных на основе физических и феноменологических предпосылок.

Удовлетворение указанным требованиям можно считать необходимым, но не достаточным. Решающим этапом исследования является анализ соответствия критериев опытным данным.

Подавляющее большинство реальных конструкционных материалов занимает промежуточное положение между пластичными, предельное состояние которых удовлетворительно описывается (дающими малые — до 14% — расхождения) условиями Кулона и Мизеса, и идеально хрупкими, критерием разрушения которых может служить максимальное нормальное напряжение (первая теория прочности). Учитывая общее свойство материалов, заключающееся в том, что по мере перехода от пластичных материалов к хрупким соотношение между предельными напряжениями при растяжении и сжатии уменьшается, параметр  $\chi = \frac{\sigma_p}{\sigma_c}$  в обобщенных критериях можно принять за характеристику хрупкости материала. Формально это дает основание использовать обобщенные критерии для описания предельного состояния практически всех достаточно однородных и изотропных материалов.

Ввиду неизбежного разброса экспериментальных данных нельзя ожидать идеального совпадения теоретических и опытных значений сопоставляемых величин. Поэтому достоверность новых критериев может быть оценена лишь с учетом достоверности тех или иных получивших достаточно широкое распространение теорий прочности.

Из большого числа известных критериев, включающих константы, для определения которых достаточно проведения двух опытов (например, при растяжении и сжатии), заслуживают внимания [83, 244, 369, 461] следующие:

критерий Кулона — Мора

$$\sigma_1 + \chi \sigma_3 \leq \sigma_p, \quad (\text{IV.31})$$

критерий Боткина — Миролюбова

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \frac{2\sqrt{2}\sigma_p\sigma_c}{\sigma_c + \sigma_p} - \frac{\sqrt{2}(\sigma_c - \sigma_p)}{\sigma_c + \sigma_p}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (\text{IV.31a})$$

критерий Баландина

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + (\sigma_c - \sigma_p)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_p\sigma_c. \quad (\text{IV.31б})$$

Результаты испытаний большой группы хрупких материалов приведены на рис. 45. Анализ этих результатов показывает, что предельные кривые материалов, не имеющих существенного нарушения структуры в виде различного рода макродефектов — трещин, пор, инородных включений и т. п., — расположены в области, ограниченной эллипсом Мизеса и прямой, соответствующей теории максимальных нормальных напряжений.

Оценка достоверности критериев прочности может быть произведена как по данным отдельных видов испытаний, так и по целым областям поля напряжений.

Как известно, каждая теория прочности предполагает определенное соотношение между предельными напряжениями при растяжении, сжатии и чистом сдвиге. Для обобщенных критериев эти соотношения определены зависимостями (IV.30). Из критериев Кулона — Мора, Боткина — Миролюбова и Баландина вытекает соответственно

$$\frac{\sigma_p}{\tau_k} = 1 + \chi; \quad \frac{\sigma_p}{\tau_k} = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \chi); \quad \frac{\sigma_p}{\tau_k} = \sqrt{3}\chi. \quad (\text{IV.32})$$

На рис. 52 представлены кривые зависимости предельных напряжений при чистом сдвиге (при кручении тонкостенного трубчатого образца) от коэффициента  $\chi = \frac{\sigma_p}{\sigma_c}$ , соответствующие

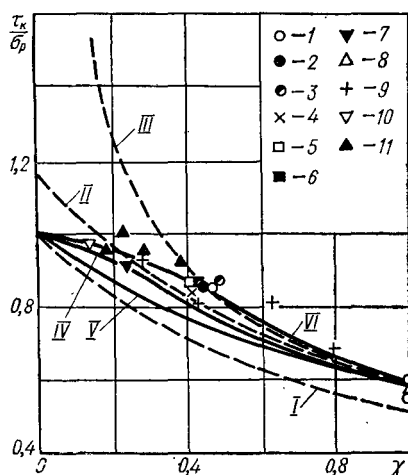


Рис. 52. Сопоставление опытных данных с результатами теоретических расчетов:

1 — сталь малоуглеродистая; 2 — сталь Р18; 3 — сталь Р9; 4 — сталь 40Х; 5 — сталь У12; 6 — сталь 9ХС; 7 — бетон; 8 — алюминий; 9 — чугун; 10 — гипс; 11 — пористое железо.

I — по теории Кулона — Мора; II — по теории Боткина — Миролюбова; III — по теории Баландина; IV — по уравнению (IV.17а); V — по уравнению (IV.17б); VI — по уравнению (IV.17в).

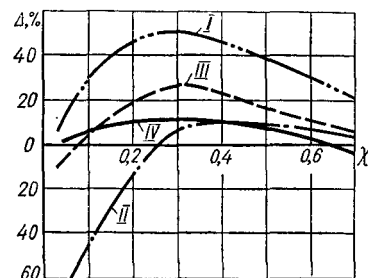


Рис. 53. Сопоставление опытных данных при чистом сдвиге с результатами теоретических расчетов:

I — по теории Кулона — Мора; II — по теории Баландина; III — по теории Боткина — Миролюбова; IV — по обобщенному критерию.

щие уравнениям (IV.17а) — (IV.17в) и, для сравнения, теориям Кулона — Мора, Боткина — Миролюбова и Баландина. Здесь же нанесены экспериментальные точки, полученные различными авторами [110, 112, 206, 283, 309, 360, 369, 528, 533]. Из сравнения результатов опыта с теорети-

ческими данными однозначно следует, что в наилучшем соответствии с опытными данными при чистом сдвиге на всем диапазоне значений  $\chi$  находятся обобщенные критерии.

Оценка надежности расчетов по различным критериям прочности, включая обобщенный критерий (IV.17в), проведена на кафедре сопротивления материалов Томского политехнического института [180, 301]. Выполненные с помощью ЭЦВМ «Минск-1» вычисления позволили получить количественную оценку отклонения теоретических расчетов от фактических данных по хрупким материалам, существенно отличающимся по своей структуре и физико-механическим свойствам. Были определены средние квадратические отклонения, которые дают различные критерии прочности для всех материалов, результаты испытаний которых опубликованы в литературе.

Если  $x_T$ ,  $x_0$  — теоретические и опытные значения величины  $\frac{\tau_K}{\sigma_p}$ , то для  $n$  испытанных материалов

$$\Delta_{\text{ср}}^{\text{кн}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_T - x_0}{x_0} \right)^2}.$$

Таблица 3

Материал	$\chi$	$\frac{\sigma_p}{\tau_K}$	По Баландину		По Боткину		По обобщенному критерию	
			$\sigma_p/\tau_K$	$\Delta, \%$	$\sigma_p/\tau_K$	$\Delta, \%$	$\sigma_p/\tau_K$	$\Delta, \%$
Сплав АС-418	0,04	0,64	0,15	70,6	0,58	9,4	0,64	0
Сплав ЮНДК-24	0,08	0,64	0,28	56,2	0,65	1,6	0,66	3,2
К-17-2	0,16	0,73	0,52	28,8	0,79	8,2	0,72	1,4
К-20-2	0,17	0,75	0,55	26,7	0,81	8,0	0,73	2,7
К-18-2	0,18	0,81	0,58	28,4	0,83	2,5	0,74	8,6
К-21-22	0,19	0,71	0,62	12,7	0,85	19,7	0,76	7,4
Серый чугун НВ190	0,26	0,90	0,79	12,2	0,97	7,8	0,91	1,2
Серый чугун НВ110	0,31	0,82	0,91	11,0	1,06	29,3	0,93	13,4
Сталь 9ХСНРС62	0,63	1,47	1,60	8,8	1,63	10,9	1,54	4,8
Сталь 9ХСНРС50	0,71	1,63	1,74	6,8	1,76	8,0	1,55	4,9
Среднее отклонение			26,82%		10,54%		4,74%	

На рис. 53 показаны кривые, соответствующие погрешностям различных теорий при определении отношения  $\frac{\tau_K}{\sigma_p}$  по известному для каждого данного материала параметру  $\chi$ . Из рисунка видно, что значениям  $\frac{\tau_K}{\sigma_p}$ , предсказываемым обобщенным критерием, соответствуют наименьшие отклонения от фактических значений.

Анализ достоверности различных теорий прочности по результатам испытаний широкого класса материалов на радиальное сжатие проведен в работе [180]. При радиальном сжатии образцов в виде цилиндров в центре образца (если смотреть со стороны торца) возникает плоское напряженное состояние с соотношением главных напряжений  $K = -3$  [34]. О достоверности той или иной теории прочности можно судить, сопоставляя экспериментальные значения «контактной» прочности  $\sigma_K$  с данными, предсказываемыми теорией.

Такое сопоставление по соотношению  $\frac{\sigma_p}{\sigma_K}$  приведено в табл. 3, заимствованной из работы [180] и дополненной значениями относительных ошибок  $\Delta$ , полученных при расчете по различным теориям для каждого материала. Из табл. 3 видно, что средняя относительная ошибка (4,74%) по всем материалам оказалась минимальной при расчетах по обобщенному критерию.

Аналогичные результаты были получены при анализе расхождений теоретических и опытных данных в области двухосного растяжения, двухосного сжатия и растяжения — сжатия [301]. В этих случаях оценка достоверности теории производилась по

средней величине отклонения расчетной прочности от фактической для всей зоны

$$\Delta = \frac{\sum_{i=1}^k \Delta_{\text{ср}}^{\text{кв}}}{k}.$$

Определена также надежность расчетов по каждой теории по всем испытанным материалам в целом. Результаты вычислений приведены в табл. 4 и представлены в виде гистограмм на рис. 54. Как видно из рисунка, достоверность теории Кулона — Мора, так часто рекомендуемой для хрупких материалов, в области разноименных по знаку напряжений не превышает 85%. Такого же порядка достоверность критерия Баландина и несколько выше достоверность критерия Боткина — Миродубова. Наибольшей достоверностью (выше 92%) для исследованных хрупких материалов при плоском напряженном состоянии обладает обобщенный критерий прочности.

Экспериментальное исследование прочности полухрупких тел при сложном напряженном состоянии проведено в Институте физики и математики АН КиргССР (г. Фрунзе) под руководством академика АН КиргССР М. Я. Леонова [344]. Сопоставление опыт-

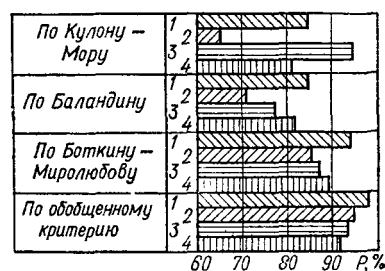


Рис. 54. Достоверность различных критериев прочности при испытаниях:

1 — на сдвиг; 2 — на радиальное сжатие; 3 — на двухосное растяжение; 4 — напряжения противоположных знаков.

Таблица 4

Материал	Двухосное растяжение				Растяжение — сжатие			
	По Куло- ну — Мору	По Баланди- ну	По Боткину	По обоб- щенному критерию	По Куло- ну — Мору	По Баланди- ну	По Боткину	По обоб- щенному критерию
Стекло	0,033	0,324	0,184	0,033	0,295	0,517	0,201	0,104
Гипс	0,027	0,357	0,216	0,026	0,146	0,548	0,060	0,154
К-18-2	0,090	0,239	0,131	0,092	0,192	0,174	0,116	0,069
Чугун $\chi = 0,3$	0,085	0,215	0,130	0,091	0,228	0,057	0,116	0,049
Чугун $\chi = 0,36$	—	—	—	—	0,257	0,114	0,163	0,090
Чугун $\chi = 0,4$	0,099	0,162	0,097	0,105	0,185	0,063	0,089	0,074
ЭЗЛ-120	0,021	0,103	0,048	0,040	0,187	0,073	0,098	0,068
Сталь У7	—	—	—	—	0,180	0,085	0,085	0,078
Сталь У8А	0,041	0,183	0,182	0,092	0,120	0,63	0,063	0,063
$\Sigma \Delta_{\text{ср}}^{\text{кв}}$	0,396	1,538	0,988	0,477	1,790	1,694	0,991	0,743
$\Delta$	0,057	0,226	0,141	0,068	0,199	0,188	0,110	0,082
$P, \%$	0,943	0,774	0,859	0,932	0,801	0,812	0,890	0,918



ных данных с результатами теоретических расчетов по теориям Кулона — Мора, Ягна, Баландина, Боткина — Миролюбова и по обобщенным критериям показало, что критерии (IV.17а) — (IV.17в) дают наилучшее совпадение с экспериментальными результатами. На основании проведенного сравнения в работе [344] сделан вывод о том, что критерии (IV.17а) — (IV.17в) следует рекомендовать для расчетов на прочность полухрупких материалов типа серых чугунов.

Общее условие для скольжения и разрушения в форме (IV.17а) использовано Томасом [636] для объяснения наблюдаемого экспериментально отклонения плоскостей скольжения и разрушения от плоскостей максимального касательного напряжения.

Следует отметить, что соответствие требованиям к форме предельной поверхности, установленным в § 2 настоящей главы, является необходимым условием достоверности критериев предельного состояния. В свете проведенного анализа дальнейшее развитие энергетических теорий прочности, интерпретирующихся в пространстве напряжений поверхностями вращения, представляется бесперспективным. Отмечаемое в ряде работ соответствие теоретических и опытных данных объясняется, очевидно, тем, что исследуемая зона напряженных состояний находится в области, примыкающей к месту пересечения предельной поверхности соответствующей энергетической теории с истинной предельной поверхностью испытанного материала.

Использование эквивалентных соотношений в форме (IV.17) позволяет объяснить возникающие при анализе известных экспериментальных результатов взаимно исключающие мнения о степени достоверности различных теорий прочности.

## *Глава V*

### **КРИТЕРИЙ ПРОЧНОСТИ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

#### **§ 1. Феноменологические модели механизма разрушения**

Механические теории прочности, критерии которых являются функциями компонентов тензора напряжений, не могут дать удовлетворительного объяснения ряду свойств материалов, таких как масштабный эффект, разброс величин прочности и др. Природа этих свойств еще окончательно не выяснена. Однако многочисленные исследования показали, что определяющим фактором являются флуктуации механических свойств материала и, как следствие, локальные возмущения поля напряжений.

Вследствие сложности явлений, происходящих в микрообъемах материала в процессе деформирования и разрушения, пока нельзя сформулировать физически обоснованный критерий, который позволил бы проверять прочность материала при различных видах напряженного состояния с учетом всех характерных для данного материала несовершенств. Поэтому некоторые исследователи идут по пути построения модели материала, его структуры. Методы математической статистики и технической физики позволяют описать эти модели аналитически и путем математических построений прийти к условиям предельного состояния.

Попытка создания теории на основе модели, отражающей отдельные аспекты поведения материала под нагрузкой, была сделана О. Я. Бергом [29], который исходил из концепции теории максимальных удлинений. Используя графический метод усреднения по стереографическим проекциям кристалла с гранецентрированной кубической решеткой, Закс [623] впервые описал состояние текучести поликристалла при растяжении и кручении. Н. И. Снитко [415] предложил метод численного нахождения предела текучести поликристаллического металла при любом напряженном состоянии путем синтеза условий текучести отдельных монокристаллов. Теория критического изменения объема была предложена Бриком [524]. Давен [542] рассматривал явление разрушения как потерю устойчивости при упругой деформации материала. И. А. Одинг [326], связывая эффект пластической деформации с максимальными касательными напряжениями, указывал, что при различных напряженных состояниях дефекты структуры оказывают различное

влияние на критическое значение напряжений. Такую «разноэффектность» действия касательных напряжений он предлагал характеризовать коэффициентами эквивалентности, учитывающими особенности структуры металла, и коэффициентами эквивалентности, учитывающими неоднородность распределения напряжений по сечению образца.

Некоторые принципы построения статистической теории прочности волокнистых материалов сформулированы Хсiao [473] на основе модели среды в виде совокупности хаотически ориентированных линейных элементов, натяжения которых в пределах телесного угла пропорциональны деформациям.

Несоответствия между теоретической прочностью монокристаллов и прочностью реальных тел Гриффитс [559] объясняет наличием в материале значительного числа мельчайших трещин, около краев которых существует чрезвычайно высокая концентрация напряжений.

Используя решение Инглиса [565] о напряженном состоянии около узкой эллиптической полости с большой осью  $2l$  в тонкой пластине, испытывающей среднее растягивающее напряжение  $\sigma$  в направлении, перпендикулярном к большой оси, Гриффитс получил следующее значение критического напряжения, при котором трещина начинает распространяться:

$$\sigma_{\max} = 2\sigma \sqrt{\frac{l}{\rho}}, \quad (V.1)$$

где  $\rho$  — радиус кривизны по концам большой оси. При  $\rho \rightarrow 0$  эллипс вырождается в трещину, а напряжения возрастают до бесконечности. В реальных телах величина  $\rho$ , очевидно, достигает величины межмолекулярного расстояния  $a$ .

С другой стороны, в процессе образования трещины внутри материала образуются две новые поверхности, обладающие удельной поверхностной энергией  $\alpha$ . Эта энергия, являющаяся константой материала, определяется величиной энергии деформации, накопленной телом до образования трещины; поэтому численно ее можно оценить величиной энергии, накопленной в единице объема трещины.

Предполагая, что расстояние между поверхностями определяется величиной межмолекулярного расстояния  $a$ , и используя известное выражение для удельной потенциальной энергии при упругой деформации, находим

$$2\alpha = \frac{a\sigma_{\max}^2}{2E},$$

откуда

$$\sigma_{\max} = 2 \sqrt{\frac{E\alpha}{a}}. \quad (V.1a)$$

Сопоставляя выражения (V.1) и (V.1a) и предполагая  $\rho = a$ , определяем, что при одноосном растяжении в направлении, перпендикулярном к трещине, предел прочности выражается формулой

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{E\alpha}{l}}.$$

Эту теорию можно распространить и на двухосное напряженное состояние. Считая, что разрушение происходит, когда величина максимального напряжения в наиболее длинной и наиболее невыгодно расположенной трещине достигает критического для данного материала значения, Гриффитс приходит к следующим условиям прочности:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_p \quad \text{при} \quad 3\sigma_1 + \sigma_2 > 0, \\ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 8\sigma_p(\sigma_1 + \sigma_2) &= 0 \quad \text{при} \quad 3\sigma_1 + \sigma_2 < 0. \end{aligned} \quad (V.2)$$

Здесь предполагается справедливым неравенство  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Теорию Гриффитса можно интерпретировать графически. Кривая разрушения, как видно из рис. 55, состоит из прямой линии и параболы. Эта теория была проверена ее автором на стекле, поэтому в выражении (V.2) принято  $\frac{\sigma_c}{\sigma_p} = 8$ . Гипотеза Гриффитса

применима только к хрупким материалам и не может быть распространена на пластичные материалы, например на металлы, так как энергия пластического течения в 100—1000 раз больше упругой потенциальной энергии.

Для случая квазихрупкого разрушения в формулу Гриффитса была введена удельная энергия пластического деформирования приповерхностного слоя трещины [549, 491]. Однако для поля пластических деформаций при распространении трещин получены лишь приближенные численные решения в большинстве случаев в предположении об идеальной пластичности материала [214, 518, 584]. Полученные результаты, как правило, плохо согласуются с данными непосредственных измерений.

Серьезной основой для дальнейшего развития теории трещин явились работы советских ученых Н. И. Мухелишвили, Г. В. Колосова, С. А. Христиановича, М. Я. Леонова, Г. И. Баренблата, В. М. Моссаковского, В. В. Папасюка и др. Были сделаны попытки использовать модели твердого тела с трещинами для расчета прочности при сложном напряженном состоянии [307, 342, 505]. Однако по полученным результатам пока можно давать только качественные оценки.

Развиваемые подходы позволили сформулировать критерии, определяющие переход трещины в нестабильное состояние.

По Ирвину [566] условие энергетического баланса на контуре равновесной трещины может быть записано в следующем виде:

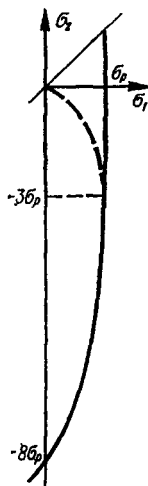


Рис. 55. Предельная кривая по теории Гриффитса.

для случая плоской деформации

$$\pi(1 - \mu^2) K^2 = 2E\gamma,$$

для плоского напряженного состояния

$$\pi K^2 = 2E\gamma,$$

где  $\gamma$  — эффективная плотность удельной поверхностной энергии.

Начало развития трещины определяется условием  $K > K_c$ , где  $K_c$  — критическое значение коэффициента интенсивности напряжений, используемое как мера вязкости разрушения материала.

Деформационный критерий хрупкого разрушения Леонова — Панасюка (КРТ-критерий) получен [261, 342] на основе анализа так называемой  $\delta_K$ -модели, в соответствии с которой развитие трещины рассматривается как переход области ослабленных межчастичных связей, имитирующих зону неупругих деформаций, в область разорванных связей. При этом условие перехода трещины в нестабильное состояние получено в следующем виде:

$$\delta_K < V_{II}(q_{II}, l_0, l),$$

где  $q_{II}$  — приложенная к телу нагрузка;  $l$  — полный размер трещины;  $l_0$  — размер трещины без концевых областей.

Ряд аналитических решений предложен авторами работ [17, 322, 482, 546 и др.].

Известно, что распределение по объему мест локальных всплесков поля напряжений носит случайный характер. В связи с этим большое значение имеют исследования, в основу которых положена статистическая трактовка прочности. Мысль о статистической природе прочности впервые была высказана А. П. Александровым и С. Н. Журковым в 1933 г. [205]. Дальнейшее развитие статистических теорий проведено в работах Вейбулла [639], Т. А. Конторовой и Я. И. Френкеля [204], Фишера и Холломона [553], С. Д. Волкова [57], В. В. Болотина [35] и др.

При выводе основных уравнений авторы работ [639] и [204] считали, что разрушение вызывается лишь максимальным нормальным напряжением растяжения, а вторые два главных компонента тензора напряжений влияния на прочность не оказывают. Фишер и Холломон в своей теории сделали попытку учесть все три главных компонента. Однако анализ полученных ими формул показывает, что в соответствии с этой теорией в материалах, имеющих достаточно большое число дефектов, прочность определяется в первую очередь максимальным главным напряжением и незначительно зависит от двух других напряжений.

К сожалению, рассматриваемые теории описывают разрушение лишь таких материалов, прочность которых целиком определяется их локальной прочностью. Расхождение между результатами теоретических расчетов и данными опытов, проведенных на ряде материалов, объясняется, по-видимому, несоответствием свойств реальных тел и свойств идеально хрупкой модели, положенной в основу теории. В реальных телах не выполняется одно из главных условий, лежащих в основе статистической теории хрупкого разрушения: локальная прочность определяет прочность всего тела. В действительности благодаря наличию в материале микропластических деформаций локальные пики напряжений перераспределяются и не влекут за собой разрушение тела. Кроме того, степень опасности дефектных элементов одинаковой прочности зависит от их координат [35]. На стекле, например, обнаружено [19], что масштабный эффект зависит не только от объема образца, но и от площади его поверхности, т. е. одинаковые дефекты не являются одинаково опасными. Эти теории не связывают разрушение со структурными изменениями в материале, вызванными пластической деформацией, которая, по данным работы [478], всегда предшествует разрушению.

Несмотря на отмеченные недостатки, некоторые из названных статистических теорий могут быть использованы в расчетной практике как для оценки прочности отдельных материалов, так и для объяснения их специфических свойств [359].

Наиболее строгой и перспективной, по-видимому, является единая статистическая теория прочности С. Д. Волкова [57], устанавливающая общий статистический критерий прочности в виде некоторого допущения на вероятность развития процесса разрушения. В отличие от многих авторов С. Д. Волков рассматривает материал не в виде набора частично связанных между собой зерен поликристалла, а как сплошную поликристаллическую среду. Это позволило ему сформулировать теорию прочности для произвольного напряженного состояния. Полученные уравнения удовлетворительно описывают разрушение некоторых технических материалов [46, 57, 429].

С. Д. Волков на основании новой модели микроскопически неоднородной среды, рассматривая пластическую деформацию как результат действия максимальных «скалывающих» напряжений второго рода, предлагает следующее условие:

$$\chi_s \sigma_T - (\sigma_1 - \sigma_3) = (\chi_s - 1) \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \\ \text{при } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \quad (\text{V. 3})$$

Здесь

$$\chi_s = \frac{2\bar{\xi}_s}{\sigma_T},$$

где  $\bar{\xi}_s$  — средний предел текучести второго рода на площадке скольжения;  $\sigma_T$  — предел текучести первого рода.

Предельную поверхность пластичности в соответствии с выражением (V.3) можно рассматривать как статистическое обобщение теории максимальных касательных напряжений. Действительно, если предел текучести первого рода совпадает со средним значением пределов текучести второго рода, т. е. если

$$\bar{\xi}_s = \frac{1}{2} \sigma_T,$$

то условие (V.3) преобразуется в условие Кулона (III.5). Однако условие (III.3) более универсально. Если теория максимальных касательных напряжений предсказывает прочность при кручении  $\tau_K = 0,5\sigma_T$ , то статистический критерий в зависимости от значения параметра  $\chi_s$  может предполагать разные соотношения между пределом текучести при чистом сдвиге и одноосном растяжении. Так, при  $\chi_s = 3,14$  и  $\mu = 0,3$   $\tau_K = 0,577\sigma_T$ , т. е.  $\tau_K$  равно соотношению, которое вытекает из условия Мизеса.

С. Д. Волков считает, что при обобщении критериев прочности на хрупкие материалы, по-разному сопротивляющиеся растяжению и сжатию, путем формального введения в условие прочности линейных или квадратичных функций шарового тензора не учитываются все аспекты влияния нормальных напряжений. Например, не учитывается отклонение линий скольжения от траекторий максимальных касательных напряжений первого рода. Проводя аналогию между сопротивлением сдвигу при пластическом деформировании и явлениями трения при относительном перемещении соприкасающихся тел, С. Д. Волков [54] сначала принимает гипотезу Кулона [см. уравнение (III.6)] в виде

$$\tau_{sv} = \alpha - \beta \sigma_v, \quad (V.4)$$

где  $\tau_{sv}$  — критическое касательное напряжение первого рода на площадке с нормалью  $v$ ;  $\sigma_v$  — нормальное напряжение первого рода на этой площадке;  $\alpha, \beta$  — коэффициенты.

Однако, полагая, что критическое касательное напряжение должно зависеть не только от нормального напряжения, действующего в плоскости скольжения, но и от шарового тензора, С. Д. Волков [55] записывает условие наступления критического состояния так:

$$\tau_{sv} = \alpha - \beta (\sigma_v + \lambda \sigma_0) \quad (V.5)$$

или, переходя к модели микроскопически неоднородной среды,

$$\begin{aligned} \frac{\chi_s \sigma_p}{2} - \beta \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \lambda \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \\ = c \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)}, \end{aligned} \quad (V.5a)$$

где  $\sigma_p$  — предел текучести при одноосном растяжении первого рода;  $\chi_s$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  и  $C$  — константы материала, определяемые из опытов при различных напряженных состояниях, например при одноосном растяжении, одноосном сжатии, чистом сдвиге и двухосном равномерном растяжении. Частными случаями условия (V.5a) являются критерии Кулона — Мора (III.8) и Занделя (III.12).

Наряду с уравнениями (V.3) и (V.5a) С. Д. Волков [56] предложил вытекающее из статистической теории условие пластичности

$$(C_1 + C_2\sigma_0 - \tau_2)^2 = C_3 \left( \frac{\sigma_1^2}{6G\sigma_0} + \frac{\sigma_0^2}{2K_0} \right), \quad (V.6)$$

$$\text{где} \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3},$$

$C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  — постоянные, определяемые по результатам трех опытов;  $G$  — модуль сдвига;  $K_0$  — модуль объемного расширения.

Статистический критерий С. Д. Волкова использован Е. Е. Суриковой [429] при выводе условия пластичности и разрушения магниевых сплавов с учетом изменения среднего предела текучести кристаллитов при изменении вида напряженного состояния.

Из приведенного обзора видно, что точность решений, основанных на статистических подходах, зависит от того, насколько принятая модель отражает свойства реального тела и учитывает особенности кинетики его разрушения. В основу большинства современных статистических теорий положена гипотеза о том, что независимо от вида напряженного состояния, в котором находятся элементы тела, ответственными за разрушение являются максимальные нормальные напряжения, а прочность всего тела определяется локальной прочностью. Усложнение модели, как правило, приводит к непреодолимым математическим трудностям или решениям, непригодным для практического применения ввиду их громоздкости, или к необходимости опытного определения большого числа констант материала.

С другой стороны, если в одних статистических теориях не учитывается взаимовлияние дефектов и перераспределение напряжений в результате неизбежных пластических деформаций основной массы металла — матрицы, а за определяющий фактор принимается локальная прочность, то в теориях, основанных на модели микроскопически неоднородной среды, не отражено влияние локальных возмущений поля напряжений вследствие неизбежной флуктуации механических свойств материала и наличия в нем различного рода макродефектов.



## § 2. О двойственной природе прочности структурно-неоднородных материалов

Идеализированная модель материала, принятая в механике сплошных сред, естественно, не отражает многих особенностей строения реальных тел. Поэтому результаты теоретических расчетов в большей или меньшей степени не совпадают с экспериментальными данными. Большие отклонения наблюдаются в том случае, когда для материала характерно наличие макродефектов — включений, пор и т. п., приводящих к различию физических и механических свойств отдельных частиц. К таким материалам с «несовершенной» структурой прежде всего относятся большинство горных пород и бетонов, отдельные металлокерамические композиции и чугуны, некоторые термореактивные пластмассы и др.

Иногда микротрещины специально формируют в материале для придания ему определенных свойств. Так, например, для повышения термостойкости шамотов при их изготовлении часть зерен исходного материала покрывается пленкой парафина, плавление которого приводит к образованию пор типа трещин.

Несмотря на существенное различие природы и свойств указанных материалов, обращает на себя внимание следующая общая для них важная особенность, противоречащая, на первый взгляд, общепринятым представлениям: усилие, необходимое для разрыва, с увеличением поперечного растягивающего напряжения уменьшается, а с увеличением поперечного сжимающего напряжения — часто возрастает до некоторого предела, приблизительно соответствующего состоянию чистого сдвига (см. рис. 64, 65).

Данные исследований [359, 442] показали, что разрушение материалов с существенной структурной неоднородностью сопровождается явлениями, которые не свойственны большинству литых конструкционных материалов или проявляются у них в значительно меньшей степени.

Установлено также, что характеристики прочности материала существенно зависят от вида напряженного состояния (растяжение, кручение), а разрушение имеет статистическую природу. Учитывая это, можно предположить следующую модель процесса разрушения материалов с макродефектами в виде трещин, которая, не будучи исчерпывающей, объясняет, казалось бы, аномальный вид экспериментальной кривой.

Имеющиеся в материале многочисленные трещины в силу статистических законов распределены по объему тела и ориентированы случайно. Растягивающие напряжения способствуют раскрытию трещин, расположенных нормально к ним. Одна или несколько таких наиболее опасных трещин и являются источником макроразрушения. В развитии границы раздела важную роль играют трещины с другой ориентацией, причем в случае растягивающей по-

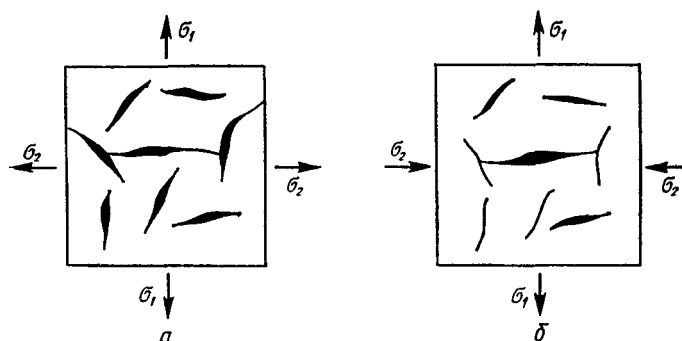


Рис. 56. Характер распространения трещин при различных видах напряженного состояния:

*a* — двухосное растяжение; *б* — растяжение — сжатие.

перечной нагрузки они способствуют развитию магистральной трещины, а в случае сжимающей — тормозят.

На рис. 56 показан характер распространения трещин при различных видах плоского напряженного состояния. Если обе компоненты напряжений положительны (рис. 56, *a*) и соизмеримы по величине, то практически все имеющиеся в материале трещины раскрыты. Разрушение, начавшееся у наиболее опасной трещины, распространяется по всему сечению тела, сливаясь с уже подготовленными к раскрытию другими трещинами. Если  $\sigma_2 < 0$  (рис. 56, *б*), то распространяются только поперечные трещины, а продольные под действием напряжения  $\sigma_2$  закрываются и служат препятствием для развития других трещин.

При достаточно больших сжимающих напряжениях поперечные трещины теряют устойчивость; в результате положительная роль напряжения  $\sigma_2$  перекрывается его «разупрочняющим» влиянием и прочность уменьшается. При объемном напряженном состоянии роль напряжения  $\sigma_2$  в первом приближении можно отнести шаровому тензору.

Экспериментальным обоснованием рассмотренной модели могут служить данные, приведенные в работе [467], о влиянии щелевых надрезов на прочность цилиндрических образцов при кручении. Опыты, проведенные на оргстекле, стали 40ХНМА и алюминиевых сплавах, показали, что в зависимости от ориентировки надреза по отношению к  $\sigma_1 = \sigma_{\max}$  прочность может либо понижаться (надрез расположен перпендикулярно направлению растягивающих напряжений), либо оставаться на том же уровне (надрез расположен перпендикулярно направлению сжимающих напряжений). Эти закономерности сохраняются и при испытании таких чувствительных к надрезам материалов, как конструкционные стали с низким отпуском. Следовательно, при оценке опасности дефекта

помимо свойств материала необходимо учитывать знаки действующих напряжений и ориентировку дефекта относительно главных осей.

В существенно неоднородном материале трещины и другие многочисленные дефекты, в соответствии со статистическими законами, распределены по объему тела и ориентированы случайно. С другой стороны, процесс зарождения новых трещин при деформировании и их ориентация также определяются собственными качественными признаками отдельных микрообъемов, что, в свою очередь, дает основание рассматривать твердое деформированное тело как некоторую массовую совокупность. Поведение последней в целом следует описывать с учетом статистических закономерностей. Все это указывает на целесообразность введения в расчетное уравнение функций, отражающих статистический аспект прочности. Выражение для эквивалентного напряжения будем искать в виде

$$\sigma_{\text{эkv}} = f(N, Q, P), \quad (V.7)$$

где  $N$  — функция компонентов тензора напряжений, описывающая сопротивление «бездефектного» материала;  $Q, P$  — некоторые функции, отражающие статистические закономерности деформирования и разрушения ( $Q$  учитывает особенности возникновения трещин,  $P$  — особенности их развития и распространения).

В предыдущей главе было показано, что наступление предельного состояния квазигомогенного материала обусловлено его способностью оказывать сопротивление как касательным, так и нормальным напряжениям и, следовательно, определяется двумя критериями: критерием возникновения трещин  $f(\tau_{ij})$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) и критерием распространения трещин — максимальным растягивающим напряжением.

Рассмотрим наиболее простой частный случай обобщенного критерия прочности в виде (IV.17a).

Критерий (V.7) с учетом структуры уравнения (IV.17a), полученного в результате обобщения условий пластичности и хрупкого разрушения, должен быть записан в виде

$$\chi \sigma_i Q + (1 - \chi) \sigma_1 P = \sigma_p. \quad (V.8)$$

В уравнении (V.8) первое слагаемое отражает динамические и статистические закономерности при возникновении новых трещин, а второе — те же закономерности при развитии трещин и формировании поверхности разрушения. Дальнейшее исследование критерия сводится к рациональному подбору функций  $Q$  и  $P$ .

Одним из важных параметров, на который часто ориентируются при выборе теории прочности, является количество констант, входящих в расчетное уравнение. В данном случае для определения константы  $\chi$  необходимо проведение двух опытов, например на растяжение и сжатие. Учет статистических факторов путем ввода

в расчетное уравнение функций  $Q$  и  $P$  приводит к увеличению числа предварительных опытов до четырех и более, причем для постановки дополнительных опытов при разных видах напряженного состояния (кручение, двухосное растяжение, двухосное сжатие и т. п.) требуется специальное оборудование.

Число констант можно свести к минимуму путем рационального выбора вида функций  $Q$  и  $P$ , а также путем исключения из расчетного уравнения параметров, учитывающих второстепенные факторы. Последние не определяют кинетику процесса деформирования и величину прочности в основных чертах, а являются побочными, вызывающими незначительные отклонения.

Зарождение новых трещин происходит под влиянием процессов, протекающих в микро- и субмикрообъемах материала. Можно предположить, что влияние при этом статистических факторов несущественно, и принять  $Q = 1$ . Статистический аспект прочности в основном проявляется в процессе развития трещин, поэтому связать его целесообразно только с нормальным напряжением  $\sigma_1$ , как критерием их распространения.

Надо полагать, что роль функции  $P$  в уравнении (V.8) будет тем существеннее, чем больше в материале дефектов, отличающихся от основной массы дефектов своим определяющим влиянием на свойства микрообъемов тела. Следовательно, учет статистического аспекта прочности более важен для хрупких материалов, структура которых, как правило, характеризуется кроме свойственной всем материалам структурной неоднородности наличием микротрещин, шаровых пустот и других существенных дефектов.

Вид функции  $P$  зависит от исходной модели материала и принятого закона распределения напряжений по дефектам. Параметрами этой функции являются, очевидно, некоторые характеристики напряженного состояния, такие, как шаровой тензор или параметры, характеризующие «жесткость» нагружения.

### § 3. Статистический подход к оценке прочности структурно-неоднородных материалов.

#### Критерий предельного состояния

Для определения величины  $P$ , отражающей статистические аспекты сопротивления материала, необходимо решить вероятностную задачу о прочности неоднородного тела.

Привлечение методов, основанных на статистических подходах, естественно, связано с определенной схематизацией рассматриваемых явлений. В соответствии с рис. 56 тело, имеющее макродефекты, можно рассматривать как систему, квазиоднородную в пределах ее основы — матрицы и существенно неоднородную в пределах всего объема. Будем исходить из того, что по мере увеличения прикладываемых к телу внешних усилий в материале одновременно

происходит два процесса, контролирующих и определяющих (в основных чертах) кинетику разрушения: деформирование матрицы, приводящее к ее упрочнению и разупрочнению, и накопление повреждений в соответствии с законом распределения вероятностей развития дефектов по их случайным признакам. Оба процесса взаимосвязаны. Надрывы возле дефектов ослабляют матрицу и приводят к преждевременному разрушению тела — полному разрыву матрицы, сопротивление которой, при условии отсутствия дефектов, ещё не было бы исчерпано.

Критическое значение числа  $m_{кр}$  развивающихся дефектов, при достижении которого происходит разрушение, в общем случае зависит от свойств матрицы и типа опасных дефектов (трещины, инородные включения, химические флуктуации и т. п.), т. е. от природы материала и его структуры. Существенную роль при этом играет вид напряженного состояния. В случае положительного шарового тензора увеличение гидростатической компоненты напряжений способствует раскрытию трещин и как бы подготавливает их к развитию. При отрицательном шаровом тензоре под действием сжимающих напряжений трещины закрываются и служат своего рода препятствиями на пути развития магистрали раздела. В результате пластических деформаций напряжения в местах концентрации перераспределяются. Поскольку величина пластических сдвигов зависит от уровня касательных напряжений, критическое число внутренних разрывов в материале, необходимое для полного разрушения тела при заданной схеме приложения внешних сил, должно увеличиваться с возрастанием интенсивности напряжений  $\sigma_i$ , как величины, ответственной за формоизменение материала.

В первом приближении можно принять

$$m_{кр} = \alpha - \beta I, \quad (V.9)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  — константы, отражающие свойства материала в связи с наличием в нем слабых мест (дефектов);  $I$  — параметр напряженного состояния, имеющий по аналогии с  $\frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}}$  смысл жесткости нагружения,  $I = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_i}$ .

Можно допустить, что степень ослабления тела в связи с наличием в нем дефектов прямо пропорциональна вероятности накопления в нем критического числа развивающихся трещин при заданном уровне напряжений. Тогда величина  $P$  в критерии (V.8), отражающая влияние слабых мест на предельное состояние деформируемого тела, определится как отношение некоторого допуска на вероятность  $W_0$  нарушения сплошности<sup>1</sup> возле  $m_{кр}$  слабых

<sup>1</sup> Если «слабое место» обусловлено наличием дефекта типа трещин, то в этом случае под нарушением сплошности подразумевается образование местных надрывов.

мест при основном виде испытаний (например, при одноосном растяжении или чистом сдвиге) к соответствующей вероятности  $W$  при произвольном напряженном состоянии:

$$P = \frac{W_0}{W}. \quad (\text{V.10})$$

Вычисление  $W$  сводится к решению основной задачи теории вероятности о повторной выборке заданного объема из некоторой генеральной совокупности, т. е. определению вероятности того, что из  $n$  имеющихся слабых мест нарушение сплошности произойдет в  $m$  местах (событие повторится  $m$  раз).

Если  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$  — число мест, в которых  $q_i$  — соответственно равны  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$ , то вероятность того, что разрушения произойдут около  $m_{\text{кр}}$  мест, зависит как от числа слабых мест

$$n = \sum_{i=1}^k n_i,$$

так и от качественных признаков дефектов.

Вероятность  $q$  нарушения сплошности в каком-нибудь из  $n$  имеющихся слабых мест для рассматриваемого случая может быть определена как

$$q = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{n} q_i. \quad (\text{V.11})$$

Тогда искомая вероятность нарушения сплошности в  $m_{\text{кр}}$  местах (например, около мест с номерами 1, 2, 3, ...,  $m_{\text{кр}}$ ) и неразрушений в остальных  $n - m_{\text{кр}}$  местах по теореме умножения вероятностей для независимых событий запишется в виде

$$W = q^{m_{\text{кр}}} (1 - q)^{n - m_{\text{кр}}}. \quad (\text{V.12})$$

На основании (V.9) — (V.11), а также учитывая, что для одноосного растяжения  $I = 1$ , получаем

$$P = \left( \frac{1 - q}{q} \right)^{\beta(1 - I)}$$

или

$$P = A^{1 - I}, \quad (\text{V.13})$$

где  $A = \left( \frac{1 - q}{q} \right)^{\beta}$  — константа, зависящая от характера имеющихся в материале дефектов и, следовательно, отражая статистическую сущность процесса разрушения, — от размеров тела.

При  $Q = 1$  критерий (V.8) с учетом (V.13) можно записать в виде

$$\bar{\eta}_{\Sigma} = \chi \sigma_i + (1 - \chi) \sigma_1 A^{1 - I}. \quad (\text{V.14})$$

Заметим, что если в качестве эквивалентных напряжений, ответственных за развитие пластических деформаций матрицы,

принять обобщенный критерий в форме

$$\eta'_\Sigma = \lambda \sigma_i + (1 - \lambda) \sigma_1,$$

то параметр  $I$  будет иметь вид

$$I = I_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\lambda \sigma_i + (1 - \lambda) \sigma_1}.$$

Проведенные расчеты показали, что при плоском напряженном состоянии предельные кривые, построенные по критерию (V.14) и аналогичному (V.14), когда  $I = I_1$ , практически совпадают. Заметные расхождения наблюдаются только при напряженных состояниях, близких к всестороннему равномерному растяжению.

Анализ достоверности критерия (V.14) по результатам испытаний структурно-неоднородных материалов проведен в § 5 настоящей главы.

#### § 4. Анализ критерия и его геометрическая интерпретация

В результате обработки данных большого числа испытаний, проведенных на образцах с размерами одного порядка, установлено, что для большинства хрупких материалов, имеющих дефекты в виде острых микро- и макротрещин,  $A = 0,65 \div 0,85$ . Уточненное значение константы  $A$  можно определить из третьего опыта при любом напряженном состоянии, отличном от одноосного растяжения и одноосного сжатия. В случае проведения третьего опыта при кручении из уравнения (V.14) получим

$$\sqrt{3} \lambda \tau_k + (1 - \lambda) \tau_k A = \sigma_p,$$

откуда

$$A = \frac{\sigma_p - \sqrt{3} \lambda \tau_k}{(1 - \lambda) \tau_k},$$

или

$$A = \frac{\varphi - \sqrt{3} \lambda}{1 - \lambda}, \quad (V.15)$$

где  $\varphi = \frac{\sigma_p}{\tau_k}$ ;  $\tau_k$  — предельное значение напряжения при кручении.

На рис. 57 в координатах  $\varphi - \lambda$  представлены результаты испытаний двадцати пяти различных по своей природе неоднородных материалов, включая жесткие термореактивные пластмассы [182], пенопласты [225], бетон [284], гипс [110], чугуны [533, 534, 535], металлокерамические композиции [239], спецсплавы [571], различные марки графита [620] и т. п. В качестве предельных значений напряжений при соответствующих видах испытаний приняты средние значения из числа имеющихся экспериментальных точек, а

также значения, полученные в результате интерполяции. На этом рисунке штриховая прямая соответствует уравнению (V.14) при  $A = 0,5$ , а штрихпунктирная — при  $A = 1$ . Из рис. 57 видно, что экспериментальные точки находятся в сравнительно узкой области, ограниченной этими линиями, и группируются вокруг прямой, соответствующей уравнению (V.14) при  $A = 0,75$  (сплошная линия). Поэтому если для определения константы  $A$  невозможно провести третий опыт (при чистом сдвиге), то при условии обеспечения требуемой точности можно принять  $A = 0,75$ .

О величине возможных отклонений в результате указанного упрощения можно судить по диаграмме, приведенной на рис. 58, из которой видно, что большие отклонения характерны для более хрупких тел. Свойства практически всех реальных материалов соответствуют области, выделенной на рисунке жирными линиями ( $A = 0,6 \div 0,9$ ;  $\chi > 0,1$ ). Максимальные отклонения, связанные с усреднением параметра  $A$  в области  $\chi > 0,2$ , не превышают 8%.

Значение функции  $P$  существенно зависит от жесткости нагружения, характеризуемой параметром  $I$ . Степень влияния вида напряженного состояния зависит от структуры материала и характера имеющихся в нем дефектов, т. е. от значения константы  $A$ .

Выражение (V.13) получено для случая, когда основным видом испытания является одноосное растяжение, т. е. когда  $I = 1$ , а критерий (V.14) тождественно совпадает с обобщенным критерием (IV.17a):

$$\bar{\eta}_\Sigma = \eta'_\Sigma = \sigma_p.$$

Для напряженных состояний, соответствующих условию  $I > 1$ , функция влияния  $P$  также принимает значения, превышающие единицу, коэффициент при  $\sigma_1 = \sigma_{\max}$  становится больше  $(1 - \chi)$ . Это указывает на то, что чем «жестче» нагружение, тем при мень-

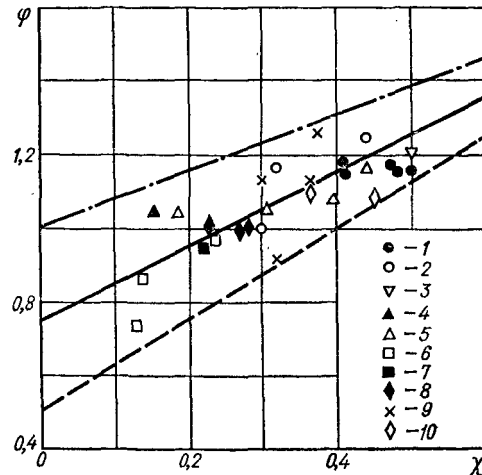


Рис. 57. Зависимость относительной прочности  $\varphi$  при кручении от коэффициента  $\chi$  по данным испытаний различных материалов: 1 — закаленные стали; 2 — чугуны; 3 — пластмассы; 4 — гипс; 5 — пористое железо; 6 — кермет на основе карбида кремния; 7 — бетон; 8 — графит; 9 — спечсплавы; 10 — пенопласты.



ших значениях максимального нормального напряжения наступает предельное состояние. В предельном случае (всестороннее равномерное растяжение), когда  $\sigma_i = 0$ , а  $I = +\infty$ , критерий (V.14) принимает вид

$$\bar{\eta}_\Sigma = (1 - \chi) \sigma \frac{1}{A^\infty},$$

откуда

$$\sigma = \frac{\bar{\eta}_\Sigma A^\infty}{1 - \chi}.$$

Учитывая, что  $A < 1$ , находим, что при  $I \rightarrow \infty$   $\sigma \rightarrow 0$ . Это соответствует экспериментально известному факту — материалы, имеющие дефекты (например, типа трещин), плохо работают при напряженных состояниях, близких к гидростатическому растяжению, когда перераспределения напряжений около дефектов не происходит из-за низкого уровня касательных напряжений.

Для случая всестороннего сжатия ( $\sigma_i = 0$ ,  $I = -\infty$ ) получаем

$$\sigma = \frac{\bar{\eta}_\Sigma}{(1 - \chi) A^\infty},$$

т. е. при напряженных состояниях, близких к гидростатическому сжатию, когда  $I \rightarrow -\infty$ ,  $\sigma \rightarrow +\infty$ . Следовательно, в этом случае, в соответствии с критерием (V.14), предельное напряженное состояние материала наступает при очень больших значениях напряжений.

Влияние «жесткости» нагружения, характеризуемой параметром  $I$ , на величину  $P$  при различных значениях константы  $A$  показано на рис. 59, из которого видно, что для материалов с су-

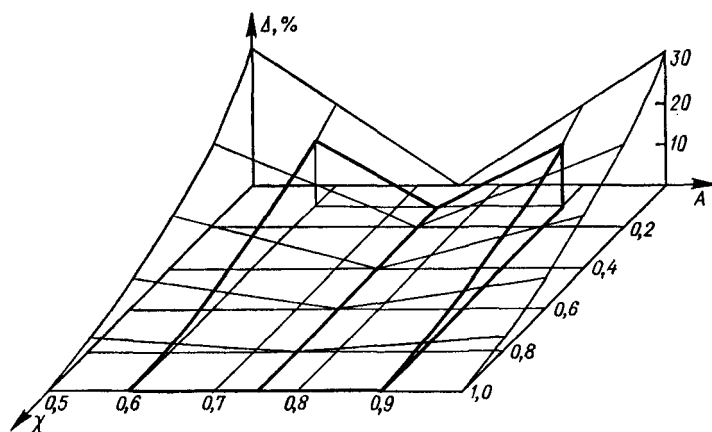


Рис. 58. Диаграмма отклонений эквивалентных напряжений, рассчитанных для чистого сдвига по критерию (V.14) при  $A = 0,75$  от эквивалентных напряжений при других значениях параметра  $A$ .

щественной структурной неоднородностью (меньшие значения константы  $A$ ) влияние жесткости нагружения более заметно.

Значение независимого параметра  $I$  не ограничено, следовательно, основание кривой  $P(I)$  продолжается от  $-\infty$  (гидростатическое сжатие) до  $+\infty$  (гидростатическое растяжение). С возрастанием параметра  $I$  вероятность разрушения, естественно, увеличивается. Поэтому функция  $P(I)$  должна быть монотонно возрастающей и не иметь экстремумов. При  $I \rightarrow -\infty P(I) \rightarrow 0$ , при  $I \rightarrow +\infty P(I) \rightarrow +\infty$ .

Статистическая сущность функции  $P$  подтверждается корреляцией значений константы  $A$  с параметром  $m$  (коэффициент однородности материала) в теории хрупкой прочности Вейбулла [639]. Действительно, если материал находится в идеально хрупком состоянии, то  $\chi = 0$ . В этом случае уравнение (V.14) принимает вид

$$\sigma_1^{\text{xp}} A^{1-I} = \sigma_p^{\text{xp}}. \quad (\text{V.16})$$

Для хрупкой прочности при чистом сдвиге ( $I = 0$ ) получим

$$\sigma_{\text{сд}}^{\text{xp}} A = \sigma_p^{\text{xp}}. \quad (\text{V.17})$$

В соответствии с теорией Вейбулла, зависимость вероятности хрупкого разрушения образца при напряжении, большем или равном  $\sigma$ , от объема образца в общем случае может быть записана в виде

$$W = 1 - \exp \left[ -V \left( \frac{\sigma}{\sigma_0 A'} \right)^m \right]. \quad (\text{V.18})$$

Здесь  $\sigma_0$  — напряжение, соответствующее вероятности разрушения единицы объема материала при одноосном растяжении образца постоянного поперечного сечения;  $A'$  — некоторая функция параметра  $m$  и объема  $V$  материала, находящегося под напряжением.

Для чистого изгиба балки прямоугольного сечения

$$W_{\text{и}} = 1 - \exp \left[ -V \left( \frac{\sigma_{\text{и}}^{\text{xp}}}{\sigma_0 A'_{\text{и}}} \right)^m \right]. \quad (\text{V.18a})$$

При кручении круглого стержня

$$W_{\text{кр}} = 1 - \exp \left[ -V \left( \frac{\sigma_{\text{сд}}^{\text{xp}}}{\sigma_0 A'_{\text{кр}}} \right)^m \right], \quad (\text{V.18б})$$

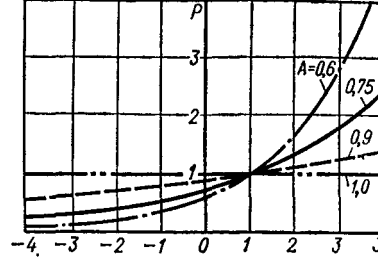


Рис. 59. Зависимость функции  $P$  от жесткости нагружения.

где [362]

$$A'_n = \left( \frac{V}{2m+2} \right)^{\frac{1}{m}}; \quad A'_{кр} = \left( \frac{2V}{m+2} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (V.19)$$

Условие эквивалентности при указанных видах испытаний

$$W_n = W_{кр}.$$

Приравняв правые части соотношений (V.18a) и (V.18б), после элементарных преобразований получаем

$$\sigma_{сд}^{кр} \frac{A'_n}{A'_{кр}} = \sigma_n^{кр}. \quad (V.20)$$

Уравнение (V.20) устанавливает связь между хрупкой прочностью при чистом изгибе балки прямоугольного поперечного сечения и кручении круглого стержня. Надо полагать, что при переходе к одноосному растяжению и чистому сдвигу, которые можно рассматривать как предельные случаи изгиба и кручения, когда  $\text{grad } \sigma \rightarrow 0$ , коэффициент  $\frac{A'_n}{A'_{кр}}$  существенно не изменится. На этом основании, сопоставляя (V.17) и (V.20), записываем

$$A = \frac{A'_n}{A'_{кр}}$$

или, учитывая (V.19), находим

$$A = \left( \frac{m+2}{4m+4} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (V.21)$$

Правую часть уравнения (V.21) можно существенно упростить, если учесть, что подкоренное выражение  $\frac{m+2}{4m+4}$  несущественно зависит от  $m$ : при изменении  $m$  от 3 до 60 (диапазон изменения коэффициента однородности известных конструктивных материалов [362]) значение функции  $\frac{m+2}{4m+4}$  изменяется от 0,32 до 0,39, т. е. приблизительно равно  $\frac{1}{e}$ . Таким образом, с достаточным приближением можно принять

$$A = e^{-\frac{1}{m}}$$

или, разлагая функцию в степенной ряд и ограничиваясь первыми членами ряда, получаем

$$A = 1 - \frac{1}{m}. \quad (V.22)$$

Кривые  $A(m)$ , построенные на основании (V.21) (штриховая) и (V.22) (сплошная), приведены на рис. 60. Здесь же нанесены экспериментальные точки, характеризующие соотношение между константой  $A$  и параметром однородности  $m$  для пяти материалов. Константа  $A$  (см. формулу (V.15)) определялась по результатам испытаний этих материалов при сложном напряженном состоянии [232, 239, 356, 533, 620], а параметр  $m$  — по данным испытаний образцов разных размеров на основании теории хрупкой прочности Вейбулла [362, стр. 235]. Как видно из рисунка, кривые (V.21) и (V.22) практически совпадают.

Расположение экспериментальных точек на теоретической кривой является убедительным подтверждением правильности принятых предпосылок.

Установленная корреляционная зависимость (V.22) может быть использована для определения константы  $A$  по параметру однородности  $m$ , который легко найти по результатам испытаний образцов разных размеров,

$$m = \frac{\lg \sigma' - \lg \sigma''}{\lg V'' - \lg V'} ,$$

или по формулам Гумбеля [129] на основании данных испытаний партии одинаковых образцов.

Большой интерес представляет геометрическая интерпретация критерия (V.14) в пространстве напряжений, а также относительное расположение предельных поверхностей, соответствующих исследуемому критерию и обобщенному критерию (IV.17).

На рис. 61 в относительных координатах  $\frac{\sigma_i}{\sigma_p}, \frac{\sigma_0}{\sigma_p}$  представлены предельные кривые  $\mu_\sigma = \text{const}$ , а на рис. 62 — предельные кривые  $\sigma_0 = \text{const}$ , построенные по критерию (V.14) и критерию (IV.17a) для трех значений параметра  $\chi$ . Константа  $A$  во всех случаях принята равной 0,75. Из рисунков видны следующие общие закономерности изменения предельных поверхностей (V.14) и (IV.17a) в зависимости от значений параметра  $\chi$ : по мере перехода к более хрупким материалам (меньшие значения  $\chi$ ) влияние шарового тензора и вида девиатора увеличивается. Так,

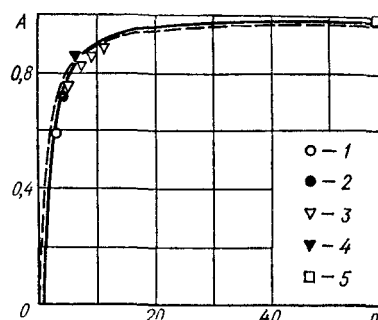


Рис. 60. Корреляционная зависимость параметра  $A$  от коэффициента однородности  $m$ :

1 — кермет на основе карбида кремния при температуре  $+20^\circ\text{C}$ ; 2 — кермет на основе карбида кремния при температуре  $1000^\circ\text{C}$ ; 3 — графиты; 4 — модифицированный чугун; 5 — малоуглеродистая сталь.

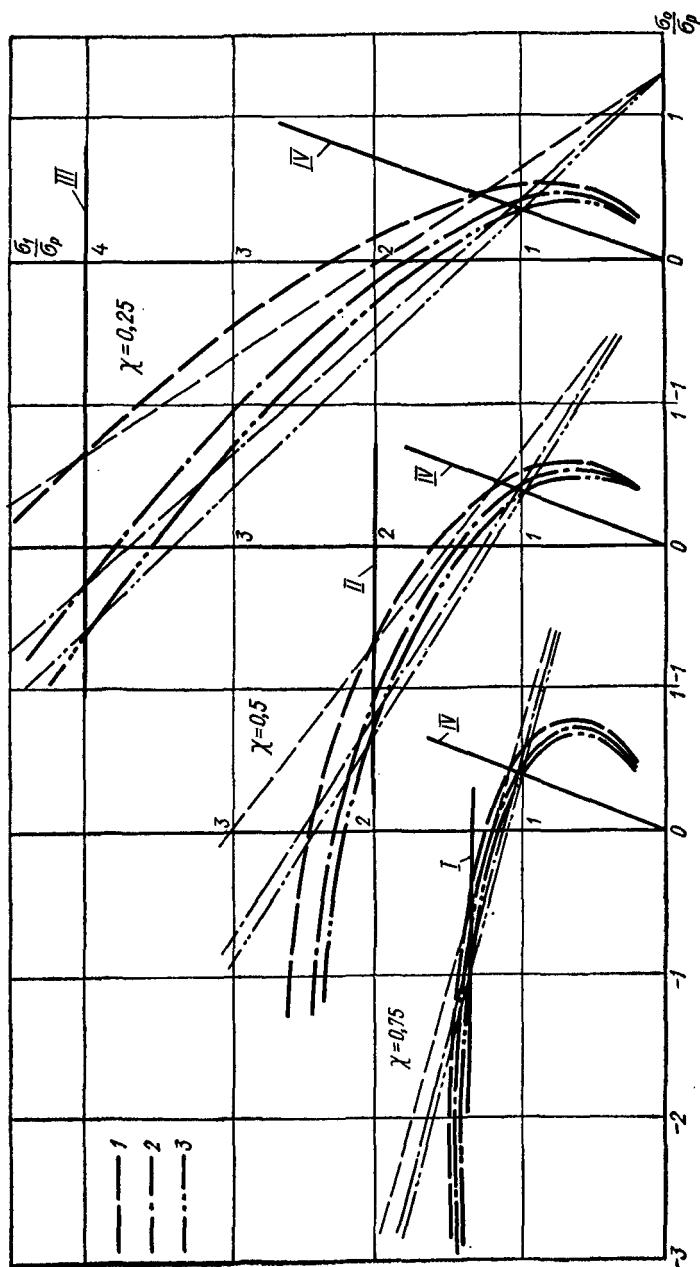


Рис. 61. Геометрическая интерпретация критериев (IV.17 а) (тонкие линии) и (V.14) (жирные линии) в плоскостях:

$$I \leftarrow \sigma_i = \frac{\sigma_p}{0.73}; II \leftarrow \sigma_i = \frac{\sigma_p}{0.5}; III \leftarrow \sigma_i = \frac{\sigma_p}{0.25}; IV \leftarrow \sigma_p = 3\sigma_0;$$

$$I \leftarrow \mu_0 = +1; 2 \leftarrow \mu_0 = 0; 3 \leftarrow \mu_0 = -1.$$

если при  $\chi = 0,75$  предельные поверхности незначительно отличаются от поверхности вращения, то при  $\chi = 0,25$  девиаторные сечения имеют явно выраженную форму криволинейных треугольников. Взаимное расположение отдельных участков предельных поверхностей зависит от значения шарового тензора. В области значений, примыкающей к  $\sigma_0 = 0$ , поверхность (IV.17 а) находится внутри поверхности (V.14) (рис. 61). Следовательно, в этой области относительная прочность (отнесенная к  $\sigma_p$ ) структурно-неоднородного материала выше относительной прочности однородного.

Для точек пространства напряжений, лежащих на линиях пересечения поверхностей, эквивалентные напряжения по критериям (V.14) и (IV.17а) должны быть равны, т. е.

$$\eta_{\Sigma} = \bar{\eta}_{\Sigma}. \quad (V.23)$$

Из сопоставления структуры рассматриваемых критериев следует, что равенство (V.23) выполняется при

$$\sigma_1 = 0 \quad (V.24)$$

и при

$$1 - I = 0, \quad (A^{1-I} = 1). \quad (V.25)$$

Условие (V.24) соответствует отрицательным значениям шарового тензора, так как при  $\sigma_1 = \sigma_{\max}$   $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  меньше нуля. Подставляя (V.24) в (V.14), получаем

$$\sigma_i = \frac{\sigma_p}{\chi}. \quad (V.26)$$

Следовательно, в области сжатия линия пересечения предельных поверхностей (IV.17а) и (V.14) лежит на круговом цилиндре (V.26). Ось этого цилиндра равнонаклонена к направлениям главных напряжений. При гидростатическом сжатии и напряженных состояниях, близких к нему, критерии (IV.17а) и (V.14) ограничения прочности не предполагают.

Интенсивность напряжений  $\sigma_i$  всегда положительна. Поэтому условие (V.25) справедливо только при положительном  $\sigma_0$ . На основании (V.25) получаем

$$1 - \frac{3\sigma_0}{\sigma_i} = 0,$$

откуда

$$\sigma_i = 3\sigma_0. \quad (V.27)$$

Таким образом, в области растяжения линия пересечения предельных поверхностей (IV.17а) и (V.14) независимо от значения параметра  $\chi$  лежит на равнонаклоненном к главным осям круговом конусе (V.27).

Вершина предельной поверхности (V.14) совпадает с началом координат, что соответствует нулевой прочности структурно-не-

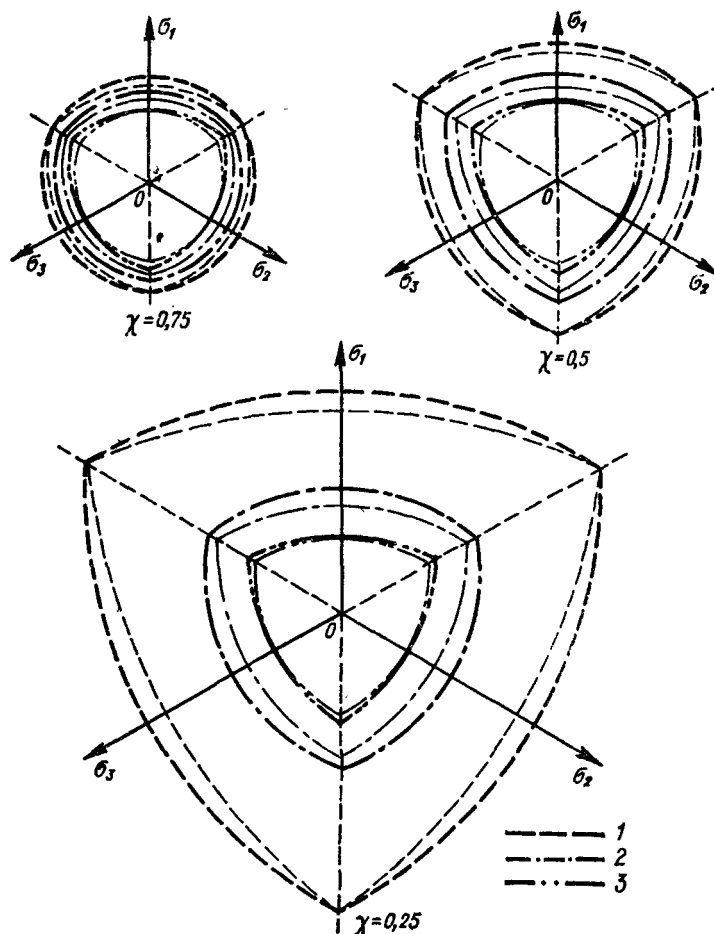


Рис. 62. Геометрическая интерпретация критериев (IV.17a) (тонкие линии) и (V.14) (жирные линии) при  $A = 0,75$  в плоскостях  $\sigma_0 = 0$ :

$$1 - \sigma_0 = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}}; \quad 2 - \sigma_0 = 0; \quad 3 - \sigma_0 = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}.$$

однородного материала при гидростатическом растяжении. Это обстоятельство находится в соответствии с принятой моделью материала. Действительно, в связи с отсутствием касательных напряжений при равномерном трехосном растяжении перераспределения напряжений возле дефектов не происходит; в результате коэффициент концентрации напряжений достигает весьма высоких значений, что должно приводить к практически полному падению сопротивления материала.

При расчете предельных напряжений в реальных условиях нагружения необходимо иметь в виду, что равновесное состояние при равномерном всестороннем растяжении неустойчиво и поэтому практически не реализуется даже в том случае, когда в соответствии с расчетной схемой оно должно иметь место.

Отметим, что критерий в форме

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \chi \sigma_{\text{эКВ}}^* + (1 - \chi) \sigma_{\text{эКВ}}' \quad (\text{V.28})$$

позже был получен Д. М. Шуром [501] на основании статистического исследования модели материала, в соответствии с которой твердое тело рассматривается «...как совокупность физических точек, размеры которых весьма малы по сравнению с размерами тела, но настолько велики по отношению к его структурным элементам, что средние напряжения и деформации каждой из физических точек могут быть с достаточной точностью определены из уравнений теории упругости для однородной изотропной среды».

В уравнении (V.28), как и в критерии (V.14),  $\chi = \frac{\sigma_p}{\sigma_c}$ ;  $\sigma_{\text{эКВ}}^* = \sigma_i$ ;  $\sigma_{\text{эКВ}}' = \sigma_1 P'$ . В результате решения Д. М. Шура получены следующие выражения для функции  $P'$ :

при двухосном растяжении

$$P' = \sqrt[4]{\frac{1}{35} (35\xi^4 + 20\xi^3 + 18\xi^2 + 20\xi + 35)},$$

при плоском напряженном состоянии, когда  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_3 < 0$ ,

$$P' = \sqrt[4]{\frac{2}{35\pi} [\varphi_0 (35\eta^4 + 20\eta^3 + 18\eta^2 + 20\eta + 35) + \dots \rightarrow + \frac{5}{8} \sqrt{-\eta(21\eta^3 + 19\eta^2 + 19\eta + 24)}]}. \dots \rightarrow$$

Здесь

$$\eta = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}, \quad \xi = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{1}{1-\eta}}.$$

Аналогичные по структуре выражения получены для других областей объемного напряженного состояния.

Т а б л и ц а 5

Напряженное состояние	$P'$	$P$
Двухосное равномерное растяжение ( $\sigma_2 = \sigma_1$ )	1,40	1,34
Двухосное растяжение при $\sigma_2 = 0,5\sigma_1$	1,12	1,25
Чистый сдвиг ( $\sigma_3 = -\sigma_1$ )	0,91	0,75
Двухосное растяжение — сжатие при $\sigma_3 = -0,5\sigma_1$	0,85	0,80



Громоздкость приведенных формул, а также отсутствие единой зависимости  $P'(\sigma_{ij})$  для всех соотношений главных напряжений создает определенные неудобства при практическом использовании формулы (V.28). Следует также отметить, что независимыми параметрами функции  $P'$  являются только компоненты тензора напряжений, хотя, как это показано выше, степень проявления статистических аспектов прочности зависит от структуры материала и характера имеющихся в нем дефектов. Следовательно, полученные формулы должны включать константу материала. Тем не менее расчеты показали, что полученные в работе [501] выражения для  $P'$  и формула (V.13) дают сопоставимые результаты. В табл. 5 приведены для сравнения значения функций  $P'$  и  $P$  для четырех соотношений главных напряжений. При определении  $P$  принято  $A = 0,75$  (среднестатистическое значение константы материала).

#### § 5. Сопоставление теоретических и экспериментальных данных

Наличие в материале микро- и макродефектов еще не является основанием для вывода о непригодности феноменологических подходов, базирующихся на методах механики сплошной среды. Можно считать, что дефекты, имеющие достаточно малые размеры по сравнению с размерами рассматриваемого тела, в силу статистических законов создают картину квазиоднородного материала. При этом идеализация реальной среды относительно ее однородности, сплошности и изотропности не приводит к заметным ошибкам в соответствующих расчетах. В качестве примера можно указать на эффективное использование феноменологических методов теории пластичности и теории ползучести для аналитического решения вопросов механики существенно неоднородных горных пород, в частности при исследовании полей напряжений и переме-

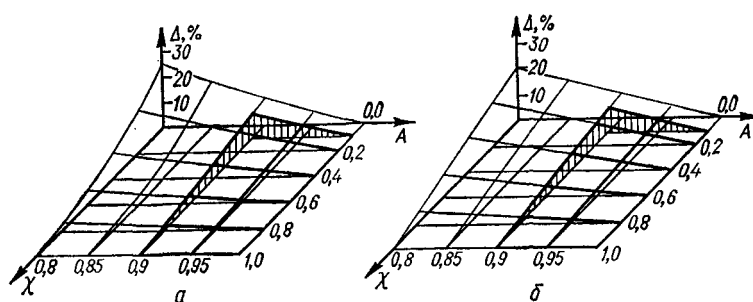


Рис. 63. Расхождение между эквивалентными напряжениями, рассчитанными по критериям (IV.17а) и (V.14) при различных значениях констант материала  $A$  и  $\chi$ :

$a$  — при чистом сдвиге;  $б$  — при двухосном равномерном растяжении.

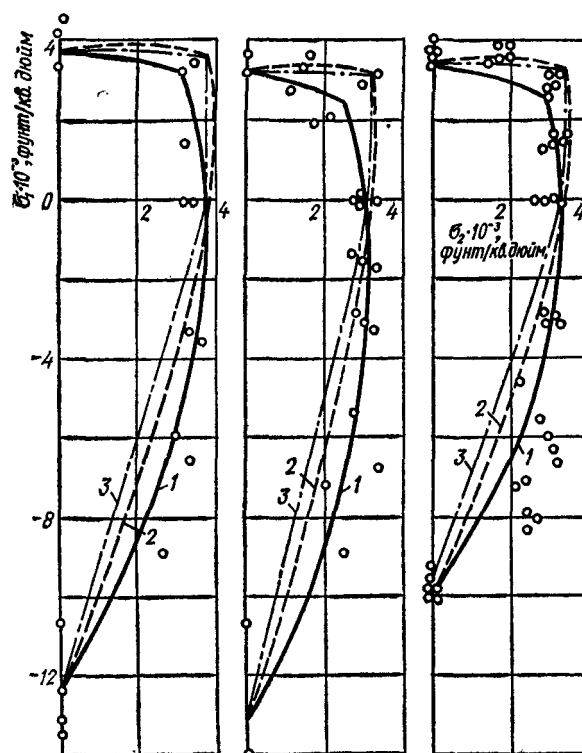


Рис. 64. Анализ достоверности критерия (V.14) по результатам испытания трех марок графита:  
 1 — по критерию (V.14);  
 2 — по критерию (IV.17a);  
 3 — по критерию Мора.

щений в массивах около различных сооружений и выработок, в том числе с учетом фактора времени и т. п.

Таким образом, чем меньше относительные размеры дефектов, тем больше оснований считать приемлемыми методы механики сплошной среды, оперирующей усредненными характеристиками механических свойств материала. Критерий (V.14) можно рассматривать как частный случай более общего критерия (IV.17a) при  $A = 1$ , т. е. когда материал не имеет дефектов или когда размеры этих дефектов относительно малы.

Строгой границы между структурно-однородными и структурно-неоднородными материалами, естественно, не существует. Более того, один и тот же материал часто может быть отнесен как к первой, так и ко второй группе в зависимости от соотношения между размерами имеющихся в нем дефектов и размерами рассматриваемого тела. Показательная и очень важная в этом отношении характеристика материала — коэффициент однородности  $m$ , определяемый по результатам испытаний образцов, объем которых соизмерим с объемом исследуемого тела.

Из установленной в предыдущем параграфе корреляционной зависимости  $A = f(m)$  (рис. 60) видно, что при  $m > 10$  константа  $A$  отличается от единицы не более чем на 0,1. Если ограничиться анализом плоского напряженного состояния, то можно показать, что наибольшие расхождения между эквивалентными напряжениями, рассчитанными по критериям (IV.17а) и (V.14), наблюдаются при чистом сдвиге и двухосном равномерном растяжении.

Для этих видов нагружения на основании (IV.17а) и (V.14) получаем

$$\Delta_c = \frac{\bar{\tau}_c - \tau_c}{\tau_c} \cdot 100 = \frac{a}{1 - \chi + A(1 - \chi)} \cdot 100\%;$$

$$\Delta_d = \frac{\bar{\sigma}_d - \sigma_d}{\sigma_d} \cdot 100 = \frac{a}{1 - \chi(1 - A)} \cdot 100\%,$$

где  $a = (1 - \chi)(1 - A)$ . Соответствующие диаграммы  $\Delta(A, \chi)$  приведены на рис. 63, из которого видно, что при  $A > 0,9$  ( $m > 10$ ) расхождение между указанными эквивалентными напряжениями даже у металлов, имеющих очень хрупкую матрицу ( $\chi \approx 0,1$ ), не превышает 10%.

Для большинства конструкционных материалов коэффициент однородности  $m \geq 10$ . Поэтому, как показано в гл. IV, обобщенный критерий в виде (IV.17) хорошо согласуется с результатами испытаний широкого класса конструкционных материалов. Соответствующие отклонения заметно увеличиваются по мере перехода к существенно неоднородным материалам ( $m < 10$ ), оценка предельных состояний которых должна производиться по критерию (V.14).

Достоверность критерия (V.14) подтверждается экспериментальными результатами, полученными при испытании в условиях

Таблица 6

Материал	Опытное значение $\tau$ , кг/мм <sup>2</sup>	Расчетные значения					
		По Кулону — Мору		По Боткину — Миролубову		По критерию (V.14)	
		$\tau$ , кг/мм <sup>2</sup>	$\Delta$ , %	$\tau$ , кг/мм <sup>2</sup>	$\Delta$ , %	$\tau$ , кг/мм <sup>2</sup>	$\Delta$ , %
ФК-20							
$\gamma = 0,20$ г/см <sup>3</sup>	8,3	7,5	9,6	7,8	6,0	8,85	6,6
$\gamma = 0,25$ г/см <sup>3</sup>	12,9	10,8	16,3	12,4	3,9	13,2	2,3
$\gamma = 0,30$ г/см <sup>3</sup>	18,5	15,0	18,9	17,3	6,5	13,8	1,1
ЭДС-6	235,0	166,0	28,4	19,0	19,2	203,0	13,5
ЭДМ-3/5	68,0	55,0	19,1	63,5	6,6	68,2	0,3

Примечание. Среднее отклонение расчетных значений  $\Delta$  по Кулону — Мору — 18,7%, по Боткину — Миролубову — 8,4%, по критерию (V.14) — 4,8%.

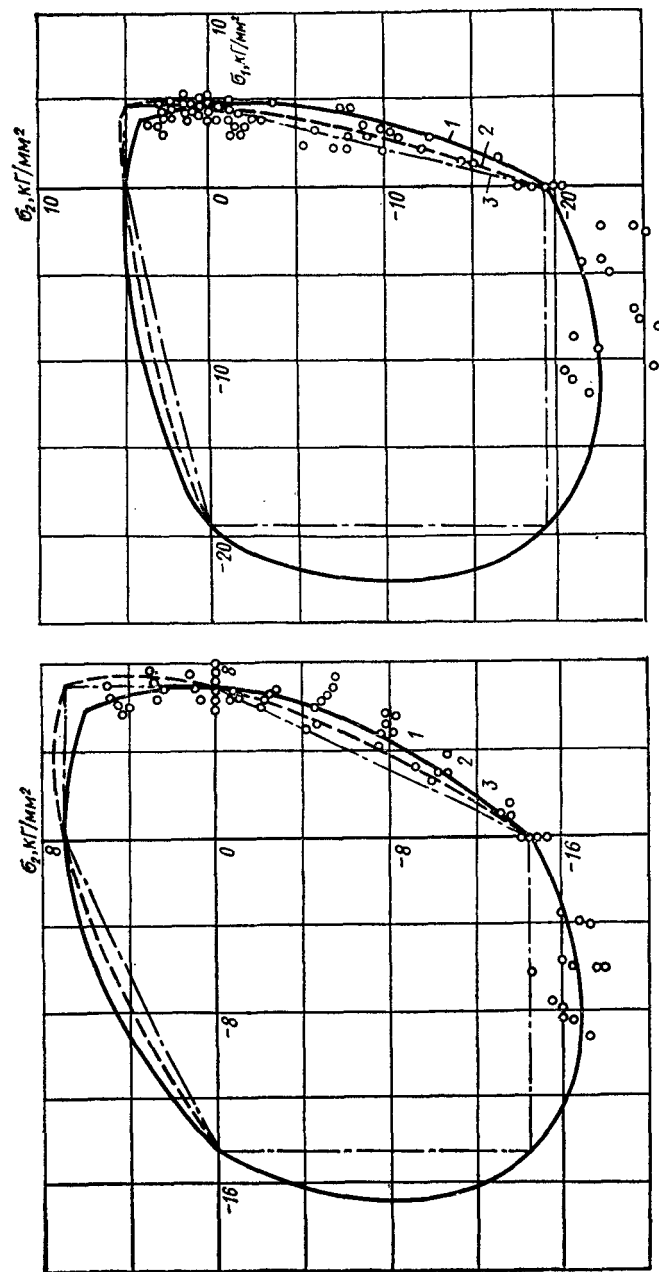


Рис. 65. Анализ достоверности критерия (V.14) по результатам испытания двух марок терморреактивных пластмасс:  
 1 — по критерию (V.14); 2 — по критерию (IV.17a); 3 — по критерию Мора.

плоского напряженного состояния различных марок графита [620] и хрупкой термореактивной пластмассы [182]. Эти данные приведены на рис. 64, 65, где построены также предельные кривые, соответствующие критериям (V.14), (IV.17a) и критерию Мора. Расчетные данные и результаты испытаний пяти марок жестких пенопластов при чистом сдвиге [225] приведены в табл. 6.

По критерию (V.14) обрабатывались также результаты испытаний углеродистой стали (см. рис. 182 и 184) и серого чугуна (см. рис. 189) при низкой температуре, металлокерамической композиции на основе карбида кремния (см. рис. 198), некоторых каменных [87] и других материалов.

Проведенный анализ показывает, что учет статистического аспекта прочности путем ввода в обобщенный критерий дополнительной функции в виде (V.13) обеспечивает хорошее соответствие результатов теоретических расчетов с опытными данными, полученными при испытаниях широкого класса различных по своей природе структурно-неоднородных материалов.

## *Глава VI*

### **ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ МАТЕРИАЛА**

#### **§ 1. Анизотропия материала. Критерии прочности анизотропных тел**

Строение твердых тел зависит от природы материала и определяется условиями формирования его структуры. Кристаллический материал, в отличие от аморфного, характеризуется определенным упорядоченным расположением атомов и молекул, входящих в его состав. Однако представления об идеальной геометрии строения кристаллических тел не соответствуют действительности. Современные методы физического анализа позволяют обнаружить отклонения от нормальной структуры не только в межкристаллитных пограничных слоях, но и внутри кристалла.

Физические и механические свойства кристаллов изменяются в зависимости от направления измерения. Однако беспорядочное расположение металлических зерен (кристаллитов) создает картину макроскопической однородности и изотропности материала. Различными методами механического и теплового воздействия кристаллиты можно определенным образом ориентировать и создавать соответствующую упорядоченную ориентацию или текстуру. В этом случае говорят об анизотропии материала, которая проявляется в его упругих и пластических свойствах, твердости, теплопроводности, электросопротивлении, магнитной проницаемости и т. д. Такой вид анизотропии можно устранить только тщательной термической обработкой. Аморфные тела имеют одинаковые свойства во всех направлениях, т. е. изотропны.

В последнее время возрос интерес к механике композиционных материалов, которые искусственно создаются анизотропными и неоднородными. К таким материалам можно отнести многие виды пластмасс, армированных стеклотканью, армированный бетон и др. Материалы с «конструкционной анизотропией» требуют специальных методов расчета, учитывающих специфику их строения.

Если ограничиться структурным признаком, то можно выделить три основных вида анизотропии: гомогенную, обусловленную неравновероятным распределением ориентировок анизотропных кристаллов, гетерогенную, связанную с определенной текстурой, и анизотропию, вызванную ориентированными остаточными

напряжениями. В работах [517, 630] для количественной оценки гетерогенной анизотропии по текстуре использована формула Холла — Петча [615], связывающая прочность материала с размером структурных компонентов.

Симметрия строения определяет симметрию механических свойств тела. Конструкционные материалы на металлической основе, как правило, обладают или осью симметрии свойств (транстропные материалы), или тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии (ортотропные материалы).

Вопросы оценки анизотропии механических свойств материала являются предметом специальных исследований. Здесь обратим внимание лишь на следующее важное обстоятельство: равенство характеристик прочности в направлении трех взаимно перпендикулярных осей еще не определяет изотропию материала. Необходимо, чтобы это равенство соблюдалось при произвольном повороте этих осей.

При исследовании соотношений между напряжениями и деформациями анизотропных тел необходимо учитывать, что если в изотропном теле девиатор напряжений характеризует ту часть напряженного состояния, которая не чувствительна к изменению объема, то в анизотропных материалах он ее не характеризует, так как изменение объема элемента приводит к появлению не только нормальных, но и касательных напряжений, отсутствующих при объемном сжатии изотропных тел.

Теории предельного напряженного состояния анизотропной среды можно разделить на две группы: теории, которые являются результатом обобщения теорий прочности изотропных тел, и теории, разработанные применительно к анизотропным телам с учетом специфики их деформирования и разрушения. Рассмотрим сначала некоторые теории, относящиеся к первой группе.

Мизес [599] распространил предположение о существовании пластического потенциала для изотропных сред на среды анизотропные, считая при этом материал несжимаемым и неупрочняющимся. Пренебрегая влиянием шарового тензора, он получил выражение для эквивалентной функции, которое может быть принято за условие текучести:

$$\begin{aligned}
 F = & -\frac{1}{2} [K_{12} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + K_{23} (\sigma_y - \sigma_z)^2 + K_{31} (\sigma_z - \sigma_x)^2] - \\
 & - \tau_{xy} [K_{24} (\sigma_x - \sigma_y) + K_{34} (\sigma_x - \sigma_z)] - \tau_{xz} [K_{25} (\sigma_x - \sigma_y) + \\
 & + K_{35} (\sigma_x - \sigma_z)] - \tau_{yz} [K_{26} (\sigma_x - \sigma_y) + K_{36} (\sigma_x - \sigma_z)] + \\
 & + K_{45} \tau_{xy} \tau_{xz} + K_{46} \tau_{xy} \tau_{yz} + K_{56} \tau_{xz} \tau_{yz} + \frac{1}{2} (K_{44} \tau_{xy}^2 + K_{55} \tau_{yz}^2 + \\
 & + K_{66} \tau_{xz}^2) = \text{const.}
 \end{aligned}
 \tag{VI.1}$$

Условие пластичности Мизеса в общем случае содержит 15 констант материала. Если оси анизотропии совпадают с главными, то, согласно Хиллу [471], условие (VI.1) для материала, одинаково сопротивляющегося растяжению — сжатию, запишется в виде

$$K_1(\sigma_x - \sigma_y)^2 + K_2(\sigma_y - \sigma_z)^2 + K_3(\sigma_z - \sigma_x)^2 + K_4\tau_{xy}^2 + K_5\tau_{yz}^2 + K_6\tau_{xz}^2 = 1. \quad (\text{VI.2})$$

Константы  $K_i$  можно выразить через пределы текучести при растяжении в направлении главных осей анизотропии:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{xt}^2} + \frac{1}{\sigma_{yt}^2} - \frac{1}{\sigma_{zt}^2} \right); \\ K_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{yt}^2} + \frac{1}{\sigma_{zt}^2} - \frac{1}{\sigma_{xt}^2} \right); \\ K_3 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{zt}^2} + \frac{1}{\sigma_{xt}^2} - \frac{1}{\sigma_{yt}^2} \right); \\ K_4 &= \frac{1}{\tau_{xyt}^2}; \quad K_5 = \frac{1}{\tau_{yzt}^2}; \quad K_6 = \frac{1}{\tau_{zxt}^2}. \end{aligned}$$

Условие предельного напряженного состояния в виде выражений (VI.2) предлагалось также Фишером, Джексоном, Смитом и Ленифордом [474].

Условие (VI.2) значительно упрощается для плоского напряженного состояния. Например, для двухосного растяжения в направлении осей анизотропии условие текучести имеет вид

$$\frac{1}{\sigma_{xt}^2} \sigma_x^2 + \frac{1}{\sigma_{yt}^2} \sigma_y^2 - \left( \frac{1}{\sigma_{xt}^2} + \frac{1}{\sigma_{yt}^2} \right) \sigma_x \sigma_y = 1.$$

Иногда, по соображениям лучшей сходимости, в качестве коэффициента при третьем слагаемом принимают [453] выражение

$$\left( \frac{1}{\sigma_{xt}^2} + \frac{1}{\sigma_{yt}^2} - \frac{1}{\sigma_{xt}^2 \sigma_{yt}^2} \right).$$

Ссылаясь на опыты Лоде, Мизес высказал предположение, что функция нагружения  $F$  (условие (VI.1)) «слабо изменяется» под влиянием гидростатического растяжения — сжатия. Однако это предположение требует серьезной экспериментальной проверки, так как в анизотропных материалах изменение объема элемента, как уже отмечалось, приводит к появлению касательных напряжений, т. е. к изменению компонентов девиатора напряжений, и поэтому не может не сказаться на уровне предельных напряжений.



Обобщение критерия прочности вида  $\sigma_i = A + B\sigma_0 + C\sigma_0^2$  на анизотропные материалы проведено А. М. Жуковым [143] и В. К. Захаровым [152]. Если направления осей  $x$  и  $y$  совпадают с главными осями анизотропии, то применительно к плоскому напряженному состоянию указанная функция запишется в виде

$$\sigma_x^2 + K_1\sigma_y^2 + K_2\sigma_x\sigma_y + K_3\sigma_x + K_4\sigma_y + K_5 = 0.$$

Коэффициенты  $K_i$  находятся из пяти опытов: на два линейных растяжения, на два линейных сжатия в направлении главных осей анизотропии и на чистый сдвиг по площадкам, составляющим угол  $\frac{\pi}{4}$  с этими направлениями. Выражая коэффициенты через соответствующие пределы прочности, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 + \frac{\sigma_{xp}\sigma_{xc}}{\sigma_{yp}\sigma_{yc}}\sigma_y^2 + \left[1 + \frac{\sigma_{xp}\sigma_{xc}}{\sigma_{yp}\sigma_{yc}} + \frac{\sigma_{xc} - \sigma_{xp}}{\tau_{xyp}} - \right. \\ \left. - \frac{\sigma_{xp}\sigma_{xc}}{\sigma_{yp}\sigma_{yc}} \left( \frac{\sigma_{yc} - \sigma_{yp}}{\tau_{xyp}} \right) - \frac{\sigma_{xp}\sigma_{yp}}{\tau_{xyp}^2} \right] \sigma_x\sigma_y + (\sigma_{xc} - \sigma_{xp})\sigma_x + \\ + \frac{\sigma_{xp}\sigma_{xc}}{\sigma_{yp}\sigma_{yc}}(\sigma_{yc} - \sigma_{yp})\sigma_y - \sigma_{xc}\sigma_{xp} = 0. \end{aligned} \quad (VI.3)$$

На плоскости  $xu$  критерий (VI.3) интерпретируется эллипсом.

Аналогичным по структуре является уравнение предельной кривой, предложенное Мариным [474]:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \left(2 + \frac{\sigma_{xc} + \sigma_{yp} - \sigma_{xp} - \frac{\sigma_{xp}}{\sigma_{yp}}\sigma_{xc}}{\tau_{xyp}} - \frac{\sigma_{xc}\sigma_{xp}}{\tau_{xyp}^2}\right) \sigma_x\sigma_y + \\ + (\sigma_{xc} - \sigma_{xp})\sigma_x + \left(\sigma_{xc}\frac{\sigma_{xp}}{\sigma_{yp}} - \sigma_{yp}\right)\sigma_y = \sigma_{xp}\sigma_{xc}. \end{aligned} \quad (IV.4)$$

Для материалов, у которых  $\sigma_{xp} = \sigma_{yp} = \sigma_p$  и  $\sigma_{xc} = \sigma_{yc} = \sigma_c$ , критерии (VI.3) и (VI.4) совпадают и могут быть представлены единым выражением:

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \left(2 - \frac{\sigma_p\sigma_c}{\tau_k^2}\right) \sigma_x\sigma_y + (\sigma_c - \sigma_p)(\sigma_x + \sigma_y) = \sigma_p\sigma_c.$$

Обобщение критерия энергии формоизменения ( $\sigma_i = \text{const}$ ), критерия максимального касательного напряжения ( $\tau_{\max} = \text{const}$ ) и критерия Прагера на анизотропные материалы провели Ху и Марин [474] путем введения в них пределов текучести в соответствующих направлениях. В результате были получены условия пластичности для анизотропных материалов. Применительно к плоскому напряженному состоянию эти критерии запишутся

следующим образом:

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{xt}^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{yt}^2} - \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{xt} \sigma_{yt}} = 1; \quad (\text{VI.5})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{\sigma_{xt}} &= \pm 1 \quad \text{при } \sigma_x > \sigma_y > 0 \quad \text{или } \sigma_x < \sigma_y < 0; \\ \frac{\sigma_y}{\sigma_{yt}} &= \pm 1 \quad \text{при } \sigma_y > \sigma_x > 0 \quad \text{или } \sigma_y < \sigma_x < 0; \\ \frac{\sigma_x}{\sigma_{xt}} - \frac{\sigma_y}{\sigma_{yt}} &= \pm 1 \quad \text{при } \sigma_x > 0 > \sigma_y \quad \text{или } \sigma_x < 0 < \sigma_y; \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.5a})$$

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2} \left[ \frac{\sigma_x^2}{\sigma_{xt}^2} - \left( \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{xt} \sigma_{yt}} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{yt}^2} \right)^3 \right] - \frac{1}{8} \left( \frac{\sigma_x}{\sigma_{xt}} + \frac{\sigma_y}{\sigma_{yt}} \right)^2 \times \\ &\times \left( \frac{\sigma_x}{\sigma_{xt}} - \frac{2\sigma_y}{\sigma_{yt}} \right)^2 \left( \frac{\sigma_y}{\sigma_{yt}} - \frac{2\sigma_x}{\sigma_{xt}} \right)^2 = 1. \end{aligned} \quad (\text{VI.5b})$$

Условие пластичности материала, анизотропия которого вызвана деформационным упрочнением, сопровождающимся изотропным расширением с одновременным смещением предельной поверхности, получено В. Н. Бастуном [21].

Если для исходного металла справедливо условие Мизеса, то предельная кривая после деформационного упрочнения в случае плоского напряженного состояния может быть представлена смещенной окружностью в координатах А. А. Ильюшина (см. § 3 гл. VII), уравнение которой запишется в виде

$$(S_1 - a_1)^2 + (S_2 - a_2)^2 = R^2,$$

где константы  $a_1$ ,  $a_2$  и  $R$  имеют геометрический смысл — это координаты центра и радиус предельной окружности в девиаторной плоскости. В общем случае  $a_1$ ,  $a_2$  и  $R$  зависят от степени упрочнения.

Это условие проверялось на сложнолегированной высокопрочной стали, предварительно деформированной по трем программам ( $n = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = 0,5; 1,0; 2,0$ ). Опыты показали, что расхождение между расчетными и экспериментальными данными не превышает 6%.

Критерии прочности анизотропных тел, имеющих различное сопротивление растяжению и сжатию, могут быть сформулированы на основе принципов, рассмотренных в гл. IV. Если в основу анализа положить линейный критерий (IV.17a), то предельная поверхность анизотропного тела будет формироваться коническими поверхностями, уравнения которых для случая, когда главные оси тензора напряжений совпадают с главными осями

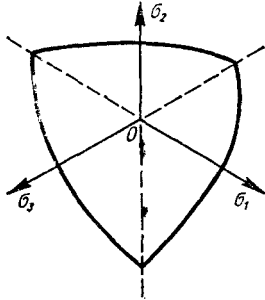


Рис. 66. Девиаторное сечение предельной поверхности анизотропного материала.

анизотропии, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} L + D_1 \sigma_x &= 1 \quad \text{при } \sigma_x > \sigma_y, \sigma_z, \\ L + D_2 \sigma_y &= 1 \quad \text{при } \sigma_y > \sigma_z, \sigma_x, \\ L + D_3 \sigma_z &= 1 \quad \text{при } \sigma_z > \sigma_x, \sigma_y, \end{aligned} \quad (\text{VI.6})$$

где

$$L = \sqrt{A(\sigma_x - \sigma_y)^2 + B(\sigma_y - \sigma_z)^2 + C(\sigma_z - \sigma_x)^2},$$

где  $A, B, C, D_1, D_2, D_3$  — константы материала, определяемые из опытов.

Если испытания проводятся на растяжение и сжатие в направлениях главных осей анизотропии, то применительно к указанным опытам уравнение (VI.6) запишется в следующем виде:

для одноосного растяжения в направлении осей  $x, y$  и  $z$

$$\begin{aligned} \sqrt{A + C} \sigma_{xp} + D_1 \sigma_{xp} &= 1, \\ \sqrt{A + B} \sigma_{yp} + D_2 \sigma_{yp} &= 1, \\ \sqrt{B + C} \sigma_{zp} + D_3 \sigma_{zp} &= 1; \end{aligned}$$

для одноосного сжатия в направлении осей  $x, y$  и  $z$

$$\begin{aligned} \sqrt{A + C} \sigma_{xc} &= 1, \\ \sqrt{A + B} \sigma_{yc} &= 1, \\ \sqrt{B + C} \sigma_{zc} &= 1. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, устанавливаем:

$$\begin{aligned} 2A &= \frac{1}{\sigma_{xc}^2} + \frac{1}{\sigma_{yc}^2} - \frac{1}{\sigma_{zc}^2}, \quad D_1 = \frac{1}{\sigma_{xp}} - \frac{1}{\sigma_{xc}}, \\ 2B &= \frac{1}{\sigma_{yc}^2} + \frac{1}{\sigma_{zc}^2} - \frac{1}{\sigma_{xc}^2}, \quad D_2 = \frac{1}{\sigma_{yp}} - \frac{1}{\sigma_{yc}}, \\ 2C &= \frac{1}{\sigma_{zc}^2} + \frac{1}{\sigma_{xc}^2} - \frac{1}{\sigma_{yc}^2}, \quad D_3 = \frac{1}{\sigma_{zp}} - \frac{1}{\sigma_{zc}}. \end{aligned}$$

Девиаторное сечение предельной поверхности, интерпретирующей в пространстве напряжений уравнение (VI.6), показано на рис. 66.

Известно, что при всестороннем сжатии (растяжении) в анизотропном теле появляются касательные напряжения, способствующие разрушению материала. Очевидно, для каждого анизотропного тела существует такое соотношение между главными напряжениями, при котором прочность выше, чем при гидростатическом

растяжении. Следовательно, вершина предельной поверхности анизотропного тела может не лежать на биссектрисе пространства напряжений.

Вершина предельной поверхности, соответствующей условию (VI.6), находится в точке, принадлежащей одновременно всем формирующим поверхностям. Если координаты вершины обозначить  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ , то уравнения формирующих поверхностей можно представить в виде

$$L' + D_1 \sigma'_1 = 1,$$

$$L' + D_2 \sigma'_2 = 1,$$

$$L' + D_3 \sigma'_3 = 1,$$

где  $L' = \sqrt{A(\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + B(\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + C(\sigma'_3 - \sigma'_1)^2}$ .

Из полученных уравнений находим

$$\sigma'_1 = \frac{1 - L'}{D_1}, \quad \sigma'_2 = \frac{1 - L'}{D_2}, \quad \sigma'_3 = \frac{1 - L'}{D_3}.$$

Следовательно, вершина исследуемой предельной поверхности находится на луче, положение которого определяется следующими соотношениями между главными напряжениями:

$$\sigma'_1 : \sigma'_2 : \sigma'_3 = \frac{1}{D_1} : \frac{1}{D_2} : \frac{1}{D_3}.$$

Углы  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , которые этот луч составляет с главными осями, легко найти из выражений

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{(\sigma'_2)^2 + (\sigma'_3)^2}} = \frac{D_2 D_3}{D_1 \sqrt{D_2^2 + D_3^2}};$$

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) = \frac{\sigma_2}{\sqrt{(\sigma'_1)^2 + (\sigma'_3)^2}} = \frac{D_1 D_3}{D_2 \sqrt{D_1^2 + D_3^2}};$$

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \gamma \right) = \frac{\sigma_3}{\sqrt{(\sigma'_1)^2 + (\sigma'_2)^2}} = \frac{D_1 D_2}{D_3 \sqrt{D_1^2 + D_2^2}}.$$

Из полученных соотношений следует, что при  $D_1 = D_2 = D_3$ , а это может иметь место, если

$$\frac{1}{\sigma_{xp}} - \frac{1}{\sigma_{xc}} = \frac{1}{\sigma_{yp}} - \frac{1}{\sigma_{yc}} = \frac{1}{\sigma_{zp}} - \frac{1}{\sigma_{zc}},$$

вершина предельной поверхности равноудалена от главных осей, т. е. лежит на оси пространства напряжений.

При гидростатическом растяжении ( $L' = 0$ ) получаем

$$D_1 \cdot 3\sigma'_{cp} = 1; \quad D_2 \cdot 3\sigma''_{cp} = 1; \quad D_3 \cdot 3\sigma'''_{cp} = 1,$$

откуда следует, что формирующие поверхности пересекают ось пространства напряжений в точках

$$\sigma'_{\text{ср}} = \frac{1}{3D_1}; \quad \sigma''_{\text{ср}} = \frac{1}{3D_2}; \quad \sigma'''_{\text{ср}} = \frac{1}{3D_3}.$$

Предельной поверхности, естественно, принадлежит точка

$$\frac{1}{2} \quad \sigma_{\text{ср}} = \frac{1}{3D_{\text{min}}},$$

где  $D_{\text{min}}$  — наименьшая величина из  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$ .

Для плоского напряженного состояния ( $\sigma_z = 0$ ) из уравнения (VI.1) получаем

$$\sqrt{(A+C)\sigma_x^2 - 2A\sigma_x\sigma_y + (A+B)\sigma_y^2 + D_{1,2}\sigma_{xy}} = 1. \quad (\text{VI.6a})$$

Константы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D_1$  и  $D_2$  можно определить из опытов на одноосное растяжение и сжатие в направлениях  $x$  и  $y$  и при чистом сдвиге в плоскости  $xy$ . Рассматривая первые четыре опыта, из уравнения (VI.6a) находим

$$\sqrt{A+C}\sigma_{\text{ср}} + D_1\sigma_{\text{ср}} = 1,$$

$$\sqrt{A+B}\sigma_{\text{ср}} + D_2\sigma_{\text{ср}} = 1,$$

$$\sqrt{A+C}\sigma_{\text{ср}} = 1,$$

$$\sqrt{A+B}\sigma_{\text{ср}} = 1.$$

Чистый сдвиг в плоскости  $xy$  следует осуществлять таким образом, чтобы направления главных нормальных напряжений совпадали с главными осями анизотропии.

Если при чистом сдвиге положительным главным напряжением является  $\sigma_x$  ( $\sigma_y < 0$ ), то из уравнения (VI.6a) получаем

$$(\sqrt{4A+B+C} + D_1)\tau_{xy}^+ = 1.$$

В случае, когда  $\sigma_y > 0$  ( $\sigma_x < 0$ ),

$$(\sqrt{4A+B+C} + D_2)\tau_{xy}^- = 1.$$

В этих уравнениях  $\tau_{xy}^+$  и  $\tau_{xy}^-$  — предельные напряжения сдвига по площадкам, наклоненным под углом  $45^\circ$  к главным осям анизотропии, соответственно при  $\sigma_x > 0$  и при  $\sigma_y > 0$ .

Решая полученные шесть уравнений, находим

$$2A = K^2 - \frac{1}{\sigma_{\text{ср}}^2} - \frac{1}{\sigma_{\text{ср}}^2}; \quad 2B = -K^2 + \frac{1}{\sigma_{\text{ср}}^2} + \frac{3}{\sigma_{\text{ср}}^2},$$

$$2C = -K^2 + \frac{3}{\sigma_{\text{ср}}^2} + \frac{1}{\sigma_{\text{ср}}^2}, \quad D_1 = \frac{1}{\sigma_{\text{ср}}} - \frac{1}{\sigma_{\text{ср}}}; \quad D_2 = \frac{1}{\sigma_{\text{ср}}} - \frac{1}{\sigma_{\text{ср}}},$$

$$\text{где} \quad K = \frac{1}{\tau_{xy}^+} - \frac{1}{\sigma_{\text{ср}}} + \frac{1}{\sigma_{\text{ср}}} = \frac{1}{\tau_{xy}^-} - \frac{1}{\sigma_{\text{ср}}} + \frac{1}{\sigma_{\text{ср}}}.$$

Из выражения для  $K$  следует соотношение

$$\frac{1}{\sigma_{xp}} - \frac{1}{\sigma_{xc}} - \frac{1}{\sigma_{yp}} + \frac{1}{\sigma_{yc}} = \frac{1}{\tau_{xyp}^+} - \frac{1}{\tau_{xyp}^-},$$

которое может служить критерием применимости теории для исследуемого материала.

Вторая группа теорий наиболее полно отражена в критерии прочности, предложенном И. И. Гольденблатом и В. А. Копновым [84, 85]. Этот критерий, как и критерий (VI.6), пригоден для оценки предельного состояния анизотропных материалов, имеющих различные пределы прочности при растяжении и сжатии, а также различное сопротивление сдвигу в зависимости от знака (направления) касательных напряжений в каждой данной плоскости.

В качестве критерия здесь принято следующее выражение:

$$(\Sigma \Pi_{ik} \sigma_{ik})^\alpha + (\Sigma \Pi_{pqnm} \sigma_{pq} \sigma_{nm})^\beta + (\Sigma \Pi_{rstl} \sigma_{rs} \sigma_{tl} \sigma_{nm})^\gamma + \dots < 1,$$

где  $\Pi_{ik}$ ,  $\Pi_{pqnm}$  и т. д. — тензоры прочности различных рангов. Если, приняв  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = \frac{1}{3}$  и т. д., ограничиться только линейными и квадратичными членами от компонентов тензора напряжений, то критерий прочности запишется в следующем виде:

$$\Sigma \Pi_{ik} \sigma_{ik} + \sqrt{\Sigma \Pi_{pqrs} \sigma_{pq} \sigma_{rs}} \leq 1. \quad (\text{VI.7})$$

Если ограничиться плоско-напряженным состоянием, то  $i, k, p, q, r, s$  будут принимать значения 1 и 2. Тензоры прочности  $\Pi_{ik}$ ,  $\Pi_{pqrs}$  можно выразить через пределы прочности на растяжение и сжатие в первом и втором основных направлениях, пределы прочности на сдвиг в основном направлении  $\tau_0$  и пределы прочности на сдвиг по площадкам, равнонаклоненным к основным направлениям  $\tau_{xyp}^+$ ,  $\tau_{xyp}^-$ . Написав условие (VI.7) применительно к каждому из указанных видов испытаний, находим

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{xp}} - \frac{1}{\sigma_{xc}} \right); \quad \Pi_{22} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{yp}} - \frac{1}{\sigma_{yc}} \right); \quad \Pi_{12} = 0; \\ \Pi_{111} &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sigma_{xp}} + \frac{1}{\sigma_{xc}} \right)^2; \quad \Pi_{222} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sigma_{yp}} + \frac{1}{\sigma_{yc}} \right)^2; \\ \Pi_{112} &= \frac{1}{8} \left[ \left( \frac{1}{\sigma_{xp}} + \frac{1}{\sigma_{xc}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sigma_{yp}} + \frac{1}{\sigma_{yc}} \right)^2 - \left( \frac{1}{\tau_{xyp}^+} + \frac{1}{\tau_{xyp}^-} \right)^2 \right]; \\ \Pi_{1212} &= \frac{1}{8\tau_0^2}. \end{aligned}$$

Значения  $\Pi_{111}$  и  $\Pi_{222}$  определяются экспериментально, например при комбинированном нагружении образцов растяжением и сдвигом. Остальные компоненты тензоров прочности находятся из

условия симметрии

$$\Pi_{ik} = \Pi_{ki}; \quad \Pi_{pqrs} = \Pi_{qprs}; \quad \Pi_{pqrs} = \Pi_{pqsr}; \quad \Pi_{pqrs} = \Pi_{rspq}.$$

Зная компоненты тензоров прочности, можно найти пределы прочности для любого направления:

$$\sigma_{\varphi r c_k} = (\pm \Sigma \Pi_{pq} \alpha_{1p} \alpha_{1q} + \sqrt{\Sigma \Pi_{iknm} \alpha_{1i} \alpha_{1k} \alpha_{1n} \alpha_{1m}})^{-1};$$

$$\tau_{\varphi}^{\pm} = \frac{1}{2} (\mp \Sigma \Pi_{pq} \alpha_{1p} \alpha_{2q} + \sqrt{\Sigma \Pi_{iknm} \alpha_{1i} \alpha_{2k} \alpha_{1n} \alpha_{2m}})^{-1}.$$

Здесь величины  $\alpha$  определяются формулами

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \cos \varphi; \quad \alpha_{12} = \sin \varphi; \quad \alpha_{21} = -\sin \varphi.$$

Из уравнения (VI.7) следует соотношение между константами материала

$$\frac{1}{\sigma_{xp}} - \frac{1}{\sigma_{xc}} - \frac{1}{\sigma_{yp}} + \frac{1}{\sigma_{yc}} = \frac{1}{\tau_{xyp}^+} - \frac{1}{\tau_{xyp}^-},$$

полностью совпадающее с соотношением, которое получено на основе анализа уравнения (VI.6).

Заметим, что если не учитывать влияние знака касательных напряжений на пределы прочности при сдвиге, то уравнение (VI.7) тождественно совпадает с уравнением (VI.3). Следовательно, рассмотренный критерий прочности для изотропной среды с различными пределами прочности при растяжении и сжатии ( $\sigma_{xp} = \sigma_{yp} = \sigma_p \neq \sigma_{xc} = \sigma_{yc} = \sigma_c$ ;  $\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-$ ), в сущности, совпадает с критерием Ю. И. Ягна [506]. Как частный случай критерия (VI.7) (пределы прочности при растяжении и сжатии равны) можно рассматривать теорию анизотропных идеально пластических сред Хилла [471] [см. уравнение (VI.5)].

Критерий в виде полинома

$$\sum_{ik} \Pi_{ik} \sigma_{ik} + \sum_{ik} \sum_{mn} \Pi_{ikmn} \sigma_{ik} \sigma_{mn} + \dots = 1 \quad (VI.8)$$

рассматривался А. К. Малмейстером. Здесь  $\Pi_{ik}$ ,  $\Pi_{ikmn}$  и т. д. — тензоры прочности четвертого ранга. Если главные оси совпадают с главными осями анизотропии, то для случая двухосного напряженного состояния критерий (VI.8) можно привести к виду

$$\frac{\sigma_{xc} - \sigma_{xp}}{\sigma_{xp} \sigma_{xc}} \sigma_1 + \frac{\sigma_{yc} - \sigma_{yp}}{\sigma_{yp} \sigma_{yc}} \sigma_2 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{xp} \sigma_{xc}} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{yp} \sigma_{yc}} +$$

$$+ \left[ \frac{1}{\sigma_{xp} \sigma_{xc}} + \frac{1}{\sigma_{yp} \sigma_{yc}} + \frac{1}{\tau_{xyp}} \left( \frac{\sigma_{xc} - \sigma_{xp}}{\sigma_{xp} \sigma_{xc}} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\sigma_{yc} - \sigma_{yp}}{\sigma_{yp} \sigma_{yc}} - \frac{1}{\tau_{xyp}^2} \right) \right] \sigma_x \sigma_y = 1. \quad (VI.8a)$$

Критерий прочности для существенно анизотропных материалов предложен Е. К. Ашкенази [10]. Для случая плоского напряженного состояния, когда главные напряжения произвольно ориентированы по отношению к главным осям анизотропии ортотропного материала, расчетное уравнение, в соответствии с работой [10], записывается в виде полинома четвертой степени, который на плоскости напряжений может интерпретироваться выпукло-вогнутой кривой. Е. К. Ашкенази предложен приближенный способ построения предельной поверхности по результатам испытаний различно ориентированных образцов на одноосное растяжение, сжатие и срез.

Изложенные выше теории прочности анизотропных материалов не учитывают влияния временных факторов. Поэтому их использование так же, как и использование условий, изложенных в предыдущих главах, принципиально возможно лишь в том случае, когда силовые факторы довлеют над временными, а скорости нагружения по всем направлениям одинаковы. Вид «тензора прочности» будет уточняться по мере накопления опытных данных о реологических свойствах материалов в условиях сложного напряженного состояния, о влиянии в этих условиях скорости нагружения и нестационарных температурных полей [281].

## § 2. Температурно-временные факторы.

### Критерии ползучести и длительной прочности при сложном напряженном состоянии

На поведение материала под нагрузкой, его прочность, способность деформироваться существенное влияние оказывает температура. В однофазных металлах это влияние связано с изменением прочности границ зерен и прочности их тела. При этом существенную роль играет тип кристаллической решетки. Так, если в металлах с объемноцентрированной решеткой (железо, молибден, хром, ванадий, вольфрам) при низких температурах предел текучести заметно изменяется, то у металлов с гранецентрированной кубической решеткой (медь, алюминий, серебро, никель, свинец, золото, платина) это изменение почти отсутствует [346]. Влияние температуры на свойства металлов с гексагональной решеткой (цинк, кадмий, магний, титан, цирконий, бериллий) не имеет общих закономерностей [527]. У некоторых однофазных металлов с изменением температуры наблюдается выделение дисперсных частиц вновь образовавшейся фазы, что иногда увеличивает склонность к хрупкому разрушению (старение, некоторые виды тепловой хрупкости).

Важнейшие работы по вопросам прочности и пластичности металлов и сплавов при высоких температурах принадлежат С. И. Губкину, А. А. Бочвару, И. А. Одингу, Н. Н. Давиденкову,



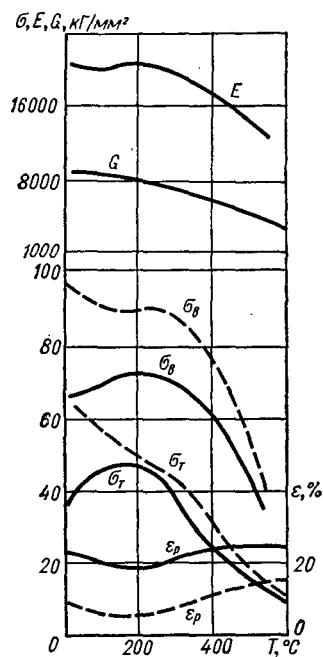


Рис. 67. Зависимость механических характеристик углеродистой и хромоникелевой сталей от температуры.

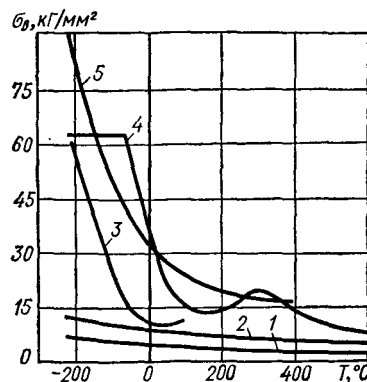


Рис. 68. Зависимость предела прочности некоторых металлов от температуры [527]:

1 — алюминий; 2 — никель; 3 — железо; 4 — молибден; 5 — тантал.

С. Т. Кишкину, Н. Ф. Лашко, Б. Н. Ровинскому и другим исследователям.

Для большинства машиностроительных материалов с повышением температуры предел текучести, предел прочности и модуль упругости уменьшаются, а относительное удлинение и коэффициент поперечной деформации увеличиваются. Характерным исключением являются, например, отдельные металлокерамические композиции, пиролизный графит и некоторые цветные сплавы.

На рис. 67 приведены кривые зависимости механических характеристик от температуры при растяжении для углеродистой (сплошные линии) и хромоникелевой (штриховые линии) сталей. Характер изменения механических свойств для некоторых металлов приведен на рис. 68.

Температурные зависимости механических свойств большинства конструкционных материалов имеют, как видно из приведенных рисунков, некоторое внешнее сходство. Поэтому давно предпринимались попытки свести все кривые к одной, как это сделано для газов, и описать ее некоторым приведенным уравнением состояния. Значительный сдвиг кривых, но не полное их совпадение получается, например, при использовании так называемых соответственных (или гомологических) температур, когда за базу приведения принята температура плавления. Трудность установления указанных «соответствий» прежде всего в отсутствии исчерпы-

вающего объяснения зависимостей механических свойств от температуры.

Изменение механических характеристик материалов при изменении температуры обычно связывают с изменением сил взаимодействия между атомами или с изменением дислокационной модели деформирования и разрушения. Уменьшение, например, предела текучести можно объяснить с позиций теории дислокаций. Повышение температуры способствует возникновению энергетических флуктуаций, достаточных для преодоления дислокациями статических препятствий, имеющихся в материале. Механизм торможения дислокаций в значительной степени зависит от структуры, характер изменения которой в свою очередь определяется температурно-временными условиями испытания.

Все эти процессы, разумеется, могут оказать определенное влияние не только на механические константы материала, но и на вид инвариантной функции. Отдельные экспериментальные работы, выполненные в этой области, подробно рассмотрены в гл. XI. Здесь отметим лишь, что в работе [530] использовано условие прочности, аналогичное (III.22), предложенное в 1961 г. Стасси. Характерная особенность этого условия — попытка учесть влияние температуры. Расчетное уравнение Стасси может быть записано в виде

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 2(\rho - \alpha)\alpha\sigma_p(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 2\rho\alpha^3\sigma_p^2.$$

Здесь  $\rho = \frac{\sigma_c}{\sigma_p}$ ;  $\alpha = \frac{\sigma_t}{\sigma_p}$ , где  $\sigma_t$  — предельные напряжения в случае растяжения при температуре  $t$ .

Уравнение Стасси представляет семейство параболоидов вращения, каждый из которых соответствует определенной температуре. Согласно этому уравнению предельное напряжение при гидростатическом нагружении определяется по формуле

$$\sigma_n = \frac{\rho\sigma_t^2}{3(\rho\sigma_0 - \sigma_p)}.$$

При повышении температуры, когда значение  $\sigma_t$  уменьшается, величина  $\sigma_n$  тоже уменьшается. Если температура достигает температуры плавления, то величина  $\sigma_t$  уменьшается до нуля, а параболоид стягивается в прямую, исходящую из начала координат.

Влияние температуры на механические характеристики металлов иногда связывают с влиянием скорости деформирования. Предложено, например, такое условие эквивалентности:

$$\nu \exp \left[ \frac{u(\sigma, \epsilon)}{KT} \right] = \text{const},$$

где  $T$  — температура;  $v$  — скорость деформации;  $\sigma$  — напряжение течения при деформации  $\epsilon$ ;  $u$  — энергия активации пластической деформации. Авторы работ [19, 132] получили хорошее подтверждение этого условия в опытах на меди, поликристаллическом никеле и некоторых сплавах. Обычно считают, что для стали повышение температуры на 60 град эквивалентно понижению скорости деформации приблизительно в 1000 раз. Опытные данные о влиянии скорости деформирования на вид предельной поверхности в литературе отсутствуют.

Влияние скорости нагружения особенно существенно для пластичных материалов, деформирование которых сопровождается большими пластическими деформациями или вязким течением. Темп роста предела текучести с увеличением скорости, как правило, выше темпа роста предела прочности; это часто приводит к хрупкому разрушению металла. При очень больших скоростях теплота, выделяемая при деформировании, не успевает рассеиваться. В результате отбоя металла разупрочнение превалирует над упрочнением, что снова приводит к увеличению пластичности.

Результаты механических испытаний таких материалов без указания продолжительности нагружения, как правило, не сопоставимы. При деформировании плотных хрупких материалов влияние скорости практически не обнаруживается, а в отдельных случаях, когда разрушение контролируется малым числом наиболее опасных дефектов, увеличение скорости сопровождается уменьшением прочности материала. Следует отметить, что, по данным работ [186, 629], фактическая скорость локальной деформации отдельных участков (около дефектов) может быть гораздо больше средней скорости деформации образца.

Деформации, возникающие в теле, зависят не только от температуры и скорости нагружения, но и от длительности действия приложенной нагрузки, так как даже при нормальных и низких температурах может наблюдаться явление ползучести.

Процессы ползучести и релаксации металлов и сплавов тесно связаны с энергией связи в решетках, энергией активации диффузии и самодиффузии по границам зерен и их телу, структурным состоянием и т. д. [44, 297]. Толкования механизма ползучести еще настолько противоречивы, что отдать предпочтение какой-либо из многих точек зрения пока не представляется возможным.

Отличие релаксации от ползучести при постоянной температуре заключается в переменном силовом факторе. Если при испытаниях на ползучесть необходимым условием является постоянство напряжения, то при испытании на релаксацию падение напряжения должно быть таким, чтобы размеры рабочей части образца не изменялись. Из основного уравнения релаксации  $\epsilon_y + \epsilon_{пл} = \text{const}$  видно, что в процессе работы материала упругая деформация уменьшается при одновременном и равном увеличении

пластической  $\epsilon_{пл}$ . Релаксацию можно рассматривать как ползучесть в условиях, когда падение напряжения происходит по закону, обеспечивающему постоянство длины рабочей части образца.

Ценность релаксационных испытаний значительно уменьшается в связи с тем, что создать условие «чистой» релаксации даже на прецизионных испытательных машинах практически невозможно. В связи с этим в последнее время наблюдается тенденция к переходу от испытаний на релаксацию к испытаниям на ползучесть при переменном напряжении.

Качественную оценку релаксационной стойкости некоторых сталей можно производить по кривым ползучести при постоянном напряжении [76], однако это допустимо по отношению к материалам с небольшой продолжительностью первого периода ползучести, так как отдельные стали, быстро разупрочняющиеся при релаксации, обладают довольно высоким сопротивлением ползучести.

Для описания ползучести при одноосном напряженном состоянии были предложены различные теории. Наиболее распространенные из них — теория упрочнения, теория течения, теория старения, теория наследственности. Смысл этих теорий сводится к следующему. На основании тех или иных предположений, иногда чисто гипотетических, устанавливается аналитическая зависимость между отдельными параметрами, характеризующими процесс ползучести, — напряжением, деформацией, скоростями их изменения и временем, — т. е. составляется уравнение состояния, от которого затем переходят к уравнению ползучести. В табл. 7

Т а б л и ц а 7

Теория	Уравнение состояния	Уравнение ползучести
Теория упрочнения	$\epsilon_n \epsilon_n^{\frac{1-c}{c}} = a \exp \frac{\sigma}{b}$ $\epsilon_n = \sigma^n \Omega(t)$	$\epsilon_n = \left( \frac{k}{m} \exp \frac{\sigma}{b} \right)^c t^c$ $\epsilon_n = \sigma^n \Omega(t)$
Теория старения	$\epsilon_n = \psi \sigma$ $\psi = \int_0^t B(t) \sigma^{n-1} dt$	$\epsilon_n = \int_0^t B(t) dt \sigma^n$
Теория течения	$\dot{\epsilon} = \sigma^n B(t)$	$\epsilon_n = \Omega(t) \sigma^n$
Теория наследственности	$\varphi(\epsilon) = \sigma(t) + \int_0^t [K(t) - \theta] d\theta$	$f(\epsilon) = \sigma \left\{ 1 + \int_0^t [K(t) - \theta] d\theta \right\}$

приведены наиболее широко распространенные уравнения состояния и соответствующие им уравнения ползучести.

Достаточно полный обзор упомянутых теорий можно найти в капитальном труде Ю. Н. Работнова [382]. Нелинейная теория наследственной ползучести, предложенная Ю. Н. Работновым [380, 381], более совершенна и гибка по сравнению с другими, так как отражает все основные стороны процесса ползучести. Однако использование ее в расчетах приводит к большим математическим трудностям.

Для расчетов при сложном напряженном состоянии необходима теория, которая позволила бы по данным опыта на одноосное растяжение судить о скоростях и деформациях ползучести в условиях сложного напряженного состояния. Такие теории, предложенные до 1940 г., можно разбить на две группы.

1. Теории, в которых скорость ползучести определялась как функция системы напряжений (Бейли, Марин, Одквист, Зодерберг). Их можно рассматривать как приложения классических теорий пластичности.

2. Теории, где скорость ползучести определялась как функция не только системы напряжений, но и вязкости материала (Кантер, Надаи [570, 603]).

В последнее время в расчетах на ползучесть при сложном напряженном состоянии часто используется деформационная теория. Постулируя независимость функции  $\epsilon_i = f(\sigma_i)$  от вида напряженного состояния, можно для расчетов при одноосных нагружениях использовать теории ползучести, предложенные для случая одноосного напряженного состояния, подставив вместо деформаций интенсивность деформаций, а вместо напряжений — интенсивность напряжений. Так, например, используя теорию старения, уравнение состояния при одноосном нагружении запишем в виде

$$\epsilon_{in} = \sigma_i^n \Omega(t).$$

Аналогично поступают в случае использования других теорий. Подробное изложение теорий ползучести можно найти в работах [328, 382].

Испытания на ползучесть, продолжающиеся до разрушения образца, называют испытаниями на длительную прочность. Важнейшей характеристикой материала является также долговечность — время от момента приложения нагрузки до момента разрушения.

При больших уровнях напряжений, когда ведущим механизмом деформаций являются сдвиговые процессы, поведение материала при повышенных температурах качественно можно считать одинаковым как при кратковременных, так и при длительных испытаниях.

Изучение длительной прочности начато сравнительно недавно и связано с большими трудностями из-за продолжительности опыта. Поэтому значение предела длительной прочности для больших сроков службы, как правило, устанавливается путем экстраполяции экспериментальных данных, полученных на сравнительно небольших базах. При этом наибольшее распространение имеют степенные и экспоненциальные зависимости следующего вида [329]:

$$\tau_{\text{сл}} = D\sigma^{-d}, \quad \tau_{\text{сл}} = Bt^{-\beta\sigma},$$

где  $B, D, d, \beta$  — постоянные.

Известны также температурно-временные параметры [266, 581].

Для правильного определения экстраполированных значений пределов длительной прочности и ползучести большое значение имеет стабильность структуры во времени. Со структурными изменениями связаны, например, перегиб логарифмической кривой длительной прочности, снижение пластичности при больших сроках службы и т. п.

Физическую сущность изменения наклона кривой длительной прочности, построенной в двойных логарифмических координатах, обычно связывают с изменением характера разрушения (с переходом от транскристаллического разрушения к интеркристаллическому), происходящим в результате изменения структуры материала под влиянием диффузионных процессов. У металлов и сплавов, имеющих более устойчивую структуру, перегиб логарифмической кривой, как правило, не наблюдается. Впрочем, некоторые авторы на основании анализа экспериментальных данных по длительной прочности предполагают, что перелом кривой является следствием применения двойных логарифмических координат [345].

В. С. Иванова [160] предложила новый критерий пластичности металлов — ресурс пластичности, приближенно характеризующий величину пластической деформации на первом и втором участках ползучести. Этот критерий позволяет установить запас прочности не только по пределу длительной прочности, но и по ресурсу пластичности:

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{дл.пр}}}{\sigma_{\text{полз}}}; \quad K_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_{\text{сл}}},$$

где  $\sigma_{\text{дл.пр}}$ ,  $\sigma_{\text{полз}}$  — соответственно пределы длительной прочности и ползучести;  $\varepsilon_r$  — ресурс пластичности,  $\varepsilon_r = \nu\tau_{\text{сл}}$ ;  $\varepsilon_{\text{сл}}$  — деформация за время  $\tau_{\text{сл}}$ . Для определения коэффициентов  $K_{\sigma}$ ,  $K_{\varepsilon}$  достаточно установить зависимости  $\sigma = f_1(\tau_{\text{сл}})$ ,  $\sigma = f_2(\nu)$ ,  $\varepsilon = f_3(\tau)$ .

В большинстве существующих подходов при описании ползучести и длительной прочности свойства материала предполагаются неизменными. В действительности разрушению материала предшествуют сложные процессы, сопровождающиеся появлением систем микро- и субмикротрещин, плотность которых может быть чрезвычайно велика — до  $10^{16} \text{ см}^{-3}$  [217] и более. Понятие поврежденности материала [598, 611] положено в основу работ [166, 188, 382 и др.], где рассматривается длительная прочность с учетом накопления повреждений.

Условия длительных испытаний образцов при одноосном напряженном состоянии не могут, очевидно, полностью отразить многообразие условий работы конструкций в эксплуатации. Системы труб, сосуды под давлением, турбинные диски, элементы авиационных конструкций работают в условиях высоких температур при сложном напряженном состоянии. При длительной работе изделий критерии эквивалентности устанавливаются по заданной долговечности (статическая и динамическая усталость) или заданному допуску на остаточную деформацию (ползучесть). Эквивалентным напряженным состояниям должны соответствовать одинаковые значения параметра, на основе которого производится корреляция.

Для оценки сопротивления материалов длительному разрушению при сложном напряженном состоянии по результатам испытаний при простейших нагружениях рекомендуется ряд критериев. По одним данным, критерием длительной прочности может служить интенсивность нормальных напряжений [192, 402], по другим — максимальное нормальное напряжение [120] или критерий в виде полусуммы интенсивности напряжений и максимального нормального напряжения [407]  $\eta = \frac{\sigma_i + \sigma_1}{2}$ . В работе [12] показано, что последний критерий лучше согласуется с опытом, если его умножить на функцию  $\varphi(\sigma_0, \sigma_i, \sigma_1)$ , для которой предложено эмпирическое выражение вида

$$\varphi = a^{1 - \frac{6\sigma_0}{\sigma_i + \sigma_1}},$$

где  $a$  — константа материала при заданных температуре и сроке службы.

Высказывались также предположения о том, что при интеркристаллическом разрушении длительная прочность материала в условиях сложного напряженного состояния определяется гидростатическим напряжением, т. е. шаровым тензором [628].

Имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные не дают окончательного ответа в пользу того или иного критерия, хотя каждый из них в определенных условиях удовлетворительно описывает длительную прочность отдельных групп материалов.

Это объясняется, очевидно, различным характером протекания физических процессов в материале, происходящих под воздействием силовых и температурно-временных факторов.

Действительно, разрушение при ползучести подготавливается по мере накопления микроразрушений [90], механизм образования которых в общем случае может быть различным. В зависимости от температуры, уровня напряжений и их ориентации в пространстве разрушение может быть внутрикристаллическим и межкристаллическим.

В первом случае, когда основными причинами разрушения являются искажение зерен и миграция вакансий внутри зерна, с физической точки зрения логичным будет считать, что роль эффективных напряжений могут играть некоторые функции касательных напряжений, максимальное касательное напряжение или интенсивность напряжений.

При межкристаллическом разрушении, основной причиной которого, очевидно, является концентрация напряжений у границ зерен, ответственным за разрушение можно принять максимальное (с учетом знака) нормальное напряжение.

Надо полагать, в реальных материалах существуют оба вида разрушений, и в зависимости от физических свойств материала и условий работы тот или иной вид разрушения будет ведущим [162]. Поэтому предложенные критерии длительной прочности представляются одинаково обоснованными. Все зависит от того, какой механизм разрушения является ведущим.

Высказанные выше физические предпосылки дают основание распространить обобщенные критерии вида (IV.17) на случай работы материала в условиях длительного нагружения. Подтверждение этой идеи можно найти в работе [515], где приведены данные металлографического исследования медных трубок двух партий, одна из которых испытывалась при  $\sigma_i = \text{const}$ , но при различных значениях  $\sigma_{\max}$ , а вторая — при  $\sigma_{\max} = \text{const}$ , но при различных значениях  $\sigma_i$ .

Рассмотрим линейный критерий

$$\eta_{\Sigma} = \chi_d \sigma_i + (1 - \chi_d) \sigma_1. \quad (\text{VI.9})$$

Коэффициент  $\chi_d$  в этом случае можно определить по результатам двух серий опытов, проведенных при разных напряженных состояниях, характеризующихся соответственно нормальными напряжениями  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$  и  $\sigma''_1, \sigma''_2, \sigma''_3$ . Приравнявая критерии, получаем

$$\chi_d \sigma'_i + (1 - \chi_d) \sigma'_1 = \chi_d \sigma''_i + (1 - \chi_d) \sigma''_1,$$

откуда

$$\chi_d = \frac{1}{1 - \frac{\sigma'_i - \sigma''_i}{\sigma'_1 - \sigma''_1}}. \quad (\text{VI.10})$$



Если одна из серий испытаний, например первая, проводится при одноосном растяжении, то  $\sigma'_1 = \sigma'_i = \sigma_p$ . Тогда выражение (VI.10) примет вид

$$\chi_d = \frac{\sigma_p - \sigma_1}{\sigma_i - \sigma_1} . \quad (\text{VI.10a})$$

Здесь  $\sigma_1$  и  $\sigma_i$  — максимальное (с учетом знака) нормальное напряжение и интенсивность напряжений, при которых материал в случае сложного напряженного состояния разрушается за то же время, что и при напряжении  $\sigma_p$  в опытах при простом растяжении.

Если вторая серия опытов проводится при чистом сжатии ( $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_i = \sigma_c$ ), то  $\chi_d = \frac{\sigma_p}{\sigma_c}$ .

Таким образом, коэффициент  $\chi_d$ , как и прежде, имеет механический смысл — он равен отношению предела длительной прочности при растяжении к пределу длительной прочности при сжатии. Его можно также определить как величину, характеризующую степень участия в макроразрушении сдвиговой деформации, создающей благоприятные условия для разрыхления материала и образования трещин. При  $\chi_d = 0$ , когда разрушение определяется сопротивлением материала распространению трещин, выражение (VI.9) преобразуется в критерий  $\sigma_{\max} = \text{const}$ . Если разрушение является результатом сдвиговых процессов в материале ( $\chi_d = 1$ ), то в качестве эффективного напряжения принимается интенсивность напряжений. Когда разупрочняющее влияние сдвиговой деформации эквивалентно соответствующему эффекту от нормального напряжения ( $\chi_d = 0,5$ ), выражение (VI.9) принимает вид критерия  $\eta$  (см. стр. 172). Обработка экспериментальных данных по обобщенному критерию (см. § 6 гл. XI) показала хорошее соответствие теоретических расчетов результатам опыта.

Теоретические предпосылки использования критерия (VI.9) для описания ползучести заключаются в следующем.

В основу большинства теорий ползучести при сложном напряженном состоянии положена гипотеза о существовании такой функции напряжений  $\Phi(\sigma_{ij})$ , называемой потенциалом ползучести, при которой

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} .$$

В общем случае потенциал ползучести зависит от инвариантов тензора напряжений. Тем не менее с целью упрощения соответствующих уравнений состояния влиянием первого инварианта тензора и третьего инварианта девиатора напряжений пренебрегают и, ассоциируя закон течения с условием Мизеса, постули-

руют инвариантность функции

$$\dot{\epsilon}_i = f(\sigma_i), \quad (\text{VI.11})$$

где  $\dot{\epsilon}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \dot{\gamma}_{\text{окт}}$  — интенсивность скорости ползучести;  $\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{окт}}$  — интенсивность напряжений;  $\dot{\gamma}_{\text{окт}}$ ,  $\tau_{\text{окт}}$  — скорость октаэдрического сдвига и октаэдрическое касательное напряжение.

Такое упрощение равносильно предположению о том, что скорость сдвигов в октаэдрической плоскости зависит только от уровня октаэдрического касательного напряжения, причем характер этой зависимости не изменяется при переходе от одного вида напряженного состояния к другому. Следовательно, в соответствии с (VI.11) на скорость октаэдрических сдвигов не влияет октаэдрическое нормальное напряжение и вид девиатора напряжений (ориентация касательного напряжения по отношению к главным осям).

В расчетах на ползучесть большое распространение получили аналитические аппроксимации функции (VI.11) в виде экспоненциальной зависимости

$$\dot{\epsilon}_i = A e^{n\sigma_i}, \quad (\text{VI.11a})$$

как более точной, хотя и в этом случае на обобщенных графиках наблюдается существенное рассеяние экспериментальных результатов.

Из рис. 69, на котором в полулогарифмических координатах  $\sigma_i - \ln \dot{\epsilon}_i$  представлены для примера результаты испытаний стали IX18H9T в условиях ползучести [328], видно, что, несмотря на

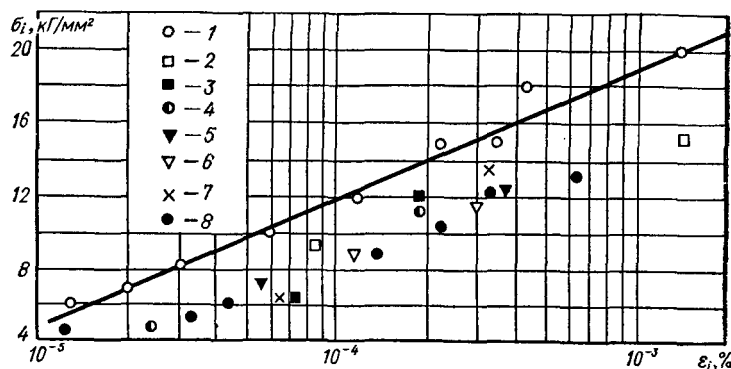


Рис. 69. Сопротивление ползучести хромоникелевой стали при температуре 600° С в полулогарифмических координатах:

1 —  $h = 0$ ; 2 —  $h = 0,08$ ; 3 —  $h = 0,12$ ; 4 —  $h = 0,22$ ; 5 —  $h = 0,27$ ; 6 —  $h = 0,36$ ; 7 —  $h = 0,61$ ; 8 —  $h = 1$ .

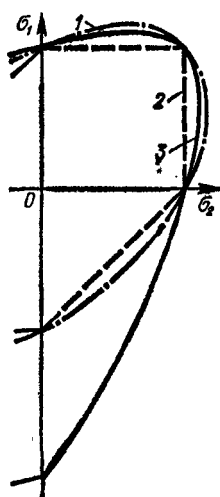


Рис. 70. Предельные кривые, построенные по критерию Мизеса (1), критерию Кулона (2) и обобщенному критерию (3).

заметный разброс, в расположении экспериментальных точек, полученных при различных соотношениях главных напряжений, имеется определенная закономерность: точки, соответствующие одноосному растяжению, расположены выше точек, полученных при других видах напряженного состояния. Это указывает на принципиальную возможность получения более точных соотношений путем рационального учета упомянутых выше инвариантов.

Экспериментальное исследование влияния третьего инварианта девиатора напряжений на распределение скоростей ползучести описано в работе [375]. В основу методики положены идеи

Ю. Н. Работнова [383], позволяющие сформулировать выражения для скоростей ползучести с учетом ориентации вектора октаэдрического напряжения. Результаты, полученные в работе [375] при исследовании стали X18H9T, ввиду существенного разброса экспериментальных точек не дают возможности сделать количественные оценки о влиянии третьего инварианта. Однако, анализируя опытные данные, характеризующие зависимость угла между октаэдрическим касательным напряжением и вектором интенсивности скоростей деформаций от ориентации касательного напряжения в октаэдрической плоскости, автор работы [375] приходит к выводу, что поверхность эквивалентных (по интенсивности скоростей ползучести) напряжений располагается между шестигранником Кулона и цилиндром Мизеса. Такой вывод представляется недостаточно обоснованным. Действительно, полученные результаты относятся к плоскому напряженному состоянию. Поэтому на их основе можно высказывать определенные предположения лишь о формах и относительном расположении предельных плоских кривых. В рассматриваемом случае речь идет о том, что экспериментальные точки, соответствующие эквивалентным напряженным состояниям, в области двухосного растяжения располагаются между прямоугольником Кулона и эллипсом Мизеса. Такое расположение экспериментальных точек, как видно из рис. 70, находится в соответствии с предельной кривой, построенной по обобщенному критерию (VI.9), что экспериментально подтверждает возможность применения этого критерия для описания ползучести и дает основание вместо соотношений (VI.11a) в качестве первого приближения использовать инвари-

антную функцию в виде

$$\dot{\epsilon}_i = f_1(\eta_\Sigma^*), \quad (\text{VI.12})$$

где

$$\eta_\Sigma^* = \chi^* \sigma_i + (1 - \chi^*) \sigma_1. \quad (\text{VI.13})$$

Максимальное нормальное напряжение, входящее в критерий (VI.13), можно выразить через октаэдрические напряжения и параметр Лоде — Надаи

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{окт}} + \frac{3 - \mu_\sigma}{\sqrt{2} \sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} \tau_{\text{окт}}.$$

Здесь параметр  $\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$  характеризует угол  $\alpha$  между напряжением  $\tau_{\text{окт}}$  и проекцией одной из главных осей на октаэдрическую плоскость;  $\alpha = \arccos \frac{\mu_\sigma}{\sqrt{3}}$ .

Таким образом, в критерии (VI.13) в определенной форме отражено влияние на скорость октаэдрического сдвига как октаэдрического нормального напряжения (первого инварианта тензора), так и вида девиатора напряжений (третьего инварианта девиатора).

Константа  $\chi^*$  определяется по результатам испытаний при двух различных соотношениях главных напряжений. Если одна серия испытаний проводится при одноосном растяжении, то, приравнявая значения интенсивностей скоростей ползучести при растяжении и втором виде испытаний, из соотношения (VI.12) получаем

$$\chi^* \sigma_p + (1 - \chi^*) \sigma_p = \chi^* \sigma_i + (1 - \chi^*) \sigma_1,$$

откуда находим

$$\chi^* = \frac{\sigma_p - \sigma_1}{\sigma_i - \sigma_1}. \quad (\text{VI.14})$$

Если вторая серия опытов проводится при чистом сдвиге (тонкостенные трубчатые образцы при кручении), то, подставляя в (VI.14)  $\sigma_i = \sqrt{3} \tau_k$  и  $\sigma_1 = \tau_k$ , получаем

$$\chi^* = 1,37 (\varphi^* - 1), \quad (\text{VI.15})$$

где  $\varphi^* = \frac{\sigma_p}{\tau_k}$  — отношение напряжений, соответствующих интенсивности  $\epsilon_i$  скорости ползучести при одноосном растяжении, к напряжению, соответствующему той же интенсивности при чистом сдвиге.

Соотношение (VI.12) по аналогии с (VI.11) можно записать в явном виде:

$$\dot{\epsilon}_i = A e^{n \eta_\Sigma^*}, \quad (\text{VI.16})$$

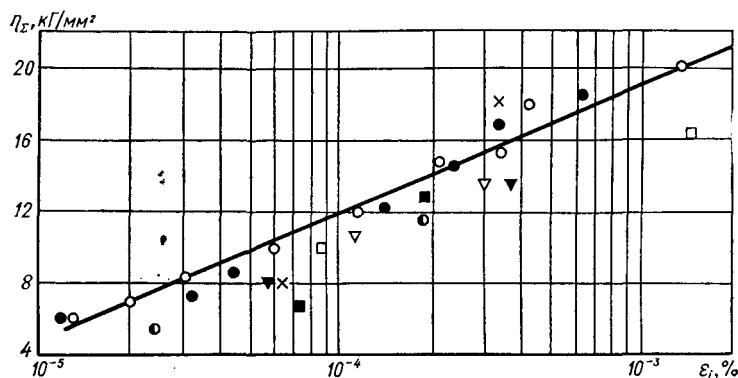


Рис. 71. Интерпретация данных рис. 69 в координатах «приведенное напряжение — интенсивность скоростей ползучести». Обозначения те же, что и на рис. 69.

На рис. 71 представлены результаты испытаний стали X18H9T, обработанные по формуле (VI.16). Параметр  $\chi^* = 1,9$  определен по формуле (VI.15), отношение  $\varphi$  найдено по кривым  $\sigma_i = f_1(\ln \dot{\epsilon}_i)$ , построенным для одноосного растяжения и чистого сдвига. Из сопоставления графиков, приведенных на рис. 69 и 71, видно, что при расчетах по обобщенному критерию экспериментальные точки более равномерно и с меньшим полем разброса расположены около прямой, соответствующей одноосному растяжению.

Анализ характера расположения экспериментальных точек на рис. 69 показывает, что в условиях эквивалентного по критерию Мизеса нагружения интенсивность скорости ползучести при одноосном растяжении ( $K = 0$ ) ниже соответствующей интенсивности при чистом сдвиге ( $K = -1$ ). Если предположить, что такая тенденция сохраняется при дальнейшем уменьшении параметра  $K$ , то при одноосном сжатии ( $K = -\infty$ ) скорость ползучести должна быть больше, чем при одноосном растяжении под напряжением  $\sigma_p = \sigma_c$ . К сожалению, надежных экспериментальных данных о ползучести в условиях одноосного сжатия крайне мало. Тем не менее ряд опубликованных результатов подтверждает отмеченную выше тенденцию [513].

Результаты испытаний сплава S816 в условиях статического растяжения и сжатия при температуре  $870^\circ\text{C}$  приведены в работе [643]. Обработка первичных кривых ползучести показала, что для получения одинаковых скоростей необходимо в случае растяжения приложить напряжение, приблизительно в два раза превышающее соответствующее напряжение при сжатии.

Заметное смещение в сторону более высоких напряжений кривой ползучести  $\sigma_p - \ln \dot{\epsilon}$  по отношению к кривой  $\sigma_c - \ln \dot{\epsilon}$  получено

в работе [544] на чистом никеле при температуре 500° С. Обнаружено также лучшее сопротивление ползучести при растяжении, чем при сжатии, образцов из магниевых сплавов [550].

Более интенсивное увеличение деформаций при сжатии особенно проявляется на первой фазе ползучести [635], где изменение диаметра образца незначительно и, следовательно, истинные напряжения при сравнительных испытаниях на растяжение и сжатие, когда условные напряжения одинаковы, приблизительно равны. При развитых пластических деформациях изменение диаметра сопровождается уменьшением истинных напряжений в случае сжатия и увеличением — в случае растяжения. Этим, возможно, объясняется наблюдаемое в ряде работ совпадение кривых ползучести при сжатии и растяжении [382] и даже более высокое расположение кривых ползучести при растяжении [264].

Приведенные экспериментальные результаты находятся в соответствии с закономерностями, которые вытекают из зависимости (VI.16). Действительно, соотношение (VI.16) применительно к одноосному растяжению и одноосному сжатию запишется соответственно в виде

$$\dot{\epsilon}_p = A e^{n\sigma_p}, \quad (\text{VI.17})$$

$$\dot{\epsilon}_c = A e^{n\chi^*\sigma_c}. \quad (\text{VI.18})$$

Из (VI.17) и (VI.18) видно, что условие  $\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon}_c$  выполняется при  $\sigma_p = \chi^*\sigma_c$ , а при  $\sigma_p = \sigma_c = \sigma$  соотношение между соответствующими интенсивностями скоростей ползучести имеет вид

$$\frac{\dot{\epsilon}_c}{\dot{\epsilon}_p} = e^{n(\chi^*-1)\sigma}.$$

Следовательно, при  $\chi^* > 1$  всегда  $\dot{\epsilon}_c > \dot{\epsilon}_p$  (если  $\sigma_p = \sigma_c$ ). В случае, когда  $\chi^* = 1$ , соотношение (VI.16) тождественно совпадает с известным соотношением (VI.11a). При этом  $\dot{\epsilon}_c = \dot{\epsilon}_p$ .

Интересно отметить, что по данным предыдущего параграфа обработка результатов испытаний стали X18H9T на длительную прочность показала хорошее соответствие критерия (VI.9) опытным данным при  $\chi_d = 0,55$ , т. е. при  $\chi_d = \frac{1}{\chi^*}$ . Такое соотношение между параметрами  $\chi_d$  и  $\chi^*$ , определяющими деформационную способность и длительную прочность материала в условиях ползучести, подчеркивает очевидную взаимосвязь между процессами, контролирующими указанные свойства, и позволяет проводить соответствующую корреляцию.

Дальнейшее развитие этих вопросов связано, очевидно, с более глубоким раскрытием смысла констант, входящих в выражения для эквивалентных напряжений. Естественнo предположить, что

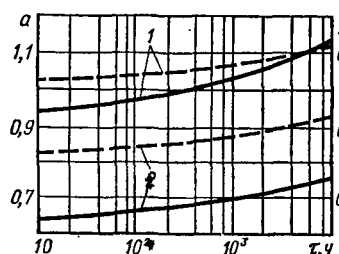


Рис. 72. Характер изменения констант  $a$  и  $\chi_d$  в зависимости от долговечности материала:  
1 — сталь Х18Н12Т,  $T = 620^\circ \text{C}$ ;  
2 — сталь ЭИ437Б,  $T = 700^\circ \text{C}$ .

эти константы включают кинетические параметры поврежденности материала и поэтому в общем случае являются функциями некоторых инвариантов

деформации, времени и температуры. Первые попытки такого анализа проведены В. Н. Киселевским и В. В. Осасюком [193], показавшими, что в общем случае значения констант зависят от уровня приложенных напряжений и должны определяться для каждой конкретной базы времени, соответствующей определенному пределу длительной прочности.

На рис. 72 по результатам работы [193] построены графики изменения константы  $\chi_d$  (сплошные линии) и константы  $a$  в функции  $\varphi$  (см. стр. 172) (штриховые линии) для двух сталей в зависимости от предельной длительности работы материала под напряжением. Легко заметить, что диапазон изменения констант сравнительно широк, поэтому их усреднение может привести к заметным ошибкам.

Степень влияния возможных ошибок по предельным напряжениям зависит от структуры уравнения, принятого за критерий. На рис. 73 показан характер изменения расчетного значения предела длительной прочности материала в условиях чистого сдвига (отнесенного к пределу длительной прочности при растяжении) при изменении констант  $\chi_d$  и  $a$  в соответствующих уравнениях.

### § 3. Режим нагружения. Критерии усталостной прочности при сложном напряженном состоянии

Вопросы количественной оценки прочности деталей машин при переменных нагрузках в условиях сложного напряженного состояния приобретают все большее значение. Однако надежных

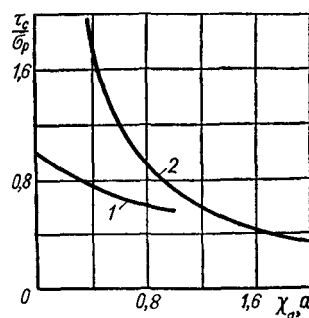


Рис. 73. Характер изменения расчетного значения предела длительной прочности при кручении в зависимости от констант  $a$  и  $\chi_d$ :

$$1 - f_1(\chi_d) = \frac{1}{1 + (\sqrt{3} - 1) \chi_d}; \quad 2 - f_2(a) = \frac{1}{0,5(\sqrt{3} + 1)a}.$$

критериев, позволяющих перейти от основной расчетной характеристики — предела усталости при одноосном напряженном состоянии — к произвольной системе напряжений, в настоящее время практически не существует. Это объясняется прежде всего тем, что в общем случае нестационарного механического нагружения, когда приложенные к телу усилия изменяются во времени по разным законам, возможно бесконечное множество различных сочетаний компонентов тензора напряжений, отличающихся один от другого не только пределами изменения абсолютной величины, но и частотой пульсаций, что приводит к смещению фаз и изменению во времени направления главных осей тензора напряжений. В результате создается ситуация, при которой задача о критериях эквивалентности в отношении усталости материала в общей постановке становится практически неразрешимой. Поэтому большинство предложенных критериев усталостной прочности установлено применительно к частным, наиболее простым случаям нагружения.

Анализ результатов экспериментального исследования усталостной прочности в условиях сложного напряженного состояния (в основном при кручении и кручении с изгибом) [86, 213, 326, 342, 410 и др.] показывает, что отношение пределов усталости при повторном сдвиге  $\tau_{-1}$  и повторном растяжении  $\sigma_{-1}$  составляет для сталей 0,5—0,7, а для чугунов 0,75—0,9, что соответствует отношениям, предполагаемым большинством теорий статической прочности. Результаты исследования усталостной прочности пластмасс при кручении [516] также свидетельствуют о снижении сопротивления материала при этом виде нагружения по сравнению с прочностью при циклическом изгибе с вращением. Отмеченная корреляция между характеристиками статической прочности и характеристиками усталости указывает на принципиальную возможность распространения критериев, подтвержденных экспериментально в условиях статического нагружения, на случай усталости.

Теория максимальных касательных напряжений была распространена на случай циклического нагружения пластичных металлов Зодербергом [631], а теория постоянства энергии формоизменения — Мариным [587].

Для оценки усталостной прочности хрупких материалов Марин [589] предложил использовать теорию наибольших нормальных напряжений, причем за приведенное нормальное напряжение принял то, которое действует на площадке, где нормальные напряжения изменяются наихудшим с точки зрения усталостной прочности образом.

Указанные теории основываются на линейной зависимости между средними напряжениями  $\sigma_m$  асимметричного цикла и предельными напряжениями. Уравнение указанной зависимости



$$\frac{\sigma_m}{\sigma_T} + \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} = 1$$

можно записать также в виде

$$\sigma_{\max} = \left(1 - \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_T}\right) \sigma_m + \sigma_{-1}$$

или, переходя к обобщенным координатам  $\sigma_{\max}^0$ ,  $\sigma_m^0$  и  $\sigma_{-1}^0$ ,

$$\sigma_{\max}^0 = \left(1 - \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_T}\right) \sigma_m^0 + \sigma_{-1}^0, \quad (\text{VI.19})$$

где  $\sigma_{\max}^0$  — наибольшее по абсолютной величине напряжение;  $\sigma_m^0$  — среднее напряжение;  $\sigma_{-1}^0$  — обобщенный предел усталости при симметричном цикле.

В соответствии с гипотезой максимальных касательных напряжений Зодерберга  $\sigma_{\max}^0 = \tau_{\max}$ ,  $\sigma_m^0 = \tau_m$  и  $\sigma_{-1}^0 = \tau_{-1} = \frac{\sigma_{-1}}{2}$ . Следовательно, условие Зодерберга запишется так:

$$\tau_{\max} = \left(1 - \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_T}\right) \tau_m + \frac{\sigma_{-1}}{2}. \quad (\text{VI.19a})$$

Если принять гипотезу Марина о постоянстве энергии формоизменения, то  $\sigma_{\max}^0 = (\tau_{\text{окт}})_{\max}$ ,  $\sigma_m^0 = (\tau_{\text{окт}})_m$  и  $\sigma_{-1}^0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{-1}$ , а условие Марина, выраженное через максимальное и среднее октаэдрические напряжения, примет вид

$$(\tau_{\text{окт}})_{\max} = \left(1 - \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_T}\right) (\tau_{\text{окт}})_m + \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{-1}. \quad (\text{VI.19б})$$

Для материалов, чувствительных к концентрации напряжений, иногда в зависимость (VI.19) вводят поправочный коэффициент [349]:

$$\sigma_{\max}^0 = \left(1 - \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \sigma_B}\right) \sigma_m^0 + \frac{\sigma_{-1}^0}{K_\sigma}, \quad (\text{VI.19в})$$

где  $K_\sigma$  — эффективный коэффициент концентрации напряжений при изгибе;  $\sigma_B$  — предел прочности при растяжении (временное сопротивление).

Если при составлении условия прочности исходят из теории максимальных касательных напряжений, то вместо  $K_\sigma$  и  $\sigma_B$  подставляют соответственно  $K_\tau$  и  $\tau_B$ .

Условие С. В. Серенсена [410], учитывающее соотношения между пределами текучести  $\frac{\tau_K}{\sigma_T}$  и пределами усталости  $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}}$ ,

для плоского напряженного состояния имеет вид

$$\left[ \frac{\sigma_{1m} + \sigma_{2m}}{\sigma_T} + \frac{\sigma_{1a} + \sigma_{2a}}{\sigma_{-1}} \right]^2 - \left( \frac{\sigma_T}{\tau_{-1}} \right)^2 \left[ \left( \frac{\sigma_{1a}}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_{1m}}{\sigma_T} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\sigma_{2a}}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_{2m}}{\sigma_T} \right) \right] = 1. \quad (\text{VI.20})$$

Используя принцип приведения напряжений к статическим, исходя из той же прямолинейной зависимости для одномерного случая, С. В. Серенсен [410] принял условие постоянства энергии формоизменения с поправочным коэффициентом  $\frac{\sigma_T}{\tau_K}$ :

$$(\sigma_1 + \sigma_2)^2 - \left( \frac{\sigma_T}{\tau_K} \right)^2 \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_T^2. \quad (\text{VI.21})$$

Легко видеть, что при  $\tau_K = 0,5 \sigma_T$  это условие переходит в условие Кулона, а при  $\tau_K = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_T$  — в условие Мизеса.

И. А. Одинг [327], приняв форму петли гистерезиса за эллипс, нашел для одноосного напряженного состояния при асимметричном цикле следующую гиперболическую зависимость:

$$\left( \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} \right)^2 + \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} \cdot \frac{\sigma_m}{\sigma_{-1}} = 1.$$

Распространив полученное соотношение на случай изгиба и кручения при условии постоянства максимального касательного напряжения, И. А. Одинг [326] получил общее уравнение, связывающее предельные напряжения при кручении  $\tau_K$  и при растяжении или изгибе  $\sigma_K$  с пределом усталости при кручении  $\tau_{-1}$ , определенным при обычном симметричном цикле:

$$\tau_{-1}^2 = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(B-A)^2 + C^2}. \quad (\text{VI. 22})$$

Здесь

$$A = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2}{8}; \quad B = \frac{\tau_1^2 - \tau_1 \tau_2}{8}; \\ C = \frac{2\sigma_1 \tau_1 - \tau_1 \sigma_2 - \sigma_1 \tau_2}{4},$$

где  $\tau_1, \tau_2$  — пределы изменения переменных касательных напряжений  $\tau$  при кручении;  $\sigma_1, \sigma_2$  — пределы изменения переменных нормальных напряжений  $\sigma$  при изгибе или растяжении — сжатии.

И. А. Одинг отмечает, что для учета структурных факторов и связанной с ними неоднородности распределения напряжений полученное уравнение необходимо корректировать соответствующими коэффициентами эквивалентности. Постоянные напряжения

должны быть скорректированы по пределам текучести, а переменные — по пределам усталости.

Теория И. А. Одинга применима только для частных случаев сложного напряженного состояния — изгиба и кручения. Это обстоятельство снижает ее ценность.

В 1956 г. Мариным [590] предложен более общий критерий, в основу которого положена эллиптическая зависимость  $\sigma_a = f(\sigma_m)$  для симметричного цикла. Расчетное уравнение критерия Марина имеет вид

$$\left\{ \sigma_1'^2 + \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_{-1}'}{\sigma_{-1}''} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_{-1}'}{\tau_K} \right)^2 \right] \sigma_r' \sigma_r'' + \left( \frac{\sigma_{-1}'}{\sigma_{-1}''} \right)^2 \sigma_r'^2 \right\} + \\ + \left( \frac{\sigma_{-1}'}{\sigma_B'} \right)^2 \left\{ \sigma_m''^2 + \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_B'}{\sigma_B''} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_B'}{\tau_K} \right)^2 \right] \sigma_m' \sigma_m'' + \left( \frac{\sigma_B'}{\sigma_B''} \right)^2 \sigma_m''^2 \right\} = \sigma_{-1}^2, \quad (\text{VI.23})$$

где  $\sigma_r'$ ,  $\sigma_r''$  — симметричные знакопеременные напряжения соответственно в направлениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ ;  $\sigma_m'$ ,  $\sigma_m''$  — постоянные напряжения соответственно в направлениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ ;  $\sigma_{-1}'$ ,  $\sigma_{-1}''$  — пределы усталости при симметричном нагружении соответственно в направлениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ ;  $\sigma_B'$ ,  $\sigma_B''$  — пределы прочности соответственно в направлениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ ;  $\tau_K$  — предел текучести при чистом кручении;  $\sigma_{-1}$  — предел усталости при знакопеременном симметричном цикле.

Как отмечает Марин [590], для напряженных состояний с главными напряжениями одного знака приведенная зависимость как для анизотропных, так и для изотропных материалов носит приближенный характер. Соответствующие коррективы могут быть сделаны при наличии достаточного количества экспериментальных данных.

С. В. Серенсен [411], исходя из инвариантной функции в виде линейной зависимости между октаэдрическими касательными и нормальными напряжениями, за критерий усталостной прочности принимает следующее уравнение предельного состояния:

$$(2 - m^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2(1 - m^2)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \\ = 6\tau_{-1}^2 - 2\sqrt{6}m\tau_{-1}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (\text{VI.24})$$

где  $m = \sqrt{6} \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \sqrt{2}$ ;  $\tau_{-1}$ ,  $\sigma_{-1}$  — пределы усталости соответственно при сдвиге и растяжении.

Как обобщение упрощенной теории Мора на случай усталостной прочности можно рассматривать гипотезу авторов работы

[634], предложивших искать эквивалентное напряжение в виде разности главных наибольших и некоторой доли главных наименьших переменных нормальных напряжений:

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sigma_1 - \lambda_0 \sigma_3. \quad (\text{VI.25})$$

Коэффициент  $\lambda_0$  связывают с анизотропией материала.

Проведя анализ влияния остаточных напряжений на усталостную прочность, И. В. Кудрявцев [213] предложил выражение, позволяющее оценивать изменение предела выносливости в зависимости от интенсивности остаточных напряжений. Это выражение можно распространить и на случай «внешних» напряжений.

Принимая для эффективного напряжения линейную зависимость между октаэдрическими напряжениями, И. В. Кудрявцев предполагает, что предельная для данного материала амплитуда изменений эффективного напряжения остается постоянной при изменении величины среднего напряжения. Следовательно, отношение предельной амплитуды эффективных напряжений при симметричном одноосном растяжении — сжатии к амплитуде эффективных напряжений при сложном напряженном состоянии, когда первое главное нормальное напряжение изменяется в тех же пределах, что и при одноосном растяжении — сжатии, будет представлять собой относительное изменение предела выносливости. Переходя от амплитуд напряжений к самим напряжениям, И. В. Кудрявцев предлагает следующее выражение для относительного изменения предела выносливости при переходе от одноосного растяжения — сжатия к исследуемому напряженному состоянию:

$$\xi_0 = \frac{3K_1}{3K_1 + \eta_0(m_1 + m_2 + m_3)}. \quad (\text{VI.26})$$

Здесь

$$K_1 = \frac{1}{3} \sqrt{(1 - K_2)^2 + (K_2 - K_3)^2 + (K_3 - 1)^2},$$

где  $K_2, K_3$  — соотношения переменных составляющих главных напряжений в направлениях  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ;  $m_1, m_2, m_3$  — отношения постоянных составляющих главных напряжений соответственно в направлениях  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$  к пределу усталости  $\sigma_{-1}$  при одноосном симметричном нагружении;  $m_1 = \frac{\sigma_m}{\sigma_{-1}}$ ,  $m_2 = \frac{\sigma_m}{\sigma_{-1}}$ ,  $m_3 = \frac{\sigma_m}{\sigma_{-1}}$ ;  $\eta_0$  — коэффициент, зависящий от свойств материала и изменяющийся от нуля (для пластичных материалов) до 0,3—0,4 (для хрупких материалов),

$$\eta_0 = \frac{\sigma_{\text{т.с}} - \sigma_{\text{т}}}{\sigma_{\text{т.с}} + \sigma_{\text{т}}} \sqrt{2};$$

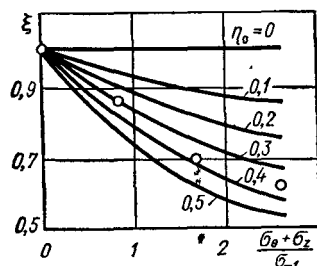


Рис. 74. Зависимость относительного изменения усталостной прочности при изгибе от интенсивности двухосного статического растяжения и коэффициента неравнопрочности [494].

$\sigma_t$ ,  $\sigma_{t.c}$  — пределы текучести соответственно при растяжении и сжатии.

Теория И. В. Кудрявцева, учитывая различное сопротивление материала статическому растяжению и сжатию, предполагает, однако, отношение пределов выносливости при кручении и изгибе постоянным и равным 0,577.

В работе [493] проведено сравнение результатов усталостных испытаний труб из стали 30ХГСА на изгиб при наличии внутреннего давления с теоретическими расчетными данными, полученными по методике И. В. Кудрявцева. При рассматриваемом нагружении формула для определения относительного

изменения усталостной прочности примет следующий вид:

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \eta_0 \left( \frac{\sigma_\theta + \sigma_z}{\sigma_{-1}} \right)}.$$

Коэффициент неравнопрочности для исследованной стали  $\eta_0 = 0,35$ . На рис. 74 представлены зависимости относительного изменения предела выносливости при изгибе от интенсивности двухосного статического растяжения. Графики построены в координатах, предложенных И. В. Кудрявцевым, но вместо остаточных напряжений подставлены значения нормальных напряжений в трубе. На рисунке приведены теоретические кривые для различных значений  $\eta_0$  и результаты опытов.

Экспериментальные точки для стали 30ХГСА ( $\eta_0 = 0,35$ ) легли между теоретическими кривыми, построенными для  $\eta_0 = 0,3$  и  $\eta_0 = 0,4$ , что указывает на возможность использования зависимости И. В. Кудрявцева в расчетах усталостной прочности при указанных видах нагружения.

Л. П. Боровской [37] проведено исследование стали 20 ( $\sigma_b = 78,6 \div 86,6 \text{ кг/мм}^2$ ) и чугуна ( $\sigma_c = 38,2 \div 41,4 \text{ кг/мм}^2$ ) при пульсирующих напряжениях на пульсаторах с использованием специальных механических преобразователей осевой силы в крутящий момент и в одновременно действующие осевую силу и крутящий момент. Во втором случае были использованы трубчатые образцы с наружным диаметром 80 мм и толщиной стенки 7,5 мм.

Образцы из стали 20 испытаны на циклическое растяжение — сжатие с симметричным циклом изменения напряжений, а также на циклическое растяжение, циклическое кручение и сложное напряженное состояние от наложения циклического растяжения

на циклическое кручение при асимметричном цикле изменения напряжений с коэффициентом асимметрии 0,3.

Образцы из чугуна испытывались на осевое циклическое сжатие и два вида циклического сжатия с соотношением между главными напряжениями 1 : 0,15 и 1 : 0,20. Напряжения изменялись по асимметричному циклу с коэффициентом асимметрии 0,5. В качестве образцов были использованы шлифованные кубики, изготовленные с допуском по третьему классу точности. Частота нагружения при испытаниях стали 20 составляла 350—600 циклов в минуту, при испытаниях чугуна — 2000 циклов в минуту.

Обобщением результатов испытания явились предложенные гипотезы усталостной прочности в виде

$$\sigma_{1\max}^{\text{пр}} + A\sigma_{i2a} \lg N (1 + BK) = C$$

для «жестких» и

$$\sigma_{1\max}^{\text{пр}} + A\sigma_{i2a} \lg N = B$$

для «мягких» видов напряженного состояния. В этих выражениях  $\sigma_{1\max}^{\text{пр}}$  — предельная величина максимального за цикл главного растягивающего напряжения;  $\sigma_{i2a}$  — интенсивность амплитудных напряжений;  $K$  — отношение среднего нормального напряжения к интенсивности напряжений в данный момент времени,

$$K = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3\sigma_i},$$

$\sigma_{1\max}^{\text{пр}}$  — предельная интенсивность максимальных напряжений;  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — константы материала.

Под «жесткими» напряженными состояниями в отличие от «мягких» автор понимает напряженные состояния, для которых характерно наличие растягивающих главных напряжений.

Задачу об установлении критериев усталостной прочности с других позиций решал Д. И. Гольцев [86], исходивший из того, что инвариантом напряженного состояния является энергия рассеивания, связанная с касательными силами внутреннего неупругого сопротивления, действующими по площадке октаэдра. Обобщая принятые зависимости касательных сил внутреннего неупругого сопротивления от амплитуды напряжения [351, 419 и др.] на общий случай напряженного состояния, Д. И. Гольцев ищет связь между этими силами и октаэдрическими напряжениями в виде

$$T = k_1 (\tau_{\text{окт}} + k\sigma_{\text{окт}})^n,$$

где  $n$ ,  $k_1$ ,  $k$  — константы, связанные со свойствами материала.

Если в качестве простейших опытов для определения констант материала принять опыты на изгиб и кручение при знакопеременном цикле, то, переходя от октаэдрических напряжений к главным компонентам тензора напряжений, получаем расчетное урав-

нение гипотезы Д. И. Гольцева для объемного напряженного состояния

$$\begin{aligned} & [V(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + k(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]^n \times \\ & \times V(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = (V\sqrt{6}\tau_{-1})^{n+1}. \quad (\text{VI.27}) \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — амплитудные значения главных напряжений.

Для плоского напряженного состояния с главными напряжениями противоположных знаков уравнение предельного состояния имеет вид

$$\begin{aligned} & [V\sqrt{2}V\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2 + k(\sigma_1 - \sigma_2)]^n \times V\sqrt{2}V\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2 = \\ & = (V\sqrt{6}\tau_{-1})^{n+1}. \end{aligned}$$

Для плоского напряженного состояния с главными напряжениями одинаковых знаков

$$\begin{aligned} & [V\sqrt{2}V\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 + k(\sigma_1 + \sigma_2)]^n \times \\ & \times V\sqrt{2}V\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = (V\sqrt{6}\tau_{-1})^{n+1}. \end{aligned}$$

Ссылаясь на работы [351, 419 и др.] по исследованию амплитудной зависимости площади петли гистерезиса, Д. И. Гольцев предполагает, что  $n$  лежит в пределах от 1 до 2:

$$k = V\sqrt{2}(\alpha^{\frac{n+1}{n}} - 1),$$

где  $\alpha = \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}}$ ;  $\tau_{-1}, \sigma_{-1}$  — пределы выносливости соответственно при симметричном циклическом кручении и изгибе.

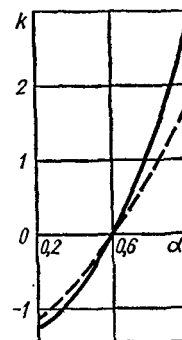
На рис. 75 показана зависимость параметра  $k$  от  $\alpha$  при  $n = 1$  (сплошная линия) и  $n = 2$  (штриховая линия). Свобода в выборе существенно влияющей на конечные результаты константы  $n$  значительно затрудняет применение рассмотренной гипотезы.

Критерии усталостной прочности, основанные на учете рассеяния энергии, рассматривались В. Т. Трощенко [443]. Учитывая тот факт, что с увеличением энергии, рассеиваемой в материале за цикл, увеличиваются ее потери в результате рассеяния тепла в окружающую среду, В. Т. Трощенко использует следующую исходную формулу, которую также можно распространить на случай сложного напряженного состояния:

$$\sum_1^N \left[ D - D_0 \left( \frac{D}{D_0} \right)^\alpha \right] = C. \quad (\text{VI.28})$$

Здесь  $D$  — энергия, рассеянная в единице объема материала за цикл и равная площади петли гистерезиса в координатах  $\sigma, \epsilon$ ;

Рис. 75. Изменение параметра  $k$  в зависимости от отношения пределов выносливости при кручении и изгибе [86].



$D_0$  — энергия, рассеиваемая в материале за цикл при напряжениях, равных пределу усталости;  $N$  — число циклов до разрушения;  $C$  — константа материала;  $\alpha$  — коэффициент, который, по данным работы [444], может быть принят равным 0,5.

Использование энергетических предпосылок при установлении критериев усталостной прочности требует большой осторожности. Описанные в работе [395] результаты испытания трубчатых образцов, подверженных одновременному воздействию пульсирующей осевой силы и синхронно изменяющегося внутреннего давления, показывают, что энергетический подход при сопоставлении отдельных опытов не всегда оправдан. Так, например, было обнаружено, что предел выносливости при пульсирующем сжатии примерно в два раза больше, чем при пульсирующем растяжении. Показательным является и тот факт, что отношение предела выносливости при чистом сдвиге к пределу выносливости при линейном растяжении составляло 0,81—0,88.

В работе [462] описан интересный эксперимент, в котором исследуемая зона специального образца нагружалась переменными напряжениями при постоянной в этой зоне энергии деформаций. Поскольку энергия — скалярная величина, инвариантная к направлению главных осей, то в области с постоянной энергией деформаций усталостные трещины не должны были развиваться. Однако опыт не подтвердил этого предположения. Возникновение усталостных трещин в зоне, где энергия деформаций поддерживалась постоянной, свидетельствует о том, что энергетические зависимости не полностью отражают механизм усталости: по мнению авторов работы [462], усталостное разрушение происходит в связи с переменностью некоторой составляющей напряжения или деформации на отдельных площадках, например касательного напряжения.

В связи с этим для оценки усталостной прочности материала представляют интерес обобщенные критерии (IV.17), позволяющие учесть изменение вида девиатора напряжений в процессе циклического нагружения.

Предполагая инвариантность критерия

$$\eta^{**} = \chi^{**} \sigma_i + (1 - \chi^{**}) \sigma_1 \quad (\text{VI.29})$$

к виду напряженного состояния в условиях усталости и принимая за исходные характеристики материала  $\sigma_{-1}$  и  $\tau_{-1}$ ,



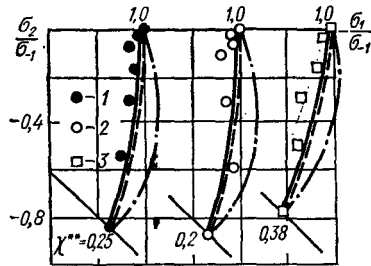


Рис. 76. Результаты усталостных испытаний чугунов:

1 — Si—Al-чугун; 2 — Мо-чугун; 3 — Cu—Cr-чугун.

получаем

$$\sigma_{-1} = \sqrt{3} \tau_{-1} \chi^{**} + \tau_{-1} (1 - \chi^{**}),$$

откуда, вводя обозначение  $\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} = \varphi^{**}$ , находим

$$\chi^{**} = 1,37 (\varphi^{**} - 1). \quad (\text{VI.30})$$

Рассмотрим сначала наиболее простую схему нагружения, когда напряжения изменяются по симметричному циклу и совпадают по фазе. В этом случае условие прочности, вытекающее из критерия (VI.29), имеет вид

$$\chi^{**} \sigma_i + (1 - \chi^{**}) \sigma_1 = \sigma_{-1}. \quad (\text{VI.31})$$

Здесь  $\sigma_1$  и  $\sigma_i$  — амплитудные значения максимального нормального напряжения и интенсивности напряжений.

Для оценки достоверности этого условия воспользуемся результатами Гафа и Полэрда [86], полученными при испытаниях трех марок чугуна при совместном действии переменного кручения и изгиба. Экспериментальные точки в координатах  $\sigma_1 - \sigma_2$  и теоретические предельные кривые, интерпретирующие условие (VI.29) (сплошные линии), приведены на рис. 76, где указаны также соответствующие значения параметра  $\chi^{**}$ , найденные по формуле (VI.30). Для сравнения на рисунке представлены предельные кривые, полученные на основании условий И. А. Одингга (VI.22) (штрих-пунктирные линии), С. В. Серенсена (VI.24) (штриховые линии) и Д. Н. Гольцева (VI.27) (сплошные линии) при  $n = 1,5$ . Как видно из рисунка, в лучшем соответствии с экспериментальными данными находятся условия (VI.31) и (VI.27), которые практически совпали. Однако применение уравнения (VI.27) в практических расчетах значительно затруднено в связи со сложностью его структуры и свободой в выборе существенно влияющей на конечные результаты константы  $n$ .

Определение эквивалентных напряжений при асимметричном цикле связано с необходимостью достоверной аналитической аппроксимации соотношений между средними  $\sigma_m$  и амплитудными  $\sigma_a$  значениями напряжений. В качестве возможных вариантов зависимости

$$\sigma_a = f(\sigma_m) \quad (\text{VI.32})$$

были рассмотрены прямая, эллипс, гипербола. Предложены также более сложные кривые [397].

Параметры кривой предельных напряжений зависят от свойств исследуемого материала и принятой базы испытаний (долговечности).

Поэтому предельную кривую (VI.32) удобно строить в относительных координатах  $\frac{\sigma_a}{\sigma_d} - \frac{\sigma_m}{\sigma_d}$ .

Здесь  $\sigma_d$  — предел длительной прочности, соответствующий пределу усталости материала при заданной долговечности.

На рис. 77 представлена предельная поверхность в координатах  $\sigma_a - \sigma_m - N_d$ . При однократном нагружении область безопасных напряжений ограничена линией статического разрушения в плоскости  $\sigma_a - \sigma_m$ ; в этом случае величина  $\sigma_d$  совпадает с временным сопротивлением. С увеличением базы испытаний ограниченный предел выносливости при симметричном цикле изменяется в соответствии с кривой усталости (плоскость  $\sigma_m = 0$ ), а величина  $\sigma_d$  — в соответствии с кривой длительной прочности (плоскость  $\sigma_a = 0$ ).

Из анализа результатов испытаний на динамическую и статическую усталость следует, что темп падения предела выносливости с увеличением базы испытаний (долговечности) существенно превышает темп падения предела длительной прочности. В результате линия статического разрушения преобразуется в предельную кривую (VI.32), значения параметров  $\sigma_{-1}$  и  $\sigma_d$  которой для заданной базы всегда определены неравенством  $\sigma_{-1} < \sigma_d$  [270].

Оценивая выносливость большинства конструкционных материалов при нормальной температуре, влиянием временных факторов на их статическую прочность можно пренебречь и принять  $\sigma_d \approx \sigma_b$ , а диаграмму предельных напряжений искать в виде

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_b}\right). \quad (\text{VI.33})$$

Обобщение большого экспериментального материала, приведенного в работе [470], показало, что если поверхность металла свободна от царапин и остаточных напряжений, то усталостная прочность при асимметричном цикле с достаточной точностью может быть описана уравнением

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_b}\right) [A_0 + \gamma(1 - A_0)], \quad (\text{VI.34})$$

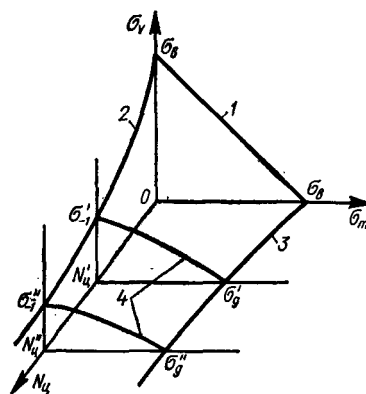


Рис. 77. Поверхность предельных напряжений:

1 — линия статического разрушения; 2 — кривая усталости; 3 — кривая длительной прочности; 4 — кривые предельных напряжений.

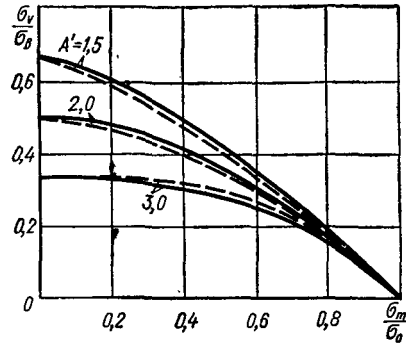


Рис. 78. Диаграммы предельных напряжений в соответствии с условиями (VI.34) (штриховые линии) и (VI.35) (сплошные линии).

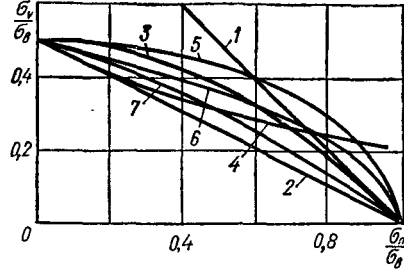


Рис. 79. Диаграммы предельных напряжений для  $A' = 2$  по различным критериям:

1 — линия статического разрушения; 2 — по Зодербергу; 3 — по уравнению (VI.35); 4 — по Одинггу; 5 — по Марину; 6 — по Биргеру; 7 — по Каплинскому.

где  $A_0 = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_b}$  — «усталостный коэффициент»;  $\gamma$  — некоторая функция среднего напряжения и предела прочности. Для стальных гладких образцов

$$\gamma = \frac{\sigma_m}{3\sigma_b} \left( 2 + \frac{\sigma_m}{\sigma_b} \right).$$

Уравнение (VI.34) находится в хорошем соответствии с опытными данными [470], однако обобщение его на случай многоосного нагружения затруднено ввиду сложности структуры. Поэтому для определения предельных напряжений в случае асимметричного цикла рассмотрим следующее, более простое, уравнение:

$$A' \frac{\sigma_a}{\sigma_b} + \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_b} \right)^{\alpha A'} = 1, \quad (\text{VI.35})$$

где  $A' = \frac{1}{A_0} = \frac{\sigma_b}{\sigma_{-1}}$ ;  $\alpha$  — некоторый коэффициент, зависящий от состояния поверхности и чувствительности металла к концентрации напряжений. При отсутствии концентраторов и достаточно качественной поверхности образца можно принять  $\alpha = 1$ .

Результаты расчета по этому уравнению (при  $\alpha = 1$ ) представлены на рис. 78 в форме диаграммы предельных напряжений для трех значений параметра  $A'$ .

На рис. 79 для сопоставления приведены другие, предложенные ранее [355] аппроксимации диаграмм предельных напряжений (для случая, когда  $A' = 2$ ). Из рисунка видно, что при больших значениях среднего напряжения кривые 4, 5 и 6 не удовлетворяют граничным условиям: выход кривых за пределы области,

ограниченной прямой

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_B} + \frac{\sigma_m}{\sigma_B} = 1,$$

соответствует маловероятному состоянию материала, при котором предел усталости превышает временное сопротивление.

Обобщая уравнение (VI.35) на случай сложного напряженного состояния, можно записать

$$A' \frac{\eta_a}{\sigma_B} + \left( \frac{\eta_m}{\sigma_B} \right)^{\alpha A'} = 1, \quad (\text{VI.36})$$

где  $\eta_a$  — эквивалентная амплитуда напряжений;  $\eta_m$  — эквивалентное среднее напряжение.

Если в основу определения напряжений положить структуру критерия (VI.31), то получим

$$\eta_a = \chi_a \sigma_{ia} + (1 - \chi_a) \sigma_{1a}; \quad (\text{VI.37})$$

$$\eta_m = \chi_m \sigma_{im} + (1 - \chi_m) \sigma_{1m},$$

где, по аналогии с (VI.30),

$$\chi_a = 1,37 \left( \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} - 1 \right); \quad (\text{VI.38})$$

$$\chi_m = 1,37 \left( \frac{\sigma_p}{\tau_p} - 1 \right).$$

Как уже отмечалось,  $\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} \approx \frac{\sigma_p}{\tau_p}$ . Поэтому с целью сокращения объема дополнительных испытаний можно принять  $\chi_a = \chi_m$  и в зависимости от наличия тех или иных механических характеристик ( $\tau_{-1}$  или  $\tau_p$ ) использовать любое из приведенных выражений (VI.38).

Надежных экспериментальных данных о влиянии асимметрии цикла на усталостную прочность при сложном напряженном состоянии мало. Поэтому ограничимся анализом результатов испытаний стали X18H9T при асимметричном нагружении в условиях одноосного и двухосного растяжения [198]. Сопоставление этих результатов с данными расчетов по уравнению (VI.36) приведено на рис. 80, из которого видно, что экспериментальные точки имеют незначительные отклонения от теоретической кривой. При построении кривой принято  $\alpha = 1$ . Параметр  $\chi_a = 0,67$  определен

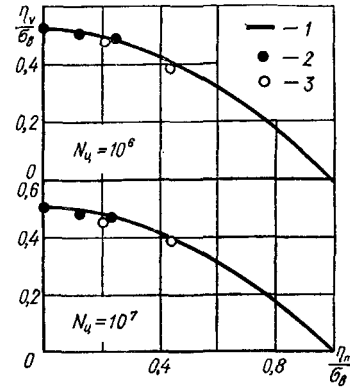


Рис. 80. Диаграммы предельных напряжений в обобщенных координатах для стали X18H9T:

1 — по уравнению (VI.36); 2 — при одноосном растяжении (изгиб с вращением); 3 — при сложном напряженном состоянии (изгиб с вращением + внутреннее давление).

по данным испытаний трубчатых образцов при симметричном изгибе и кручении.

Приемлемость обобщенных критериев для описания предельного состояния материала в условиях повторно-статического нагружения подтверждена результатами испытаний хромоникелевой стали при плоском напряженном состоянии. Проведенные исследования показали [62], что параметр  $\chi$ , а следовательно, и форма предельных кривых для малоциклового прочностного состояния зависят от базы испытаний  $N_d$ . Максимальное расхождение между экспериментальными и расчетными данными по напряжениям не превышает 6%.

Для объяснения таких явлений, сопутствующих усталости материала при нестационарных механических нагружениях, как существование нераспространяющихся трещин, зависимость чувствительности к надрезу от величины среднего напряжения и других, целесообразно использовать системы критериев. По мнению Фукса [468], наиболее рациональной является совокупность трех критериев: критерия возникновения трещин, критерия распространения трещин и критерия текучести. Применительно к максимальной долговечности в условиях усталости эта система в простейшей форме может быть представлена тремя неравенствами:

$$\left. \begin{aligned} K\tau_{\text{окта}} &< 0,5(S_y - 0,5\sigma_{\text{октн}}); \\ \sigma_a &< S_{p.n}; \\ \tau_{\text{max}} &< 0,5\sigma_T, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.39})$$

где  $K$  — коэффициент чувствительности к надрезу;  $\tau_{\text{окта}}$  — переменное октаэдрическое касательное напряжение;  $S_y$  — усталостная прочность при полностью обратимом нагружении;  $\sigma_{\text{октн}}$  — среднее октаэдрическое нормальное напряжение;  $\sigma_a$  — переменное растягивающее напряжение;  $\tau_{\text{max}}$  — максимальное касательное напряжение;  $\sigma_T$  — предел текучести при растяжении;  $S_{p.n}$  — номинальное растягивающее переменное напряжение, необходимое для распространения трещин.

По данным работы [468] критическим значением  $S_{p.n}$  можно считать: для твердой стали — 7 кг/мм<sup>2</sup>, для мягкой стали — 2,8 кг/мм<sup>2</sup>, для высокопрочных алюминиевых сплавов — 2,1 кг/мм<sup>2</sup>. В работе [468] рассмотрены примеры применения системы трех критериев для различных случаев нагружения (знакопеременный изгиб детали с концентратором, подвергнутой предварительному поверхностному упрочнению, различные случаи двухосного напряженного состояния).

Известны статистические подходы при исследовании усталости [64, 359], которые наиболее полно отражены в статистической теории усталостной прочности металлов Н. Н. Афанасьева [8].

Характерная особенность работы [8] — удачное сочетание достаточно глубокого анализа микрокартины возникновения трещины усталости с применением статистических методов для количественной оценки усталостной прочности, в том числе с учетом формы и размеров детали, концентрации напряжений и т. д. Н. Н. Афанасьев указал пути обобщения сложного напряженного состояния. Предполагая, что в пластичных металлах за разрушение ответственны касательные напряжения, автор указывает, что теория максимальных касательных напряжений, пригодная для идеальных изотропных металлов, может быть распространена на реальные поликристаллические металлы путем учета вероятности возникновения скольжения в том или ином кристаллите, т. е. путем учета вероятности наиболее благоприятной ориентации кристаллитов в отношении максимальных касательных напряжений.

Поскольку трещина должна зарождаться именно в этих кристаллитах, то при действии переменных напряжений равнопрочными следует считать образцы, имеющие относительно одинаковое количество кристаллитов, в плоскости скольжения которых действуют касательные напряжения, превышающие критические.

Таким образом, вопрос о сравнении усталостной прочности при заданном виде напряженного состояния с усталостной прочностью при простейших нагружениях (например, при одноосном растяжении — сжатии) сводится к вопросу о сравнении количества кристаллитов, имеющих в соответствующем направлении касательные напряжения, превышающие критические.

Теория максимальных касательных напряжений не учитывает влияния гидростатической составляющей тензора напряжений, и поэтому любой случай напряженного состояния при использовании этой теории можно привести к промежуточному между одноосным растяжением (или сжатием) и кручением. Н. Н. Афанасьев для упрощения задачи рассматривает случай плоского напряженного состояния и находит для любого напряженного состояния вероятность  $W$  такой ориентации кристалла, при которой он будет нагружен критическим напряжением.

Результаты расчетов Н. Н. Афанасьева представлены на рис. 81 в виде графиков зависимости вероятности  $W$  от параметра  $A =$

$$= \frac{\tau}{\tau_{\max}} \text{ и характеристики напряженного состояния } a = \frac{\sigma_z}{\sigma_x}.$$

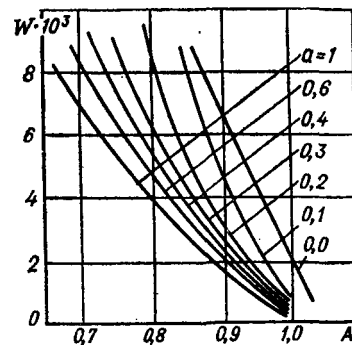


Рис. 81. Зависимость вероятности наиболее благоприятной ориентации кристалла от характеристик напряженного состояния [8].

Проведя на рис. 81 линию равных вероятностей (горизонтальную линию), можно получить значения отношения  $A$  для эквивалентных напряженных состояний, характеризуемых величиной  $a$ . Если максимальные касательные напряжения для произвольного напряженного состояния обозначить через  $\tau_a$ , а для чистого растяжения ( $a^* = 0$ ) — через  $\tau_0 = \frac{\sigma_{-1}}{2}$ , то, разделив коэффициент  $A_a$  для любого напряженного состояния на ту же величину для чистого растяжения  $A_0$ , получим

$$\frac{A_a}{A_0} = \frac{\sigma_{-1}}{2\tau_a}.$$

Следовательно, отношение предела усталости  $\sigma_{-1}$  (при растяжении — сжатии) к пределу усталости  $\tau_a$  (при любом сложном напряженном состоянии) легко можно получить из графиков, приведенных на рис. 81.

Предложенная Н. Н. Афанасьевым теория не лишена, естественно, недостатков, снижающих ее практическую ценность. Прежде всего, Н. Н. Афанасьев не дает никаких рекомендаций относительно выбора оптимальной величины вероятности, определяющей наступление усталостного разрушения, а лишь указывает, что величина  $W$  «...связана с характером структуры материала, так как неоднородность последнего приводит к различным напряжениям в одинаково ориентированных кристаллитах» [8]. В то же время из характера расположения кривых на рис. 81 видно, что в зависимости от величины принятой вероятности могут быть получены существенно различные величины отношения пределов текучести.

Применение статистической теории усталостной прочности, по свидетельству ее автора, принципиально возможно лишь в том случае, если «...протяженность трещин через  $n$  зерен, обеспечивающая ее дальнейшее распространение, оказывается величиной меньшего порядка, нежели зона существенного уменьшения напряжения, действующего на металл (определяемая, например, величиной и радиусом выточки или другого надреза в металле)». Так, при расчете усталостной прочности чугунов, в которых размеры графитовых включений составляют около 0,1—0,5 мм, теория применима, когда величина радиуса закругления в выточке чугунного образца измеряется десятками миллиметров. Использование теории применительно к стальным образцам, имеющим более однородную структуру, позволяет получить сопоставимые с опытом результаты при величине радиуса не менее 1 мм.

В последние годы значительно возрос интерес к усталостной прочности материалов при малом числе циклов нагружений. Однако серьезные исследования критериев малоциклового усталости при сложном напряженном состоянии практически не про-

водились. Высказывались лишь предположения [305, 499] о принципиальной возможности распространения критериев статической прочности на случай малоциклового усталости.

Известные экспериментальные исследования [1, 290, 379] проводились на цилиндрических и сферических оболочках, нагружаемых внутренним давлением. По данным работ [1, 290], в качестве меры эквивалентной деформации при заданной долговечности в условиях двухосного растяжения может быть принята интенсивность деформаций. В то же время этот критерий не нашел подтверждения при испытании цельнотянутых труб при переменном внутреннем давлении [379].

Результаты испытаний стали X18H10T в условиях пульсирующего цикла при шести соотношениях главных напряжений приведены в работе [62]. Здесь же рассмотрены некоторые критерии применительно к условиям повторного нагружения. Анализ экспериментальных данных показал, что форма и положение предельных кривых для малоциклового усталости существенно зависят от базы испытаний и могут быть с достаточной точностью (отклонения не превышают 6 %) описаны обобщенными критериями вида (VI.37).

Обоснованию критериев прочности при термоусталостном разрушении посвящены работы [215, 408, 416, 580]. Переходя к обзору этих работ, необходимо отметить, что исследование закономерностей термической усталости усложнено тем, что вследствие изменения температуры происходит непрерывное циклическое изменение механического состояния материала, неравномерность нагрева и охлаждения способствует локализации деформаций, на поле макронапряжений накладываются температурные напряжения [416].

Первая попытка создания критерия термической усталости материала при сложном напряженном состоянии была, по-видимому, сделана В. Н. Кузнецовым [215]. Исходя из того, что термоусталостное разрушение обуславливается не просто величиной суммарной работы [531], а существенно зависит от величины амплитуды деформации (работа деформации обратно пропорциональна амплитуде деформации), В. Н. Кузнецов распространяет это соотношение на случай сложного напряженного состояния и получает обобщенный критерий в виде

$$Nl_{\text{пл}} = \frac{a}{l_{\text{пл}}}, \quad (\text{VI.40})$$

где  $N$  — число циклов до разрушения;  $l_{\text{пл}}$  — максимальная линейная пластическая деформация;  $l_{\text{пл}}$  — интенсивность пластической деформации;  $a$  — константа, по данным работы [215], для трубок из стали X18H9T при радиальном тепловом потоке  $a = 0,13$ .



Таким образом, в соответствии с данными работы [215], термоусталостная прочность зависит как от суммарной деформации, характеризующей произведением числа циклов на интенсивность пластических деформаций, так и от амплитуды максимальной линейной пластической деформации.

Н. Д. Соболев [416, 417], анализируя зависимости долговечности  $N$  от амплитуд нормальных напряжений за цикл при растяжении — сжатии и от амплитуд касательных напряжений за цикл при кручении, установил, что для равноопасных напряженных состояний, характеризующихся равенством долговечностей, в исследуемом диапазоне напряжений справедливо соотношение  $\frac{\Delta\tau}{\Delta\sigma} = \text{const}$ . Опыт показал, что в одном и том же интервале температур 250—550°С это отношение равно 0,572 для стали ЭИ825, 0,574 — для стали ЭИ888 и 0,585 — для стали ЭП38. На основании этих данных Н. Д. Соболев пришел к выводу, что для оценки опасности разрушения от термической усталости можно принять энергетическую теорию прочности, в соответствии с которой  $\Delta\tau = 0,577 \Delta\sigma$ .

В работе [416] показано также, что, во всяком случае для исследованных сталей, существует единая кривая деформирования в координатах интенсивность напряжений — интенсивность деформации с максимальным разбросом по напряжениям  $\pm 5$ —6%. Это позволяет сопоставить зависимости долговечности от энергии пластической деформации за цикл для разных напряженных состояний.

По данным работы [580], при оценке сопротивления материала термической усталости выбор может быть сделан между теорией энергии формоизменения и теорией максимальных касательных напряжений.

#### § 4. Градиент напряжений и масштабный фактор

Использование теорий прочности при расчете реальных конструкций усложняется еще и тем, что большинство деталей машин работает в условиях неравномерного распределения напряжений по объему. При рассмотрении теорий статической (кратковременной и длительной) и усталостной прочности мы не касались таких вопросов, как роль градиента напряжений и масштабного эффекта. Опыт показывает, что при неоднородном напряженном состоянии (например, в зоне резких изменений сечений) деформирование иногда протекает без образования остаточных деформаций до напряжений, значительно превышающих предел текучести при однородном напряженном состоянии, т. е. градиент напряжений как бы способствует повышению сопротивления материала.

Если распределение напряжений по сечению известно, то, следуя Кунце, в качестве параметра упрочнения можно принять отношение максимальных напряжений, при которых начинается текучесть в условиях неоднородного напряженного состояния, к пределу текучести при растяжении, когда напряженное состояние однородно:

$$\beta = \frac{\sigma_{T \max}}{\sigma_T}.$$

Эффект упрочнения в условиях сложного напряженного состояния графически представлен на рис. 82 [412], из которого видно, что при двухосном напряженном состоянии (кручение) несущая способность материала в результате поддерживающего влияния менее напряженных объемов повышается более чем на 25%.

Показательным в отношении влияния неоднородности распределения напряжений по сечению является известный из экспериментов факт, наблюдаемый при испытаниях материалов на усталость: в большинстве случаев предел выносливости при изгибе на 10—15% выше предела выносливости при растяжении — сжатии, когда напряжения по сечению образца распределяются равномерно. Каковы бы ни были причины этого явления, расчетные формулы, основанные на тех или иных теориях прочности, должны учитывать указанное квазиупрочнение материала. У хрупких при обычных напряженных состояниях материалов эффект упрочнения почти не проявляется.

Существенное влияние градиента напряжений на предельное напряженное состояние материалов в пластичном состоянии в первом приближении может быть учтено путем введения в соответствующие расчетные уравнения корректирующих коэффициентов, найденных для данного материала экспериментально [13, 412, 642].

Недостаточно изучен вопрос о роли масштабного фактора. Влияние размеров тела на его прочность более заметно у грубодисперсных структур, особенно при наличии крупных структурно-свободных выделений; для таких структур максимальное удлинение, а также сужение возрастают в два-три раза при уменьшении диаметра от 10 до 0,8 мм с сохранением геометрического подобия образцов [347]. Заметно изменяется и прочность. На рис. 83 приведены гистограммы [295], иллюстрирующие характер изменения прочности трех групп материалов в зависимости от размеров испытываемого тела. Как видно из рисунка, прочность

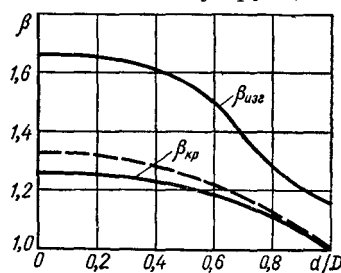


Рис. 82. Влияние неоднородности напряженного состояния на предел текучести при изгибе и кручении.

грубодисперсных материалов может изменяться в десятки раз. Заметно проявляется масштабный эффект и у металлов.

Одни авторы [203, 308, 485] считают, что масштабный эффект имеет статистическую природу, другие [107, 306, 489] объясняют его природу тем, что с увеличением размеров образца увеличивается общий запас энергии в системе образец — испытательная машина, а это ведет к возрастанию скорости распространения хрупкой трещины. Имеются и другие концепции [93, 224, 326]. Однако пока еще не разработана теория, объясняющая особенности всех проявлений масштабного эффекта.

С. Д. Волков [57], используя модель микроскопически неоднородной среды, вывел критерий разрушения с учетом масштабного эффекта для объемного напряженного состояния. Отсутствие необходимого экспериментального материала не позволяет пока оценить точность полученных С. Д. Волковым результатов.

И. А. Одинг и З. Г. Фридман [331] исследовали масштабный эффект при сложном напряженном состоянии на мягкой углеродистой стали в условиях ползучести. Они показали, что масштабный фактор независимо от вида напряженного состояния в значительной мере влияет на пластичность и срок службы изделий, причем это влияние при различных уровнях напряжения имеет одинаковый характер. Масштабный эффект особенно существенно проявляется при малых толщинах (диаметрах) изделий — менее 0,75 мм. Авторы связывают это с различными структурно-силовыми условиями протекания пластической деформации в поверхностных и внутрилежащих слоях. Следовательно, можно считать, что степень влияния масштабного фактора зависит как от физических

свойств материала, так и от величины отношения площади поверхности образца к его объему.

Ш. Н. Кац [192], ссылаясь на опыты Б. Е. Корсакова, отмечает, что диаметр образца оказывает заметное влияние на длительную прочность. При равных напряжениях раньше разрушаются те образцы из никелевых сплавов и некоторых аустенитных сталей, которые имеют меньший диаметр. Причем разница во времени особенно заметна при более длительных испытаниях, протекающих при относительно малых напряжениях.

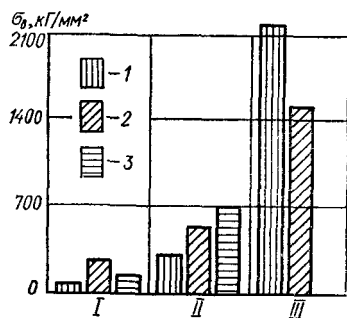
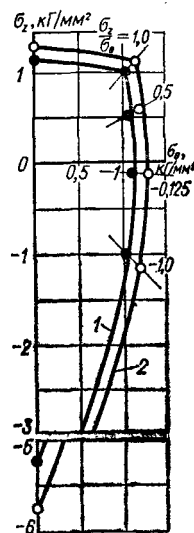


Рис. 83. Масштабный эффект у различных групп материалов: I — керамика ( $Al_2O_3$ ,  $Si_3N_4$ ,  $BeO$ ,  $C$ ), II — стекло, III — металлы; 1 — большие сечения, 2 — тонкая проволочка, 3 — усы.

Рис. 84. Результаты испытаний графита типа ВПН на образцах больших (1) и малых (2) размеров.



Поскольку в литературе очень мало данных о влиянии размеров и формы образцов на сопротивление в условиях сложного напряженного состояния, ограничимся здесь рассмотрением различных проявлений эффекта масштаба в основном при статических испытаниях твердых тел. Экспериментально установлено, что увеличение диаметра при постоянной длине приводит к повышению механических свойств [347, 364, 393, 487, 502, 507, 567] как хрупких, так и пластичных материалов. Интересно, что даже при статическом одноосном растяжении и сжатии, когда напряженное состояние материала достаточно однородно, круглые образцы показывают менее высокую прочность, чем образцы квадратного и прямоугольного поперечного сечения [59, 399, 404, 522]. Образцы с кольцевым сечением хуже сопротивляются растяжению и сжатию, чем сплошные, причем сопротивление трубчатых образцов уменьшается с увеличением среднего диаметра при одной и той же площади поперечного сечения [331].

Исследование влияния размеров трубчатых образцов на предельное состояние графитов типа ВПН и МГ выполнено авторами совместно с А. М. Фридманом. Испытания проводили на образцах разных размеров с геометрически подобными рабочими участками. Отношение толщины стенки к среднему диаметру для всех партий составляло примерно 0,07. Образцы испытывали в условиях одноосного растяжения, одноосного сжатия и при следующих соотношениях между главными напряжениями: +1,0, +0,5, -0,125, -1,0. В каждой серии испытывалось от 12 до 15 образцов.

На рис. 84 в координатах  $\sigma_z - \sigma_\theta$  приведены средние значения предельных напряжений, полученные на образцах из графита типа ВПН, размеры которых отличались почти в четыре раза. Из рисунка видно, что с увеличением объема напряженного материала прочность графита уменьшается как при одноосном, так и при двухосном напряженных состояниях. Степень снижения прочности незначительно зависит от соотношения главных напряжений, хотя можно отметить, что наиболее существенно масштабный эффект проявляется в области одноосного растяжения и чистого сдвига. Качественно те же результаты получены при испытаниях более плотного графита типа МГ.

В большинстве работ, посвященных изучению масштабного фактора при статических испытаниях, выполняется лишь условие

геометрического подобия образцов и теми или иными способами исключается влияние технологии их изготовления. Однако легко показать, что при испытании геометрически подобных образцов не выполняется идентичность по режиму нагружения. Если испытания проводятся с постоянной скоростью деформации, то скорость возрастания напряжений, а следовательно, и скорость увеличения относительной деформации обратно пропорциональны длине образца:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\Delta l E}{dt} \frac{1}{l}.$$

При постоянной скорости увеличения нагрузки скорость возрастания напряжений и относительной деформации обратно пропорциональны площади поперечного сечения образца:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dP}{dt} \frac{1}{F}.$$

Для исключения влияния скорости возрастания напряжений при статических испытаниях образцов различных размеров необходимо соответственно варьировать скорости увеличения нагрузки и абсолютной деформации. Рекомендации по этому вопросу можно найти в работе [486].

Как уже отмечалось, одной из причин проявления масштабного фактора многие авторы считают неоднородность полей напряжений. В связи с этим интересны опыты по исследованию масштабного фактора в условиях усталости [458, 596]. При испытании образцов в условиях однородного напряженного состояния изменение рабочей площади образца более чем в 150 раз не оказывает влияния на характеристики усталости. Это свидетельствует о том, что статическая роль дефектов в материале, как причины масштабного эффекта, практически исключается, во всяком случае при испытаниях образцов с тщательно полированной поверхностью. В то же время известно, что масштабный эффект заметно проявляется при испытаниях цилиндрических образцов при знакопеременном изгибе или изгибе с вращением. Легко показать, что здесь масштабный эффект вызван неравномерностью распределения напряжений по поперечному сечению образца, которую для каждой элементарной площади сечения можно оценить величиной относительного градиента напряжения

$$G = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx},$$

где  $\sigma$  — напряжение, вычисленное с учетом концентрации;  $x$  — расстояние от поверхности.

Для круглого образца при изгибе, если учитывать линейное распределение напряжений по сечению,

$$G = \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma}{\frac{d}{2}} = \frac{2}{d}.$$

На рис. 85 показано влияние относительного градиента напряжений на предел выносливости круглых образцов при изгибе с кручением для трех углеродистых нормализованных сталей [218]. Поскольку величина относительного градиента напряжений линейно связана с диаметром образца, а статистическое влияние дефектов металлургического и механического происхождения отсутствует [458, 596], то на рис. 85 фактически представлены характеристики влияния неоднородности распределения напряжений по сечению образца при усталостных испытаниях.

Мнение о существенном значении неоднородности напряженного состояния в проявлении масштабного фактора подтверждается также экспериментальными данными о значительно большем влиянии размеров у образцов с различного рода концентраторами по сравнению с гладкими образцами, у которых масштабный фактор проявляется сравнительно слабо.

Попытку учесть влияние градиентов напряжений на величину предела текучести пластичных материалов при изгибе и кручении стержней простейшей формы (прямоугольник, ромб, круг, двутавровый стержень — при изгибе, полный стержень — при кручении) сделал И. А. Одинг [326], вводя в условие постоянства максимальных касательных напряжений некоторый коэффициент эквивалентности, величина которого определяется геометрией сечения. Для полого образца из пластичного материала предел текучести при кручении, по Одингу, может быть определен из выражения

$$\tau'_k = \tau_k \left[ \frac{(r_s^4 - r_0^4) r}{r_s (r^4 - r_0^4)} + \frac{4}{3} \frac{(r^3 - r_s^3) r}{(r^4 - r_0^4)} \right], \quad (\text{VI.41})$$

где  $\tau_k$  — предел текучести при сдвиге в случае однородного напряженного состояния;  $r_s$  — расстояние пластически деформированного слоя от центра образца;  $r$  — наружный радиус стержня;  $r_0$  — внутренний радиус стержня. Для сплошного стержня  $r_0 = 0$ . Тогда

$$\tau'_k = \tau_k \left( \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{r_s^3}{r^3} \right).$$

Установив допуск на остаточную деформацию  $\gamma_s$ , т. е. полагая, что напряжения по сечению образца распределяются так, как

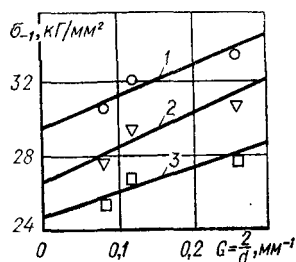


Рис. 85. Влияние градиента напряжений на предел выносливости круглых образцов из углеродистых нормализованных сталей при изгибе с кручением:

1—0,4% С,  $\sigma_B = 63,6 \text{ кг/мм}^2$ ;  
2—0,3% С,  $\sigma_B = 54,8 \text{ кг/мм}^2$ ;  
3—0,1% С,  $\sigma_B = 40,3 \text{ кг/мм}^2$ .

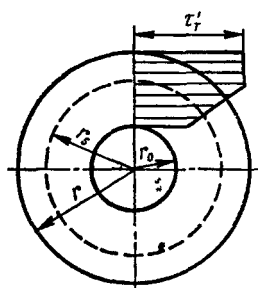


Рис. 86. Распределение напряжений по сечению образца при кручении.

показано на рис. 86, можно составить пропорцию

$$\frac{r_s}{r} = \frac{\frac{\tau_r}{G}}{\frac{\tau_r}{G} + \gamma_s},$$

откуда легко определить, что

$$r_s = r \frac{\tau_r}{\tau_r + G\gamma_s}.$$

Если принять, что пластическая зона распределяется по всему сечению образца ( $r_s = r_0$ ), то из выражения (VI.42) получим

$$\tau_r' = \tau_r \frac{4}{3} \cdot \frac{(r^3 - r_0^3) r}{(r^4 - r_0^4)}. \quad (\text{VI.42})$$

На рис. 82 штриховой линией показана теоретическая кривая зависимости коэффициента упрочнения  $\beta$  от соотношения внутреннего и наружного радиусов образца, рассчитанная по выражению (V.20). Как видим, теоретическая и экспериментальная кривые имеют качественно одинаковый характер. Ограничив пластическую зону периферийными слоями стержня, можно, естественно, добиться практически идеального совпадения этих кривых.

Кугель [579] предлагает учитывать влияние неоднородности напряженного состояния при оценке усталостной прочности путем сопоставления «высоконапряженных» объемов образца, на котором получены механические характеристики материала, и рассчитываемой детали. Под высоконапряженным объемом понимается объем тех участков материала, в которых напряжение составляет не менее 95% максимального. Величины этих объемов, в соответствии с данными работы [579], связаны соотношением

$$\left( \frac{V_2}{V_1} \right)^n = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_d}, \quad (\text{VI.43})$$

где  $V_1$  — высоконапряженный объем в образце;  $V_2$  — сопоставимый (высоконапряженный) объем рассчитываемой детали;  $n$  — константа материала;  $\sigma_{-1}$  — предел усталости материала при знакопеременном изгибе;  $\sigma_d$  — характеристика прочности рассчитываемой детали. Из соотношения (VI.43) следует

$$\sigma_d = \sigma_{-1} \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{-n}.$$

Если деталь работает в условиях сложного напряженного состояния, то величина  $\sigma_d$  пропорциональна приведенному напряжению, вид связи которого с компонентами тензора напряжений определяется принятой теорией прочности.

Соотношение (VI.43) использовано в работе [469] для корреляции результатов усталостных испытаний толстостенных цилиндров, нагруженных пульсирующим внутренним давлением, с результатами простых испытаний материала на знакопеременный изгиб. Некоторые рекомендации по учету неоднородности распределения напряжений по сечению, в том числе в условиях сложного напряженного состояния при циклическом нагружении, приведены в работах [86, 443].

Гольцев Д. И. [86] считает, что усталостные характеристики материала (пределы выносливости при соответствующих видах нагружения) в расчетных уравнениях должны определяться в условиях примерно той же неоднородности, что и неоднородность в рассматриваемом случае напряженного состояния. Так, если, например, на основании уравнения (VI.27) необходимо найти предельные значения  $\sigma_p$  главных напряжений при двухосном растяжении — сжатии (знаки главных напряжений противоположные), то, обозначив в этом уравнении предел усталости  $\tau_{-1}$  при кручении  $\sigma_p$  и приняв предел выносливости  $\sigma_{-1}$  при изгибе за предел выносливости  $\sigma_{-1p}$  при одноосном растяжении — сжатии, после элементарных преобразований получим

$$\sigma_p = \frac{\sigma_{-1p}}{\sqrt{6}} \sqrt[n+1]{\sqrt{2} (\sqrt{2} + K)^n},$$

где  $K$  и  $n$  — константы материала, определяемые так же, как в уравнении (VI.27).

Учитывая, что влияние неоднородности поля напряжений и масштабный эффект являются структурно-чувствительными факторами, при их исследовании весьма эффективным может оказаться рассмотренный в гл. V принцип «интеграции» континуальных и статистических подходов, основанных на оценке предельного состояния материала в предположении о бесконечной делимости и однородности вещества с соответствующей коррекцией для учета характерных структурных несовершенств данного материала.

Для выяснения характера изменения параметров  $\chi$  и  $A$  (см. уравнение (V.14)) в связи с влиянием масштабного фактора были проведены специальные испытания трех твердых сплавов типа ВК при растяжении, чистом сдвиге (скручивание тонкостенных трубок) и сжатии на геометрически подобных образцах, объем которых изменялся более чем в 10 раз. Для исключения эксцентricности приложения нагрузки поверхности рабочих участков и мест приложения усилий шлифовались с одной установки. Испытания образцов проводились на машинах кинематического типа с регулируемой скоростью деформации.

Результаты расчетов показали, что с увеличением объема напряженного металла параметр  $\chi$ , имеющий смысл коэффициента



хрупкости, незначительно уменьшается, а это указывает на тенденцию к снижению пластичности металла с увеличением размеров деформируемого тела по крайней мере в пределах исследованных объемов. В свою очередь, параметр  $A$ , отражающий степень структурной неоднородности металла, с увеличением объема возрастает. Такой характер изменения параметра  $A$  на первый взгляд представляется аномальным, так как структура металла у больших и малых образцов одинакова. Однако необходимо иметь в виду, что структурная неоднородность тела должна всегда рассматриваться в связи с его объемом и оцениваться не абсолютными, а относительными размерами дефектов. Это дает основание при сопоставлении двух тел с одинаковой структурой материала отнести тело большего размера к категории более однородных. Следовательно, отмеченное возрастание параметра  $A$  с увеличением объема деформируемого металла является вполне закономерным.

*Раздел второй*

---

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ  
ИССЛЕДОВАНИЯ  
ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ  
ПРИ СЛОЖНОМ  
НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ



## *Глава VII*

### **МЕТОДЫ МЕХАНИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ**

#### **§ 1. Испытания материалов в обоймах и камерах высокого давления**

Испытания материалов под гидростатическим давлением дают богатую информацию о их механических свойствах. Тем не менее опубликованных данных о результатах такого вида работ крайне мало. Среди сдерживающих факторов здесь следует прежде всего отметить методические трудности при постановке эксперимента и регистрации в процессе испытаний необходимых параметров.

Первые исследования такого рода ставились с целью выяснения положений, которые в настоящее время считаются очевидными. Опыты Кика [572] по всестороннему сжатию горных пород были поставлены, например, с целью качественной проверки гипотезы А. Гейма о приобретении горными породами пластических свойств в условиях высоких всесторонних давлений. Деформирование кристаллов каменной соли и мраморных шариков производилось в специальных ампулах с аморфной массой (рис. 87). Эти опыты подтвердили теорию А. Гейма и дали некоторые количественные характеристики материалов.

Несмотря на примитивность, метод Кика был использован другими исследователями и не потерял ценности до настоящего времени. Б. Д. Грозин [91], например, подвергал образцы из закаленной стали всестороннему сжатию в обоймах из пластичных материалов и вывел формулы для определения в этом случае напряжений. Эти испытания (рис. 88) не требуют специального оборудования и обеспечивают возможность создавать значительные боковые давления. При соответствующей методике обработки опытных данных метод Кика позволяет проследить особенности изменения механических свойств материала при достаточно больших сжимающих усилиях [4, 49, 195, 430].

Е. Е. Сурикова [428] использовала метод обойм для испытания стали У8А и У12А при трехосном сжатии. Тщательный анализ принятой методики показал, что при испытании на сжатие в обойме нагружение образца близко к простому.

Боковое давление можно существенно увеличить, используя две обоймы. Схема испытания образца 2 в системе обойм 1 и 3 приведена на рис. 89 [348]. Испытание проводится в камере 4,

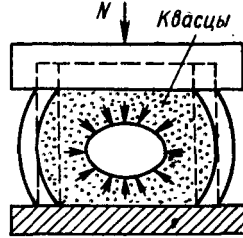


Рис. 87. Схема испытаний материалов по методу Кика [10].

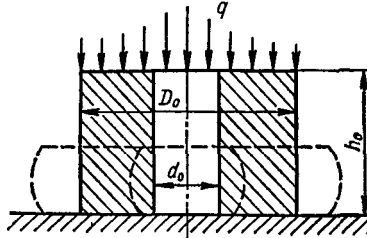


Рис. 88. Схема испытаний материалов в обойме.

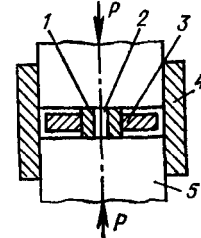


Рис. 89. Схема испытания образца в двойной обойме.

служащей одновременно направляющей для нажимных плунсонов 5. Начальный зазор между торцами наружной обоймы и плунсонами равен 1 мм с каждой стороны, что позволяет деформировать образец на 25%. По данным работы [91] применение второй недеформированной обоймы позволяет увеличить боковое давление на образец в 12 раз.

В процессе испытания образца в обойме можно установить зависимость только между осевой деформацией образца и радиальными перемещениями свободной поверхности обоймы, поэтому расчет напряжений в образце, как правило, производится исходя из различных теоретических предположений.

Величины действующего на образец со стороны одинарной обоймы радиального давления  $p_a$ , приведенного напряжения (интенсивность напряжений)  $\sigma'_i$  и максимального осевого напряжения  $q'$  вычисляются по формулам [89]

$$p_a = \sigma_i [\exp \mu (\alpha_0 - \beta_0) (1 - \varepsilon)^{-1,5} - 1];$$

$$\sigma'_i = \frac{K}{\exp \mu \beta_0 (1 - \varepsilon)^{-1,5} - \mu \beta_0 (1 - \varepsilon)^{-1,5} - 1};$$

$$q' = (\sigma'_i + p_a) \exp \mu \beta_0 (1 - \varepsilon)^{-1,5},$$

где

$$K = 0,5 \sigma_{-1} \left( \frac{\mu \alpha_0}{1 - \varepsilon} \right)^2 - \sigma_i [\exp \mu \alpha_0 (1 - \varepsilon)^{-1,5} - \exp \mu \beta_0 (1 - \varepsilon)^{-1,5} - \mu (\alpha_0 - \beta_0) (1 - \varepsilon)^{-1,5}].$$

При испытании образца в бинарной обойме те же величины вычисляются соответственно по формулам

$$p_a = \sigma_i [\exp \mu (\alpha_0 - \beta_0) (1 - \varepsilon)^{-1,5} - 1] + p_b \exp \mu (\alpha_0 - \beta_0) (1 - \varepsilon)^{-1,5};$$

$$\sigma'_i = \frac{K - p_b [\exp \mu \alpha_0 (1 - \varepsilon)^{-1,5} - \mu \alpha_0 (1 - \varepsilon)^{-1,5} - 1]}{\exp \mu \beta_0 (1 - \varepsilon)^{-1,5} - \mu \beta_0 (1 - \varepsilon)^{-1,5} - 1};$$

$$q' = (\sigma'_i + p_a) \exp \mu \beta_0 (1 - \varepsilon)^{-1,5}.$$

В этих формулах приняты следующие обозначения:  $\mu$  — коэффициент трения на торцах;  $\sigma_i$  — напряжение, соответствующее деформации  $\varepsilon$  внутренней обоймы,

$$\sigma_i = \frac{0,5\sigma_2 \left( \frac{\mu \alpha_0}{1 - \varepsilon} \right)^2}{\exp \mu \alpha_0 (1 - \varepsilon)^{-1,5} - \mu \alpha_0 (1 - \varepsilon)^{-1,5} - 1} - p_b,$$

где, в соответствии с рис. 88,

$$\alpha_0 = \frac{D_0}{h_0}; \quad \beta_0 = \frac{d_0}{h_0}; \quad \sigma_1 = \frac{p'}{\frac{\pi D_0^2}{4}}; \quad \sigma_2 = \frac{p''}{\frac{\pi D_0^2}{4}};$$

$p'$  и  $p''$  — нагрузки, вызывающие одинаковую деформацию  $\varepsilon$  при сжатии образца в системе обойм и в такой же системе, когда образец отсутствует, а внутренняя обойма сплошная.

Значительные трудности представляет определение радиального давления  $p_b$  на внутреннюю обойму со стороны наружной. Используя решение А. Надаи [309] для плоского кольца, подвергнутого внутреннему давлению, авторы работы [89] предложили приближенное решение задачи об определении давления  $p_b$  при пластическом деформировании кольца, материал которого упрочняется.

Давление на поверхности соприкосновения двух обойм, по А. Надаи,

$$p_b = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \theta_b \right),$$

где  $\sigma_0$  — напряжение в наружной обойме, определяемое по диаграмме деформирования материала обоймы для заданной величины деформации;  $\theta_b$  — параметр, характеризующий деформированное состояние в наружной обойме. Величина  $\theta_b$  вычисляется из выражения

$$\varepsilon = \frac{\left( \frac{D_n}{D_0} \right)^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \theta_b \exp \sqrt{3} \left( \frac{\pi}{6} - \theta_b \right)}{\left( \frac{D_n}{D_0} \right)^2 - 1}.$$

Здесь  $D_n$  — наружный диаметр обоймы до начала пластического деформирования.

Экспериментальное исследование деформаций системы обойм при испытании образцов в условиях объемного неравномерного сжатия [348] показало, что предложенная в работе [89] схема

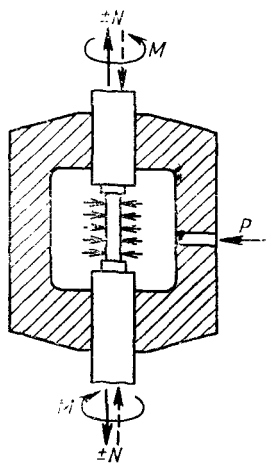


Рис. 90. Схема испытания образца в камере высокого давления.

расчета давления  $p_b$  не дает больших погрешностей.

Систематическим изучением свойств материалов при больших гидростатических давлениях занимался Бриджмен [43], использовавший для создания высоких и сверхвысоких давлений (до  $30000 \text{ кг/см}^2$ ) специальные камеры и жидкостные мультипликаторы. Подробное описание таких установок дано в работах [43, 268, 294, 500 и др.).

Нагружение образца в установках Бриджмена производилось ступенями. Бриджмену не удалось добиться постоянства гидростатического давления во время опыта, что не могло не отразиться на точности результатов эксперимента. Хотя эти исследования большей частью носили характер научно-методического поиска, Бриджмен получил принципиально новые

результаты по сжимаемости и пластичности твердых тел, гидроэкструзии и другим вопросам.

В Советском Союзе установки для исследования механических свойств материалов при высоких давлениях разрабатывались в МГУ [324], МВТУ [369], Институте физики металлов АН СССР [81] и других организациях [30, 294, 500].

Для реализации соответствующих программ испытаний разработаны специальные устройства, в которых нагружение образца осуществляется посредством штанг, вводимых в камеру высокого давления (рис. 90), или посредством поршня, одновременно создающего в камере давление.

Недостатком первой группы устройств является сложность обслуживания из-за наличия насосов и мультипликаторов высокого давления, индивидуальных систем дополнительного нагружения образцов и т. п. Вторая группа устройств не позволяет осуществлять простое (пропорциональное) нагружение и проводить испытания материала при постоянном гидростатическом давлении.

Эти недостатки сведены до минимума в устройстве, разработанном в Институте проблем прочности АН УССР. Устройство предназначено для испытаний материалов на растяжение, кручение и сжатие при гидростатическом давлении до  $10000 \text{ кг/см}^2$ . Диапазон регулируемых соотношений между гидростатическим давлением и дополнительными нагрузками достаточно широк. Принятая схема нагружения позволяет проводить испытания при неиз-

менных значениях параметра вида девиатора ( $\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \approx$

$= -1, 0, +1$ ) и, таким образом, в чистом виде исследовать влияние шарового тензора на сопротивление материалов деформированию и разрушению. Это достигается применением комбинированного поршня, выполненного в виде двух коаксиально расположенных и связанных между собой посредством испытываемого образца плунжеров, воспринимающих регулируемые усилия. Нагружение поршня раздельно на каждый плунжер осуществляется через расположенный вне камеры силораспределитель.

На рис. 91 показана схема устройства для испытания образцов на растяжение и сжатие в условиях гидростатического давления. Для раздельного нагружения плунжеров применен силораспределитель, выполненный в виде жестко связанных с плунжерами упругих элементов (пластин), воспринимающих усилия со стороны внешней системы нагружения посредством регулируемых

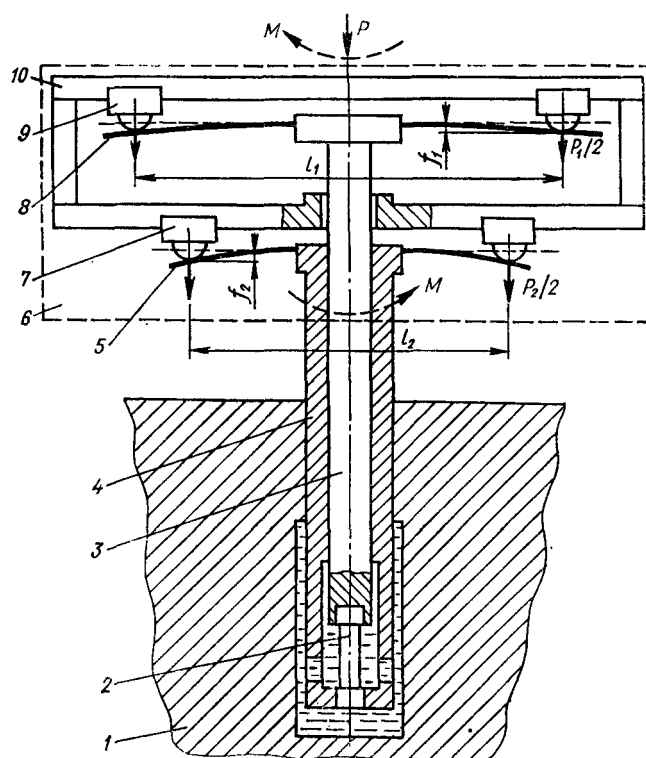


Рис. 91. Система нагружения образца в установке со сдвоенным поршнем.



по расстоянию от оси поршня упоров. Устройство состоит из камеры 1 высокого давления, внутри которой находятся коаксиально расположенные притертые друг к другу плунжеры 3 и 4, связанные между собой посредством испытываемого образца 2. Вне камеры расположен силораспределитель 6, состоящий из рамы 10, снабженной подвижными упорами 7 и 9, которые могут быть установлены на необходимом расстоянии от оси поршня. Упоры соприкасаются с упругими пластинами 5 и 8, жестко связанными с плунжерами соответственно 3 и 4.

В процессе испытания рабочее усилие  $P$  от внешней системы нагружения (на рисунке не показана) воздействует на верхнюю полку рамы 10 и далее через упоры 7, 9 и упругие пластины 8, 5 на плунжеры 3, 2, создавая тем самым необходимое давление в камере 1. Воспринимаемая образцом осевая нагрузка определяется разностью между усилиями  $P_1$  и  $P_2$  (усилия, перераспределенные на плунжеры), которая, при условии равенства эффективных площадей поперечных сечений плунжеров 3 и 4 и одинаковой жесткости упругих пластин 5 и 8, зависит от соотношения между пролетами  $l_1$  и  $l_2$ , регулируемым положением упоров 7, 8. Если  $l_1 = l_2$ , то образец будет нагружаться только гидростатическим давлением, при  $l_1/l_2 > 1$  образец кроме гидростатического давления будет воспринимать растягивающее усилие, а при  $l_1/l_2 < 1$  — сжимающее. Деформация образца определяется как разность  $(f_1 - f_2)$  прогибов упругих пластин 5 и 8.

В случае непосредственного нагружения каждого из плунжеров (без силораспределителя) степень гидростатического давления в камере определяется соотношением эффективных площадей поперечных сечений плунжеров, а также сопротивляемостью испытываемого образца. Пропорциональное нагружение осуществляется набором поршней с заданными соотношениями площадей сечений плунжеров и образца.

Применение в силораспределителе упорного подшипника позволяет производить комбинированное нагружение образца продольным усилием и крутящим моментом в условиях гидростатического сжатия.

К рабочим средам, применяемым в аппаратах высокого давления, предъявляется ряд требований, к которым в первую очередь должны быть отнесены: низкая температура замерзания, химическая инертность, малая чувствительность вязкости к давлению, хорошие смазочные свойства. В зависимости от условий испытаний в качестве рабочей среды применяют изопентан, петролейный эфир, спирты, бензин, керосин, минеральные масла и их смеси с бензином и керосином, смеси глицерина с этиленгликолем и др. Иногда при выборе рабочей среды в большей мере руководствуются возможностью создания надежных уплотнений в соединениях.

Некоторые вопросы техники эксперимента при высоких и сверхвысоких давлениях, а также конструктивные особенности отдельных узлов установок указанного назначения освещены в литературе [30, 269, 277, 294, 324, 477, 500].

### § 2. Испытания образцов с плоскими гранями

При исследовании закономерностей деформирования и разрушения материалов в условиях плоского или объемного напряженного состояния используются образцы в виде кубиков или толстых пластин с перпендикулярными гранями. Различные соотношения между главными напряжениями в образце достигаются приложением соответствующих усилий по граням или (при одинаковых усилиях) применением образцов с неодинаковыми по величине

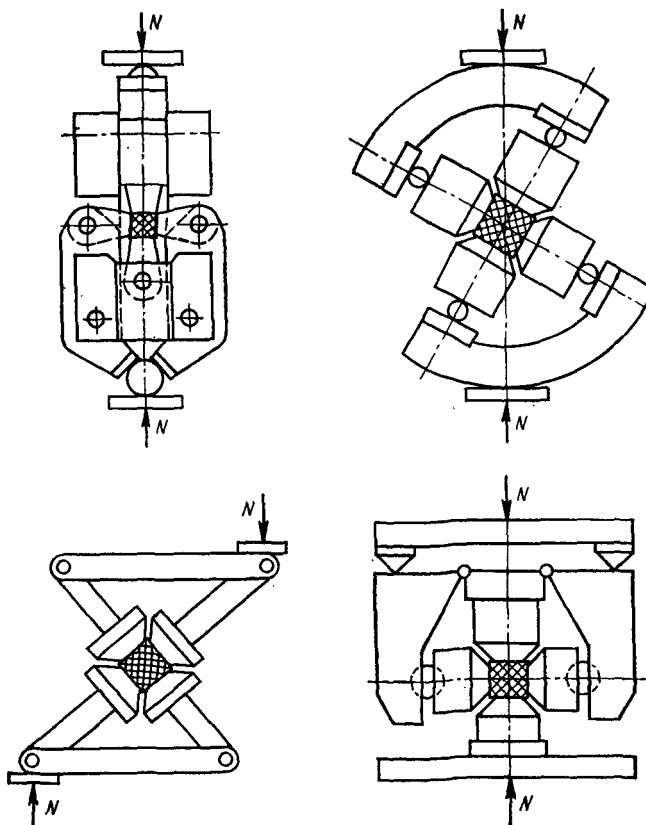


Рис. 92. Варианты конструктивного выполнения механических реверсоров.

площадками прилегающих граней. Нагружение образцов производится обычно или жесткими пуансонами, или гидравлически с применением системы уплотнений.

Первый способ может реализоваться двумя прессами [87, 119], один из которых, как правило, подпружинен. Однако чаще используются механические реверсоры (рис. 92), трансформирующие давление пресса в усилия, прилагаемые к перпендикулярным граням образца [373, 456, 480]. Для нагружения образцов в виде кубиков Н. Н. Давиденковым применена система рычагов с гидравлическим приводом (рис. 93).

Способ реализации непосредственно гидравлического нагружения схематически показан на рис. 94, а, с применением промежуточных пуансонов — на рис. 94, б. Каждое из рассмотренных устройств имеет свои очевидные достоинства и недостатки. Общим недостатком устройств, выполненных по схемам рис. 92, 93, 94, б, является неизбежная эксцентричность приложения нагрузки к граням образца и наличие трудноучитываемых потерь на трение в подвижных сочленениях. Недостатком устройств с непосредственным гидравлическим нагружением (рис. 94, а) является сложность создания надежных уплотнений при достаточно высоких рабочих давлениях в эластичных камерах.

Влияние указанных факторов можно существенно уменьшить применением специальных мер, к которым в первую очередь следует отнести использование различных прокладок, подвижных элементов и обойм, а также специальной разделки нагружаемых поверхностей, в том числе с заполнением полостей различными смазками. Пелетье предложил специальную прокладку с подвижными элементами из легко деформируемого материала. Эта идея использована В. Д. Глебовым [78] при создании установки для испытания гипса в условиях объемного напряженного состояния. Применяются также «гибкие штампы», состоящие из набора узких пластин, опирающихся на резиновое основание, разделка

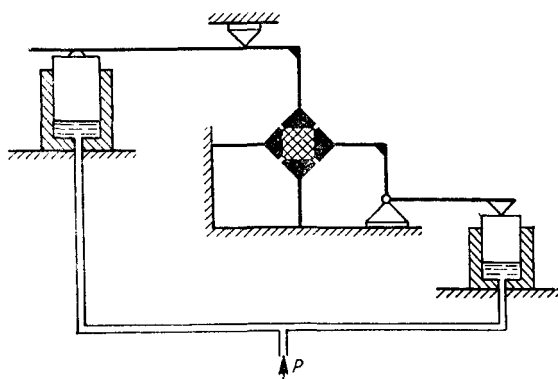


Рис. 93. Схема гидромеханического привода в установке Н. Н. Давиденкова.

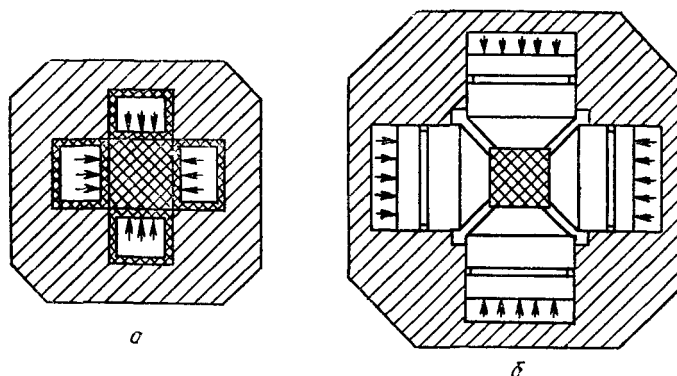


Рис. 94. Схемы гидростатического нагружения образца:  
 а — через эластичные прокладки; б — посредством пуансонов.

торцов под конус, составные образцы [335], вращающиеся пуансоны [367] и т. п. Весьма эффективно применение обойм, заполненных эпоксидным клеем, который, работая в условиях всестороннего сжатия, создает благоприятные условия опирания на торцах. На рис. 95 представлены результаты изучения влияния условий опирания на прочность трубчатых образцов из кварца, полученные в Институте проблем прочности АН УССР. Показательны также в этом отношении данные испытаний пьезокерамики, полученные на кафедре сопротивления материалов Ленинградского политехнического института. Испытания материала на сжатие проводили по обычной методике и специальной, заключающейся в следующем.

Кольцевой образец 3 (рис. 96) устанавливается с заранее рассчитанными зазорами (для этого служат медные прокладки 2) в обоймах 1, 4 и заливается свинцом 5 с последующим обтачиванием до толщины 0,5 мм. Алюминиевая фольга 6, наклеенная на втулки и образец, препятствует проникновению расплавленного свинца в зазоры между образцом и втулками. Приспособление помещается в толстостенный сосуд, в котором создается давление, разрушающее образец. Радиальные напряжения в образце малы по сравнению с тангенциальными, а осевые отсутствуют вследствие зазоров между образцом и втулками. Момент разрушения фиксируется на слух по характерному щелчку. В результате испытаний пьезокерамических образцов по описанной методике получены значения разрушающего напряжения, превышающие на 80% предел прочности материала на сжатие, определенный общепринятым методом.

Для создания благоприятных условий на поверхности как в отношении снижения торцового трения, так и в отношении выравнивания контактных напряжений применяется смазка рабочих

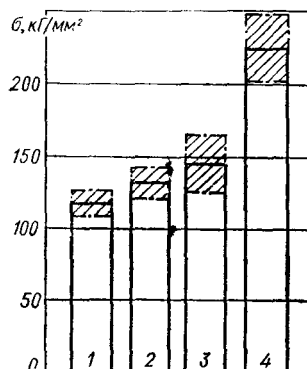


Рис. 95. Влияние условий опирания на предел прочности кварцевого стекла (поля рассеяния результатов заштрихованы):

1 — гладкие стальные опоры; 2 — обойма, залитая сургучем; 3 — обойма, залитая эпоксидным клеем; 4 — обойма, залитая эпоксидным клеем, с последующей термообработкой при 150° С.

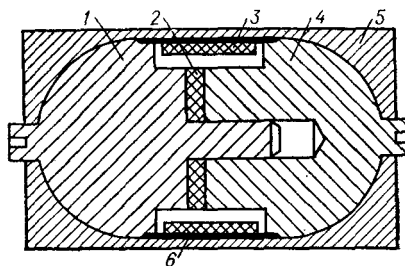


Рис. 96. Схема устройства для испытания кольцевых образцов на радиальное сжатие.

поверхностей. Эффективным оказалось применение говяжьего жира, жирных кислот с нефтью, дисульфида молибдена, графитовых смесей и стеклосмазки (при высоких температурах). Не следует, однако, забывать, что применение смазок, особенно органического происхождения, может привести к заниженным результатам вследствие эффекта Ребиндера — расклинивающего действия смазки при наличии микрорельефа на торцах. Поэтому в некоторых случаях предпочитают разного рода прокладки, например медную фольгу, пленку из тефлона и т. п.

Следует отметить, что образцы в виде пластин и кубиков используются не только для изучения механических свойств при двух- и трехосном сжатии. Вельтер [638] пытался создать трехосное напряженное состояние в металлическом кубике, имеющем в трех взаимно перпендикулярных направлениях придатки для приложения растягивающих усилий (рис. 97). Однако эта система не позволила освободиться от концентрации напряжений по ребрам куба, поэтому опыт Вельтера, как и другие попытки реализовать эту схему [538], представляют лишь исторический интерес.

Важнейшими факторами, которые могут повлиять на результаты испытаний, являются размер и форма образцов, параллельность и состояние контактных поверхностей. При испытаниях хрупких материалов необходимо применять образцы без острых углов и резких переходов. Фактическая площадь контакта должна быть максимально приближена к площади поверхности; поэтому ребра образцов прямоугольной формы следует тщательно притирать.

Как показали опыты на образцах из оптически активного материала, при тщательном изготовлении образцов и точной их уста-

новке в реверсоре напряженное состояние образца можно считать в такой же степени однородным, как и в случае испытаний кубиков на одноосное сжатие. При этом пластинчатые образцы позволяют реализовать более однородное поле напряжений. Влияние трения на торцевой поверхности в меньшей мере сказывается на образцах больших размеров, однако высота и толщина пластинчатых образцов лимитируются условием потери устойчивости.

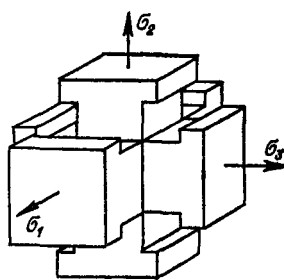


Рис. 97. Образец Веллера для испытания материала на трехосное растяжение.

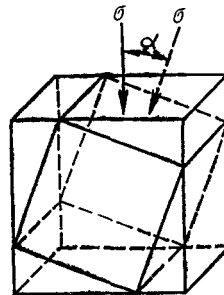


Рис. 98. Схема вырезки образца для повторного испытания на сжатие.

Образцы в виде кубиков использованы автором работы [275] для выяснения качественного характера взаимосвязи напряжений и деформаций в условиях линейного напряженного состояния при повороте осей, но постоянном напряжении. Поворот оси главного напряжения осуществлялся путем вырезания из образца, подвергнутого пластической деформации сжатия до определенного напряжения, нового образца (рис. 98), грани которого повернуты относительно старых на некоторый угол. Затем образец снова подвергался сжатию до того же напряжения; из него вырезался новый образец с повернутыми гранями и т. д.

### § 3. Испытания материалов на трубчатых образцах

Метод испытания тонкостенных трубчатых образцов, подверженных действию комбинированных нагрузок (осевой силе, крутящему моменту и внутреннему давлению), наиболее широко распространен в практике механических испытаний материалов при плоском напряженном состоянии. Это объясняется прежде всего тем, что на трубчатых образцах обеспечивается широкий диапазон напряженных состояний и реализуются все возможные комбинации компонентов девиатора напряжений.

В рабочей части трубчатого образца, нагруженного осевой силой  $N$ , внутренним давлением  $p$  и скручивающим моментом  $M$ , действуют такие напряжения:

осевое

$$\sigma_z = \frac{R_B^2}{R_H^2 - R_B^2} \left( 1 + \frac{N}{p} \cdot \frac{1}{\pi R_B^2} \right) p, \quad (\text{VII.1})$$

окружное

$$\sigma_{\theta} = \frac{R_B^2}{R_H^2 - R_B^2} \left( 1 + \frac{R_H^2}{r} \right) p, \quad (\text{VII.2})$$

радиальное

$$\sigma_r = \frac{R_B^2}{R_H^2 - R_B^2} \left( 1 - \frac{R_H^2}{r} \right) p \quad (\text{VII.3})$$

и касательное

$$\tau_{\theta z} = \frac{2r}{\pi (R_H^4 - R_B^4)} M, \quad (\text{VII.4})$$

где  $R_H$ ,  $R_B$ ,  $r$  — соответственно наружный, внутренний и текущий радиусы.

Как видно из формул, напряжения  $\sigma_{\theta}$ ,  $\sigma_r$  и  $\tau_{\theta z}$  зависят от текущего радиуса. Неоднородность напряженного состояния в стенке трубчатого образца уменьшается при увеличении отношения среднего радиуса  $R_{\text{ср}} = \frac{1}{2} (R_H + R_B)$  к толщине стенки  $\delta_0$ .

Из соотношений (VII.2) — (VII.4) можно найти

$$\sigma_r = - \frac{\delta_0}{R_{\text{ср}}} \sigma_{\theta}, \quad \Delta \tau_{\theta z} = \frac{2\delta_0}{R_{\text{ср}}} (\tau_{\theta z})_{\text{ср}}.$$

Отношение  $\frac{\delta_0}{R_{\text{ср}}}$  обычно колеблется в пределах от 0,08 до 0,04. Поэтому, учитывая, что по мере развития пластических деформаций неоднородность напряженного состояния уменьшается, влиянием  $\sigma_r$  и  $\Delta \tau_{\theta z}$ , как правило, пренебрегают, а расчет условных напряжений производят по формулам

$$\sigma'_z = \frac{N}{\pi D_{\text{ср}} \delta_0} + \frac{p D_{\text{ср}}}{4 \delta_0}, \quad (\text{VII.5})$$

$$\sigma'_{\theta} = \frac{p D_{\text{ср}}}{2 \delta_0}, \quad (\text{VII.6})$$

$$\tau'_{\theta z} = \frac{2M}{\pi D_{\text{ср}} \delta_0}. \quad (\text{VII.7})$$

По данным работы [11], эти формулы достаточно точны. На рис. 99 приведены результаты расчета по формулам (VII.5) и (VII.6) и экспериментальные данные, полученные тензометрированием. Как видно из рисунка, экспериментальные точки, построенные по средним данным измерений, практически расположены на теоретической кривой.

Для условных деформаций соответственно имеем

$$\epsilon'_z = \frac{\Delta l}{l_0}; \quad \epsilon'_{\theta} = \frac{\Delta D}{D_{\text{ср}}}; \quad \gamma' = \frac{D_{\text{ср}} \varphi}{2 l_0}, \quad (\text{VII.8})$$

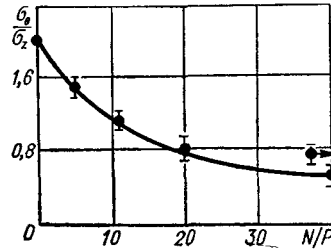


Рис. 99. Сопоставление опытных данных с результатами расчетов по формулам (VII.5) и (VII.6).

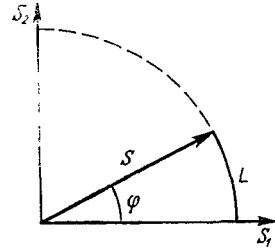


Рис. 100. Траектория нагружения в девиаторной плоскости при  $\sigma_i = \text{const.}$

где  $l_0$ ,  $\Delta l$  — база измерений и ее приращение;  $\Delta D$  — приращение диаметра;  $\varphi$  — угол закручивания на базе  $l_0$ .

На основании формул (VII.5) и (VII.6) можно получить выражение для определения соотношения между осевой силой и внутренним давлением, которое необходимо поддерживать в процессе

испытаний для получения заданного соотношения  $K = \frac{\sigma_z}{\sigma_\theta}$  между главными напряжениями

$$\frac{N}{p} = K (\sqrt{F_n F_v} + F_v) - F_v. \quad (\text{VII.9})$$

Здесь  $F_n = \pi R_n^2$ ,  $F_v = \pi R_v^2$ .

При решении многих вопросов теории пластичности, связанных, например, с изучением поверхностей нейтрального нагружения, влияния вида девиатора напряжений и т. п., деформирование материала необходимо производить при постоянном значении интенсивности напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = \text{const.}$$

Если при нагружении осевой силой и внутренним давлением в качестве параметра процесса принято тангенциальное напряжение, то при испытании заданному значению внутреннего давления  $p$  должна соответствовать осевая сила  $N$ , величина которой определяется выражением

$$N = \pi R_{cp} \delta_0 \sqrt{4\sigma_i^2 - 3 \left( \frac{p R_{cp}}{\delta_0} \right)^2}. \quad (\text{VII.10})$$

Нагружению с постоянной интенсивностью в девиаторной плоскости (рис. 100) соответствует дуга окружности радиуса

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_i,$$



где компоненты вектора  $S$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sigma_z - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{N}{\pi R_{\text{ср}} \delta_0} - \frac{p R_{\text{ср}}}{2 \delta_0} \right); \\ S_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_\theta = \frac{p R_{\text{ср}}}{2 \delta_0}. \end{aligned} \quad (\text{VII.11})$$

Степень деформирования при этом оценивается длиной дуги  $L$  траектории нагружения или углом  $\varphi$  отклонения вектора  $S$  от оси  $S_1$ .

Пользуясь приведенными соотношениями, можно через угол  $\varphi$  выразить действующие напряжения и приложенные к образцу внешние силы:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi + \cos \varphi \right) \sigma_i; \\ \sigma_\theta &= \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \varphi \right) \sigma_i; \end{aligned} \quad (\text{VII.12})$$

$$\begin{aligned} N &= (2\pi R_{\text{ср}} \delta_{\text{ср}} \cos \varphi) \sigma_i; \\ p &= \left( \frac{2\delta_{\text{ср}}}{\sqrt{3} R_{\text{ср}}} \sin \varphi \right) \sigma_i. \end{aligned} \quad (\text{VII.13})$$

Программа нагружения обычно задается по условным напряжениям. В результате изменения размеров образца в процессе деформирования путь нагружения (по истинным напряжениям) несколько отклоняется от пропорционального. Так, по данным специальных испытаний алюминиевого сплава в условиях нормаль-

ных температур при нагружении по лучу  $K = \frac{\sigma'_z}{\sigma_\theta} = 1$  факти-

ческое соотношение между истинными напряжениями в момент разрушения составляло  $K = 1,06$ . Такие отклонения, естественно, не могут внести трудноучитываемых ошибок при анализе экспериментальных результатов.

При испытании пластичных материалов, когда нагружение образца сопровождается существенным изменением его размеров, обработка опытных данных производится в истинных напряжениях и деформациях с учетом приращения базы.

Для истинных деформаций в осевом и тангенциальном направлениях

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln(1 + \epsilon'_z), \\ \epsilon_\theta &= \int_{D_0}^D \frac{dD}{D} = \ln(1 + \epsilon'_\theta), \\ \gamma &= \frac{D\varphi}{2l}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.14})$$

где  $l$ ,  $D$  — текущие значения базы измерений и диаметра.

Радиальная деформация  $\varepsilon_r$  определяется из условия упругого изменения объема

$$\varepsilon_z + \varepsilon_\theta + \varepsilon_r = \theta,$$

где

$$\theta = \frac{\sigma_\theta}{K} = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_z + \sigma_\theta),$$

следовательно,

$$\varepsilon_r = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_z + \sigma_\theta) - (\varepsilon_z + \varepsilon_\theta). \quad (\text{VII.15})$$

При наличии анизотропии упругих свойств величины  $E$  и  $\mu$  зависят от направления вектора полной деформации и, следовательно, при различных соотношениях  $\frac{\sigma_z}{\sigma_\theta}$  могут быть различными.

Для ортотропного материала [271]

$$\frac{1}{E} = \frac{\sin^4 \alpha}{E_\theta} + \left( \frac{1}{G} - \frac{2\mu_\theta}{E_\theta} \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \frac{\cos^4 \alpha}{E_z},$$

$$\mu = E \left[ \frac{\mu_\theta}{E_\theta} - \frac{1}{4} \left( \frac{1+\mu_\theta}{E_\theta} + \frac{1+\mu_z}{E_z} - \frac{1}{G} \right) \sin^2 \alpha \right].$$

Здесь  $E_z$ ,  $E_\theta$ ,  $\mu_z$ ,  $\mu_\theta$  — модули упругости и коэффициенты поперечной деформации в продольном и поперечном направлениях;  $\alpha = \arctg \frac{\sigma_z}{\sigma_\theta}$  — угол, определяющий положение луча на диаграмме  $\sigma_z - \sigma_\theta$ , в направлении которого производится деформирование.

Истинные осевые, окружные и касательные напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{N}{\pi [D_{cp} (1 + \varepsilon_\theta) + \delta_0 (1 + \varepsilon_r)] \delta_0 (1 + \varepsilon_r)} + \\ &+ \frac{p [D_H (1 + \varepsilon_\theta) - 2\delta_0 (1 + \varepsilon_r)]}{4\delta_0 (1 + \varepsilon_r)}, \\ \sigma_\theta &= \frac{p [D_H (1 + \varepsilon_\theta) - 2\delta_0 (1 + \varepsilon_r)]}{2\delta_0 (1 + \varepsilon_r)}, \\ \tau_{\theta z} &= \frac{2M}{\pi [D_{cp} (1 + \varepsilon_\theta) + \delta_0 (1 + \varepsilon_r)] \delta_0 (1 + \varepsilon_r)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.16})$$

Главные нормальные напряжения

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} [(\sigma_z + \sigma_\theta) \pm \sqrt{(\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{\theta z}^2}]. \quad (\text{VII.17})$$

Для получения достоверных данных, кроме достаточной тонкостенности ( $\frac{\delta_0}{D_{cp}} = 0,04 \div 0,08$ ), к трубчатым образцам предъяв-

ляется ряд других требований. Чтобы исключить воздействие головок и галтелей, длина рабочей части образца должна быть не менее двух с половиной диаметров. На результаты испытаний существенно влияют остаточные (технологические) напряжения, для снятия которых при испытании металлических материалов рекомендуется готовые образцы подвергать естественному старению, кипячению в воде или в масле. Разностенность в рабочей части не должна превышать 2—3%.

Технология изготовления образцов и их монтаж должны обеспечивать строгую соосность рабочей части, головок и захватов испытательной машины. При этом важную роль играет способ крепления головок в захватах.

В практике лабораторных испытаний в качестве образцов часто используются цельнотянутые трубки. Способ крепления их в захватах зависит от свойств испытываемого материала. Иногда для крепления перехода на конце трубки путем оплавления получают узкий валик или крепят трубку в конических гнездах перехода путем заливки легкоплавкого сплава, который при затвердевании создает прочное герметичное соединение [397].

На рис. 101 показано крепление образца к переходнику с помощью гофра. Трубка 2 плотно насаживается на переходник 4, после чего в месте кольцевой проточки накатывается внутренний гофр, и дополнительно поджимается болтами, ввернутыми в жесткое кольцо 3. Самоуплотняющаяся манжета 1 препятствует утечке рабочей жидкости из внутренней полости образца.

Вариант использования цангового зажима показан на рис. 102. Переход 3 с самоуплотняющейся манжетой 2 по плотной посадке вставляется в трубку 1.

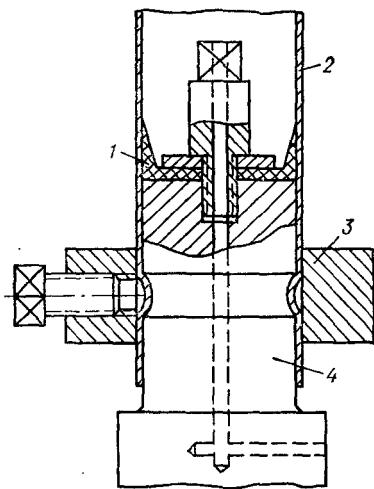


Рис. 101. Крепление трубки методом накатанного гофра.

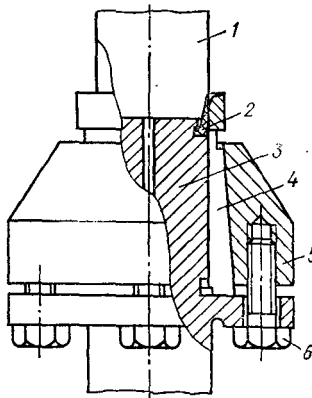


Рис. 102. Крепление трубки цанговым зажимом.

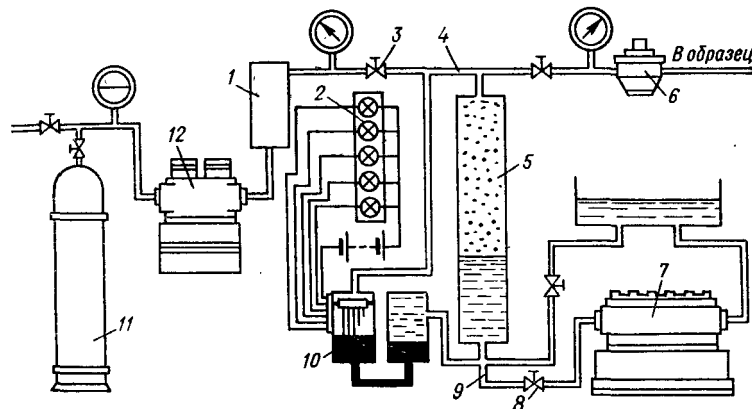


Рис. 103. Схема блока для создания высокого давления газовой рабочей среды.

С наружной стороны на трубку одевается цанга 4 с прижимом 5. При равномерном затягивании болтов 6 цанга обжимает трубку, обеспечивая необходимую прочность соединения. Рабочая среда для создания внутреннего давления подается по каналу в переходе.

При испытании хрупких материалов (стекло, ситаллы, керамика и т. п.) к трубке приклеиваются сменные головки из легких сплавов. В качестве клея может применяться сургуч или алюмоаммиачные квасцы, которые в расплавленном виде заливаются в пространство между трубкой и головкой. Для повторного использования головка после испытания опускается в кипящую воду, клеящее вещество растворяется в воде (или расплавляется).

Нагружение трубчатых образцов в процессе испытаний осуществляется с помощью специальных устройств, включающих систему создания внутреннего давления и систему нагружения осевой силой и скручивающим моментом.

Рабочая среда (газ, жидкость) для создания внутреннего давления выбирается в зависимости от задач исследования и температурных условий испытания. Применительно к каждой из рабочих сред разрабатывается система создания и регулирования давления.

Схема блока высокого давления, работающего по принципу многократного поджатия газа, показана на рис. 103 [230]. Газ от баллона 11 или компрессора 12 через фильтр 1 при открытом кране 3 подается по каналу 4 в емкость 5, после чего кран закрывается. Через канал 9 от насоса 7 подается рабочая жидкость, которая при открытом кране 8 поднимается, поджимая газ в емкости. После того как жидкость достигает предельного верхнего уровня, кран 8 закрывается и цикл при необходимости повторяется.

Соотношение между объемом емкости и объемами образца и трубопроводов таково, что при одном цикле давление газа может

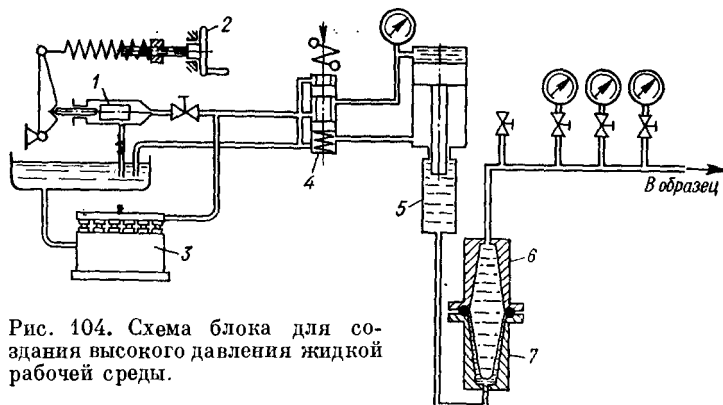


Рис. 104. Схема блока для создания высокого давления жидкой рабочей среды.

быть увеличено в четыре раза. Для контроля уровня рабочей жидкости в емкости служит указатель уровня 10 с сигнальными лампами 2. Давление в соответствующих магистралях контролируется манометрами. Основные узлы блока смонтированы на жесткой сварной станине, которая при работе закрывается защитным кожухом. При разрушении образца магистраль перекрывается отсекателем 6.

При рабочем давлении до  $160 \text{ кг/см}^2$  используется компрессор типа АК-150, который при наддуве (от баллона)  $1,5\text{--}2,0 \text{ кг/см}^2$  может обеспечить систему давлением до  $170 \text{ кг/см}^2$  при производительности, достаточной для проведения испытания. Если рабочее давление превышает  $160 \text{ кг/см}^2$ , то используется гидравлическая система. Блок рассчитан на рабочее давление  $500 \text{ кг/см}^2$ .

Система нагружения образца (рис. 104) внутренним давлением при жидкой рабочей среде состоит из многопоршневого насоса 3, нагнетательная магистраль которого посредством электромагнитного золотника 4 соединена с цилиндром низкого давления гидроусилителя 5. Давление в указанной магистрали устанавливается с помощью регулятора 1, работающего по принципу перепускного клапана. Необходимое натяжение пружин регулятора достигается вращением маховичка 2. Камера высокого давления гидроусилителя соединена с внутренней полостью образца и командным плунжером системы управления испытательной машиной посредством разделительной камеры 6 с эластичной диафрагмой 7 [196].

Перед испытанием нижняя полость цилиндра гидроусилителя соединена посредством золотника с насосом, а верхняя — со сливом, в результате чего поршень гидроусилителя поднимается в крайнее верхнее положение. Камера высокого давления и внутренняя полость образца перед испытанием заполняются рабочей жидкостью. При подаче масла в верхнюю полость цилиндра в камере



момент приложен к образцу посредством двух барабанов 5 и стальных лент 4, связанных с грузом  $Q_2$ . Пропорциональное нагружение осевой силой и крутящим моментом осуществляется грузом  $P$ , действующим на рычаг 1. Определенное соотношение между осевой силой и крутящим моментом устанавливается путем изменения точки приложения груза  $P$ .

Испытательные машины с непосредственным нагружением описаны в работах [123, 512].

Главный недостаток непосредственного нагружения состоит в том, что изменение нагрузки происходит ступенчато, при этом деформирование образца происходит с неконтролируемой скоростью, что в определенной степени сказывается на точности построения диаграмм деформирования. Кроме того, нагружение грузами вызывает целый ряд неудобств.

В известной машине [33] кинематического типа с электромеханическим приводом и программно-следящей системой управления, предназначенной для испытания трубчатых образцов на растяжение, кручение и внутреннее давление, нагружение образца растягивающей силой производится от электродвигателя через червячную передачу и двуплечий рычаг, связанный с верхним захватом. Крутящим моментом образец нагружается также от электродвигателя через червячный редуктор. Растягивающее усилие и крутящий момент измеряются при помощи проволочных тензорезисторов, наклеенных на динамометрическую часть верхнего захвата.

Для осуществления программы, заданной по деформациям, в установке применены управляющие и регистрирующие тензорезисторы, наклеенные на образец. Программирующее устройство содержит реохорды, изменение сопротивления которых по заданной программе приводит к разбалансу мостовых схем. Сигналы разбаланса возбуждают вращение электродвигателей нагружающего устройства в нужном направлении, пока датчики деформации, наклеенные на образец, не приводят мостовые схемы к балансу.

Аналогичная система программного управления применена в испытательной машине, описанной в работе [113]. Полуавтоматическая система управления с пневмодатчиками использована в испытательной машине с электромеханическим приводом, описанной в работе [260].

В МВТУ им. Баумана создана установка [122] силового типа с гидроприводом, на которой можно осуществить сложное нагружение для любой комбинации внешних нагрузок (осевая сила, поперечная сила, изгибающий и крутящий момент, внутреннее давление). Для нагружения образца используется шесть гидравлических силовозбудителей. Управляющий сигнал, снятый с потенциометра программного устройства, преобразованный и уси-

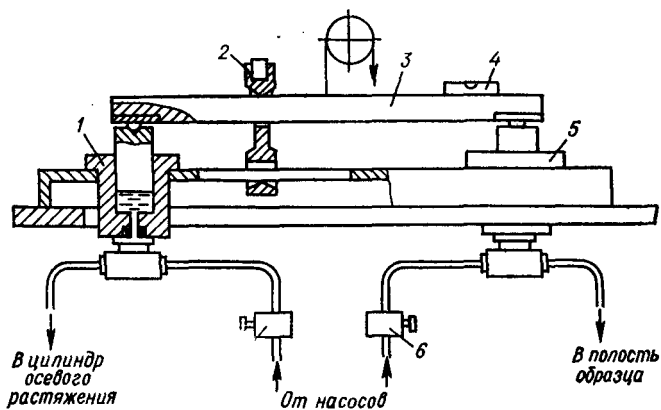


Рис. 106. Регулятор соотношения давлений рычажного типа.

ленный, поступает в специальный электрогидравлический привод, преобразующий электрические сигналы в давление жидкости в силовозбудителях. Обратная связь осуществляется с помощью электрических датчиков давления, включенных в мостовую схему, и дополнительных сопротивлений, учитывающих потери на трение в поршнях.

Для синхронизации рабочих давлений в Томском политехническом институте применено простое устройство, замыкающее цепи маслопроводов цилиндра осевого растяжения и внутреннего давления (рис. 106). Заданное соотношение давлений обеспечивается подбором сменных цилиндров 1, 5 и регулированием положения опоры 2 рычага 3. Непрерывное уравнивание давлений производится дросселями 6 и 7, управление которыми позволяет поддерживать равновесное положение рычага 3, контролируемое уровнем 4.

Характерным представителем машины с электромагнитным приводом является испытательная машина, разработанная в Институте гидродинамики СО АН СССР [446]. Это машина силового типа с программным нагружением. Продольная нагрузка прилагается к образцу от электромагнита. Крутящий момент создается также электромагнитом, статор которого закреплен на станине, а ротор связан с нижним захватом машины. Датчиками усилий являются динамометры с проволочными тензорезисторами. Основа программирующего устройства — мосты постоянного тока, составленные из реохордов задающего устройства и тензорезисторов, наклеенных на образец или упругие силоизмерительные элементы.

Рассмотренные испытательные машины с электронными программно-следящими системами позволяют выполнять произвольные во времени программы нагружения и деформирования, однако



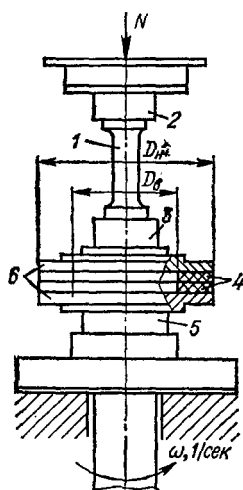


Рис. 107. Общий вид устройства для испытания образцов по схеме крутящий момент — сжатие.

применяемые в них системы управления чрезвычайно сложны и, как показывает опыт, недостаточно надежны в работе. Поэтому для отработки несложных программ применяются более простые устройства. В Институте проблем прочности АН УССР разработана серия приспособлений, преобразующих рабочее усилие машины в пропорциональные этому усилию осевую силу (растягивающую или сжимающую) и скручивающий момент.

Общий вид устройства, предназначенного для испытания по схеме крутящий момент — сжатие, представлен на рис. 107. Образец 1 крепится в переходах 2 и 3. Верхний переход 2 крепится к захвату механической системы. Между нижним переходом 3 и вторым захватом механической системы находится фрикционное устройство, состоящее из дисков 6 с наклеенными на них фрикционными элементами 4. Диски крепятся соответственно к переходу 3 и сухарю 5, между которыми имеется подвижное цилиндрическое соединение.

Образец нагружается путем наложения осевой силы при вращающемся нижнем захвате (устройство эксплуатировалось на установке ЦДМУ-30). Величина крутящего момента, передаваемого со стороны захвата на образец, определяется моментом трения в фрикционном устройстве и может быть определена по формуле

$$M_{кр} = M_{тр} = \frac{1}{3} N f \frac{D_2^3 - D_1^3}{D_2^2 - D_1^2} \approx N f \frac{D_2 + D_1}{4}. \quad (\text{VII.18})$$

Здесь  $N$  — осевая сила;  $f$  — коэффициент трения;  $D_2$  и  $D_1$  — наружный и внутренний диаметры фрикционных.

Выражение (VII.18) можно представить в виде

$$M_{кр} = K \cdot N, \quad (\text{VII.19})$$

где  $K \approx f \frac{D_2 + D_1}{4}$  — коэффициент, зависящий от размеров трущихся поверхностей и материала фрикционных.

Из (VII.19) вытекает, что в процессе нагружения касательные и нормальные напряжения в сечении, перпендикулярном к оси образца, будут связаны соотношением

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{(D_2^3 - D_1^3) f \sigma}{(D_2^2 - D_1^2) (D_H + D_B)} \approx f \frac{D_1 + D_2}{D_H + D_B} \sigma = K_1 \sigma. \quad (\text{VII.20})$$

Здесь  $D_n$  и  $D_v$  — соответственно наружный и внутренний диаметры образца в рабочей части;  $K_1$  — коэффициент, имеющий тот же смысл, что и  $K$ .

Сравнивая (VII.18) и (VII.20), можно найти

$$K_1 = \frac{2K}{D_{cp}}.$$

Описанное устройство позволяет осуществлять напряженные состояния, при которых  $K_1$  находится в пределах  $20 > K_1 > 0,2$ , так как при других значениях параметра необходимо значительно увеличивать размеры дисков, что делает устройство громоздким и неудобным в эксплуатации, или уменьшать их настолько, что фрикционное устройство становится не конструктивным. Изменение  $K_1$  в указанных пределах позволяет менять соотношение между главными нормальными напряжениями в интервалах  $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 20 \div 1,05$  и  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = -0,95 \div -0,05$ , что практически охватывает все поле напряжений второго квадранта системы координат в главных напряжениях.

Устройство для нагружения по схеме крутящий момент — растяжение отличается от описанного лишь конструктивным исполнением узла трения. Дополнительное нагружение образца внутренним давлением значительно расширяет возможности описанных устройств.

Схема винтового преобразователя представлена на рис. 108. Преобразователь содержит обойму 3 с двумя винтовыми пазами, связанную с захватом 1, самоустанавливающуюся державку 5 с подшипниками 2, размещенными в пазах обоймы, и шток 4, связанный с державкой. Прилагаемое к штоку со стороны нагружающей системы усилие посредством державки 5 и подшипников 2 передается на витки обоймы 3. При этом на захвате 1, жестко связанном с обоймой, кроме растягивающего усилия, возникает и крутящий момент

$$M_{кр} = 2TR_{cp} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - f}{1 + f \operatorname{tg} \alpha} NR_{cp}, \quad (\text{VII.21})$$

где  $R_{cp}$  — средний радиус винтовой нарезки;  $\alpha$  — угол подъема винтовой линии на среднем радиусе;  $f$  — приведенный коэффициент трения.

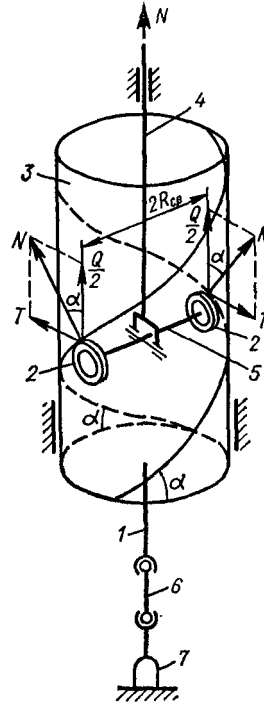


Рис. 108. Схема винтового преобразователя.

Благодаря применению опор качения величина  $f$  пренебрежимо мала, поэтому соотношение между передаваемыми на образец осевой силой и крутящим моментом записывается в виде

$$\frac{M_{кр}}{N} = R_{ср} \operatorname{tg} \alpha. \quad (\text{VII.22})$$

Это отношение можно изменять в широких пределах, имея комплект обойм различного радиуса или с различным углом подъема винтовой линии.

Осевая сила и крутящий момент, воспринимаемые образцом 6, регистрируются динамометром 7.

Известны приспособления, в которых нагружение образца крутящим моментом производится за счет сил трения в винтовой паре [293]. Величина момента трения пропорциональна осевой силе и определяется параметрами резьбы, материалом винта и гайки, а также состоянием трущихся поверхностей. Соотношение  $\frac{M_{кр}}{N}$  можно изменять за счет изменения размеров и характеристик узла трения. Существенный недостаток этого приспособления — наличие вибраций при больших нагрузках.

Плоское напряженное состояние в трубчатом образце можно создавать в малогабаритном устройстве [384], показанном на рис. 109. Устройство состоит из корпуса 2, крышки 5, верхнего плунжера 1, нижних сменных плунжеров 4 и гильз 6. Нижняя

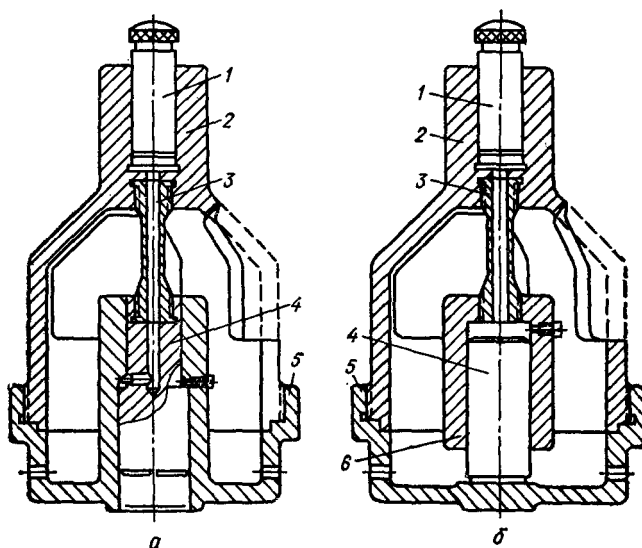


Рис. 109. Общий вид устройства для испытания образцов по схеме осевая сила — внутреннее давление.

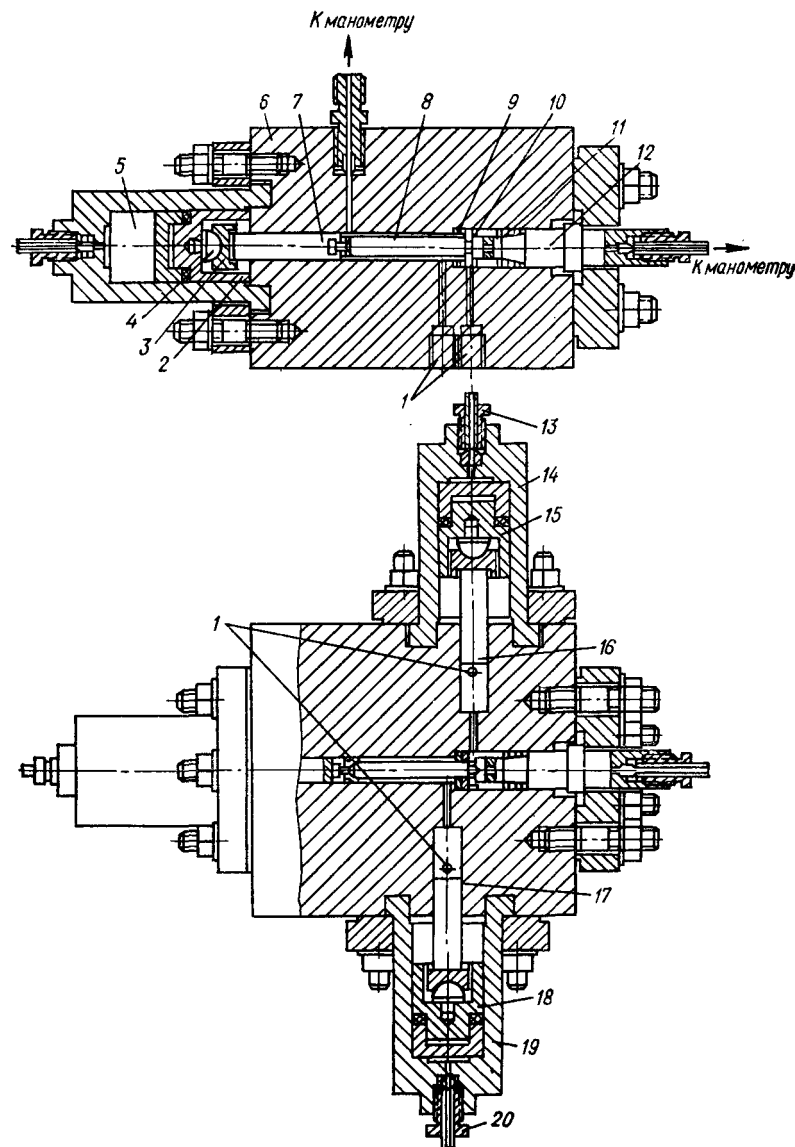


Рис. 110. Устройство для испытания трубчатых образцов под внутренним и внешним давлением:

1 — каналы предварительной подачи наружного и внутреннего давления; 2, 15, 18 — поршни гидравлических цилиндров; 3 — подпятник; 4 — сферическая опора; 5 — гидравлический цилиндр для создания и изменения продольной силы; 6 — корпус испытательной камеры; 7 — плунжер, передающий на образец продольное усилие; 8 — испытуемый образец; 9 — прокладки, разделяющие полости наружного и внутреннего давления; 10 — втулка для извлечения уплотнительных прокладок; 11 — уплотнительные кольца; 12 — запорный пуансон; 13, 20 — соединительные штуцеры; 14, 19 — цилиндры-мультипликаторы внутреннего и наружного давления; 16, 17 — плунжеры цилиндров-мультипликаторов.

головка образца 3 соединена либо с плунжером (рис. 109, а), либо с гильзой (рис. 109, б). Различные напряженные состояния достигаются путем изменения площади кольцевого выступа в нижнем плунжере или диаметра рабочего цилиндра гильзы. По свидетельству авторов работы [384], предложенное приспособление обладает большой надежностью и удобно в обращении.

Тонкостенные трубчатые образцы иногда используются для испытания материалов при объемном напряженном состоянии. В этом случае нагружение образца осуществляется как внутренним, так и наружным давлением. На рис. 110 показана конструкция устройства, разработанного на кафедре сопротивления материалов ЛПИ им. М. И. Калинина. Его прототипом является установка, описанная в работе [510]. Основные узлы устройства — испытательная камера, источник давления и контрольно-измерительная аппаратура. Максимальные значения наружного и внутреннего давления —  $5000 \text{ кг/см}^2$ , осевой силы —  $35\,000 \text{ кг}$ . Все нагрузки на образец осуществляются с помощью гидравлических систем.

В заключение отметим, что при испытании трубчатых образцов из пластичных материалов потеря устойчивости пластического деформирования зависит от ориентации главных напряжений по отношению к образующей. Так, по данным работы [97], предельные деформации при одноосном осевом растяжении могут превышать предельные деформации при одноосном растяжении в тангенциальном направлении, что экспериментально подтверждает влияние формы образца на деформационную способность испытуемого материала.

#### § 4. Испытания плоских образцов и элементов сосудов при двухосном растяжении

В литературе описано много способов испытания плоских образцов при двухосном растяжении.

Для решения отдельных задач механики материалов (о концентрации напряжений при плоском напряженном состоянии, о закономерностях развития малых упруго-пластических деформаций и др.) используются образцы в виде прямоугольника или параллелограмма, имеющие по сторонам специальные захваты (рис. 111, а) для приложения растягивающих усилий.

Для обеспечения равномерности приложения нагрузки применяют систему равноплечих рычагов или плоские зажимы. Недостаток таких образцов — краевые эффекты, возникающие в местах крепления захватов (зона, прилегающая к отверстиям). Для ликвидации зон сжатия (на рис. 111, а заштрихованы) отверстия заменяют узкими щелями, как показано на рис. 111, б. Жесткость крайних полос должна быть меньше жесткости средних, так

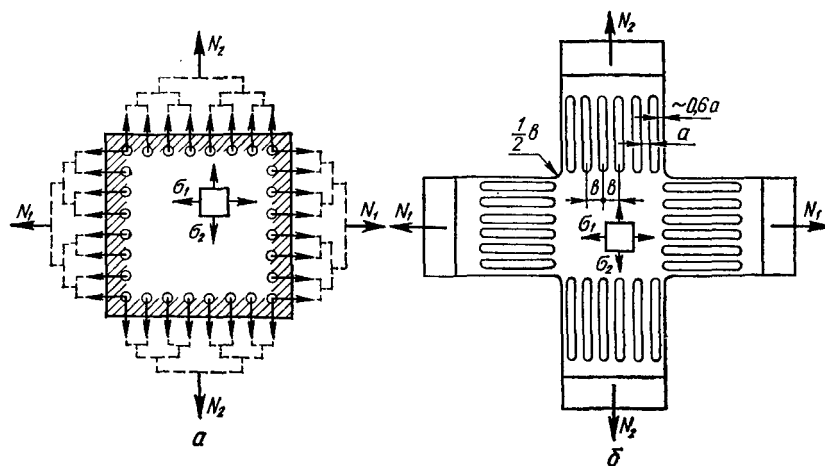


Рис. 111. Плоский образец для испытаний материала на двухосное растяжение:

*a* — под съемные захваты; *b* — с прорезями.

как эти полосы, работая на изгиб, оказывают наибольшее сопротивление деформированию в перпендикулярном направлении. Оптимальная жесткость этих полос, по данным работы [602], обеспечивается при ширине, составляющей около 60% ширины средних полос.

Анализ напряженного состояния такого образца, проведенный методом замораживания [602], показал, что при одноосном растяжении вторая компонента напряжений практически отсутствует ( $\sigma_2 < 0,01 \sigma_1$ ), а в квадрате со стороной не более  $3/4$  расчетной ширины рабочего участка отклонения напряжений от среднего значения не превышают  $\pm 1,4\%$ . Чем тоньше прорези и чем их больше, тем однороднее поле напряжений в рабочей части. В работе [15] исследовались образцы, в которых ширина прорезей составляла 0,4—0,6 мм при длине около 0,75 стороны центрального квадрата.

Испытания крестообразных образцов, в отличие от трубчатых, позволяют реализовать двухосное растяжение ( $0 < \frac{\sigma_2}{\sigma_1} < 1$ ) при отсутствии градиентов напряжений по толщине стенки. Однако следует иметь в виду, что эти образцы пригодны для испытания только упрочняющихся материалов, так как достаточный уровень напряжений в рабочей части достигается только после перехода металла в зоне прорезей в стадию упрочнения.

На рис. 112, *a* показан образец для реализации нагружения с поворотом главных осей, а на рис. 112, *б* — вариант выполнения образца без прорезей.

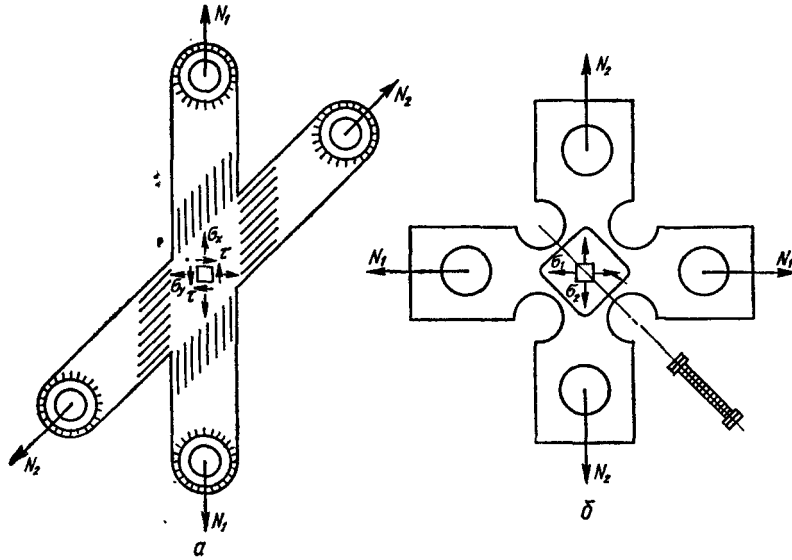


Рис. 112. Конструктивные схемы выполнения крестообразных образцов.

Испытания крестообразных образцов производят на установках, включающих две системы нагружения [199], или с применением специальных реверсоров [88, 157].

Для испытания материалов при плоском напряженном состоянии Завертом [631] были использованы образцы в виде круговой пластины, расположенной внутри жесткого обода (рис. 113, а). При нагружении образца в пластине возникает плоское напряженное состояние с главными напряжениями противоположных знаков. Соотношения между ними в сравнительно узком диапазоне можно менять за счет изменения размеров и жесткости обода. Для расширения диапазона соотношений главных напряжений в Институте проблем прочности АН УССР применено подкрепление обода вставными кольцами различной жесткости (на рис. 113, а показаны штрих-пунктиром), изготовление обода эллиптической формы, а также обода с отрицательной кривизной (рис. 113, б), соотношения между осями эллипса и радиусом кривизны выбираются в зависимости от необходимой схемы напряженного состояния в пластине [51, 228]. Напряжения в упругой области определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2); \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1).\end{aligned}\tag{VII.23}$$

Главные деформации  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  определяются экспериментально на образцах-свидетелях.

Достоверные результаты при испытании образцов с жестким ободом можно получить только в области упругих и малых упруго-пластических деформаций, так как дальнейший рост нагрузок приводит к потере устойчивости пластины.

Равномерное двухосное растяжение ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ) можно получить в центре диска, опертого по контуру и нагружаемого в центральной части по кругу (при помощи пуансона, имеющего круговой выступ). Напряжения в центре диска из хрупкого материала могут быть определены по формуле

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{3N}{2\pi R^2} \left[ \frac{1}{2} (1 - \mu) + (1 + \mu) \ln \frac{R}{r} - (1 - \mu) \frac{r^2}{2a} \right], \quad (\text{VII.24})$$

где  $N$  — прилагаемое усилие;  $R$  — радиус диска;  $r$  — радиус контура, по которому приложена нагрузка;  $a$  — толщина диска.

Если деформирование диска сопровождается заметными пластическими деформациями, то метод может использоваться лишь для сравнительных испытаний.

Более корректные результаты в отношении механических свойств материалов можно получить на плоских тонких образцах, заземленных по контуру и нагружаемых односторонним равномерно распределенным давлением (жидкостью или газом).

Испытания методом выпучивания могут проводиться как на плоских образцах, так и на образцах в виде полых шаровых сегментов, полученных, в частности, путем вытяжки с последующей термической обработкой. При вытяжке наблюдается равномерное утонение стенки в зоне, примыкающей к оси сегмента. Диаметр этой зоны зависит от степени деформации и свойств материала и

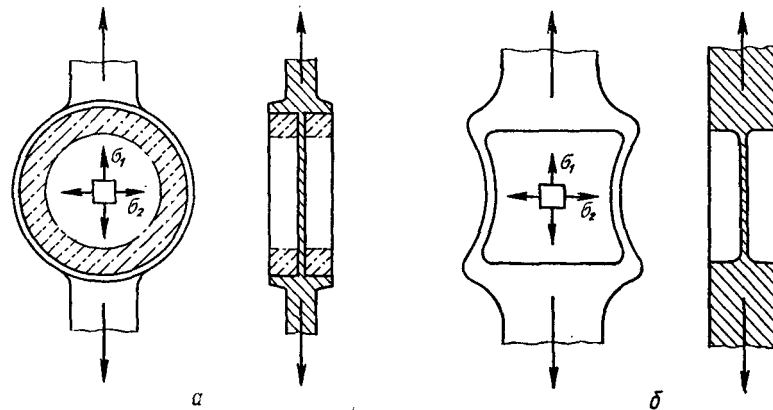


Рис. 113. Конструктивные схемы выполнения образцов с жестким ободом.



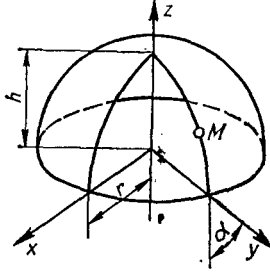


Рис. 114. К расчету напряжений в сферической оболочке.

составляет около одной трети диаметра рабочей части образца [156]. Образцы в виде предварительно деформированных сегментов позволяют снизить влияние краевых эффектов в зоне защемления.

Если образец зажат по круглому контуру, то при достаточно большом радиусе  $r$  контура и малой толщине  $t$  образца изгибными напряжениями, как правило, пренебрегают. Главные напряжения в вершине сферы

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pR}{2t}, \quad (\text{VII.25})$$

где текущий радиус  $R$  сферы определяется по высоте  $h$  вздутия,

$$R = \frac{r^2 + 4h^2}{8h}.$$

На начальной стадии деформирования, когда радиус кривизны оболочки существенно больше радиуса контура зажатия, форма образца заметно отклоняется от сферической только вблизи контура. При дальнейшем деформировании образующую поверхности (рис. 114) достаточно точно можно аппроксимировать линией [439]

$$z = a + by^2 + cy^4,$$

где коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  определяются из условий:  $z = h$  при  $y = 0$ ,  $\frac{dz}{dy} = -\tan \alpha$  при  $y = r$  и  $z = 0$ . Таким образом,

$$a = h; \quad b = \frac{r \tan \alpha - 4h}{2r^2}; \quad c = \frac{2h - r \tan \alpha}{2r^4}.$$

Радиус кривизны образующей в произвольной точке  $M$

$$R_1 = \frac{\sqrt{[1 + 4(by + cy^3)^2]^3}}{2(b + 6cy)}.$$

Второй радиус кривизны

$$R_2 = -\frac{y \sqrt{1 + (2by + 4cy^3)^2}}{2by + 4cy^3}.$$

Радиус кривизны в вершине

$$R = \frac{1}{2b}.$$

При рассматриваемых степенях выпучивания материал образца, естественно, работает за пределом упругости. Из условия про-

порциональности девиаторов получаем

$$\frac{\sigma_r'}{\sigma_\theta'} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_\theta}$$

или, переходя к компонентам тензора напряжений,

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_\theta} = \frac{2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta}{2\varepsilon_\theta + \varepsilon_r} = m. \quad (\text{VII.26})$$

Из условия равновесия элемента деформированной оболочки находим

$$\sigma_r \left( \frac{1}{R_1} + \frac{m}{R_2} \right) = \frac{p}{t}. \quad (\text{VII.27})$$

Соотношения (VII.26) и (VII.27) позволяют при известных деформациях в данной точке и заданном давлении определить соответствующие компоненты напряжений.

Для получения напряженных состояний с различным соотношением главных напряжений Я. Б. Фридман с сотрудниками [116, 156] использовал прижимную шайбу с контуром в виде эллипса. Таким методом можно испытывать листовые материалы при напряженных состояниях в диапазоне от одноосного растяжения (контур в виде щели) до двухосного равномерного растяжения (круглый кантур).

Опыты показывают, что при равномерном нагружении сегмента эллипсоидальной формы соотношение между главными напряжениями не зависит от высоты сегмента и остается постоянным даже при переходе в пластическую область. По данным Я. Б. Фридмана, при отверстиях с размерами осей эллипса 120 и 60 мм образец испытывает двухосное растяжение с соотношением напряжений, равным 0,7. Метод расчета напряжений в оболочках эллипсоидальной формы описан в работе [82].

Имитация условий работы под давлением цилиндрических сосудов может быть получена гидростатическим выдавливанием плоского образца через овальные отверстия. Измерения деформаций в процессе нагружения датчиками сопротивления и остаточных деформаций с помощью накатанных сеток, выполненные С. А. Куркиным [219] на образцах из стали Ст. 3 толщиной 2 мм, показали, что отношение  $\sigma_2/\sigma_1$  при размерах овального отверстия, указанных на рис. 115, составляет 0,6. Еще большее приближение к схеме  $\sigma_2/\sigma_1 = 0,5$  можно получить при гидростатическом выпучивании листового элемента в виде цилиндрической обечайки [220]. Схема такого испы-

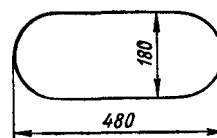


Рис. 115. Размеры овального отверстия в прижимной плите в опытах С. А. Куркина.

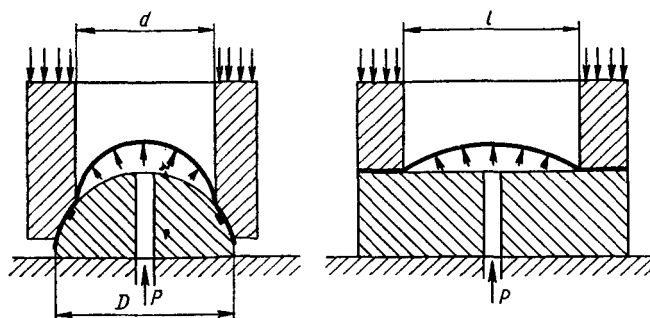


Рис. 116. Схема испытания выпучиванием элемента цилиндра.

тания представлена на рис. 116. Иногда эта схема реализуется путем глубокого травления (химического фрезерования некоторого участка трубчатого образца [11]). В этом случае нагружение можно производить как внутренним давлением, так и осевой силой (рис. 117). При расчете напряжений влиянием «толстой рамы» пренебрегают.

Если сопоставить метод испытаний выпучиванием с испытаниями трубчатых образцов (см. § 3 настоящей главы), то легко заметить, что в процессе нагружения кривизна элемента рабочей части образцов изменяется по-разному. При испытании трубчатых образцов развитие пластических деформаций приводит к увеличению диаметра образца; при этом напряжения возрастают как за счет роста давления, так и за счет увеличения диаметра. Развитие пластических деформаций плоского образца, наоборот, приводит к увеличению кривизны, и при заданном давлении  $p = \text{const}$  напряжения уменьшаются.

Характер распределения пластических деформаций также не одинаков. Если в трубчатом образце деформация распределяется равномерно и ее локализация происходит при наступлении потери пластической устойчивости, то при выпучивании листового материала деформация с самого начала распределяется неравномерно, причем локализация деформации приводит к изменению радиуса, т. е. к уменьшению напряжений.

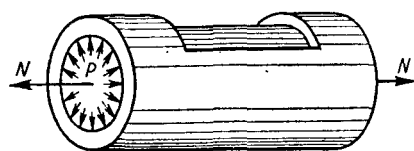


Рис. 117. Трубчатый образец с местным утонением.

Однако отмеченные особенности метода не могут, очевидно, оказать существенного влияния на качественную картину процесса деформирования. Испытания макетов сосудов внутренним давлением с измерением деформаций в процессе нагру-

жения подтверждают [223, 287] объективность оценки, получаемой при испытаниях в условиях двухосного растяжения методом гидроскопического выпучивания плоского образца.

#### § 5. Другие методы статических испытаний материалов при сложном напряженном состоянии

Механические испытания материалов при сложном напряженном состоянии весьма трудоемки и требуют соответствующего технического обеспечения. Поэтому в лабораторной практике часто используются экспресс-методы, позволяющие производить сравнительную оценку свойств материала и выбирать оптимальные варианты по составу, структуре, режиму термомеханической обработки и т. п.

Наиболее простым способом испытания материалов в условиях двухосного растяжения (в пластической области) является изгиб широких пластин с отношением ширины к толщине  $b/t \geq 5$  [117, 624]. Однако этот способ применим лишь для испытания материалов с относительным сужением сечения при растяжении  $\varphi < 50\%$ , так как более пластичные материалы нельзя довести до разрушения.

Известен простой метод испытания осевой растягивающей силой широкого образца с узкой поперечной двухсторонней выточкой [116, 536]. Толщина металла в зоне выточки принимается около  $0,6 t$ , а ее ширина — порядка  $2t$ ; при этом ширина образца должна составлять не менее  $20 t$ . При растяжении такого образца в пластической области в центральной части выточки имеет место двухосное растяжение с соотношением главных напряжений  $\sigma_2/\sigma_1 = +0,5$ . Испытания позволяют определить величину разрушающего напряжения, предельную пластичность, а также выявить чувствительность к надрезу при двухосном растяжении.

Для создания сложного напряженного состояния широко используют острые надрезы. Основные параметры, характеризующие режим испытаний, — соотношение между главными компонентами тензора напряжений, их уровень и градиентальность — можно изменять за счет геометрии образца и геометрии надреза. Так, имеющиеся в литературе данные показывают, что напряженное состояние в окрестности выточки круглого образца можно изменять от линейного (очень мелкая — «поверхностная» — выточка) до объемного за счет увеличения глубины  $t$  выточки при постоянном диаметре, а величину местного повышения напряжений (коэффициент концентрации и градиент напряжений) — за счет радиуса  $\rho$  устья.

На рис. 118 показаны типичные эпюры напряжений в сечении круглого образца с круговой выточкой для случая двумер-

ного (а) и трехмерного (б и в) напряженного состояния, причем  $\rho' < \rho''$  и  $t' < t''$ .

Качественные и количественные оценки характеристик напряженного состояния производятся или теоретически, методами теории упругости и теории пластичности, или экспериментально, методом фотоупругости, тензометрирования и др.

Распределение напряжений в зоне надреза характеризуется коэффициентом концентрации  $K_t$ , который определяется как отношение максимального напряжения к среднему напряжению по сечению,

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ср}}},$$

и градиентом напряжений  $\frac{d\sigma}{dr}$ . В стадии упругих деформаций увеличение напряжений происходит пропорционально повышению внешней нагрузки, причем величина  $\sigma_{\max}$  и градиенты напряжений зависят от размеров и формы концентратора. При дальнейшем увеличении нагрузки в точке, где действуют максимальные напряжения, происходит пластическая деформация и, начиная с этого момента, скорость возрастания  $\sigma_{\max}$  существенно отстает от скорости повышения напряжений в менее нагруженных объемах. Это приводит к расширению фронта пластических деформаций в глубь сечения и к перераспределению напряжений.

Анализ напряженного и деформированного состояния круглых сплошных и полых образцов с выточкой, особенно в стадии упруго-пластического деформирования, связан с большими трудностями [92, 451, 497]. Поэтому использование описанных образцов можно считать оправданным только при экспериментальном решении некоторых частных задач прочности конструкций.

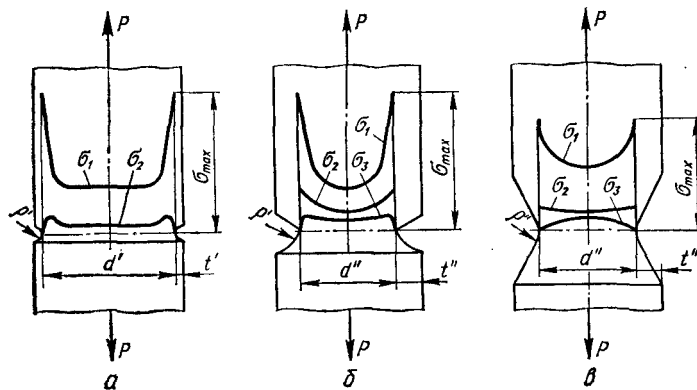


Рис. 118. Распределение напряжений в цилиндрическом образце с круговой выточкой.

Напряженное состояние с соотношением напряжений  $\sigma_1/\sigma_3 = -3$  можно получить в центральной части цилиндра, сжимаемого по радиусу между параллельными плитами пресса. Это соотношение сохраняется и при пластических деформациях, достигающих 10% [180]. Недостатком метода, как и в случае применения надрезов, является наличие градиентов напряжений по радиусу: сжимающие напряжения по мере удаления от зоны контакта с плитами к центру уменьшаются, а растягивающие, наоборот, изменяются от нуля на поверхности до максимального значения в центре образца.

Интересный метод экспериментального исследования закономерностей пластического деформирования на сплошных круглых образцах предложен В. И. Максаком [274]. Испытание двух образцов с различными диаметрами на одновременное растяжение и кручение трактуется как испытание соответствующего трубчатого образца. Результаты испытаний представляются в виде зависимостей удлинения от осевой силы и угла закручивания от крутящего момента. Путем наложения кривых, полученных на больших и малых образцах, находят значения соответствующих параметров, характеризующих напряженное и деформированное состояние трубчатого образца, наружный диаметр которого равен диаметру большего образца, а внутренний — диаметру меньшего образца. По сведениям автора опыты показали, что предложенный метод является вполне приемлемым. К его достоинствам, наряду с технологичностью образцов, можно отнести возможность исследования больших пластических деформаций, когда применение трубчатых образцов невозможно по причине потери устойчивости тонкой стенки при кручении.

Испытания хрупких материалов типа горных пород и бетонов можно проводить по схеме, приведенной на рис. 119. Обоймы изготовляются из прочного материала. Напряженное состояние образца в плоскости стыка обойм характеризуется нормальными  $\sigma$  и касательными  $\tau$  напряжениями, соотношение между которыми  $\frac{\tau}{\sigma} = \operatorname{tg} \beta$ . Имея несколько пар обойм с различным углом скоса, можно при наличии одного пресса экспериментально строить огибающие кругов Мора для исследуемого материала. Способ прост и удобен, однако достоверность получаемых результатов недостаточно высока.

Оригинальный метод испытания материалов разработан А. Ф. Иоффе и М. А. Левитской [174], предложившими созда-

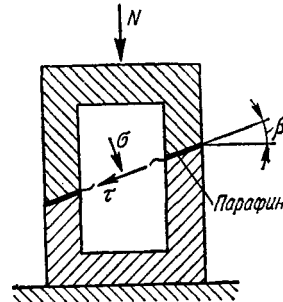


Рис. 119. Схема экспериментальной установки для испытания хрупких материалов.

вать гидростатическое растяжение путем быстрого нагрева охлажденного шарика. Этот метод не нашел применения ввиду трудности точного определения уровня напряжений в области трехосного растяжения — в центре шарика.

### § 6. Методы испытания материалов на усталость

Метод испытания материалов на усталость при сложном напряженном состоянии выбирается, как правило, по соображениям удобства создания переменного силового фактора. Наиболее широкое распространение получили испытания сплошных и полых образцов на изгиб с кручением, испытания трубчатых образцов с изменяющимися во времени параметрами внешних воздействий, испытания образцов в виде кубиков с применением различных реверсоров и приставок и др.

Машины для испытания на усталость при изгибе с кручением можно разделить на две группы: машины, в которых образцы неподвижны, и машины с вращающимся образцом. К первой группе можно отнести машины Гафа и Полэрда, Ляхова, Гарфа, описанные в работе [413], а также машины с резонансным принципом нагружения [504]. Эти машины позволяют производить усталостные испытания материалов в широком диапазоне частот нагружения, соотношений нормальных и касательных напряжений. Однако взаимосвязность изменения напряжений по фазе не позволяет воспроизводить реальные условия работы деталей, для которых, как правило, характерно одновременное нагружение изгибающим и крутящим моментами, изменяющимися во времени по разным законам. Кроме того, усталостная прочность при изгибе неподвижной детали в одной плоскости и при изгибе вращающейся детали может быть разной [394].

Условия нагружения таких деталей, как вращающиеся валы, в большей мере воспроизводятся на машинах второй группы. Здесь, как правило, для нагружения вращающегося образца крутящим моментом используется принцип замкнутого силового контура, а нагружение изгибающим моментом производится независимой системой [150, 503]. Такая схема использована при создании установки с механизмом программирования режима нагружения образца по крутящему и изгибающему моментам [65].

Серия установок для испытания трубчатых образцов под действием внутреннего давления и изгибающего момента разработана И. Н. Шкановым [485, 493]. На рис. 120 показана принципиальная схема установки для испытания трубок на круговой изгиб при внутреннем давлении до  $1000 \text{ кг/см}^2$ .

Образец 10 крепится в захвате 11. Благодаря шаровой опоре образец устанавливается соосно со шпиндельной бабкой 7, в которой вращается девиатор 8, нагружающий образец поперечной

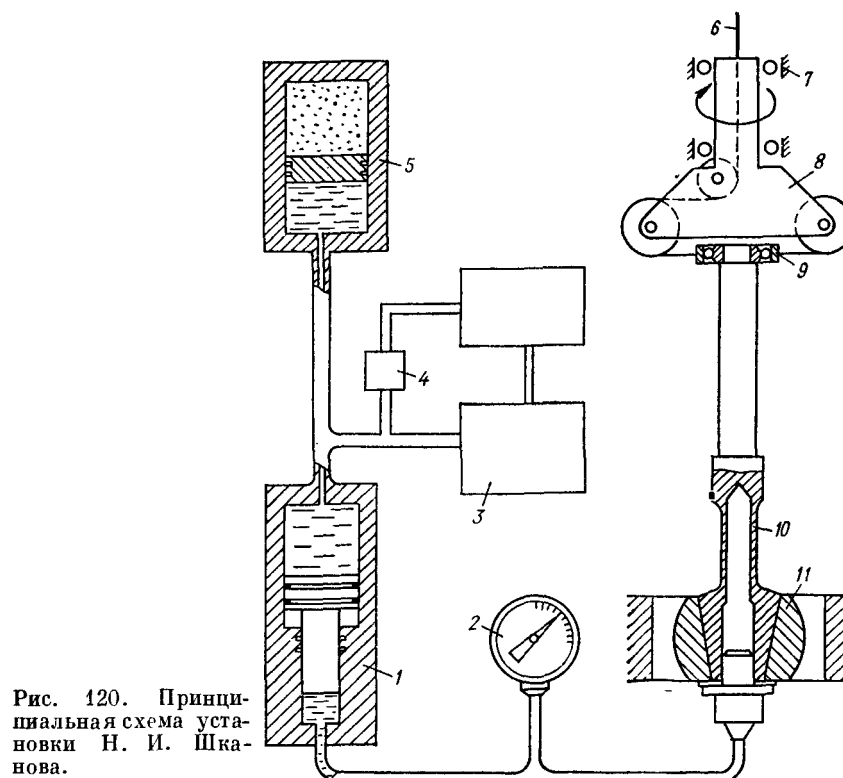


Рис. 120. Принципиальная схема установки Н. И. Шканова.

силой посредством гибкого тросика 6 и сферического подшипника 9. Циклическое нагружение образца осуществляется путем вращения вектора силы, а нагружение внутренним давлением — от насоса 3 через мультипликатор 1. Избыточное давление стравливается клапаном 4. Система снабжена гидроаккумулятором 5 и образцовым манометром 2.

Применение в установке невращающегося образца удобно с точки зрения подвода высокого давления. Однако наличие массовых сил на конце прогнутого образца затрудняет расчет фактических напряжений в рабочей части. В описанной установке двигатель снабжен компенсатором инерционных сил [495].

Установка с гидравлическим приводом для испытания трубчатых образцов в условиях повторного пропорционального нагружения внутренним давлением (до  $500 \text{ кг/см}^2$ ) и осевой силой (до  $1500 \text{ кг}$ ) описана в работе [484]. Принципиальная схема этой установки показана на рис. 121.

Давление, создаваемое насосом 1, поддерживается постоянным при помощи клапана 2. Нагружение образца 11 осевой силой



и внутренним давлением начинается при включении электромагнитного клапана 3, через который жидкость под давлением поступает в гидроусилитель 4 (штриховой линией показан его контур), в полость цилиндра 5, и в силовой цилиндр 14. При этом электромагнитный кран 20 в обесточенном состоянии соединяет полость М со сливом.

Соотношение между давлением внутри образца и в силовом цилиндре, равное коэффициенту усиления гидроусилителя, устанавливается путем передвижения цилиндров 5 и 8 вдоль двуплечего рычага 7 и направляющей 16. Линейное (во времени) нарастание давления обеспечивается дросселями 17 и 18. Управление штоком силового цилиндра производится краном 19.

При разгрузке (кран 3 обесточен, кран 20 включен) происходит перетекание жидкости из полостей А и Н цилиндров 5 и 14 в бак через предохранительные клапаны 6 и 15, поддерживающие постоянное давление в полостях А, Б и М, Н. Для измерения давления в процессе испытаний служат манометры 9 и 12 и упругий цилиндр 10 с тензодатчиками. Осевая сила измеряется динамометром 13. Принятая схема управления кранами 3 и 20 обеспечивает ручное и автоматическое управление экспериментом с частотой от 0,5 до 25 циклов в минуту.

Методика испытания трубчатых образцов на внутреннее давление при пульсирующих растяжении, изгибе, кручении описана

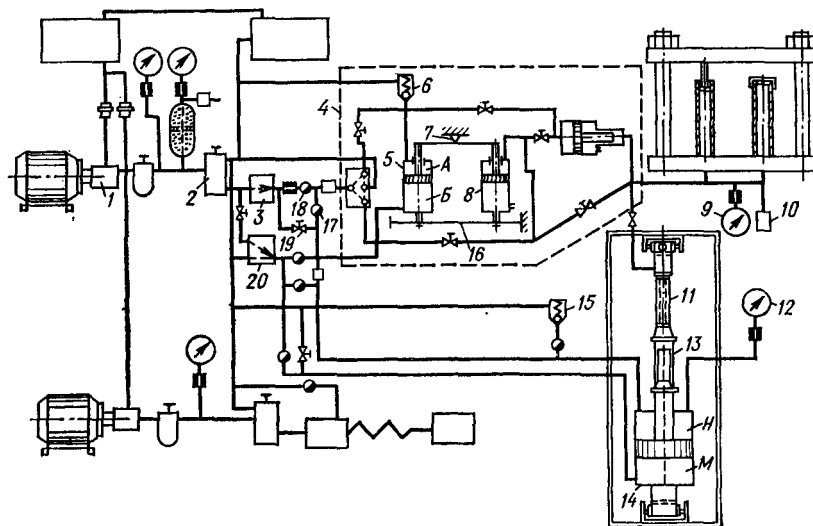


Рис. 121. Принципиальная схема установки для пульсирующего пропорционального нагружения образца осевой силой и внутренним давлением.

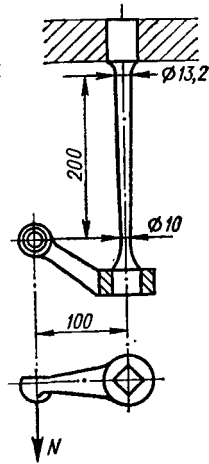
Рис. 122. Схема испытаний образца по Интерсону.

в работе [537], а при пульсирующем внутреннем давлении — в работе [395].

Иногда для испытания материалов на усталость при сложном напряженном состоянии используются различные механические реверсоры и приставки к пульсаторам [338, 339]. Для исследования усталостной прочности при всестороннем сжатии кубиков использован реверсор, преобразующий переменное усилие пресса в двухосное и трехосное циклическое сжатие кубиков [36].

Вместо механических преобразователей используются специальные образцы, форма которых такова, что при погружении растягивающей или сжимающей силой в рабочей части создается сложное напряженное состояние. Так, образец в виде круговой пластины с жестким ободом использован в работе [462] для создания в его рабочей части вращающегося силового поля при постоянном соотношении главных напряжений. Образец нагружался сжимающим усилием со стороны двух диаметрально расположенных колодок с вкладышами из антифрикционного материала. При вращении образца энергия деформаций в его центре оставалась постоянной, а напряжения на каждой площадке, ориентированной перпендикулярно заданному диаметру, изменялись от сжатия к растяжению. Вращение передавалось на образец через специальные пазы в ободе последнего. Контроль за развитием трещины в рабочей части образца производился периодически при невращающемся образце.

Интерсон [568] использовал образцы с коническим рабочим участком, нагружение которого изгибающим и крутящим моментами производилось по схеме, показанной на рис. 122. Сечение образца выполнено таким образом, что эквивалентные напряжения, рассчитанные по критерию Кулона, выше в тонкой части образца, а рассчитанные по критерию Мизеса — в толстой. О применимости к исследуемому материалу того или иного критерия судят по месту разрушения образца.



## § 7. Вопросы тензометрирования

Выбор метода и средств измерения деформаций при механических испытаниях в условиях сложного напряженного состояния определяется целями проводимого эксперимента и зависит от вида испытываемого образца и способа его нагружения.

Практически все известные способы тензометрирования дают возможность с большей или меньшей точностью измерять дефор-

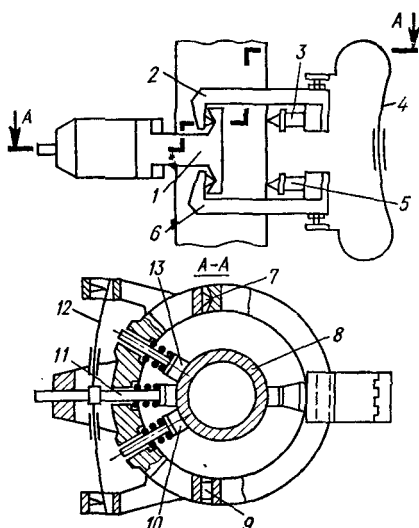


Рис. 123. Схема экстензометра для измерения продольных и поперечных деформаций.

мации образца на поверхности, но не позволяют «заглянуть в толщу» материала. Задачу определения всех составляющих тензора деформаций можно решать лишь поляризационно-оптическим методом на моделях из оптически-активного материала. Однако данные, полученные методом моделирования, нельзя переносить на реальные материалы. Оптически-активный материал, из которого изготовляют модель, имеет, как правило, механические характеристики, отличные от характеристик широкого класса конструкционных материалов, что при прочих равных условиях сказывается на деформированном состоянии. В практике механических испытаний материалов и конструкций широко используются мето-

ды сеток, муаров, оптически-активных и хрупких покрытий, резисторная тензометрия. Деформированное состояние металла иногда оценивается косвенными характеристиками, получаемыми методами твердости, магнитной проницаемости и т. п.

Возможности и ограничения указанных методов достаточно полно освещены в литературе [115, 200, 466]. Их применение в испытаниях материалов при сложном напряженном состоянии не требует каких-либо дополнительных усовершенствований или доработок. Поэтому здесь ограничимся рассмотрением некоторых наиболее удачных конструкций экстензометров, используемых для измерения деформаций трубчатых и сферических образцов.

Для измерения продольных и поперечных деформаций трубчатых образцов, нагружаемых осевой силой и внутренним давлением, может быть использован электромеханически экстензометр [246], разработанный в Институте проблем прочности АН УССР. Схема тензометра показана на рис. 123. Экстензометр состоит из корпуса 1, рычагов 2, 6 с рабочими упорами 3, 5, монтажных упоров 10, 13 и штока 11 для передачи поперечной деформации образца 8 на упругие элементы. Каждый из рычагов связан с корпусом посредством призмы 9 и керны 7, которые под воздействием пружин монтажных упоров «самоустанавливаются», обеспечивая возможность поворота рычагов относительно корпуса в одной плоскости. Надежная связь тензометра

с образцом обеспечивается трением в зоне контакта упоров 3, 5, 10, 13 с поверхностью образца.

Для преобразования продольных и поперечных деформаций образца в электрические сигналы применены упругие элементы 4 и 12 специальной конструкции с наклеенными тензорезисторами. Упругие элементы изготовлены из листовой бериллиевой бронзы толщиной 0,5 мм. На каждый упругий элемент наклеены два проволочных тензорезистора, соединенных по полумостовой схеме, один подвергается деформации растяжения, другой — сжатия. Такая схема включения увеличивает вдвое чувствительность и автоматически обеспечивает температурную компенсацию. Выводы от тензорезисторов подпаяны на клеммники.

В Институте проблем механики АН СССР разработан оригинальный экстензометр для измерения продольных и угловых деформаций трубчатых образцов, нагружаемых осевой силой и крутящим моментом. Отличительная особенность экстензометра (рис. 124) — крепление фиксирующих игл внутри образца, что обеспечивает устойчивую работу тензомерта при повышенных температурах.

Экстензометр состоит из трубки 1, связанной посредством винта 2 и фиксирующих игл 3 с верхней частью образца, и стержня 5, в который вставлены нижние фиксирующие иглы 6, поджимаемые винтом 4. Торец стержня упирается в головку 8 индикатора, корпус которого при помощи кронштейна 9 жестко связан с трубкой 1.

Монтаж экстензометра осуществляется в такой последовательности. Стержень 5 с вложенными в него иглами 6 и винтом 4 вставляется в трубку 1 до упора в бурт, после чего последняя вставляется в образец. Поджимая винт 4, фиксируют положение стержня внутри образца. Затем, подняв трубку вверх, вставляют иглы 3 и, опустив трубку до упора, фиксируют их винтом 2. Линейные деформации образца фиксируются индикатором, а угловые — оптическим устройством посредством зеркал 7.

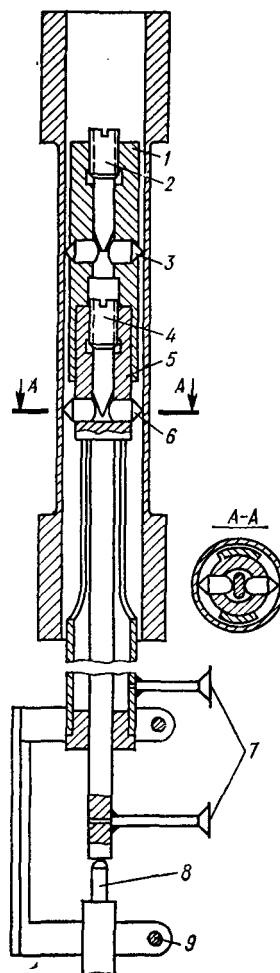


Рис. 124. Схема экстензометра для измерения продольных и угловых деформаций.

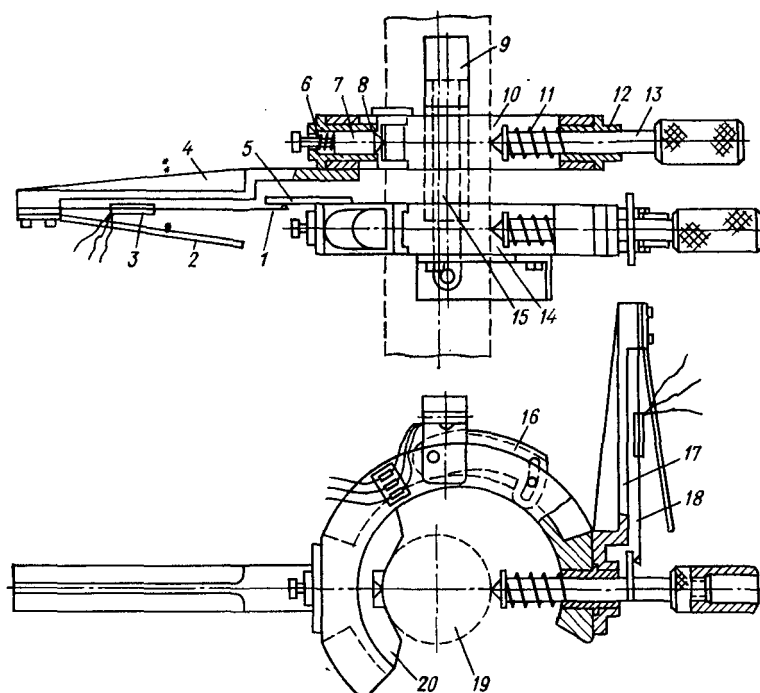


Рис. 125. Схема экстензометра для измерения продольной, поперечной и угловой деформаций.

Для одновременного измерения продольной, окружной и угловой деформаций образца в Институте проблем прочности АН УССР разработан экстензометр, схема которого показана на рис. 125. Экстензометр состоит из двух скоб 10 и 14, каждая из которых крепится к образцу 19 с помощью призмы 20 и двух подпружиненных игл 7, 13, перемещающихся во втулках 8 и 12. К верхней скобе с помощью кронштейнов 4 и 9 консолю крепятся упругие элементы 1 и 15, предназначенные для измерения соответственно продольных и угловых деформаций образца. На нижней скобе расположены упор 5 и кулачок 16, воздействующие на свободные концы упругих элементов. Угол подъема кулачка можно регулировать его поворотом относительно оси.

Измерение поперечных деформаций образца осуществляется упругим элементом 18, закрепленным на кронштейне 17 нижней скобы. Защита тензорезисторов 3, наклеенных на упругие элементы, от механических повреждений осуществляется щитками 2. Усилие, развиваемое пружиной 11, должно быть больше усилия со стороны пружины 6, чтобы обеспечить надежное фиксирование скоб на цилиндрической поверхности образца. В зависимости от

Рис. 126. Тензомер для измерения больших деформаций трубчатых образцов.

характера деформации образца скобы 10 и 14 тензомера могут перемещаться друг относительно друга в осевом направлении и поворачиваться на некоторый угол. При этих перемещениях деформируются упругие элементы 1 и 15, причем при осевом перемещении деформируется только элемент 1, при угловом — только элемент 15.

Для измерения больших линейных (продольных и поперечных) и угловых пластических деформаций может быть использован оптико-механический тензомер, схема которого представлена на рис. 126.

Тензомер состоит из двух разжимных скоб 3, каждая из которых включает два полукольца, связанных гибким тертром 4, и разжимной пружины 2. На каждом полукольце крепится измерительная игла 1. Скобы устанавливаются на трех опорных иглах на рабочей части образца. Расстояние между скобами 20 мм. В зависимости от характера деформации образца скобы могут сближаться или расходиться; кроме того, они могут перемещаться относительно друг друга в осевом и окружном направлениях и поворачиваться на некоторый угол. Во время испытания образца при определенных нагрузках

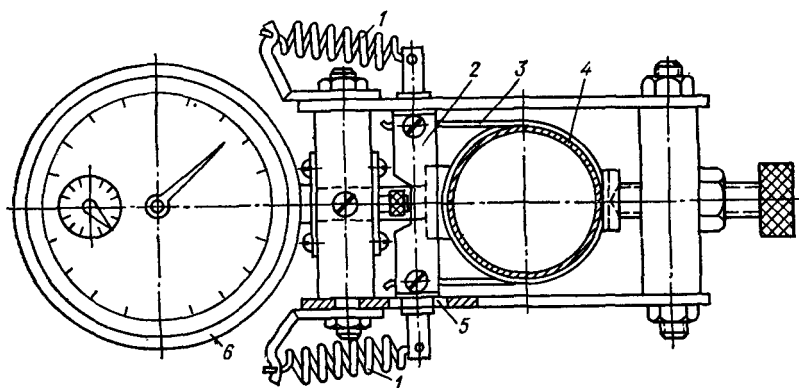
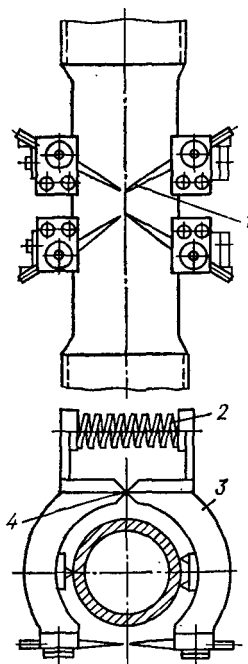


Рис. 127. Струнный тензомер для измерения поперечных деформаций:  
1 — пружина; 2 — ползун; 3 — струна; 4 — образец; 5 — корпус; 6 — индикатор.

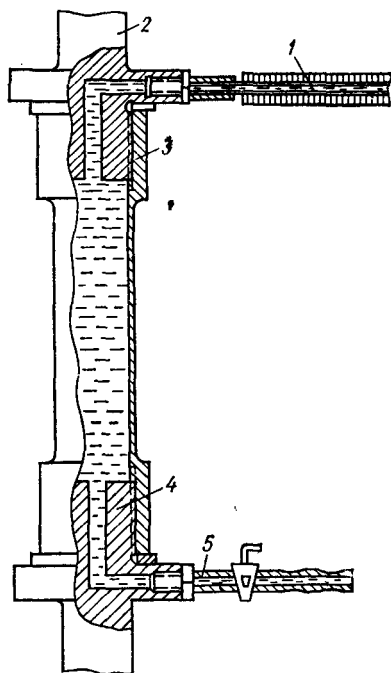


Рис. 128. Схема гидравлического тензометра:

1 — капиллярная трубка; 2 — верхний захват; 3 — образец; 4 — нижний захват; 5 — штуцер с пробковым краном.

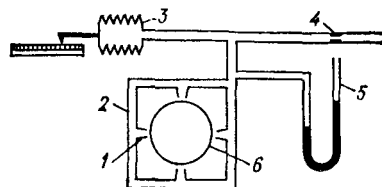


Рис. 129. Схема пневматического тензометра.

положение игл фиксируется на фотопленку. Для повышения контрастности изображения применяется специальный фильтр.

В начале эксперимента делается снимок при ненагруженном образце (начало отсчета). После окончания опыта и проявления пленки изображение проектируется в увеличенном масштабе на специальный экран с делительной сеткой. Поперечная деформация определяется по изменению расстояния между концами игл каждой из скоб. Продольная и угловая деформации определяются по продольному смещению и относительному повороту скоб, регистрируемым по относительным перемещениям соответствующих игл.

Точность, обеспечиваемая тензомером, зависит от резкости изображения на пленке и точности средств его расшифровки.

При испытаниях трубчатых образцов наиболее трудная задача — измерение окружных (поперечных) деформаций. Для получения достоверных данных по окружной деформации, особенно в упругой области, необходимы приборы, имеющие достаточно большой и стабильный коэффициент увеличения. Таковыми являются экстензометры, выполненные по принципу прибора Аистова, модернизированный вариант которого описан в работе [508].

Поперечные деформации круглого образца в процессе испытаний, как правило, неравномерны по длине рабочей части и в плоскости сечения. Поэтому лучше производить несколько измерений. Чтобы исключить влияние эллиптичности, делаются попытки фиксировать изменение не диаметра, а периметра. С этой целью применяют тензомеры, основной элемент которых — струна.

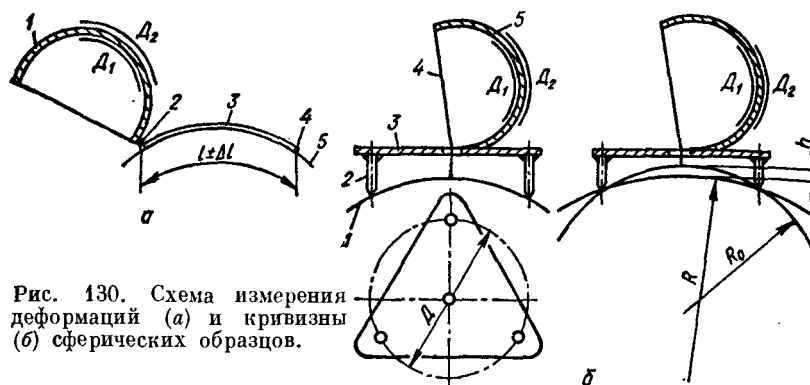


Рис. 130. Схема измерения деформаций (а) и кривизны (б) сферических образцов.

На рис. 127 приведена схема такого тензометра, разработанного в Томском политехническом институте.

Еще более достоверные измерения поперечной деформации можно получить по методике, предложенной в Институте проблем механики АН СССР. Согласно этой методике расчет поперечной деформации производится путем измерения объема внутренней полости образца методом вытесненной жидкости. Устройство гидравлического тензометра показано на рис. 128. Поперечная деформация определяется из соотношения

$$\epsilon' = 1 - \sqrt{\frac{1+\theta}{1+\epsilon}},$$

где  $\theta = \frac{d^3 C}{d_0^3 l_0}$  — относительная объемная деформация;  $\epsilon$  — относительная осевая деформация;  $C$  — разность отсчетов по капиллярной трубке;  $d$  — диаметр капилляра;  $d_0$  — начальный внутренний диаметр образца;  $l_0$  — начальная длина рабочей части образца.

Гидравлический тензометр может быть применен при комбинированном нагружении образца осевой силой и крутящим моментом.

В Институте механики АН УССР в течение длительного времени успешно использовались тензометры с пневмодатчиками. На рис. 129 показана схема измерения поперечных деформаций трубчатого образца пневматическим способом [224]. Рамка 2 с пневмодатчиками-соплами 1 крепится на рабочей части образца 6. Сжатый воздух через регулируемый жаклер 4 подается в систему с некоторым постоянным избыточным давлением. Изменение зазора между устьями сопел и поверхностью образца

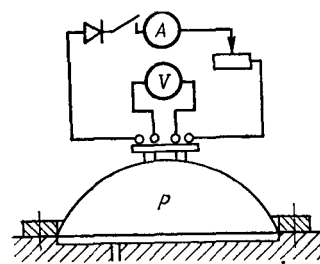


Рис. 131. Схема измерения толщины металлического листа методом электросопротивления.



вследствие деформаций последнего сопровождается изменением давления в системе, которое регистрируется манометром 5 или сильфонным преобразователем 3.

Пневматические тензометры успешно использовались в условиях горячих испытаний на ползучесть [376].

Специфические особенности имеют способы тензометрирования при испытаниях плоских и сферических образцов односторонним давлением. В этом случае при испытаниях нужно измерять не только деформации образца, но и кривизну рабочей поверхности.

Датчики деформаций (рис. 130, а) представляют собой закрепленный натянутой струной 3 упругий элемент 1 с наклеенными тензорезисторами. Крепление датчиков к образцу 5 производится платиками 2 и 4, приваренными к образцу конденсаторной сваркой. Увеличение расстояния между платиками в процессе нагружения передается на упругий элемент и фиксируется высокочувствительным гальванометром, включенным в мостовую схему. Перед испытанием датчики тарируют; при этом упругий элемент закрепляется неподвижно и нагружается посредством струны микрометрическим винтом. Датчик кривизны (рис. 130, б) устанавливается на образец 1 тремя ножками 2 панельки 3; струна 4 одним концом прикрепляется к образцу, вторым — к упругому элементу 5. При нагружении образца смещение  $h$  точки крепления струны относительно плоскости, проходящей через опорные точки ножек, фиксируется гальванометром, что позволяет рассчитать кривизну сферы в зоне измерений.

При испытании листовых материалов часто приходится измерять все три компоненты тензора деформаций, включая компоненту, характеризующую уменьшением толщины листа. Для этой цели применяются специальные толщиномеры, основанные на различных принципах [267]. В работе [403] описан метод измерения толщины тонкого металлического листа в процессе его испытания на двухосное растяжение, основанный на изменении электросопротивления (падения напряжения) в листах разной толщины при прохождении по ним постоянного тока. Толщина контролируемого листа оказывается обратно пропорциональной падению напряжения. Через крайние контакты, замыкающиеся испытываемым листом, пропускают постоянный ток (рис. 131), а средние контакты, соединенные с вольтметром, используют для исключения влияния контактного сопротивления на результаты измерения.

Как показали испытания системы, изменение кривизны поверхности испытываемого образца и степень наклепа практически не влияют на точность измерения. Химический состав металла образца сказывается на уровне начального сопротивления и не изменяет наклон тарировочного графика. Судя по результатам авторов работы [403], точность метода может быть доведена до  $\pm 0,02$  мм.

## *Глава VIII*

### **МЕХАНИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ В УСЛОВИЯХ ВЫСОКИХ И НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР**

#### **§ 1. Особенности методики испытаний при высоких температурах**

Успешное развитие современной техники в большой степени зависит от наличия высокотемпературных испытательных машин для изучения механических свойств конструкционных материалов в различных условиях механического нагружения. Подавляющее большинство существующих конструкций машин разработано применительно к испытаниям материалов на ползучесть и длительную прочность при одноосном растяжении [38]. Основными элементами этих машин являются система нагрева и регулирования температуры, система нагружения и система тензометрирования.

Испытываемые образцы нагревают в пламени газовой горелки или в плазме, в солнечных печах, в электропечах сопротивления различных форм и размеров, непосредственным пропусканием тока, при помощи квантовых генераторов, индуктивным, электроннолучевым и другими способами. При выборе метода нагрева учитывают обеспечение необходимой скорости нагрева, коэффициент полезного действия нагревательного устройства, удобство регулирования и длительного поддержания заданного температурного режима, долговечность системы.

При испытаниях в изотермических условиях наиболее приемлемы электрические печи сопротивления, создающие однородное температурное поле по всему объему образца. Применение этого метода особенно эффективно при длительных испытаниях. Большая тепловая инерция печей сопротивления делает их малоэффективными при кратковременных испытаниях, а также при испытаниях в динамическом температурном режиме.

При нагревании образца методом непосредственного пропускания тока температурное поле на образце неравномерно. Наблюдаются локальные перегревы в вершинах образующихся трещин и в шейке, что приводит к ошибкам в силовых и деформационных характеристиках материала. Эти недостатки в определенной мере свойственны и индукционному методу нагрева, вызывающему перегрев отдельных участков образца.

К недостаткам электроннолучевого нагрева относятся сложность оборудования и управляющих устройств, необходимость применения специальных вакуумных камер.

Для измерения температуры в технике высокотемпературных механических испытаний широко применяются термопары и различного рода пирометры. Термопары на образце необходимо располагать таким образом, чтобы отсутствовало световое излучение со стороны нагревательного элемента, так как различие оптических свойств материала образца и термопары может привести к заметным (в отдельных случаях до 30—40 град и выше) погрешностям. Ошибки в измерениях температуры значительно уменьшаются в случае применения экрана.

Исследования высокотемпературной прочности при сложном напряженном состоянии в основном проводятся на установках, в которых трубчатый образец нагружается осевой силой и скручивающим моментом [2, 328, 407, 569, 616]. Существенными недостатками этой схемы, как известно, являются ограниченный круг соотношений главных нормальных напряжений и частая потеря устойчивости образцов.

Исследования высокотемпературной прочности труб под внутренним давлением газовой рабочей среды впервые начаты в 1931 г. компанией «The Babcox and wilcox» под руководством Ньюэлла. Однако они были прерваны в связи со значительными трудностями в постановке опытов (разрушение печи при разрыве образца и т. п.). В 1943 г. опыты были возобновлены. Однако нагрев производился в обыкновенной печи, работающей на природном газе, что не позволяло точно контролировать температуру и деформации образцов. Поэтому проведенные опыты носили в основном прикладной характер.

Используя опыт Ньюэлла, в 1950 г. Кунстера и Блейзер [575] разработали установку, состоящую из шести секций, помещенных в защитный кожух из толстостенной стали. Каждая секция включала образец, электрическую печь специальной конструкции, систему контроля температуры и систему давления. Установка была опробована и дала удовлетворительные результаты.

В Советском Союзе экспериментальным исследованием пластического течения и длительной прочности труб, находящихся под внутренним давлением, занимались Ш. Н. Кац, Б. В. Зверьков, Н. П. Черных и др. Испытания, как правило, проводились на испытательных машинах типа ИП-4 и ЦДМУ-30, дополнительно снабженных системой давления [26, 191] и устройством для изгиба [154]. Трубчатые образцы приваривались к штангам, имеющим сверления для подачи газовой (воздух, азот) или жидкой (вода, глицерин, силиконовое масло) рабочих сред. Нагрев осуществлялся в печи электросопротивления [154, 191] или прямым пропуском тока [26].

По данным работы [449] в Институте механики МГУ разработана установка, которая позволяет проводить испытания трубчатых образцов в условиях простого и сложного нагружения осевой растягивающей силой и внутренним давлением при температурах до  $1500^{\circ}\text{C}$ . Нагрев образца производится прямым пропусканием тока. Установка снабжена специальным измерительным комплексом для автоматической регистрации напряжений и деформаций.

В существующих установках давление газа в образце создается компрессором или от баллона, а давление жидкости — насосом и мультипликатором с разделительной камерой (см. рис. 103). Иногда для создания давления используют метод нагрева заполненного водой и герметически закрытого образца [366].

При испытании трубчатых образцов под внутренним давлением с осевой силой соединение образца с тягой должно обеспечивать необходимую плотность при высокой температуре. Один из вариантов прочно-плотного разъемного соединения, используемого при высоких температурах, представлен на рис. 132 [431]. Накладная гайка 7, в которую вставлен хвостовик тяги 4 с уплотнительным кольцом 1 и шайбой 6, навинчивается на образец до упора. После этого посредством отжимных болтов 5 во фланце 3, навинченном на тягу, и прижима 2 создается необходимое уплотнение кольца 1, изготовленного из меди или монеля.

Если образец приваривается к тяге, то конструкция соединения и разделка свариваемых кромок должны обеспечивать надежное центрирование свариваемых деталей и многоразовое использование тяг. Этим требованиям удовлетворяет конструкция, показанная на рис. 133. Здесь хвостовик 2 тяги 1, по которому центрируется образец 3, имеет специальную канавку 4 для выхода режущего инструмента. После испытания образец отрезается в околошовной зоне, а хвостовик обтачивается до исходных размеров под стыковой шов.

В работе [560] описана методика проведения опытов при высоких температурах в условиях двухосного растяжения на крестообразных образцах. Образец, связанный с системой нагружения посредством тросов, размещен в печи электросопротивления.

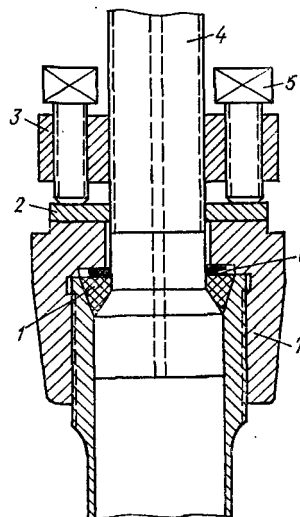


Рис. 132. Конструкция узла крепления трубчатого образца и тяги при высокотемпературных испытаниях.

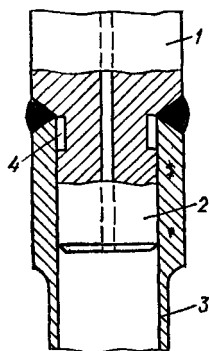


Рис. 133. Схема выполнения сварного соединения образца с тягой.

Установка для испытания трубчатых образцов под действием внутреннего и наружного давления, продольной силы и крутящего момента, описанная в работе [510], была реконструирована для испытания при температурах до  $300^{\circ}\text{C}$  [179]. Необходимая температура образца достигалась путем нагрева камеры в печи. В качестве жидкости, создающей внутреннее и наружное давление, использовалось силиконовое масло марки ПС-5 с добавкой (15%) компрессорного масла марки КС-19. Смеси такого состава выдержали многократные теплосмены при давлениях до  $800\text{—}1000\text{ кг/см}^2$ .

Методика испытаний материалов на ползучесть при растяжении в условиях высокого гидростатического давления (до  $1500\text{ кг/см}^2$ ) описана в работе [608]. В отдельных случаях при испытаниях в условиях высоких температур весьма эффективным может оказаться способ сжатия в обоймах (см. гл. VII) с применением термостойких смазок.

Ввиду трудоемкости высокотемпературных испытаний высокопрочных конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии иногда используют модельные материалы. Так, широкое распространение получили опыты на материалах, обладающих свойством ползучести при комнатной температуре, например на свинце и даже на макаронном тесте [291]. Это значительно упрощает эксперимент и дает богатый материал для изучения ползучести с позиций механики сплошной среды.

## § 2. Особенности методики испытаний при низких температурах

Специфическую область исследований составляют испытания материалов при низких (климатических и криогенных) температурах. Необходимость таких испытаний связана с обеспечением надежности работы машин и металлоконструкций в районах севера, развитием авиационной и космической техники, широким применением низких и сверхнизких температур в различных технологических процессах (разделение воздуха, очистка нефтепродуктов и газа и т. п.).

Известно много способов получения низких температур. Это, прежде всего, эндотермические превращения веществ (растворение солей, плавление, кипение), дросселирование и расширение сжатых газов, размагничивание твердого тела и т. д. В технике механических испытаний материалов наиболее широко пользуются тепловыми эффектами при фазовых превращениях ожи-

женных газов: фреона ( $-29,4^{\circ}\text{C}$ ), аммиака ( $-33,5^{\circ}\text{C}$ ), углекислоты ( $-78,5^{\circ}\text{C}$ ), этилена ( $-105,2^{\circ}\text{C}$ ), кислорода ( $-183^{\circ}\text{C}$ ), азота ( $-196^{\circ}\text{C}$ ), неона ( $-245,8^{\circ}\text{C}$ ), водорода ( $-252,7^{\circ}\text{C}$ ), гелия ( $-268,8^{\circ}\text{C}$ ) и его изотопов. Температура кипения хладагента зависит от давления паров <sup>1</sup>.

Получение температур ниже температуры кипения азота сопряжено с большими методическими трудностями. При использовании жидкого водорода испытания должны проводиться в специально оборудованном помещении с четырехкратным обменом воздуха в течение минуты; применение гелия, ввиду его высокой летучести, требует сложной системы термоизоляции криостата и специальной технологии охлаждения. Чрезвычайно удобным хладагентом является жидкий неон. При одном и том же объеме неон обеспечивает теплоотвод, в 3,3 раза превышающий теплоотвод водорода и в 41 раз — теплоотвод гелия. Однако ввиду дефицитности и сложной техники ожижения неон в качестве хладагента при механических испытаниях практически не применяется.

В настоящее время достаточно хорошо отработаны методы низкотемпературных механических испытаний на растяжение. Эти испытания проводятся, как правило, на стандартных машинах, снабженных криостатом и дополнительными тягами для передачи на образец растягивающего усилия, а также системами термо- и тензометрирования [313, 377]. В зависимости от конструкции криостата образец может находиться в соприкосновении с жидким хладагентом, обдуваться его парами или быть изолированным от жидкости и паров. В последнем случае широко используется метод отвода тепла от образца по металлическому холодопроводу. Основными конструктивными материалами при изготовлении криостатов и их элементов являются хромоникелевые стали аустенитного класса, алюминиевые и титановые сплавы, сплавы на основе меди (бериллиевые бронзы) и никеля (типа монель). В неразъемных соединениях применяется сварка и пайка серебряным припоем. Для изготовления прокладок в разъемных соединениях используются индий, серебро, медь, алюминий, свинец, фторопласт.

Для измерения температуры применяются низкотемпературные термометры электросопротивления, термопары, магнитные термометры. В герметичных криостатах температуру кипящего хладагента можно определить по давлению паров в камере.

Наиболее эффективными средствами термометрии при низкотемпературных испытаниях являются термопары, термометры электросопротивления и полупроводниковые термометры, обладающие малой инерционностью и обеспечивающие достаточную точность.

<sup>1</sup> Температура кипения хладагентов указана при атмосферном давлении.

В интервале температур до  $-196^{\circ}\text{C}$  наибольшую термо-э. д. с. дает хромель-копелевая термопара (9,6 мв). Однако более надежны медь-константановые термопары (5,6 мв), дающие стабильные показания. Так, при испытании термопар, изготовленных из одной партии материала, разброс по термо-э. д. с. не превышает  $\pm 6 \cdot 10^{-2}$  мв. При помощи этих термопар можно обеспечить поддержание и воспроизведение температуры вплоть до  $-269^{\circ}\text{C}$  с точностью  $\pm 1^{\circ}\text{C}$  [541].

Широкое распространение в низкотемпературной термометрии получили различные термометры сопротивления, принцип действия которых основан на свойстве твердых тел изменять электрическое сопротивление в зависимости от температуры. Их основной недостаток — падение чувствительности с понижением температуры. Кроме того, для получения достаточного сопротивления необходимо использовать термометры с большим объемом рабочего металла, что приводит к увеличению габаритов.

Полупроводниковые термометры для низких температур изготавливаются на основе монокристаллического германия, легированного сурьмой и галлием. Такой термометр имеет высокую чувствительность вплоть до температуры  $-272^{\circ}\text{C}$ . Однако для сравнительно высоких температур полупроводниковые термометры менее пригодны, так как с повышением температуры их чувствительность падает.

Для измерения деформаций в условиях низких температур используют механические и оптико-механические системы [63, 73, 74], индуктивные [75, 377, 529] и емкостные [302] датчики, проволочные тензорезисторы [378, 545]. Измеритель деформаций располагают непосредственно в рабочем пространстве испытательной камеры или вне ее. В последнем случае используют подвижные тяги, связанные с головками образца или с элементами, закрепленными на его рабочей части.

Как правило, более точные показания дают датчики и тензометры, закрепленные на образце, с последующей передачей сигнала к регистрирующему прибору. При этом датчик должен сохранять чувствительность и стабильность показаний во всем диапазоне температур испытаний.

По данным работы [377], при низких температурах хорошо себя зарекомендовали датчики дифференциально-трансформаторного типа. В настоящее время их применяют для измерения деформаций при температурах до  $-253^{\circ}\text{C}$ . Отсутствуют какие-либо принципиальные ограничения для их использования и при более низких температурах.

Все более широкое применение при низкотемпературных испытаниях находят проволочные тензорезисторы, наклеиваемые на поверхность рабочей части испытываемого образца или на упругие элементы измерительных устройств. При работе с тензорезисто-

рами необходимо учитывать, что с понижением температуры изменяются состояние и физико-механические свойства металла образца, материалов, из которых изготовлен тензопреобразователь, а также клеящего вещества, при помощи которого крепятся датчики. Все это требует особой тщательности при подготовке опыта, проведении тарировок и рабочих измерений. При выполнении необходимых требований тензорезисторы сопротивления могут давать надежные результаты при температурах до  $-269^{\circ}\text{C}$  [32, 50, 265, 315].

В Институте проблем прочности АН УССР для измерения деформаций трубчатых образцов при низких температурах успешно используются электромеханические тензометры, описанные в § 7 предыдущей главы (см. рис. 123 и 125). В этих тензометрах использованы тензорезисторы из неотожженного константана на винифлексовой основе. Тензорезисторы приклеивают к упругим элементам винифлексом лаком ВЛ-931 при температуре  $70^{\circ}\text{C}$ . Через сутки элемент с наклеенными тензорезисторами подвергается термообработке по режиму: нагрев до температуры  $70^{\circ}\text{C}$  со скоростью  $1\text{ град/мин}$ , выдержка в течение 1 ч, нагрев до температуры  $180^{\circ}\text{C}$  со скоростью  $1\text{ град/мин}$ , выдержка в течение 2 ч, охлаждение вместе с печью.

Температура тензометра в процессе испытаний зависит от температуры образца, времени его охлаждения и выдержки при низкой температуре.

Как показал опыт, при кратковременных испытаниях температура тензометра не ниже  $-35^{\circ}\text{C}$  при температуре на образце  $-190^{\circ}\text{C}$ . Такое изменение температуры тензометра не оказывает влияния на показания указанных тензорезисторов, так как коэффициент их тензочувствительности практически не изменяется в диапазоне температур от 20 до  $-120^{\circ}\text{C}$  [315]. Влияние изменения линейных размеров упругих элементов и сопротивления тензорезисторов с понижением температуры исключается автоматической термокомпенсацией, которая достигается включением двух тензорезисторов, наклеенных на упругий элемент, в противоположные плечи моста.

При использовании тензорезисторов из неотожженного константана тарировки можно производить при комнатной температуре при условии, что в процессе эксплуатации температура тензорезистора будет не ниже  $-120^{\circ}\text{C}$ . При более низких температурах необходимо учитывать изменение коэффициента тензочувствительности.

При соблюдении технологии наклейки датчиков и правильной тарировке ошибки при измерении деформаций электромеханическими тензометрами в условиях низких температур не превышают 3% верхнего предела измерений каждого диапазона.

Рассмотрим некоторые методики и экспериментальные установки, используемые в настоящее время в практике механических



испытаний материалов при сложном напряженном состоянии в условиях низких температур.

Наиболее распространенным методом являются испытания образцов с различными видами надрезов на растяжение [210, 450], а также испытание односторонним гидростатическим давлением закрепленных по контуру пластин [222, 316]. Эти методики, как отмечалось в гл. VII, имеют существенные недостатки. Анализ напряженного состояния материала в этом случае, особенно в стадии упруго-пластического деформирования, связан с большими трудностями. Поэтому использование указанных методов испытания можно считать оправданным только при экспериментальном исследовании некоторых частных задач прочности конструкций.

В частности, метод испытания пластин и сфер односторонним давлением достаточно полно воспроизводит условия работы тонколистовых материалов в конструкциях типа баллонов, обшивок, резервуаров и т. п. На рис. 134 показана схема установки для

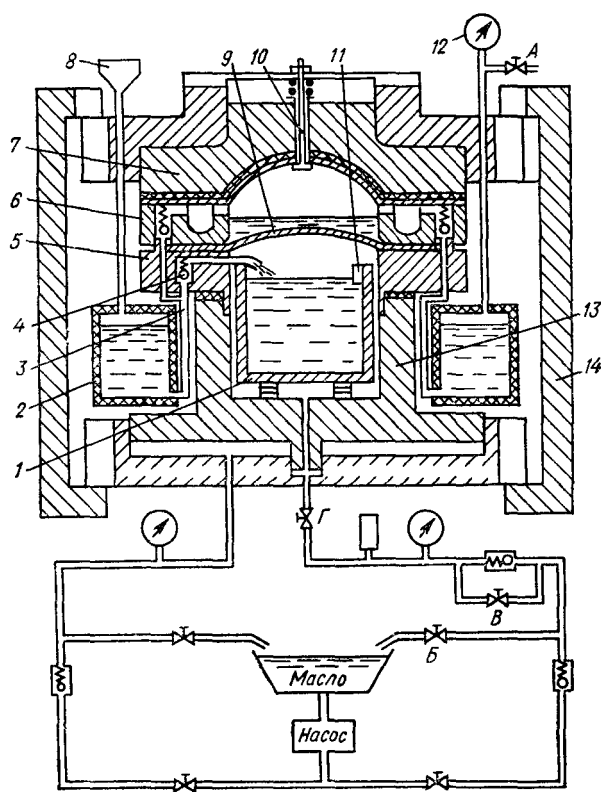


Рис. 134. Схема установки УРД-3.

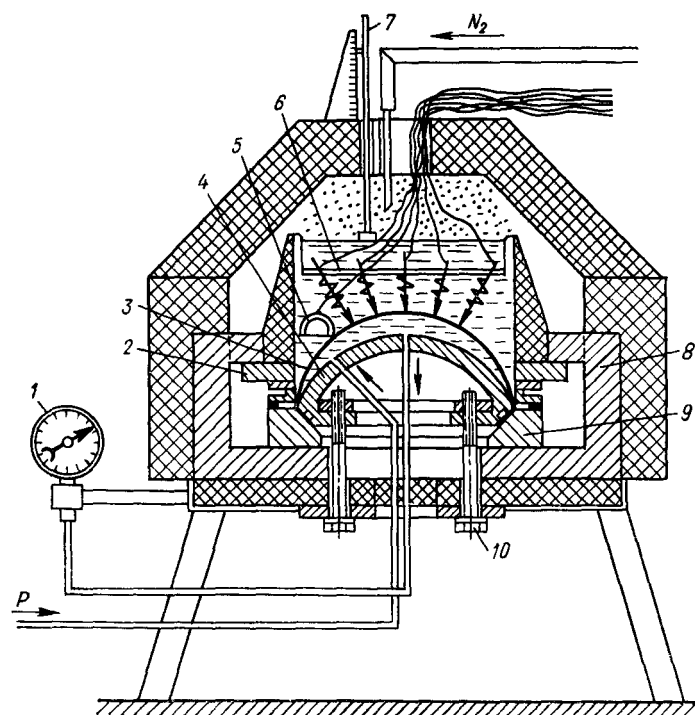


Рис. 135. Схема рабочей камеры установки УНС-10.

испытания листового материала и сварных соединений в условиях двухосного растяжения при температуре  $-196^{\circ}\text{C}$ , созданной в МВТУ им. Н. Э. Баумана [222].

Образец 9 зажимается по контуру между прижимами 5 и 6 под действием гидростатического давления, подаваемого от масляного насоса. Силовая цепь замыкается поворотным запорным кольцом 14. При открытом вентиле А и закрытых вентилях В, В, Г и клапане 10 через воронку 8 жидкий азот заливается в кольцевую емкость 2. После этого вентиль А закрывается, а воронка 8 перекрывается крышкой с предохранительной мембраной, рассчитанной на давление  $1 \text{ кг/см}^2$ . Повышение давления в емкости 2 (за счет естественного испарения азота) контролируется манометром 12. При открытом клапане 10 азот по трубке 3 поступает в емкость 1, снабженную датчиком уровня 11, и через систему отверстий в плите 6 — в пространство над образцом. Нагружение образца после достижения температуры испытаний может производиться по двум схемам. Первая схема предусматривает регулируемый нагрев и испарение азота в емкости 1 электри-

ческой спиралью, вторая — истечение жидкого азота из емкости 1 через отверстие в ее доньшке и испарение его в результате контакта с массивными стенками поршня 13. Отверстие вскрывается разрывом перекрывающей его бумажной мембраны с помощью бойка и упругого элемента, заневоленного изолированной металлической струной. В нужный момент, при замыкании электрической цепи, струна перегорает и упругий элемент бойком разрывает мембрану. Скорость истечения жидкого азота и, следовательно, скорость нагружения можно регулировать величиной получаемого отверстия, размеры которого задаются сменными вставками. При разрушении образца обратные клапаны 4 предохраняют емкость 2 от действия взрывной волны, а броневой колпак 7 гасит энергию взрыва и предохраняет от выброса продуктов испытания.

В Институте проблем прочности АН УССР разработаны установки типа УНС для кратковременных и длительных (в том числе при циклическом нагружении) испытаний сферических образцов при температурах до  $-269^{\circ}\text{C}$ . В качестве рабочей среды используются очищенный изопентан, жидкий азот и газообразный гелий.

На рис. 135 показано устройство рабочей камеры установки УНС-10 [316]. Образец 3 с приваренным к нему толстостенным вкладышем 4 монтируется в рабочей камере 8 с теплоизоляционным кожухом из пенопласта. Защемление образца по контуру осуществляется между упорными кольцами 9 и 2; последний имеет запорное устройство. Образец с вкладышем, кроме того, при помощи болтов 10 плотно прижимается по периметру к конической поверхности кольца 9.

Хладоагент заливается в пространство над образцом. Его уровень контролируется поплавковым уровнемером 7. Давление между образцом и вкладышем регистрируется манометром 1. Измерение радиуса кривизны образца и деформаций производится при помощи семиточечного тензометрического приспособления 6 и упругих скоб 5.

На рис. 136 показана схема установки УНС-20 для испытания сфер при температурах ниже  $-196^{\circ}\text{C}$ . Установка состоит из криостата 3, снабженного азотным экраном, и разъемной рабочей камеры 4, подвешенной внутри криостата на трубе 5, по которой проходят трубопроводы для заливки жидкого азота, гелия и создания внутреннего давления. Образец 1 с вкладышем 9 (при снятом криостате и раскрытой камере) при помощи шпилек 6 закрепляется в верхней части камеры. После монтажа на образце тензометров и термопар камера плотно закрывается нижней крышкой, опускается в криостат и вакуумируется.

Охлаждение осуществляется в два этапа. Сначала во внутреннюю полость вкладыша, закрытую крышкой 8, заливают

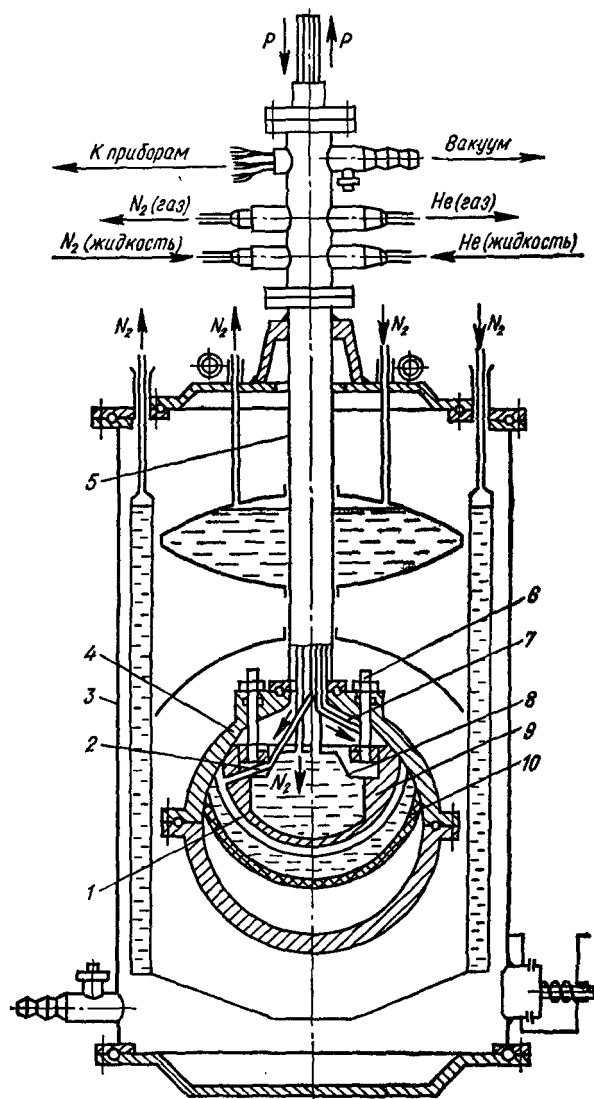


Рис. 136. Схема криостата и рабочей камеры установки УНС-20.

жидкий азот, а затем по трубопроводу 7 в емкость 10 — гелий (или водород), охлаждая образец до необходимой температуры. Нагружение образца внутренним давлением производят по трубопроводу 2 предварительно охлажденным газообразным гелием.

Оригинальные методики испытания криогенных сосудов при весьма низких температурах описаны в работах [159, 358].

Для низкотемпературных испытаний материалов при сложном напряженном состоянии используют диски, опертые по контуру [432], крестообразные [158, 556] и трубчатые [149] образцы. В последнем случае, как и при испытании натуральных сосудов, основная сложность, особенно при весьма низких температурах, заключается в отсутствии приемлемой рабочей среды для создания высоких давлений. Применение газовых и парожидкостных сред связано с решением сложных вопросов защиты. В качестве жидкой рабочей среды при температурах до  $-190^{\circ}\text{C}$  могут быть использованы легкие фракции нефти, при более низких температурах — ожиженные газы. Специфические свойства этих сред требуют применения специальных средств предосторожности и сложных насосных комплексов. Задача усложняется еще и тем, что верхний предел достижимых давлений ограничен точкой затвердевания рабочего тела. Так, если азот при температуре  $-190^{\circ}\text{C}$  затвердевает при давлении около  $1000\text{ кг/см}^2$ , то снижение температуры на  $20^{\circ}\text{C}$  приводит к уменьшению критического давления приблизительно в 60 раз.

### § 3. Установки типа СНТ для механических испытаний материалов в широком диапазоне температур

Серия устройств и установок для испытания трубчатых образцов при комбинированном нагружении осевой силой, внутренним давлением и крутящим моментом в диапазоне температур от  $-180$  до  $+1200^{\circ}\text{C}$  разработана в Институте проблем прочности АН УССР. Их основные технические характеристики приведены в табл. 8, где указаны также литературные источники, в которых дано описание основных узлов.

Отличительной особенностью этих установок является размещение терморегулятора во внутренней полости тонкостенного трубчатого образца. Такая схема терморегулирования при ее рациональном конструктивном выполнении обеспечивает возможность надежного крепления на наружной поверхности образца средств термо- и тензометрии, сравнительную безопасность проведения опытов при высоком давлении, минимальный объем рабочей среды в образце, отсутствие перегрева или переохлаждения обслуживающих приборов, а также высокую экономичность благодаря малому расходу хладагента при охлаждении и незначительным тепловым потерям при нагреве. Кроме того, при такой схеме система создания внутреннего давления и система охлаждения (нагрева) образца изолированы друг от друга.

На рис. 137 и 138 показаны возможные схемы конструктивного выполнения нагревателя и охладителя.

Нагреватель состоит из чехла 3, который ввинчивается в кожух 4, и собственно нагревателя 5 — металлокерамического

стержня, один конец которого связан с колпачком чехла посредством тонкой прокладки 2 из тугоплавкого металла и прижимных винтов 1. Второй конец стержня изолирован от массы втулкой 7 из шамота и подключен к одной из клемм питающего трансформатора 9. Такая конструкция нагревателя позволяет путем вертикального перемещения чехла по резьбе регулировать температуру кожуха нагревателя, а следовательно, и образца по длине. Равномерность распределения температуры, кроме того, достигается применением стержня-нагревателя переменного сечения (СНТ-1), а также дополнительным подогревом тяг (СНТ-2). Это позволяет на среднем участке, составляющем около 75% рабочей части образца, поддерживать равномерное температурное поле с отклонениями, не превышающими  $1,5^{\circ}\text{C}$ . Максимальное отклонение температуры возле галтели от среднего значения на рабочей части, равного  $620^{\circ}\text{C}$ , составляет не более  $10-12^{\circ}\text{C}$ .

Горячий спай термопары 6 системы 8 автоматического регулирования температуры помещается в специальное сверление в стержне нагревателя со стороны нижнего торца. Расположение термопары в нагревателе обеспечивает непосредственное излучение на спай и, следовательно, незначительную инерционность системы автоматического регулирования температуры.

Система нагрева трубчатого образца изнутри успешно использовалась в Институте гидродинамики СО АН СССР [376].

Таблица 8

Индекс установки (устройства)	Технические характеристики				Литературный источник
	Диапазон температур, $^{\circ}\text{C}$	Осевая сила, $\text{кГ}$	Крутящий момент, $\text{кГм}$	Внутреннее давление, $\text{ат}$	
СНТ-1	от $+20$ до $1000$	$+20\ 000$	—	$500$ (воздух)	[226]
СН-1Р СН-1С	$+20$ $+20$	$+10\ 000$ $-10\ 000$	— $15$	$400$ (масло)	[238, 361]
СНТ-2	от $+20$ до $+850$	$+20\ 000$	—	$500$ (воздух)	[230, 361]
СНТ-3Р СНТ-3С	от $+20$ до $+1200$ от $+20$ до $+1200$	$+80\ 000$ $-8000$	$12$ $20$	— —	[239, 361]
СНТ-4	от $-180$ до $+20$	$\pm 30\ 000$	—	$1500$ (изопентан)	[249, 250]
СНТ-5П	от $-190$ до $+1000$	$\pm 5000$	$45$	$1500$ (изопентан)	[196, 197]
СНТ-6	от $-180$ до $+20$	$\pm 3000$	$60$	$1500$ (изопентан)	[72, 245]

Вариант конструктивного выполнения охладителя показан на рис. 138. Охладитель состоит из толстостенного цилиндрического кожуха 4 и медной трубки 3, припаянной к головке 1 охладителя, в которой имеется два отверстия для забора и выпуска хладагента. Кожух охладителя для лучшей теплопроводности выполняется также из красной меди (для охладителей, работающих под давлением до  $400 \text{ кг/см}^2$ ) или из латуни (при давлениях свыше  $400 \text{ кг/см}^2$ ).

В качестве хладагента используется жидкий азот. Его использование не вызывает необходимости в специальных мерах по технике безопасности. Подача азота в охладитель осуществляется путем создания избыточного давления в сосуде Дьюара 12 при подогреве азота специальным нагревателем 11.

Для выравнивания температуры по длине рабочей части образца между кожухом охладителя и внутренней поверхностью образца на уровне верхней головки размещаются несколько волнообразных плоских пружин 5, изготовленных из медной фольги толщиной  $0,3 \text{ мм}$ . Пружины создают надежный тепловой мост между охладителем и образцом, обеспечивая дополнительный отвод тепла от головки образца. При этом они не препятствуют свободному деформированию образца. Для аналогичных целей использовались также медные лепестки, приваренные к кожуху. Конструкция описанного охладителя обеспечивает быстрое охлаждение образца при небольшом расходе хладагента.

Температура образца зависит от расхода азота, который определяется размером проходного сечения трубопроводов и давлением в сосуде Дьюара. В рассматриваемой системе регулирование температуры осуществляется автоматическим изменением сечения трубопровода, соединяющего холодильник с сосудом Дьюара, при постоянном давлении в сосуде.

Система регулирования температуры содержит потенциометр 6 типа ПСР-1-03, электромагнитный клапан 8 и регулируемый дроссель 2, расположенный в магистрали, соединяющей охладитель с атмосферой. Датчиком потенциометра служит медь-константановая термопара, приваренная к образцу в средней части его рабочей длины. В случае повышения температуры образца срабатывают соответствующие контакты потенциометра, замыкая

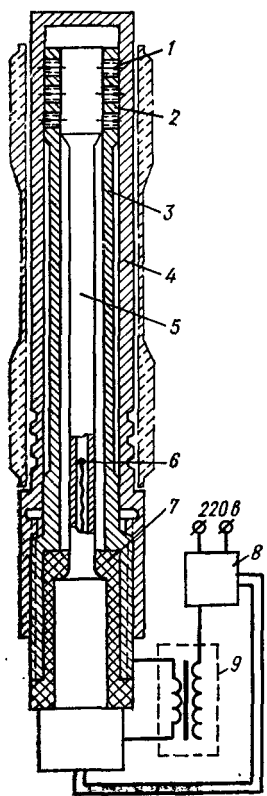


Рис. 137. Конструкция нагревателя.

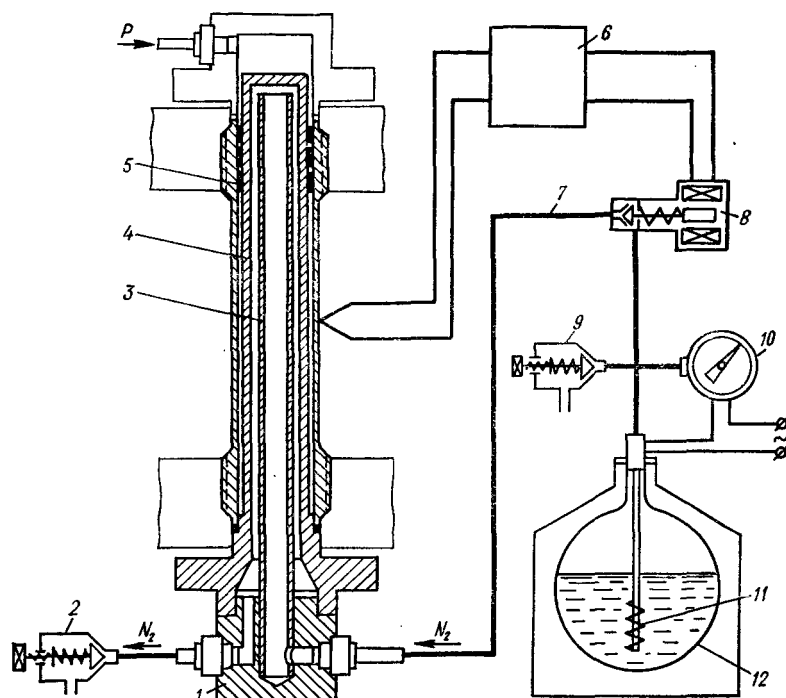


Рис. 138. Система охлаждения образца.

цепь питания электромагнитного клапана, который увеличивает расход азота через охладитель. Если температура понижается, то контактная группа потенциометра выключает электромагнитный клапан, трубопровод 7 перекрывается. Избыточное давление в сосуде регулируется дросселем 9, необходимое сечение которого устанавливается опытным путем. Подстройка системы производится регулируемым дросселем 2. Управление подогревом азота в сосуде производится электроконтактным манометром 10.

Описанная система охлаждения образца и регулирования температуры позволяет получать практически любую температуру в диапазоне от комнатной до  $-190^{\circ}\text{C}$  и поддерживать ее с точностью  $\pm 2^{\circ}\text{C}$ . Максимальная разность температур между центральным сечением образца и сечением у верхней головки (при температуре рабочей части образца  $-190^{\circ}\text{C}$ ) составляет около  $7^{\circ}\text{C}$ . Перепад температур на базе измерения не превышает  $1^{\circ}\text{C}$ .

Система охлаждения трубчатого образца изнутри охладителем проточного типа применена А. В. Карасевым [183] в камере для низкотемпературных испытаний на машине ЦДМУ-30.



Методику проведения испытаний на установках типа СНТ рассмотрим на примере установки СНТ-5П, предназначенной для испытаний в диапазоне температур от  $-190$  до  $+1000^{\circ}\text{C}$  при независимом нагружении образца осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением.

Кинематическая схема установки представлена на рис. 139. Трубчатый образец 5 закреплен в захватах 4 и 6. Для нагружения образца осевой силой предназначен гидроцилиндр с поршнем 10, шток которого через универсальный шарнир 7 соединен с захватом 6.

Система нагружения образца крутящим моментом состоит из задатчика 13 крутящего момента, двух гидроцилиндров 3, связанных реечной передачей с верхним захватом 4, и гидрошупа 11. Задатчик представляет собой пару плунжеров, связанных через призматические соединения 12 с барабаном 9. Барабан, в свою очередь, посредством подшипников 8 и крестовины соединен через универсальный шарнир с нижним захватом. Для осуществления наладочного вертикального перемещения верхнего захва-

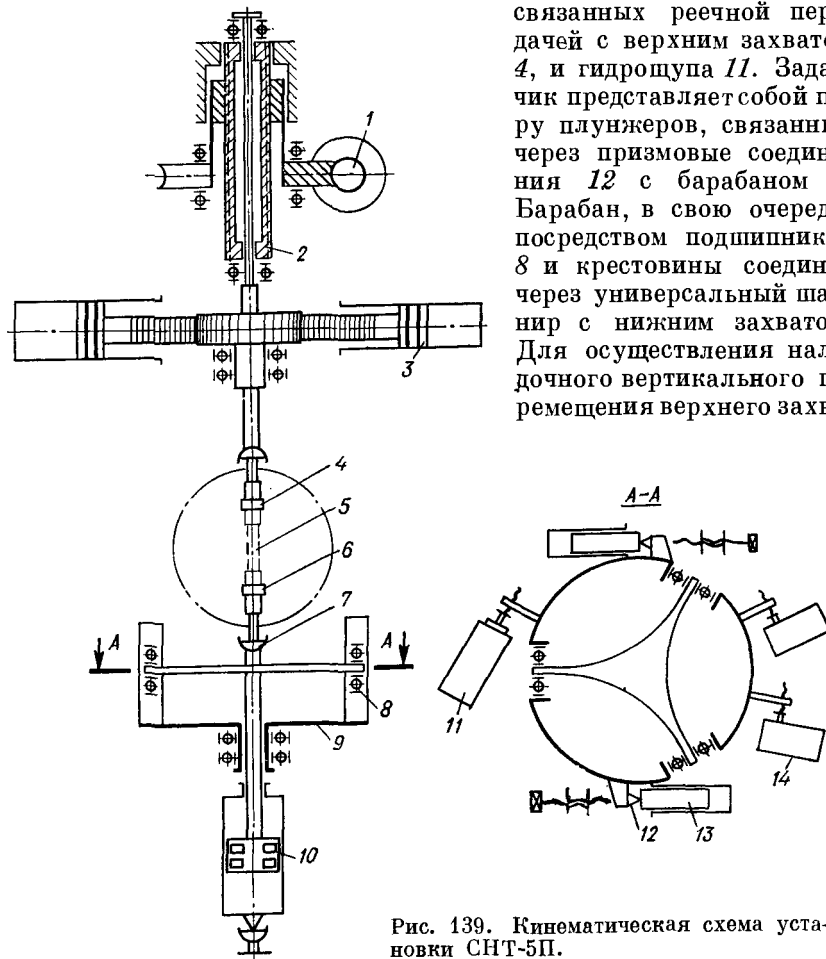


Рис. 139. Кинематическая схема установки СНТ-5П.

та 4 служат червячный редуктор 1 и винтовая передача с резьбовой втулкой 2.

Работа системы происходит следующим образом. В исходном положении давление в плунжерных парах задатчика 13 отсутствует, и система верхний захват — образец — нижний захват — барабан находится в равновесии, так как гидрошупом 11 устанавливается давление в двух гидроцилиндрах с поршнями 3 таким образом, что усилия, создаваемые ими, взаимно уравновешиваются.

При нагружении образца крутящим моментом, посредством плунжеров задатчика, равновесие системы нарушается и барабан 9 начинает поворачиваться. Отклонение барабана от исходного положения передается гидрошупу 11, который изменяет давление в гидроцилиндрах 3 таким образом, что они при помощи реечной передачи создают на верхнем захвате 4 момент, уравновешивающий момент, создаваемый плунжерами 13, и путем вращения верхнего захвата осуществляют выбор угловой деформации образца, возвращая барабан в исходное положение. При работе данной следящей системы отклонения барабана от исходного положения незначительны, а следовательно, незначительно и изменение плеча пары сил, нагружающих образец.

Роль гидростатического упорного подшипника выполняет гидроцилиндр с самоцентрирующимся поршнем. Осевая нагрузка воспринимается маслом в полости образца, поворот барабана ограничен жесткими упорами. Конечники 14 с помощью гидрозолотника с электрогидравлическим управлением выключают гидропривод.

Гидросистема машины (рис. 140) состоит из двух цепей и включает два насоса постоянной производительности 9 и 7, регулятор 1 соотношения давлений, редукционный клапан 5, посредством которого нагнетательная магистраль насоса 7 подсоединена к задатчику крутящего момента, напорный золотник 10, связывающий нагнетательную линию насоса 9 со сливом, переливные клапаны 6 и 8 и систему кранов и золотников 2, 3 и 4 с электроуправлением. У напорного золотника 10 удалена регулировочная пружина и управление осуществляется с помощью регулятора 1.

При сложном нагружении регулятор соотношения давлений и напорный золотник 10 отключаются от гидросистемы и давление в задатчике крутящего момента устанавливается с помощью редукционного клапана 5, а в цилиндре, создающем осевую силу, переливным клапаном 8.

При простом нагружении давление цепи крутящего момента является командным и устанавливается редукционным клапаном 5. Командное давление воздействует на сервозолотник регулятора 1, в результате чего изменяется давление в магистрали, соединяющей его с напорным золотником 10, который устанавливает в магистральной линии насоса 9 давление, пропорциональное

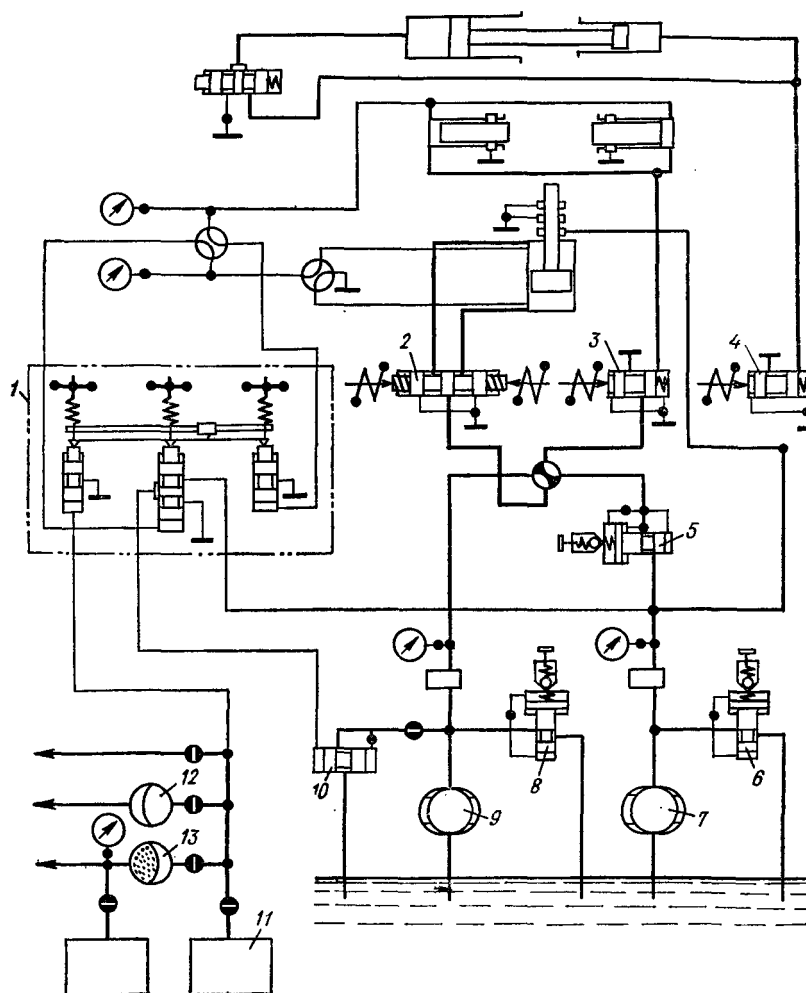


Рис. 140. Гидравлическая схема установки СНТ-5П.

командному. Определенное соотношение между командным и управляемым давлениями устанавливается путем изменения положения упора регулятора 1.

Нагружение образца внутренним давлением осуществляется с помощью блока высокого давления 11 через разделительную камеру 12. При повышенных температурах нагружение образца внутренним давлением осуществляется газом из разделительной камеры 13.

Для проведения испытаний в заданном температурном интервале установка снабжена вакуумной камерой, имеющей систему нагрева и охлаждения образца. Вакуум обеспечивает хорошую термоизоляцию образца при низких температурах и препятствует выпадению конденсата.

В камере имеется окно для визуального наблюдения за образцом в процессе испытания. Образец с шарнирными рамками помещается в испытательную камеру и связывается с верхним и нижним штоками, уплотненными в камере, которые, в свою очередь, связаны с верхним и нижним захватами испытательной машины.

Низкие температуры измеряются медь-константановой термопарой, высокие — платино-родиевой и регистрируются потенциометром.

Измерение деформаций при низких температурах осуществляется с помощью тензорезисторов, наклеенных на образец (измеряются деформации в упругой области), и тензометром с упругим элементом (см. рис. 125), на который наклеены тензорезисторы (измеряются деформации в пластической области). Измерение деформаций при высоких температурах осуществляется катетометром.

Установка снабжена системой автоматической обработки результатов эксперимента на базе УВМ «Днепр-1». Система позволяет осуществлять автоматический сбор информации, обработку ее в ходе эксперимента и выработку управляющих действий, позволяющих по результатам текущей обработки проводить коррекцию программы нагружения. По показаниям соответствующих датчиков производятся необходимые вычисления и печать следующих параметров: осевых, тангенциальных и угловых деформаций, осевых, тангенциальных и касательных напряжений, истинных главных напряжений и деформаций, направлений главных осей, октаэдрических напряжений и деформаций.

При испытаниях на установке СНТ-5П используются тонкостенные трубчатые образцы ( $\frac{D_{\text{ср}}}{\delta} = 25 \div 50$ ), обеспечивающие при выбранных схемах нагружения отклонения  $\tau_{\text{max}}$  и  $\sigma_{\text{max}}$  от их средних значений, не превышающие 1%. Следовательно, напряженное состояние рабочей части образца достаточно однородно.

Подготовка к низкотемпературным испытаниям осуществляется следующим образом. Образец в собранном виде (с переходами и охладителем) помещается в вакуумную камеру и крепится к рабочим захватам. К переходам подсоединяются трубопроводы для подачи внутреннего давления и жидкого азота. В камеру высокого давления и внутреннюю полость образца заливают рабочую жидкость.

На рабочей части образца закрепляют тензометр для измерения деформаций и равномерно по длине приваривают конденсаторной сваркой пять медь-константановых термопар. Свободные спаи термопар помещают в сосуд Дьюара с тающим льдом, где поддерживается постоянная температура  $0^{\circ}\text{C}$ , контролируемая спиртовым термометром.

После закрытия рабочей камеры включают форвакуумный насос. При достижении вакуума порядка  $2 \cdot 10^{-2}$  мм рт. ст. начинают охлаждать образец. Скорость охлаждения зависит от расхода хладагента. С увеличением расхода увеличивается скорость охлаждения образца, но уменьшается коэффициент полезного действия охладителя и увеличивается градиент температур по длине образца. В исследованиях, описанных в последующих главах, охлаждение до  $180\text{—}190^{\circ}\text{C}$  длилось около часа, при этом в сосуде Дьюара поддерживалось избыточное давление  $0,2\text{ ат}$ . Распределение температур по длине образца контролировали с помощью пяти термопар и потенциометра ПП-63. После достижения заданного уровня температур (по показаниям центральной термопары) делали выдержку в течение  $15\text{—}20$  мин для выравнивания температуры по длине образца.

После того как температура образца стабилизируется, записываются нулевые показания тензометра. Этим исключается влияние термического сжатия образца на результаты измерений деформаций от внешних усилий.

С целью увеличения чувствительности системы при регистрации упругих и малых упруго-пластических деформаций на начальном участке деформирования весь интервал измеряемых деформаций  $0\text{—}15\%$  был разбит на три диапазона:  $0\text{—}2\%$ ;  $2\text{—}6\%$ ;  $6\text{—}15\%$ . Запись усилий и деформаций в каждом диапазоне осуществлялась каналами различной чувствительности.

## *Глава IX*

### **НАПРАВЛЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ**

#### **§ 1. Предварительные замечания**

Сложность процессов, протекающих в материале при деформировании, требует выдвижения ряда гипотез при построении теории, описывающей закономерности изменения деформированного состояния тела при механическом нагружении. Простейшей гипотезой механики сплошных сред является допущение о линейной связи между напряжениями и деформациями. Эта гипотеза, впервые сформулированная Гуком во второй половине XVII в., принята в качестве физического закона теории упругости. Закон Гука удовлетворительно описывает деформирование широкого класса конструкционных материалов при сравнительно небольших нагрузках. Для некоторых материалов (камень, бетон) отклонения от прямой пропорциональности существенны, однако для практических расчетов прочности большинства хрупких материалов применение этого закона вполне оправдано.

В реальной конструкции материал может находиться не только в упругом состоянии, но и в упруго-пластическом, поэтому с точки зрения расчета деталей машин дальнейшим развитием теории упругости можно считать установление соотношений между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой и в упруго-пластической областях. Здесь связь между напряженным и деформированным состояниями значительно усложняется. Для установления этой связи были выдвинуты новые гипотезы, известные в литературе как гипотезы теории пластичности.

Общим положением большинства теорий пластичности является предположение об отсутствии остаточного изменения объема. При этом связь между шаровым тензором напряжений и объемной деформацией принимается линейной.

Из предположения о совпадении главных осей напряжений и главных осей деформаций следует, что для данного элемента тела отношение главных касательных напряжений к главным сдвигам постоянно, и, как следствие, — условие подобия девиаторов  $\mu_\sigma = \mu_\epsilon$ .

Общим положением нелинейной теории упругости и теорий пластичности является предположение о существовании единой

инвариантной к напряженному состоянию кривой деформирования.

Экспериментальной проверке этих гипотез посвящено много работ. Однако опыт не только позволяет проверить правильность положенных в основу гипотез, но и может быть объективным критерием их практической ценности. Поэтому экспериментаторы большое внимание уделяют опытам по проверке принятых условий наступления предельных состояний (например, условий текучести) и результатов теоретических решений, в том числе с учетом истории и предыстории нагружения.

Существующие теории пластичности, сформулированные как общие теории для любых путей нагружения, основываются на предположении об изотропности и однородности материала. Сравнительно недавно было обнаружено, что они справедливы только для активной деформации в условиях простого нагружения [171]. На практике часто приходится сталкиваться со сложным нагружением как при активной, так и при пассивной деформации. В этом случае направления главных осей деформаций и направления сдвигов не остаются постоянными относительно физических частиц металла, поэтому процесс деформирования уже не может характеризоваться только направляющими тензорами.

Современные теории пластичности не описывают, например, такой простейший эксперимент. Если трубу, подвергнутую пластической деформации в осевом направлении, скручивать при неизменной длине, то в соответствии с теорией течения осевое напряжение сразу исчезает, а по деформационной теории оно должно быть в 10—20 раз больше касательного. В действительности при деформировании трубы кручением осевое напряжение медленно уменьшается и практически исчезает с «запаздыванием» при достижении деформации трубы кручением некоторой величины [171]. Количественные результаты по описанному опыту применительно к стали 20 можно найти в работе [146].

Для установления законов связи между напряжениями и деформациями при сложном нагружении делаются попытки сформулировать новые, дополнительные условия и гипотезы. В соответствии с концепцией А. А. Ильюшина [171, 173] такими гипотезами являются следующие: гипотеза о разгрузке, условие однозначности, постулат изотропии, закон запаздывания и постулат пластичности.

Приближенные свойства пластических деформаций при произвольном нагружении отражены в гипотезе о разгрузке. Согласно этой гипотезе, «для каждой точки и траектории деформации (нагружения) существует поверхность  $F = 0$ , являющаяся инвариантом предшествующей траектории и разделяющая область пассивных и активных деформаций» [165]. Это означает, что всякая траектория внутри поверхности представляет пассивную деформацию

(разгрузку), на этих траекториях изменяется только упругая составляющая деформации, а пластическая остается неизменной. Любая траектория вне поверхности  $F$ , по крайней мере вблизи  $F$ , представляет активную деформацию, при которой изменяются как упругая, так и пластическая составляющие.

Условие однозначности в редакции А. А. Ильюшина формулируется так: «при заданном изменении во времени параметров типа температуры, заданных в начальном состоянии, и заданном процессе деформирования (изменения тензора деформации во времени) тензор напряжений и другие подобные тензоры (упругих деформаций, пластических деформаций, их скоростей и т. п.) в каждый момент времени имеют единственные значения, зависящие от процесса деформации и изменения параметров типа температуры» [165]. Иными словами, при точном воспроизведении самих тел и условий деформирования связи между различными параметрами в процессе деформации будут повторяться.

Полное воспроизведение опыта, конечно, неосуществимо. Поэтому условие однозначности, естественно, предполагает локальную устойчивость процесса, т. е. отсутствие влияния мелких случайных отклонений от программы испытаний.

В качестве общего закона поведения первоначально изотропных в отношении упругих и пластических свойств сред при произвольном сложном нагружении выдвинуто следующее общее положение, которое было названо постулатом изотропии: конструкция образа процесса полностью определяется внутренней геометрией траектории деформаций и инвариантна относительно ее вращения и отражения.

Здесь под траекторией деформации понимается траектория, которую описывает в пространстве конец вектора деформации, тождественный девиатору деформации. Под образом процесса понимается траектория деформации с построенным в каждой ее точке соответствующим вектором напряжений, т. е. «состояние малого объема тела или всего тела, если внешние условия и деформации однородны» [165]. Вращение траектории есть ее поворот как жесткого тела относительно начала координат, а отражение — зеркальное отображение траектории относительно плоскости, проходящей через начало координат.

В соответствии с законом запаздывания ориентация конечных приращений векторов напряжений относительно траектории деформации зависит не от всей предшествующей истории процесса деформации, т. е. не от всей траектории, а лишь от внутренней геометрии ее последнего участка, называемого следом запаздывания. Опыты показывают, что след запаздывания имеет длину порядка трех — десяти упругих деформаций.

Для общей теории пластичности существенно важным является постулат пластичности, согласно которому работа напряжений



по любой замкнутой в пространстве деформаций траектории равна нулю, если пластическая деформация на всей траектории остается неизменной, и положительна, если хотя бы на некоторых участках замкнутой траектории происходит изменение пластических деформаций. Постулат пластичности справедлив для более широкого класса материалов и путей нагружения, чем постулат Друккера [128], являющийся лишь достаточным, но не необходимым условием для выполнения постулата пластичности.

По рассмотренным положениям имелись принципиальные возражения [161, 162, 317, 318]. Серьезная опытная проверка этих положений по-прежнему остается одной из важнейших задач экспериментов.

Обобщение теории течения на случай сложного нагружения путем учета микроскопически неоднородных свойств тела проведено в работах [178, 320].

Свойство конструкционных материалов упрочняться при пластическом деформировании часто используется на практике для повышения их механических характеристик (механическое упрочнение) и несущей способности конструкций (например, автофреттирование). Материал подвергается упрочнению в процессе технологических операций — гибки,ковки,штамповки, которые приводят к деформационной анизотропии материала, оказывающей заметное влияние на его последующее поведение под нагрузкой. В связи с этим актуальное значение приобретают экспериментальные исследования предыстории нагружения на процессы деформирования при разных видах напряженного состояния, а также опытное определение предельных состояний при различных величинах допуска на пластическую деформацию.

Ввиду больших методических трудностей подавляющее большинство опытов для экспериментального обоснования основных предпосылок, гипотез, постулатов, на которых базируются соответствующие теории, проводились при нормальной температуре. В то же время современное развитие ракетной и космической техники, химического машиностроения, атомной энергетики, новых методов упрочнения и термомеханической обработки конструкционных материалов требует разработки более совершенных, экспериментально обоснованных методов расчета элементов конструкций при высоких и низких температурах.

В случае охлаждения или нагрева материал, как правило, проявляет неприсущие ему в обычных условиях свойства, изменяется кинетика деформирования и характер упрочнения. В связи с этим возникает ряд новых проблем, которые предопределяют необходимость решения, по крайней мере, следующих основных задач: развитие теорий прочности и экспериментальное обоснование применимости полученных критериев для установ-

ления предельных состояний материалов при высоких и низких температурах; разработка и создание новых надежных экспериментальных средств для испытаний материалов при сложном напряженном состоянии в широком температурном диапазоне; экспериментальное исследование влияния температуры на закономерности деформирования конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии.

В последнее время выполнено достаточно много работ по экспериментальному исследованию ползучести и длительной прочности при неодноосном нагружении. Большинство из них проводится для проверки теоретических зависимостей между компонентами тензора скоростей ползучести и компонентами тензора напряжений или между компонентами тензора деформаций и компонентами тензора напряжений, а также для уточнения инвариантных к напряженному состоянию феноменологических соотношений между компонентами тензора скоростей ползучести и компонентами тензора напряжений. Исследование инвариантных соотношений между компонентами тензора напряжений даст фактический материал для установления критериев длительной прочности при сложном напряженном состоянии, на основе которых можно сопоставлять степень опасности различных напряженных состояний при высокой температуре и заданном сроке службы материала.

Ниже приведен краткий обзор основных экспериментальных результатов, полученных при нормальной температуре. Данные специальных испытаний при низких и высоких температурах обсуждаются в последующих главах.

## § 2. Проверка гипотез теорий пластичности

Теория пластичности устанавливает связь между компонентами тензора напряжений и компонентами тензора деформаций при пластическом деформировании (преимущественно металлов). Путем непосредственного сопоставления результатов теоретических расчетов с опытными данными фактически нельзя установить, какая именно из гипотез, положенных в основу теории, не согласуется с опытом и, следовательно, является причиной обнаруженных расхождений. Непосредственная проверка отправных предположений в этом смысле имеет существенные преимущества, так как позволяет уточнять и устанавливать физические закономерности общего характера.

Экспериментальные исследования влияния гидростатического давления сводятся к проверке принятой линейной зависимости  $\theta = K'\sigma_0$  в области малых упруго-пластических деформаций и гипотезы постоянства объема при больших пластических дефор-

мациях, а также к исследованию влияния гидростатического давления на обобщенную кривую.

О том, что при наложении гидростатического сжатия изменяются пластические свойства материала, известно давно. Еще Карман [184] и Бекер [28] в опытах по разрушению каррарского мрамора и цинка при одновременном действии давления в осевом и поперечном направлениях обнаружили, что дополнительные сжимающие напряжения увеличивают пластичность материала. Более полные данные по истории вопроса можно найти в работе [323].

Систематическим изучением деформирования металлов в условиях всестороннего сжатия занимался Бриджмен [43], который уже к началу 40-х годов довел диапазон доступных давлений до  $100\,000\text{ кг/см}^2$ . Бриджмен установил, что предельная пластичность, определяемая как логарифм отношения начальной площади поперечного сечения образца к площади сечения шейки в момент разрыва, связана с гидростатическим давлением линейной зависимостью  $\epsilon_{пл} = \epsilon + nP$ , где  $\epsilon$  — деформация при разрыве без давления;  $n$  — коэффициент пропорциональности.

Более тщательный анализ результатов Бриджмена показывает [401], что при достаточно высоких давлениях линейная зависимость не соблюдается для многих материалов. Использование более совершенных методик позволило установить, что при определенной величине давления кривая  $\epsilon_{пл} = f(P)$  имеет перегиб [401], а у некоторых металлов — два перегиба.

Качественно общий вид кривой  $\epsilon_{пл} = f(P)$  показан на рис. 141 [288], из которого видно, что при малых давлениях пластичность практически не изменяется; однако, начиная с некоторого характерного для каждого материала давления  $P_1$ , наблюдается сначала интенсивный рост пластичности, который при дальнейшем увеличении давления уменьшается. Величина «порогового давления»  $P_1$  возрастает с увеличением прочности и твердости материала. Различные материалы, по данным работы [288], имеют следующие приближенные значения  $P_1$ ,  $\text{кг/см}^2$ :

Алюминий	780
Медь охрупченная	1000
Сталь (0,45%С)	1600
Молибден	2000
Хром	4500
Ванадий	7000

Как видно из рис. 142, кривые предельной пластичности для латуни, молибдена и хрома отличаются от типичной кривой, представленной на рис. 141. Это объясняется тем, что для пластичных металлов из-за низкого порогового давления трудно получить нижний перегиб кривой, а для малопластичных материалов в связи с искажением формы поперечного сечения шейки при боль-

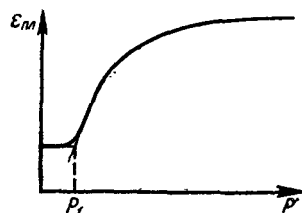


Рис. 141. Общий вид зависимости предельной пластичности от гидростатического давления.

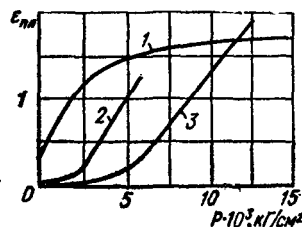


Рис. 142. Экспериментальные кривые предельной пластичности для латуни (1), молибдена (2) и хрома (3) [288].

ших деформациях — верхний перегиб [288]. Справедливость допущения об отсутствии изменения объема при больших пластических деформациях подтверждается данными работ [43, 100, 140, 299].

Бриджменом [43] исследовано изменение объема при линейном сжатии на образцах из железа, меди, бронзы, дюралюминия, низко- и высоколегированных сталей. Тщательный обмер образцов специальным dilatометром показал, что остаточное изменение объема практически равно нулю. Так, для стали с содержанием углерода 0,2% при деформировании до 13,5% остаточное изменение объема составило 0,012%.

Интересно, что у некоторых материалов (чугун, норвежское железо, отдельные горные породы) обнаружен эффект увеличения объема при одноосном сжатии. Так, при испытании чугуна после снятия нагрузки, при которой остаточное укорочение составляло 1,5%, остаточное увеличение объема составило 0,19%.

По мнению Бриджмена, при деформировании материала сжатием происходит не только закрытие трещин, приводящих к увеличению плотности, но и их раскрытие. Эти процессы могут давать остаточное изменение плотности после снятия нагрузки противоположных знаков. У чугуна, очевидно, компонента увеличения объема преобладает над другими эффектами.

На существенное изменение объема горных пород при деформировании и на целесообразность специального подхода для учета этого явления при решении задач механики указано в работе [424].

Опыты на сплошных образцах из сталей 10, 15, 30, 40, 45 и У8 проведены А. В. Гурьевым [100]. Деформация измерялась на инструментальном микроскопе (измерение диаметра) и рычажным индикатором (измерение удлинения) с точностью 0,001 мм. При деформации 5% коэффициент поперечной деформации был равен 0,498. При этом обнаружена неравномерность конечных деформаций в радиальных направлениях одного и того же сечения.

А. М. Жуков [140] на основании анализа результатов испытания сплошных цилиндрических образцов из сталей 30 и 45, сплава Д1 и алюминия на растяжение пришел к выводу, что для исследованных материалов, начиная с деформации 1%, коэффициент поперечной деформации отличался от 0,5 менее чем на 10%. При пластических деформациях, соизмеримых с упругими, отклонение составляло более 20%. Характер изменения коэффициента поперечной деформации в зависимости от степени деформации, по данным А. М. Жукова, хорошо аппроксимируется формулой

$$|\mu| = \frac{3K - \frac{\sigma_z}{\epsilon_z}}{6K},$$

где  $K$  — модуль объемного сжатия;  $\sigma_z$  и  $\epsilon_z$  — текущее напряжение и соответствующая ему продольная деформация.

Незначительное остаточное изменение объема на тех же материалах подтверждается опытами Н. Н. Давиденкова и Д. М. Василькова [10], проводившими испытания сталей 40 и 45 на растяжение до 10% с последующим взвешиванием в четыреххлористом углероде. Ими обнаружено, что указанной деформации соответствует коэффициент поперечной деформации, равный 0,47.

Аналогичные результаты получили Марин и Ху [591] на трубчатых образцах из алюминиевого сплава 14S — Т16, испытанных на растяжение с внутренним давлением. Обмер образцов, доведенных до определенной степени деформации, производился после очередной разгрузки. Было выявлено, что при деформациях примерно 2% остаточное изменение объема достигало 1%.

С увеличением гидростатического давления коэффициент поперечных деформаций, как правило, возрастает (рис. 143). Иногда на кривых  $\mu(P)$  наблюдаются аномальные изломы, связанные, очевидно, с фазовыми превращениями в металле под влиянием сжимающих напряжений.

Качественные результаты по объемной сжимаемости твердых тел в условиях всестороннего сжатия впервые получили Паррот и Ленц, которые в 1833 г. обнаружили сжимаемость стекла при давлении  $100 \text{ кг/см}^2$  [323]. Однако первые надежные количественные результаты при давлениях около  $50000 \text{ кг/см}^2$  были получены спустя 100 лет Бриджменом [43]. Для определения

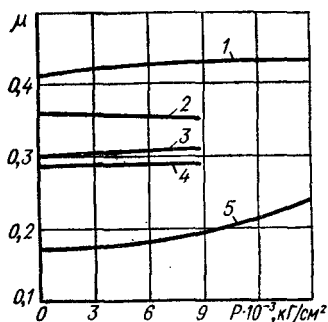


Рис. 143. Влияние гидростатического давления на коэффициент поперечной деформации [216]:

1 — хлористое серебро; 2 — алюминий; 3 — магний; 4 — железо; 5 — барий.

остаточного изменения объема Бриджмен рекомендует формулу

$$\theta = aP + bP^2,$$

где  $a$  и  $b$  — константы материала, приблизительные значения которых для железа  $a = 6 \cdot 10^{-7}$ ,  $b = 2 \cdot 10^{-12}$ ; для алюминия  $a = 13,3 \cdot 10^{-7}$ ,  $b = 3,5 \cdot 10^{-12}$ , для стекла  $a = 28 \cdot 10^{-7}$ ,  $b = 7 \cdot 10^{-12}$ .

Нелинейная зависимость относительного изменения объема от давления подтвердилась результатами исследований динамическими методами [323], позволившими расширить область исследованных давлений до  $5 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>.

В работе [392] сделана попытка теоретически определить сжимаемость материала. Получено простое соотношение, позволяющее вычислять сжимаемость металлов и сплавов при данном давлении в зависимости от их температуры плавления.

Большое количество работ посвящено проверке гипотезы о существовании обобщенной кривой течения, не зависящей от вида напряженного состояния.

Понятие о единой кривой течения было введено впервые Людвигом [585], который считал, что такой кривой является диаграмма максимальное касательное напряжение — максимальный сдвиг. Впоследствии, сначала формально по соображениям удобства, а затем на основании опытов эта кривая вытеснилась диаграммой интенсивность напряжений — интенсивность деформаций. Для выяснения вопроса о том, какой из этих кривых следует отдавать предпочтение, ставились специальные опыты.

Дэвис [130] провел серию опытов на трубчатых образцах из отожженной меди и стали. Пропорциональное нагружение образцов проводилось осевой силой и внутренним давлением. По результатам опытов строились кривые  $\tau_{\max}(\gamma_{\max})$  и  $\tau_{\text{окт}}(\gamma_{\text{окт}})$ , анализ которых показывает, что они могут быть приняты с одинаковыми приближениями.

К аналогичным выводам пришли Осгуд и Вашингтон [610], испытывавшие трубчатые образцы из алюминиевого сплава 24S — Т. Испытания проводились при следующих соотношениях главных напряжений: 0; 0,5; 1; 2;  $\infty$ . Результаты были представлены в виде графиков  $\tau_{\max}(\gamma_{\max})$  и  $\tau_{\text{окт}}(\gamma_{\text{окт}})$ . Отклонение от обеих кривых составляло  $\pm 5\%$ . Авторы объясняют это неоднородностью и анизотропией материала.

Этот же сплав был испытан Мариним [588] на трубчатых образцах при простом нагружении осевой силой и крутящим моментом. Наибольшее отклонение от кривых  $\sigma_i(\epsilon_i)$  составило  $\pm 6\%$ , причем кривые, соответствующие одновременному нагружению осевой силой и крутящим моментом, располагались между кривой одноосного растяжения (верхние кривые) и кривой чистого кручения (нижние кривые). Отклонение от кривых

$\sigma_i(\epsilon_i)$  примерно  $\pm 7\%$  обнаружено при испытании трубчатых образцов из магниевового сплава осевой силой и внутренним давлением [540].

По мнению С. И. Ратнер [386, 387], единая кривая деформирования является физическим законом только для чистых металлов с кубической решеткой, отожженных алюминиевых сплавов, а также отожженных и высокоотпущенных сталей. Этот закон не применим к металлам с гексагональной кристаллической решеткой и к металлам, обладающим метастабильностью.

С. И. Ратнер указывала [387], что разным напряженным состояниям присущи разные кривые течения, причем влияние напряженного состояния тем существеннее, чем резче выражены неравномерность и гетерогенность структуры, роль которых особенно проявляется при изменении шарового тензора. При разных напряженных состояниях создаются разные возможности для структурных превращений: чем больше пересыщен твердый раствор, тем больше зависит поведение материала в области пластических деформаций от характера напряженного состояния.

Подтверждение концепции С. И. Ратнер можно найти в опытах Т. Н. Мартыновой [289], исследовавшей обобщенные кривые на метастабильных сплавах Д16Т, МА5 МА3 и стали У10 при растяжении, сжатии и кручении. Было обнаружено значительное расхождение кривых, которое автор объясняет метастабильностью сплавов.

Другую точку зрения высказал А. М. Жуков [143, 144]. Замеченное расхождение обобщенных кривых для сплавов Д16Т и МА2 он объяснил анизотропией, а не метастабильностью структуры или типом кристаллической решетки. Такой же концепции придерживается большинство зарубежных ученых [593, 595, 610].

Результаты испытания изотропных в исходном состоянии латуни Л62 и сталей 40 и 30ХН2МФА при двухосном растяжении приведены в работе [7], где показано, что обобщенные кривые, построенные в координатах  $\sigma_i - \epsilon_i$ , удовлетворительно совпадают с кривой одноосного растяжения.

Аналогичные результаты получены в опытах при двухосном растяжении хромоникелевой стали [137], сталей ЭИ415 [141] и 30ХН3А [142], алюминиевого сплава 24 S — Т [610], отожженной меди и углеродистой стали [130]. Максимальное расхождение кривых в пластической области не превышало 5%. Такое же расхождение наблюдается и при сложном нагружении, если в процессе нагружения не происходит поворота главных осей. Это подтверждается также опытами, описанными в работах [7, 234].

Большая группа исследований посвящена экспериментальному изучению влияния отдельных параметров напряженного состояния на вид обобщенной кривой.

Закономерности деформирования при растяжении меди, магния, бериллиевой бронзы и некоторых сплавов на основе алюминия и магния под гидростатическим давлением исследовали С. И. Ратнер и М. Н. Хохоева [387]. Было обнаружено, что с изменением давления изменяются кривые деформирования. Верхнее расположение кривых соответствует большим значениям среднего нормального напряжения. Опыты С. И. Ратнер противоречат результатам опытов Кросленда [539], исследовавшего влияние шарового тензора на сопротивление сдвигу на сплошных образцах из стали, отожженной и нагартованной меди, кремне- и цинкоалюминиевых сплавов и цинка при давлении 1580 и 3160 ат. Кривые  $\tau_{\max}$  ( $\gamma_{\max}$ ), построенные для исследованных сплавов, оказались независимыми от бокового давления. Для цинка и его сплава эти кривые полностью совпали, а для остальных металлов увеличение давления приводило лишь к увеличению длины кривой.

И. А. Чаплинский [511] исследовал влияние на обобщенные кривые параметра  $k = \frac{\sigma_0}{\sigma_i}$ . Исследования сталей 25, 45, 30ХГСА, железа и алюминиевой бронзы при растяжении, сжатии, двухосном и трехосном сжатии с различным соотношением главных напряжений показали, что при изменении параметра  $k$  от 0,333 до 1,667 расхождения обобщенных кривых по напряжениям могут достигать 10%, при этом расхождения кривых  $\sigma_i(\epsilon_i)$  меньше, чем расхождения кривых  $\tau_{\max}$  ( $\gamma_{\max}$ ). На основании анализа полученных результатов авторы работы [511] предлагают искать обобщенные кривые в виде  $\sigma_i + A\sigma_0 = f(\epsilon_i)$ .

Аналогичные результаты получены И. Н. Виноградовым и Ю. И. Ягном [52] при испытаниях на двух- и трехосное сжатие технически чистого железа, бериллиевой и алюминийжелезистой бронзы (рис. 144). Кривые, показанные на рис. 144, являются крайними из совокупности кривых для промежуточных значений  $\frac{\sigma_0}{\sigma_i}$ .

На неприемлемость применения обобщенной кривой  $\sigma_i(\epsilon_i)$  для материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, обращали внимание А. И. Боткин [39] и другие исследователи [61, 273, 427], установившие на основании испытаний грунтов на трехосное сжатие, что кривая  $\sigma_i(\epsilon_i)$  зависит от среднего нормального давления. На рис. 145 показаны результаты этих исследований. Различные формы учета влияния гидростатического

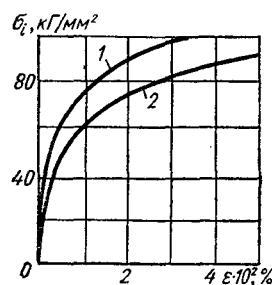


Рис. 144. Влияние параметра  $k$  на характер обобщенных кривых:

1 —  $k = 0,333$ ; 2 —  $k = 1,5$ .



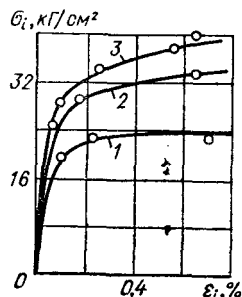


Рис. 145. Результаты испытаний грунтов на трехосное сжатие [65]:  
1 —  $\sigma_0 = 1500$  кг/см<sup>2</sup>;  
2 —  $2000$  кг/см<sup>2</sup>; 3 —  $4000$  кг/см<sup>2</sup>.

давления на обобщенные кривые для грунтов предлагались в работах [60, 61, 273, 427].

Первые опытные данные о влиянии вида девиатора напряжений на обобщенную кривую можно найти в работе Дэвиса [130]. Опыты Дэвиса проводились при следующих значениях параметра Лоде:  $-1$ ;  $-0,5$ ;  $-0,25$ ;  $+0,5$ ;  $+1$ . В расположении обобщенных кривых, построенных по результатам Дэвиса, можно обнаружить следующую закономерность: нижняя кривая соответствует нулевому значению параметра Лоде; увеличению абсолютного значения параметра Лоде соответствует более высокое расположение обобщенных кривых; веер кривых ограничивают обобщенные кривые для  $\mu_\sigma = \pm 1$ .

Систематическим изучением влияния вида девиатора напряжений на сопротивление пластическому деформированию занимался Ю. И. Яги с сотрудниками. Испытания образцов в виде кубиков [507] проводились на специальном механическом реверсе (одноосное растяжение, одноосное, двухосное и трехосное сжатие). Испытания, проведенные при постоянном значении отношения среднего нормального напряжения к интенсивности напряжения, показали, что кривые  $\sigma_i(\epsilon_i)$ , полученные при различных значениях  $\mu_\sigma$ , не совпадали. Эти кривые располагались по-разному. При испытании бронз на двухосное и трехосное сжатие нижняя кривая соответствовала параметру  $\mu_\sigma = -0,5$ . Этот результат, однако, авторы работы [300] связывают как с нестабильностью структуры бронз, так и со спецификой испытаний на сжатие. При испытании трубчатых образцов из технически чистого никеля [300], подвергнутых действию растягивающей силы, крутящего момента и внутреннего давления в различных сочетаниях, были качественно подтверждены результаты опытов Дэвиса [130] — увеличение абсолютного значения параметра  $\mu_\sigma$  соответствовало более высокому расположению кривых. Изменение сопротивления пластическому деформированию с изменением  $\mu_\sigma$  можно найти также в опытах Марина [588], Осгуда и Вашингтона [610], Френкеля [554].

А. М. Жуков [143] при обсуждении полученных им результатов испытаний магниевых сплавов высказал предположение, что отклонение экспериментальных точек от прямой  $\mu_\sigma = \mu_\epsilon$ , соответствующей условию подобия девиаторов, связано с начальной анизотропией материала. Для исключения влияния анизотропии авторы работы [300] на каждый вид напряженного состояния испытывали по несколько образцов при различных направлениях главных напряжений. Это, по их мнению, дало возможность

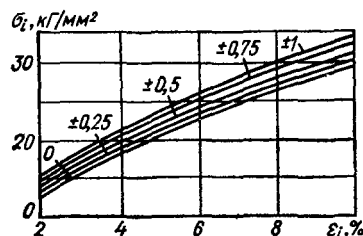


Рис. 146. Влияние параметра Лодэ на характер обобщенных кривых деформирования технически чистого никеля.

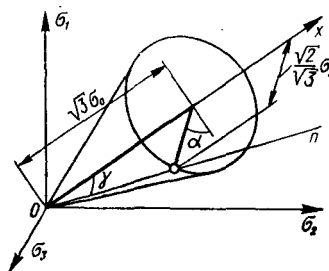


Рис. 147. Геометрия пространства напряжений.

усреднением результатов испытаний практически исключить влияние на кривые деформирования анизотропии материала и неоднородности образцов. Полученные результаты представлены на рис. 146.

Следует отметить, что использование отношения  $\frac{\sigma_0}{\sigma_i}$  в качестве характеристики напряженного состояния может привести к абсурдным выводам.

Как видно из рис. 147, одному и тому же значению параметра  $\frac{\sigma_0}{\sigma_i}$  соответствуют напряженные состояния, характеризующиеся точками пространств напряжений, лежащими на поверхности конуса с углом при вершине

$$2\gamma = 2 \operatorname{arctg} \frac{3\sigma_0}{\sqrt{2}\sigma_i}.$$

Если испытания проводятся при неизменном значении параметра Лодэ  $\mu_\sigma$ , т. е. при постоянном угле  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\mu_\sigma}{\sqrt{3}}$ , то нагружение происходит по лучу  $On$ . При изменении параметра  $\frac{\sigma_0}{\sigma_i}$  изменяется угол  $\gamma$  наклона этого луча к биссектрисе пространства напряжений. Поэтому, проводя испытания при  $\mu_\sigma = \text{const}$ , можно по характеру зависимости  $\sigma_i = f\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_i}\right)$  судить о влиянии шарового тензора. Совершенно иная картина получается в случае исследования влияния параметра  $\mu_\sigma$  при постоянном значении отношения  $\frac{\sigma_0}{\sigma_i}$ . Используя эту методику, невозможно, например, получить предельную кривую на девиаторной плоскости, если предельная поверхность для исследуемого материала не является поверхностью вращения. Поэтому приводимые в работах [52, 300, 479, 507 и др.] предельные кривые на девиаторной плоскости

объективно отражают результаты опытов лишь в том случае, если на сопротивление исследуемых материалов не влияет шаровой тензор.

Рассмотрев экспериментальные работы по проверке основных гипотез пластичности, можно отметить, что эти гипотезы справедливы лишь в первом приближении.

Опыты не подтверждают гипотезу о неизменности объема при пластическом деформировании. В зоне перехода от упругих деформаций к большим пластическим коэффициент поперечной деформации возрастает, асимптотически приближаясь к своему предельному значению  $\mu = 0,5$ . В соответствии с изменением коэффициента поперечной деформации изменяется величина соотношения работ, затрачиваемых на объемную деформацию и на формоизменение. Поэтому в области малых упруго-пластических деформаций коэффициент  $\mu$  является показателем деформационной способности материала при заданном виде напряженного состояния.

Изменение коэффициента поперечной деформации при переходе от упругого деформирования в пластическую зону не всегда происходит по тому закону, который предполагает теория. Различные формы учета влияния коэффициента поперечной деформации в области малых упруго-пластических деформаций рассматривались А. М. Жуковым [144] и Н. И. Черняком [483].

Опыты Бриджмена и других исследователей не подтверждают линейную связь между относительным изменением объема и шаровым тензором. Однако при тех значениях гидростатических давлений, которые встречаются в технических расчетах (до  $10\,000\text{ кг/см}^2$ ), пренебрежение квадратичным членом в формуле Бриджмена влечет за собой ошибку, не превышающую 2,5—3%. При давлении  $1000\text{ кг/см}^2$  эта ошибка практически не ощутима; для железа она составляет 0,33, а для стекла — 0,024%.

Большой интерес представляют исследования инвариантных к напряженному состоянию функций, описывающих закон упрочнения. Здесь нет единого мнения даже о принципиальной возможности существования обобщенной кривой как физического закона.

Предлагаемые феноменологические кривые в виде  $\tau_{\max}(\gamma_{\max})$  или  $\sigma_i(\epsilon_i)$  нельзя, конечно, рассматривать как универсальные, верные для всех материалов. Опыты показывают, что наилучшее соответствие этим кривым получено на изотропных материалах со стабильной структурой. Значительные отклонения от результатов отдельных испытаний указывают на несовершенство выбранных инвариантов и лишь подчеркивают необходимость учета специфики поведения этих материалов под нагрузкой путем введения новых констант, а также других характеристик напряженного и деформированного состояний. Г. А. Дошинский [124], например,

считает, что обобщенную кривую следует искать в виде

$$\sigma_i = \Phi \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 - \mu_\lambda} \varepsilon_i \right),$$

где  $\mu_\lambda$  — текущее значение коэффициента поперечной деформации.

Наибольшее сомнение вызывает гипотеза о пропорциональности девиаторов. В настоящее время накопилось достаточно материала, подтверждающего влияние вида девиатора на закон упрочнения пластичных материалов. Эта гипотеза может быть принята в качестве первого приближения. Учет того факта, что  $\mu_\sigma \neq \mu_\varepsilon$ , т. е. учет анизотропии и нелинейности, связан с необходимостью дополнительного определения большого числа характеристик материала. Это усложняет теорию и тем самым уменьшает ее практическое значение.

### § 3. Проверка теоретических соотношений между напряжениями и деформациями. Влияние истории нагружения

Первые попытки найти связь между напряжениями и деформациями в пластической области были сделаны еще в 1870 г. Сен-Венаном для плоской деформации. В 1871 г. уравнения Сен-Венана обобщены Леви на случай пространственного течения. Такие же соотношения получены Мизесом при использовании формально введенного им условия текучести. Уравнения Леви — Мизеса рассмотрены Рейсом применительно к упрочняющимся материалам. В таком виде теория пластического течения, связывающая напряжения и деформации в дифференциальной форме, фактически сохранилась до настоящего времени.

Основы деформационной теории, устанавливающей связь напряжений с деформациями в конечном виде, заложены Генки и Надаи и нашли развитие в работах советских ученых [167, 423 и др.].

Обе теории наряду с гипотезами, рассмотренными в § 1 настоящей главы, предполагают изотропность и однородность материала в исходном состоянии, сохранение упругих свойств в пластической области и отсутствие влияния временных факторов. В 1945 г. А. А. Ильющин [170] дал математическое определение простого и сложного нагружения и для случая простого нагружения теоретически доказал тождественность теории малых упруго-пластических деформаций и теории течения.

Достаточно полный обзор экспериментальных работ по проверке теорий пластичности в условиях простого нагружения дан в работах [167, 309, 423]. На основании этих исследований можно считать установленным, что для изотропных в исходном состоянии материалов, имеющих стабильную структуру, теории

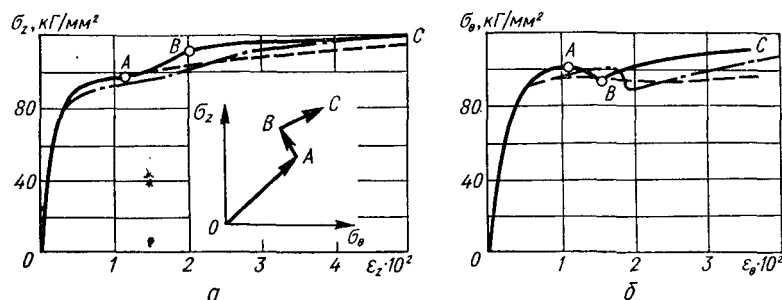


Рис. 148. Кривые деформирования стали 30ХНЗА в условиях сложного нагружения [142] в продольном (а) и окружном (б) направлениях.

пластичности удовлетворительно описывают процесс простого (и близкого к простому) нагружения.

Теория малых упруго-пластических деформаций в отличие от теории течения не предполагает влияния истории нагружения тела на его деформированное состояние. Поэтому в случае сложного нагружения деформационная теория и теория течения дают качественно различные результаты. Это подтверждается опытом с растяжением и кручением тонкостенной трубы (см. § 1 настоящей главы). Надо полагать, что влияние истории нагружения тем значительнее, чем больше отклоняется траектория деформации от простого нагружения.

Экспериментальные исследования закономерностей пластического деформирования при сложном нагружении проводятся в настоящее время путем накопления экспериментальных данных для оценки погрешностей существующих теорий пластичности и их уточнений, а также для непосредственной проверки основных постулатов общей теории упруго-пластических деформаций.

Опыты на сложное нагружение с сохранением ориентации осей тензора напряжений проведены А. М. Жуковым [141, 142]. Нагружение тонкостенных трубчатых образцов из стали 30ХНЗА производилось внутренним давлением и осевой силой таким образом: сначала путь нагружения (в истинных напряжениях) был пропорциональным, а затем изменялся при постоянном или незначительно возрастающем значении интенсивности напряжений. Результаты опыта (сплошные линии) и соответствующая программа нагружения представлены на рис. 148. Пропорциональное нагружение от нуля до точки А производилось до наступления пластической деформации.

Полученные экспериментальные данные были обработаны по теории деформаций сначала путем задания деформированного состояния (штриховые линии), а затем — путем задания напряженного состояния (штрих-пунктирные линии). Как видно из

рисунка, теоретические кривые сравнительно хорошо соответствуют опытным данным.

На основании опытов А. М. Жуков приходит к выводу о пригодности в первом приближении деформационной теории и для случая сложного нагружения, если при неизменной ориентации осей тензора напряжений интенсивность  $\sigma_i$  напряжений продолжает возрастать.

Аналогичный вывод сделан в работе [153] на основании данных испытаний грунтов.

Об удовлетворительном соответствии результатов теоретических расчетов по теории течения опытным данным, если сложное нагружение производится при неизменной ориентации главных осей, свидетельствуют опыты Марина и Ху [592] по испытанию внутренним давлением и осевой силой трубчатых образцов из малоуглеродистой стали.

Существенное количественное расхождение опытных данных с результатами теоретических расчетов по теории малых упруго-пластических деформаций и теории течения наблюдается в тех случаях, когда сложное нагружение сопровождается резким поворотом главных осей. Некоторые авторы придерживаются мнения, что существующие теории пластичности в этом случае дают результаты, в одинаковой мере не согласующиеся с опытными данными. В то же время в ряде работ приведены данные, показывающие, что теория течения достаточно полно отражает влияние истории нагружения.

Такие следствия постулата Друккера, как выпуклость поверхности текучести и принцип градиентальности (пластическое течение развивается по нормали к этой поверхности), справедливы в том случае, если пластические деформации не оказывают заметного влияния на характеристики упругости материала [172]. Поэтому существенно важны исследования зависимости упругих свойств от напряженно-деформированного состояния материала и истории нагружения.

По опубликованным данным [25, 365, 418] модули нормальной и касательной упругости большинства металлов и сплавов в процессе пластического деформирования сначала незначительно (до 10%) уменьшаются, а при деформациях, превышающих 3—5%, снова возрастают или стабилизируются.

В. А. Свешниковой [405] проведены испытания трубчатых образцов из меди, латуни и дюралюминия по двум программам. В соответствии с первой программой образец растягивался до напряжений, превышающих предел пропорциональности, после чего закручивался при сохранении постоянного значения осевого напряжения. В соответствии со второй программой предварительно закрученный образец подвергался растяжению при постоянном значении напряжений кручения.

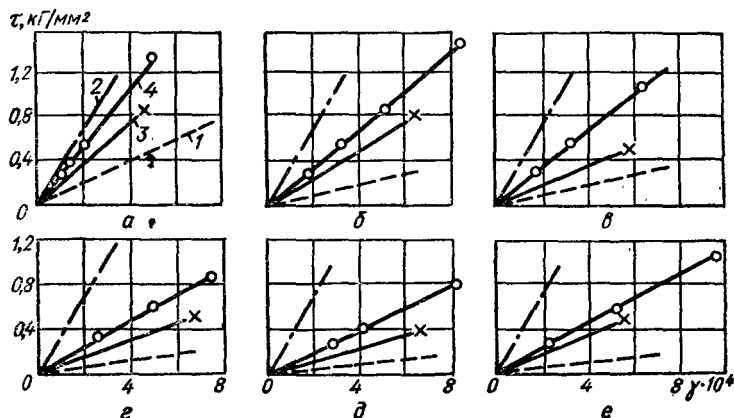


Рис. 149. Кривые кручения латуни при различных значениях осевого напряжения [405]:

$a - \sigma = 8,7 \text{ кг/мм}^2$ ;  $b - \sigma = 9,4 \text{ кг/мм}^2$ ;  $c - \sigma = 9,8 \text{ кг/мм}^2$ ;  $d - \sigma = 10,6 \text{ кг/мм}^2$ ;  $e - \sigma = 11 \text{ кг/мм}^2$ ;  $f - \sigma = 13,2 \text{ кг/мм}^2$ ; 1 — по деформационной теории; 2 — по теории течения; 3 — по теории скольжения; 4 — экспериментальная кривая.

Проведенные эксперименты показали, что модули нагрузки  $G'$  (первая программа) и  $E'$  (вторая программа) оказались не равными соответствующим модулям упругости материала. При этом одновременно с увеличением деформаций догрузки наблюдалось дополнительное возрастание основной деформации. Увеличение наклона линейных участков с возрастанием начальной пластической деформации наблюдалось также А. М. Жуковым [146].

На рис. 149 представлены кривые догрузки кручением для латуни при различных значениях осевого напряжения. Каждая кривая имеет начальный линейный участок. Наклон этих участков показывает, что во всех случаях модуль сдвига при догрузке меньше начального модуля, равного для латуни  $0,35 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$ .

Известно [138], что согласно теории течения в рассматриваемом случае сложного нагружения пластический модуль должен быть равен упругому. В соответствии с деформационными теориями

$$G_p = \frac{G}{1 + 3G \left( \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right)},$$

а в соответствии с теорией скольжения

$$G_p = \frac{G}{1 + \frac{3}{2} G \left( \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right)},$$

где  $E_t$  — касательный модуль кривой растяжения в точке, соответствующей началу догрузки.

На рис. 149 показаны также начальные участки кривых, построенных по различным теориям пластичности [520]. Как видно из рисунка, ни одна из использованных теорий не может описать экспериментальные результаты, если догрузка сопровождается поворотом главных осей тензора напряжений. К аналогичным результатам приводят опыты авторов работ [138, 147, 595, 605 и др.].

Однако в литературе описаны опыты, показывающие, что при нагружениях, сопровождающихся поворотом главных осей, в лучшем соответствии с опытными данными находится теория течения. Рассмотрим для примера результаты И. З. Паллея [341] по испытанию трубчатых образцов из аустенитной стали X18H9T при растяжении с кручением. В процессе эксперимента линейные деформации  $\epsilon_z$  и  $\epsilon_\theta$  измерялись индикаторами, закрепленными в специальном приспособлении, а угловые  $\gamma_{z\theta}$  — зеркальным прибором Мартенса. По сведениям автора, точность измерения деформаций составляла  $10^{-4}\%$ . На основании анализа результатов испытаний, представленных в виде кривых  $\tau(\gamma)$  и  $\tau(\epsilon)$  при  $\sigma = \text{const}$  и  $\sigma(\epsilon)$  и  $\sigma(\gamma)$  при  $\tau = \text{const}$ , автор делает вывод о предпочтительном использовании для описания деформационных свойств испытанной стали при развитых пластических деформациях теории течения, которая дает результаты, достаточно близкие к экспериментальным. Разница между данными опыта и предсказаниями теории малых упруго-пластических деформаций возрастает с увеличением степени предварительного деформирования. О степени отклонения опытных данных от результатов теоретических расчетов можно судить по данным рис. 150, где представлены пути деформаций образца 2 (рис. 150, а) и образца 4 (рис. 150, б) в сравнении с путями деформации, предсказанными теорией течения (штрих-пунктирные линии) и теорией малых упруго-пластических деформаций (штриховые линии). Программы испытания образцов показаны на рис. 150, в. Путь пластической деформации, предсказанный теорией течения, близок к экспериментальному. Приращения пластических деформаций по теории малых упруго-пластических деформаций значительно больше экспериментальных, однако наибольшее расхождение с опытными данными, как видно из рис. 150, наблюдается, когда в соответствии с деформационной теорией пластический сдвиг должен полностью исчезнуть.

При рассмотрении результатов, приведенных на рис. 150, необходимо, однако, учитывать следующие обстоятельства. Область применимости теории малых упруго-пластических деформаций давно установлена [167]. Это — простые и близкие к простым нагружения. Поэтому полученные значительные отклонения



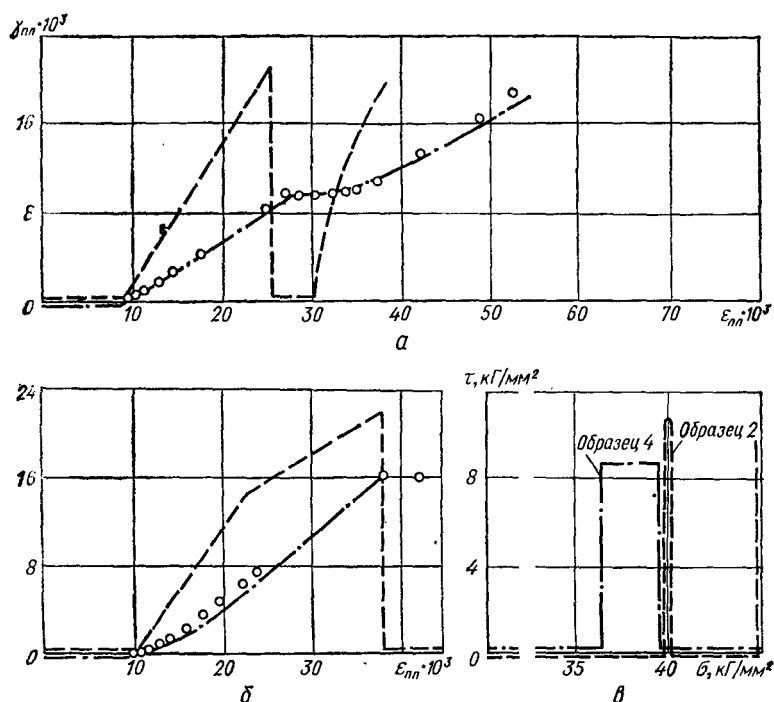


Рис. 150. Результаты испытания трубчатых образцов из стали X18N9T на растяжение с кручением в условиях сложного нагружения [341]:

а — образец 2; б — образец 4; в — программы испытаний.

пельзя считать неожиданными. Расхождения теоретических и опытных данных при рассмотренных нагружениях указывают лишь на необходимость выдвижения новых экспериментально обоснованных исходных гипотез.

Теория течения, наиболее полно отражающая влияние истории нагружения, также не лишена существенных недостатков. Эта теория, например, не предсказывает экспериментально известного факта изменения упругих свойств материала при пластической деформации [145, 146, 405]. По-прежнему остается неясным вопрос о характере изменения формы предельной поверхности в процессе деформирования.

Экспериментальной проверке основных постулатов общей теории упруго-пластических деформаций посвящены работы [133, 134, 256, 257, 258, 299 и др]. Здесь также нет единого мнения. В. С. Ленский на основании испытаний трубчатых образцов из меди, стали 45, стали 38ХА и алюминиевого сплава Д16 в

условиях сложных программ траекторий деформации (нагружение образцов производилось осевой силой и крутящим моментом) пришел к выводу, что постулат изотропии является общим законом поведения первоначально изотропного в отношении упругих и пластических свойств материала при произвольном сложном нагружении. Другого мнения придерживаются авторы работ [133, 161, 162, 299, 317, 318], обратившие внимание на тот факт, что опыты В. С. Ленского были проведены лишь на материалах, имеющих обобщенную кривую в виде  $\sigma_i(\epsilon_i)$ . Отмечалось также, что следующая из постулата изотропии инвариантность упруго-пластических свойств среды к первому и третьему инвариантам тензора напряжений экспериментально не подтверждается.

Опыты по исследованию влияния на закономерности деформирования первого инварианта тензора напряжений и вида девиатора при простом нагружении описаны нами в § 2 настоящей главы.

#### § 4. Исследование условий предельных состояний материалов

Условия наступления предельного напряженного состояния в виде  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, m_i) = 0$ , подробно рассмотренные в гл. III, в принципе можно распространить на всю область упругих деформаций (при расчете эквивалентных напряжений в условиях сложного напряженного состояния) и на всю область пластических деформаций (при определении сопротивления материала за пределом текучести [95, 175, 455]).

При деформировании в пределах упругости эквивалентное напряжение, т. е. инвариантное к напряженному состоянию числовое значение функции, принятой за условие эквивалентности, может быть задано в пределах  $0 \leq \sigma_e \leq \sigma_y$ . При пластическом деформировании эквивалентное напряжение определяется, как правило, из диаграммы простого растяжения по принятому допуску на остаточную деформацию. Задаваясь различными допусками на пластическую деформацию, получаем несколько вложенных друг в друга предельных поверхностей текучести.

Часто употребляемым допуском на остаточную деформацию при растяжении является деформация 0,2%, соответствующая напряжению, которое в технической литературе принято называть условным пределом текучести. Следует отметить, что допуск 0,2% сложился исторически без какого-либо физического обоснования и поэтому требует уточнения [148]. Еще более неясным остается вопрос о методике определения условного предела текучести при сложном напряженном состоянии. Ряд авторов [118, 434 и др.] условный предел текучести определяют по обобщенным кривым  $\sigma_i = f(\epsilon_i)$ . Такая методика заранее предполагает интенсивность деформаций  $\epsilon_i$  обобщенной характеристикой пластичности

металла. Определение условного предела текучести в этом случае связано с трудоемкими графоаналитическими расчетами. Так, если материал обладает некоторой анизотропией механических свойств, то для определения интенсивности деформаций даже при одноосном растяжении необходимо экспериментальное определение всех компонент тензора деформаций. По методике, принятой в работах А. М. Жукова [139, 148], за условный допуск при любом соотношении главных напряжений принимается остаточное удлинение 0,2% в направлении, по которому процесс деформирования протекает более интенсивно.

Рассмотренные в § 2 настоящей главы экспериментальные работы по исследованию обобщенных кривых вида  $\sigma_i = f_1(\epsilon_i)$  и  $\tau_{\max} = f_2(\gamma_{\max})$  фактически являются проверкой условий Мизеса и Кулона.

Для проверки условия Мизеса достаточно сравнить значения интенсивностей напряжений для принятого фиксированного значения интенсивности деформаций; при проверке условия Кулона сравниваются уровни максимальных касательных напряжений, соответствующих определенным значениям максимальных сдвигов.

Наблюдаемые расхождения кривых  $\sigma_i = f_1(\epsilon_i)$  и  $\tau_{\max} = f_2(\gamma_{\max})$ , построенных по результатам опытов при различных соотношениях главных нормальных напряжений, указывают на приближенность условий пластичности Мизеса и Кулона даже для пластичных материалов, причем степень отклонения от того или иного условия зависит от принятого допуска на деформацию. В этом отношении показательны опыты Роша и Эйхингера по испытанию стальных образцов на растяжение и кручение, описанные в работе [568]. Анализ экспериментальных данных проводился путем сопоставления касательных напряжений при растяжении  $\tau_p$  и при кручении  $\tau_k$ , соответствующих пределу упругости, и в пластической области. В результате усреднения данных шестнадцати опытов были получены следующие соотношения касательных напряжений:

в упругой области  $\frac{\tau_k}{\tau_p} = 1,2$ ; в пластической области  $\frac{\tau_k}{\tau_p} = 1,04$ .

Эти соотношения показывают, что условие Мизеса  $\left(\frac{\tau_k}{\tau_p} = 1,154\right)$  лучше выполняется в зоне, предшествующей пластическим деформациям. При развитых пластических деформациях в лучшем соответствии с опытом находится условие Кулона  $\left(\frac{\tau_k}{\tau_p} = 1\right)$ .

Довольно близкое расположение экспериментальных точек, соответствующих состоянию текучести, к эллипсу Мизеса подтверждается результатами работ [7, 137, 141, 142, 147, 175, 433, 563, 592, 604]. Если давать оценку состояниям, предшествующим

разрушению, то для пластичных материалов в качестве критерия разрушения, по данным работ [7, 181, 433], можно принять условие Кулона. Однако результаты опытов, описанных в работах [137, 141, 594], указывают на лучшее соответствие опыту условия Мизеса и в этом случае.

На характер рассеяния обобщенных кривых, а следовательно, и на условие наступления предельного напряженного состояния оказывает существенное влияние начальная анизотропия материала. Сопоставление имеющихся экспериментальных данных [143, 286, 474] с известными условиями наступления предельного напряженного состояния показывает, что для состояния текучести в лучшем соответствии с опытом находятся условия Мизеса для анизотропного тела и условия Марина — Ху (см. § 1 гл. VI). Разрушение большинства анизотропных материалов удовлетворительно описывается условием Кулона для анизотропного тела. Некоторые результаты экспериментального исследования неоднородных анизотропных материалов (текстолита, ориентированных стеклопластиков и т. п.) рассмотрены в работах [10, 152, 374, 437].

Начальная анизотропия может быть вызвана предварительной пластической деформацией. В связи с этим для развития математической теории пластичности исключительный интерес представляет исследование изменения геометрии предельной поверхности в связи с различной степенью предварительного пластического деформирования. При построении теории делаются предположения о характере упрочнения материала. В ряде работ исходят из гипотезы об изотропном упрочнении, т. е. предполагают, что поверхность текучести, сохраняя свою форму, изотропно расширяется. Однако эта гипотеза не может объяснить, например, эффект Баушингера. Анизотропность эффекта упрочнения учитывается кинематической моделью, в соответствии с которой поверхность текучести в процессе деформирования испытывает переносное движение в направлении деформации.

В соответствии с теорией скольжения [519] поверхность текучести вытягивается в направлении предварительного нагружения в области, примыкающей к лучу деформирования, образуя угол текучести. Варианты изменения предельных кривых (рис. 151) подвергались экспериментальной проверке [20, 24, 433 и др.]. Опыты показали, что форма предельной кривой зависит от величины предварительной пластической деформации и с увеличением последней, как правило, не только расширяется, но и смещается в направлении предварительного деформирования. На рис. 152 показан характер изменения предельных кривых для стали 20 после предварительного упрочнения кручением и растяжением [343]. Из рисунка видно, что в результате наклепа наряду с упрочнением наблюдается перемещение предельной кривой в

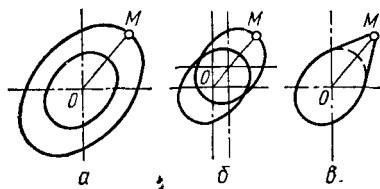


Рис. 151. Изменение геометрии предельной кривой в результате предварительного пластического деформирования:

*a* — по теории изотропного упрочнения; *б* — по теории кинематического упрочнения; *в* — по теории скольжения.

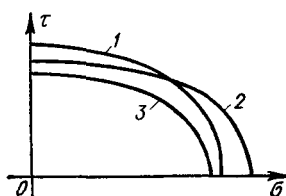


Рис. 152. Влияние предварительного деформирования на вид предельной кривой стали 20:

1 — наклеп кручением; 2 — наклеп растяжением; 3 — предельная кривая материала в исходном состоянии.

направлении, соответствующем предварительной пластической деформации. Аналогичные результаты были получены на никеле, меди [433], среднеуглеродистых и высокопрочных сталях [20, 24, 492]. В отдельных случаях вместе с перемещением предельной поверхности наблюдается ее сужение в направлениях, где эффект Баушингера выражен наиболее резко [433]. Авторами работ [604, 612] наблюдалось образование угловой точки. Тщательное исследование этого вопроса [457] показало, что одним из основных условий образования угловой точки является резкое изменение направления вектора приращения напряжений.

Влияние сложного нагружения на предельное состояние, предшествующее разрушению, менее заметно. По данным работ [142, 255, 433] при двухосном растяжении, когда нагружение не сопровождается поворотом главных осей, предельные напряжения при простом и сложном нагружении практически совпадают.

Большой интерес представляют результаты экспериментального исследования предельных напряженных состояний хрупких материалов.

Понятие «хрупкий материал» весьма условно. Обычно к этому классу материалов относят такие материалы, которые не имеют площадки текучести и разрушаются без заметной пластической деформации. Это высокоуглеродистые стали, подавляющее большинство легированных сталей, чугуны, природные и цементные камни, а также другие материалы [87, 110].

Характерной особенностью таких материалов является более высокое сопротивление сжатию по сравнению с сопротивлением при растяжении. На рис. 153 показана диаграмма растяжения — сжатия стали У12, термически обработанной до твердости  $RC = 62 \div 64$  [456]. Из рисунка видно, что если при растяжении пластические деформации возникают при напряжениях около  $12\,000 \text{ кг/см}^2$ , то при сжатии диаграмма остается прямолинейной до напряжений  $\sigma = 35\,000 \text{ кг/см}^2$ . Это обстоятельство, естественно,

может быть учтено только теми теориями, в расчетные уравнения которых может входить не менее двух констант материала. Для проверки таких теорий ставились опыты с материалами, по-разному сопротивляющимися растяжению и сжатию [28, 87, 110, 111, 184, 207, 456 и др.].

Образцы кубической формы из дерева, песчаника, кирпича, гранита и разных цементов были испытаны А. Фенплем [456] в условиях двухосного сжатия и при всестороннем сжатии в толстостенном сосуде, наполненном маслом. На основании опытов А. Фенплъ пришел к выводу, что при всестороннем сжатии прочность изотропного, не имеющего внутренних пороков материала определяется не абсолютной величиной главных напряжений, а их разностью, поэтому при гидростатическом сжатии, когда все три главных напряжения равны, разрушить материал невозможно.

Испытания на сжатие и кручение каменных материалов при высоких (до  $6000 \text{ кг/см}^2$ ) гидростатических давлениях проведены Т. Карманом [184] и Р. Бекером [28]. Представляя результаты своих опытов в виде диаграммы Мора, они пришли к выводу, что с увеличением гидростатического сжатия прочность материалов повышается в соответствии с предсказаниями теории Мора.

Н. Н. Давиденковым и А. И. Ставрогиним [110] были испытаны тонкостенные трубки из стекла и медицинского гипса при нагружении внутренним давлением с одновременным пропорциональным наложением осевого растягивающего или сжимающего напряжения. Образцы из стекла имели внутренний диаметр 35 мм, толщину стенки 1 мм; для снятия остаточных напряжений они отжигались. Образцы из медицинского гипса имели толщину стенки 3 мм при внутреннем диаметре 39,5 мм. Для предохранения внутренней поверхности от проникновения в нее масла внутрь образца вводился мешок из тонкой резины. В каждой точке испытывалось не менее десяти образцов.

Анализируя полученные данные, Н. Н. Давиденков и А. И. Ставрогин пришли к выводу, что критерий максимального нормального напряжения сохраняет свою силу для стекла до величины отношения главного сжимающего напряжения к главному растягивающему, равной 7,5, а для гипса — 2,7. Остальной участок

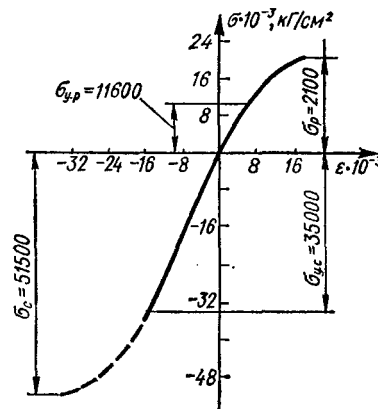


Рис. 153. Диаграмма растяжения — сжатия стали У12.

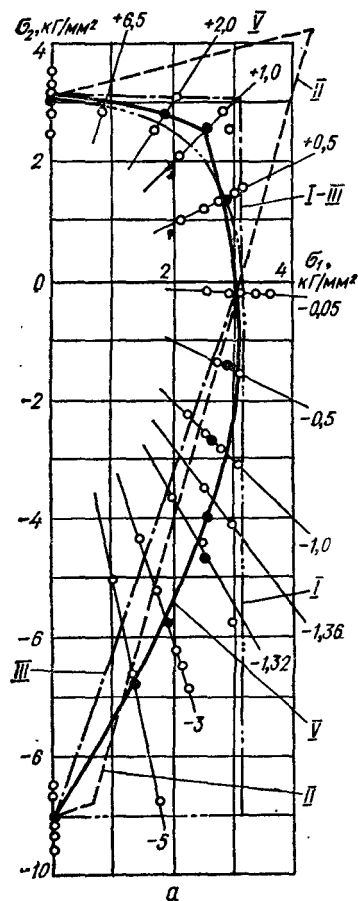
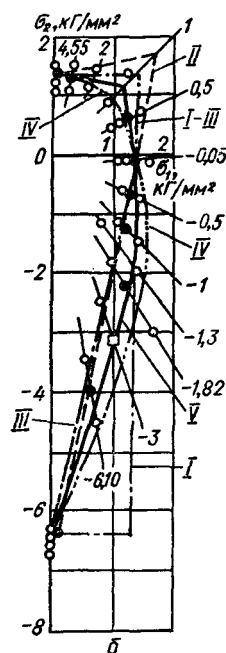


Рис. 154. Результаты испытаний мелкозернистого графита типа МПГ-6 (а) и среднезернистого графита типа ВПП (б):

I — теория наибольших нормальных напряжений; II — теория приведенных нормальных напряжений; III — теория Кулона — Мора; IV — критерий Миролюбова; V — обобщенный критерий (V.14).



для стекла остался неисследованным, а для гипса при дальнейшем увеличении этого отношения, по мнению авторов, может быть использована теория И. Н. Миролюбова [298].

Результаты опытов по исследованию предельных напряженных состояний большой группы хрупких материалов обсуждались в гл. IV (см. рис. 52—54). Там же проведено их сопоставление с результатами расчетов по различным теориям прочности. Анализ экспериментальных данных показывает, что предельные кривые материалов, не имеющих существенного нарушения структуры в виде различного рода макродефектов — трещин, пор, инородных включений и т. п., — расположены, как это видно из рис. 45, в области, ограниченной эллипсом Мизеса и предельной кривой, соответствующей теории максимальных нормальных напряжений.

Разрушение этих материалов хорошо описывается обобщенными критериями прочности (IV.17).

При оценке предельного сопротивления структурно-неоднородных материалов необходимо учитывать влияние макродефектов, вероятностное распределение которых по объему указывает на возможность использования статистических подходов. Как это следует из рис. 64, 65, а также рис. 154, на котором представлены результаты испытаний двух марок графита, статистический аспект прочности с достаточным приближением может быть отражен в обобщенном критерии функцией вида (V.13).

Результаты рассматриваемых опытов, как и результаты большой группы других испытаний, часть которых уже обсуждалась, позволяют сделать некоторые обобщения.

Прежде всего эти опыты дают возможность в определенной степени решить вопрос о наиболее рациональной теории прочности. Анализ приведенных экспериментальных данных показывает, что ни одна из предложенных ранее теорий, включающих не более двух констант материала, не может описать разрушение широкого класса материалов. Поэтому вполне оправданным было предположение, что в более общей теории прочности должны быть отражены несколько критериев. Из приведенного экспериментального материала видно, что рациональное обобщение условия пластичности в виде  $\sigma_1 = \text{const}$  и условия хрупкого разрушения в виде  $\sigma_1 = \text{const}$  (гл. IV), а также учет статистического аспекта прочности приводят к хорошему совпадению результатов теоретических расчетов с данными испытаний подавляющего большинства структурно-неоднородных и существенно «дефектных» материалов в широком диапазоне.



## *Глава X*

### **ЗАКОНОМЕРНОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ В УСЛОВИЯХ НИЗКИХ И ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР**

#### **§ 1. Исследуемые материалы**

Экспериментальные результаты, обсуждаемые в гл. X и XI, получены, в основном, в Институте проблем прочности АН УССР на установках типа СНТ и относятся к изучению влияния температуры на законы упрочнения и критерии предельного состояния ряда конструкционных материалов, которые условно можно разбить на три группы.

К первой группе отнесены материалы, достаточно пластичные как при комнатной, так и при низких температурах (хромоникелевые стали, алюминиевые сплавы), ко второй — материалы, теряющие свои пластические свойства при снижении температуры (армко-железо, углеродистые стали) и к третьей — материалы, квазихрупкие при комнатной и при низкой температурах (серые чугуны).

Образцы из аустенитных сталей изготавливались из круглых болванок диаметром 45 мм (X18H10T) и из трубы 38 × 6 промышленной плавки. Технология их изготовления заключалась в следующем: заготовка растачивалась, после чего внутренняя поверхность образца обрабатывалась твердосплавными развертками и доводилась чугунными притирами с использованием специальных паст. После этого образец плотно насаживался на оправку, обрабатывался резцом по внешней поверхности и шлифовался.

Образцы из стали X18H10T испытывались после естественного старения в течение 13 месяцев. Термическая обработка стали X18H9T производилась в заготовках по режиму: выдержка при температуре 1100° С в течение 30 мин, охлаждение на воздухе (аустенизация). Стали являются однофазными и представляют собой твердый раствор легирующих элементов в  $\gamma$ -железе. Химический состав сталей и принятый режим термической обработки обеспечивали практически одинаковую исходную структуру.

Образцы из алюминиевых сплавов (Д16Т — деформируемый сплав и АЛ-19 — литейный сплав) изготавливались из прутков диаметром 45 мм токарной обработкой с постепенно уменьшающимися припусками. Доводка внутренней поверхности образцов

из литейного сплава производилась развертками с интенсивной подачей эмульсии по ходу инструмента, а образцов из сплава Д16Т — при помощи плавающего резца. Чистовая обработка наружной поверхности осуществлялась на оправке разового действия.

Сплав Д16Т подвергался термической обработке: нагрев до  $350^{\circ}\text{C}$ , выдержка 2 ч, охлаждение на воздухе. Сплав АЛ-19 испытывался в состоянии поставки. Текстура сплавов характеризуется некоторой вытянутостью составляющих. В обоих сплавах, кроме  $\alpha$ -твердого раствора меди в алюминии, имеется соединение  $\text{CuAl}_2$  и ряд других интерметаллических соединений.

Образцы из углеродистых сталей изготавливались из прутков диаметром 45 мм по той же технологии, что и образцы из хромоникелевых сталей.

Заготовки первой партии (С — 0,37%) были подвергнуты термической обработке по режиму: выдержка при температуре  $830^{\circ}\text{C}$  в течение двух часов, охлаждение на воздухе (нормализация). Для снятия остаточных напряжений образцы после изготовления подвергались дополнительной термической обработке: нагрев в масле в течение двух часов до температуры  $310^{\circ}\text{C}$ , выдержка при этой температуре в течение трех часов, затем охлаждение вместе с маслом. Образцы второй партии (С — 0,53%) испытывались после естественного старения в течение 28 месяцев.

Микроструктура металла состоит из перлита и феррита. Среднеуглеродистая сталь сравнительно мелкозерниста. В отдельных местах имеются неметаллические включения пластинчатого типа. Наблюдается незначительная строчечность. Перлит мелкопластинчатый, достаточно прямолинейный. В отдельных местах цементит перлита имеет несколько округленную форму. Перлитные зерна характеризуются микротвердостью  $H_{\text{мсп}}^{50} = 290 \text{ кг/мм}^2$ , а ферритные —  $H_{\text{мсп}}^{50} = 186 \text{ кг/мм}^2$ .

Микроструктура стали с содержанием углерода 0,53% характеризуется тонко-пластинчатым цементитом. Наблюдается вытянутость зерен феррита. Зерна перлита неоднородны по величине — имеются как сравнительно крупные, так и достаточно мелкие. Зерна не равноосные.

Кроме указанных испытывались также образцы из малоуглеродистой (С — 0,05%) и среднеуглеродистой (С — 0,47%) сталей. Испытания этих материалов носили вспомогательный характер. Поэтому детальному металлографическому анализу они не подвергались.

Образцы из чугуна были изготовлены из круглых болванок двух плавок. Металл обеих плавок по химическому составу и механическим свойствам близок к марке С412-28. Учитывая осесимметричную неоднородность свойств материала по сечению,

образцы вытачивали с таким расчетом, чтобы ось цилиндрической рабочей части и ось болванки совпадали.

Дальнейшие испытания показали, что болванки по длине были достаточно однородны, а испытуемые объемы металла в рабочей части образца — изотропны.

Для снятия внутренних напряжений заготовки были подвергнуты отжигу при температуре  $550^{\circ}\text{C}$  в течение двух часов.

Микроструктура чугунов в исходном состоянии характеризуется тонкопластинчатыми, слабо завихренными включениями графита в ферритно-перлитной основе. Перлит мелкопластинчатый, местами раздробленный. Феррит, в основном, располагается вокруг графитовых включений и отдельными зернами. Наблюдаются также включения тройной фосфористой эвтектики, располагающейся неравномерно по сечению. Различия в структуре металла обеих плавок обнаружить не удалось.

Для контроля качества поверхностей и размеров образцов применялись специальные приспособления. Образцы, не отвечающие требованиям чертежа, браковались.

Проверялась однородность напряженного состояния по длине рабочей части образца и по периметру. Для этой цели на образец наклеивали восемь тензорезисторов на различных уровнях по высоте образца. Измерения показали, что усилия и моменты, вызываемые в цилиндрической оболочке краевыми воздействиями, быстро асциллируют по мере удаления от головки. Возмущение силового поля в образце наблюдалось на расстоянии от головки, не превышающем 8—10 мм. Это указывает на то, что в средней части образца, где производилось измерение деформаций, напряженное состояние металла было достаточно однородным.

Возможное наличие эксцентричности приложения осевой силы к образцу проверялось выборочно по показаниям тензорезисторов, наклеенных на рабочей части образца с диаметрально противоположных сторон, при напряжениях, заведомо меньших предела упругости. Образцы, в которых произошло растяжение с изгибом, использовались для испытаний без приложения осевой силы.

Некоторые из исследованных металлов (сталь 50, сплав АЛ-19, хромоникелевые стали) не подвергались термической обработке после изготовления образцов. В этом случае для контроля остаточных напряжений от механической обработки из трубчатого образца были вырезаны кольца высотой около 10 мм. После тщательного обмера эти кольца разрезали по образующей и вновь обмеряли. Оказалось, что диаметр колец после разреза оставался практически неизменным; это свидетельствует об отсутствии остаточных (тангенциальных) напряжений в образце.

Во многих опытах, с целью контроля показаний тензометров и уточнения диаграмм деформирования, на образец наклеивались

клеем ВЛ-931 тензорезисторы (в продольном и поперечном направлениях) или розетки типа ФКРГ10 × 100.

Тензорезисторы наклеивали по следующей технологии: на образец, предварительно нагретый до температуры 70—75° С, наносился тонкий слой клея; такой же слой наносился на резистор. Спустя 5—7 мин образец покрывали вторым слоем клея, после чего тензорезистор прижимался к образцу в специальном зажимном приспособлении. Через сутки клей подвергался термообработке: образец с наклеенными тензорезисторами, после нагрева в течение полутора часов, два часа выдерживался при температуре 70° С; затем со скоростью 1 град/мин нагревался до 150° С и выдерживался при этой температуре еще два часа. Охлаждение образца проводилось медленно, вместе с печью.

После распайки тензорезисторов и приварки термопар на головках образца монтировали переходы. Препарированный таким образом образец вставлялся в захваты испытательной машины. Общие вопросы методики проведения эксперимента на отдельных испытательных комплексах освещены в гл. VIII.

В процессе испытания регистрировали приложенные к образцу внешние усилия и деформации образца на базе 20—25 мм — осевую радиальную и относительный поворот сечений в пределах базы под действием скручивающего момента.

Учитывая значительную трудоемкость проводимых опытов (на подготовку и проведение испытаний одного образца требовалось в среднем приблизительно 25 чел-ч), программу испытаний составляли таким образом, чтобы полученные результаты могли быть использованы для анализа различных аспектов одновременного влияния температуры и вида напряженного состояния на механические свойства материалов.

Программа испытаний отдельных образцов по техническим причинам была выполнена не полностью: образец не был доведен до разрушения или в процессе испытаний не записывали деформации. Результаты испытаний этих образцов использованы в качестве контрольных и в дальнейшем (за редким исключением) не обсуждаются.

## § 2. Анализ экспериментальных кривых деформирования

Феноменологические подходы при установлении соотношений между напряжениями и деформациями базируются на допущениях, которые, естественно, в определенных условиях механического и теплового нагружения могут в большей или меньшей мере не выполняться. Экспериментальной проверке этих допущений посвящено много работ. Подавляющее большинство исследований выполнено при нормальной температуре. Обобщая полученные результаты (см. гл. IX), можно отметить, что при нормальной

температуре наблюдаемые отклонения от основных постулатов для большинства пластичных материалов незначительно превышают погрешности эксперимента.

При охлаждении или нагреве изменяются свойства материала и его состояние. С повышением температуры увеличивается пластичность материала, начинают проявляться реологические эффекты, приводящие к ползучести. Формоизменение металла в таких условиях описывается соотношениями, содержащими время (см. гл. VI). Соответствующие экспериментальные данные и их обобщения широко представлены в литературе [382].

В значительно меньшей мере изучены закономерности деформирования и разрушения материалов при низких температурах. На этих вопросах и акцентируется ниже основное внимание.

Наиболее содержательной исходной информацией о материале являются кривые деформирования. В этих кривых интегрально отражены все процессы, протекающие в материале под воздействием внешних силовых и температурных факторов. По результатам рассматриваемых ниже опытов было обработано свыше двухсот кривых деформирования, полученных при разных соотношениях главных напряжений в диапазоне температур от нормальной до  $-180^{\circ}\text{C}$ . Большой объем проведенных исследований не позволяет в рамках одного параграфа детально обсудить все первичные кривые. Поэтому ограничимся обсуждением наиболее показательных результатов, дающих возможность установить характерные для данного материала (или данной группы материалов) общие закономерности.

Из трех марок углеродистых сталей, которые были испытаны, наиболее полно исследована среднеуглеродистая сталь с содержанием углерода 0,37%. Первичные кривые деформирования этой стали для пяти соотношений главных напряжений представлены на рис. 155. Большинство кривых построено по результатам испытаний двух-трех образцов. Диаграммы, приведенные на рис. 155, получены путем осреднения результатов испытаний образцов на одноосное растяжение в осевом и тангенциальном направлениях. Отклонения экспериментальных кривых от приведенных на рис. 155, *а* по ординатам составляют  $\pm 2\%$ .

При двухосном напряженном состоянии, когда главные напряжения равны, кривые  $\sigma_z(\epsilon_z)$  и  $\sigma_\theta(\epsilon_\theta)$  практически совпали (рис. 155, *б*). В случае неравномерного двухосного растяжения (рис. 155, *в*) при температурах до  $-150^{\circ}\text{C}$  был отмечен незначительный рост деформаций в направлении меньшего напряжения (в осевом направлении). Однако величина осевой деформации, как правило, не превышала 0,2%. Поэтому построить кривые в принятом на рис. 155 масштабе не представлялось возможным. Кривые, полученные в условиях чистого сдвига ( $K = -1$ ) и одноосного сжатия ( $K = -\infty$ ), приведены на рис. 155, *г* и *д*.

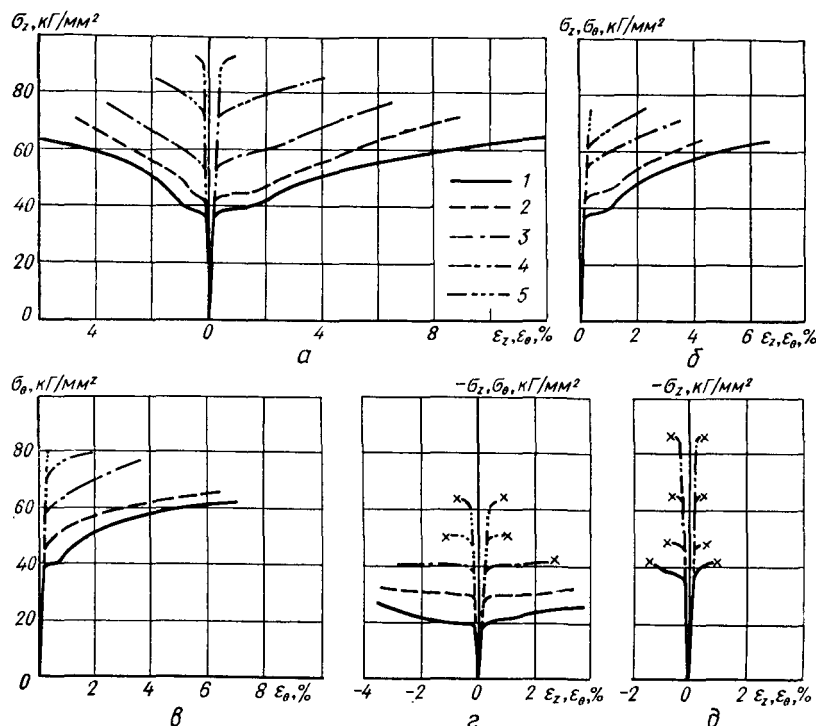


Рис. 155. Первичные кривые деформирования среднеуглеродистой стали:  
 а —  $K = \infty$ ; б —  $K = 1$ ; в —  $K = 0,5$ ; г —  $K = -1$ ; д —  $K = -\infty$ ; 1 —  $T = 20^\circ \text{C}$ ; 2 —  $T = -50^\circ \text{C}$ ; 3 —  $T = -100^\circ \text{C}$ ; 4 —  $T = -150^\circ \text{C}$ ; 5 —  $T = -180^\circ \text{C}$ .

Крестиком на диаграммах отмечен момент прекращения опыта по причине потери устойчивости образца. Гофр, как правило, образовывался возле головки образца (в зоне галтели). При сравнительно высоких температурах образование гофра не сопровождалось разрушением. Это позволяло продолжать испытания и по показаниям тензометра, установленного в средней зоне рабочей части образца, построить кривую деформирования вплоть до начала упрочнения. Разрушение образца при температуре  $-180^\circ \text{C}$  в условиях одноосного сжатия часто происходило по первому витку резьбовой головки, что объясняется, очевидно, концентрацией напряжений в резьбе и высокой хрупкостью материала при указанных условиях испытания.

Характер кривых, приведенных на рис. 155, показывает, что деформационная способность и прочность углеродистой стали существенно зависят как от температуры, так и от вида напряженного состояния. С понижением температуры предел текучести и предел прочности материала существенно увеличиваются, а

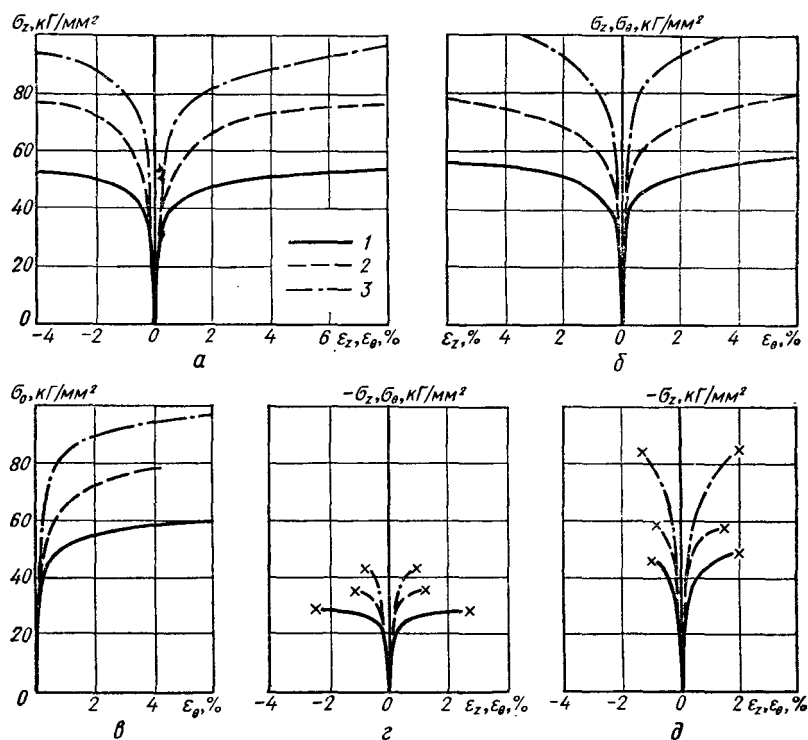


Рис. 156. Первичные кривые деформирования хромоникелевой стали:  
 а —  $K = \infty$ ; б —  $K = 1$ ; в —  $K = 0,5$ ; г —  $K = -1$ ; д —  $K = -\infty$ ; 1 —  $T = 20^\circ \text{C}$ ;  
 2 —  $T = -100^\circ \text{C}$ ; 3 —  $T = -180^\circ \text{C}$ .

пластичность уменьшается. Такой характер изменения механических свойств наблюдается при всех исследованных соотношениях главных напряжений. Из сопоставления кривых деформирования, приведенных на рис. 155, а и г, видно, что увеличение сопротивления стали с понижением температуры при одноосном сжатии более существенно по сравнению с возрастанием сопротивления при одноосном растяжении.

Качественно аналогичные результаты получены при испытании других марок углеродистой стали.

Испытания хромоникелевой стали X18H10T показали, что понижение температуры до  $-180^\circ \text{C}$  не приводит к заметному изменению характера деформационного упрочнения (рис. 156): кривые низкотемпературного деформирования могут быть приведены к кривой деформирования в условиях нормальной температуры (при том же соотношении главных напряжений) путем соответствующего изменения масштаба по оси ординат (по напря-

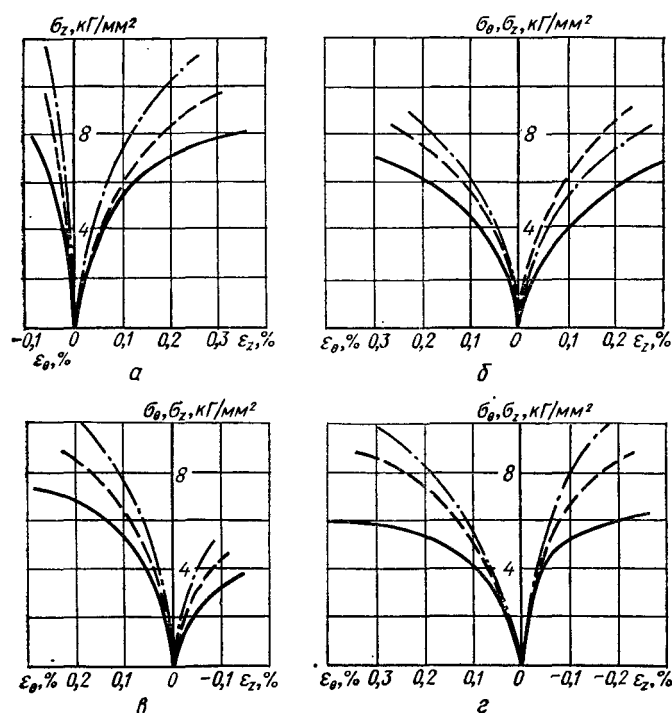


Рис. 157. Первичные кривые деформирования серого чугуна:

а —  $K = \infty$ ; б —  $K = 1$ ; в —  $K = 0,5$ ; г —  $K = -1$ ; обозначения кривых те же, что на рис. 156.

жениям). Хромоникелевая сталь оказалась достаточно изотропной. Отклонения кривых деформирования, полученных при одноосном растяжении в осевом и тангенциальном направлениях, от осредненных кривых, приведенных на рис. 156, по напряжениям не превышало  $\pm 2\%$ .

Результаты испытаний серого чугуна первой плавки при одноосном и двухосном растяжении и чистом сдвиге при различных температурах приведены на рис. 157. Максимальные деформации, соответствующие разрушению, в большинстве опытов не превышали 0,4%. Поэтому кривые деформирования, построенные в условных и истинных напряжениях и деформациях, практически совпали.

Анализ первичных кривых, приведенных на рисунке, показывает, что как при нормальной, так и при низких температурах соотношения между напряжениями и деформациями у исследованного чугуна нелинейны практически на всем участке дефор-



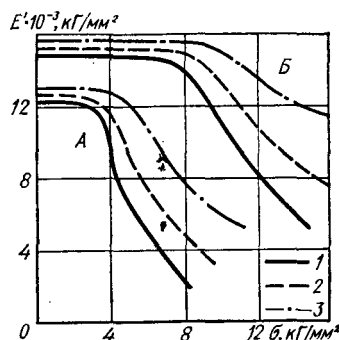


Рис. 158. Зависимость секущего модуля от напряжения при одноосном растяжении (А) и одноосном сжатии (Б). (Обозначения кривых те же, что и на рис. 156.)

мирования, причем отступление от линейного закона увеличивается при переходе к более «жестким» видам нагружения. Так, при двухосном равномерном растяжении даже при незначительных напряжениях диаграмма имеет заметную кривизну.

Судя по литературным данным [441] нелинейность закона упрочнения серых чугунов объясняется тем, что вследствие неравномерного распределения напряжений местные пластические деформации в материале наблюдаются уже при незначительных средних напряжениях. Следовательно, термин «модуль Юнга» в общепринятом понимании применительно к чугунам теряет смысл. Здесь

можно говорить лишь о секущем или касательном (отнесенных к определенному напряжению) модулях.

Отмеченная нелинейность сохраняется и при низких температурах, хотя с понижением температуры участок сравнительно малой кривизны (начальный участок кривой) распространяется в область более высоких напряжений. Кроме того, характер низкотемпературного упрочнения зависит от вида напряженного состояния: с увеличением параметра  $K$  образование веера кривых, полученных при разных температурах, начинается при более низких напряжениях. Так, если при чистом сдвиге и одноосном растяжении на начальном участке деформирования кривые совпадают, то при двухосном растяжении этого не наблюдается.

Обнаруживаемая несимметричность кривых при чистом сдвиге (рис. 157, г) дает основание рассматривать серый чугун как среду, элементы которой при сложном напряженном состоянии имеют разные модули упрочнения в направлении растяжения и в направлении сжатия. Для проверки этого положения были испытаны образцы на одноосное сжатие. Результаты обработки полученных кривых деформирования и данных рис. 157, а приведены на рис. 158 в виде зависимостей секущего модуля от действующего напряжения при трех уровнях температур. Из рисунка видно, что понижение температуры не приводит к качественным изменениям кривых как при растяжении, так и при сжатии.

Резкое падение секущего модуля в случае растяжения происходит при напряжениях, приблизительно в два раза меньших, чем при сжатии. Однако в обоих случаях независимо от температуры значение критического напряжения, имеющего смысл предела пропорциональности, составляет около 20% соответствующую

шего значения предела прочности. При более низких напряжениях изменение модуля невелико. При выбранном масштабе чертежа полученные графики на этом участке можно аппроксимировать прямой, а величину  $E$  считать упругой константой материала. Из рисунка видно, что модуль упругости для исследованного чугуна мало зависит от температуры, но имеет различные значения при растяжении и сжатии. Если в первом случае, пренебрегая влиянием температуры, имеем  $E_p \approx 13\,000 \text{ кг/мм}^2$ , то во втором можно принять  $E_c \approx 15\,300 \text{ кг/мм}^2$ .

Образцы из чугуна второй плавки были использованы для исследования влияния низких температур на константы упругости материала и поэтому испытывались только на растяжение и сжатие. Кривые деформирования этого чугуна рассматриваются в следующем параграфе. Здесь заметим лишь, что механические свойства этих чугунов практически одинаковы. Наибольшее различие было обнаружено в начальных модулях упругости.

Кривые деформирования алюминиевых сплавов Д16Т и АЛ-19 при различных соотношениях главных напряжений представлены на рис. 159 и 160.

Анализ приведенных кривых показывает, что снижение температуры испытаний сопровождается увеличением сопротивления сплавов. При этом обнаруживается некоторое изменение анизотропии. Из рис. 159, а и 160, а, на которых представлены кривые одноосного растяжения в направлении главных осей анизотропии при трех температурах, видно, что сплавы проявляют заметную анизотропию как по уровню текущих напряжений, так и по величине предельной деформации. Это подтверждается также результатами испытаний при двухосном растяжении: в случае,

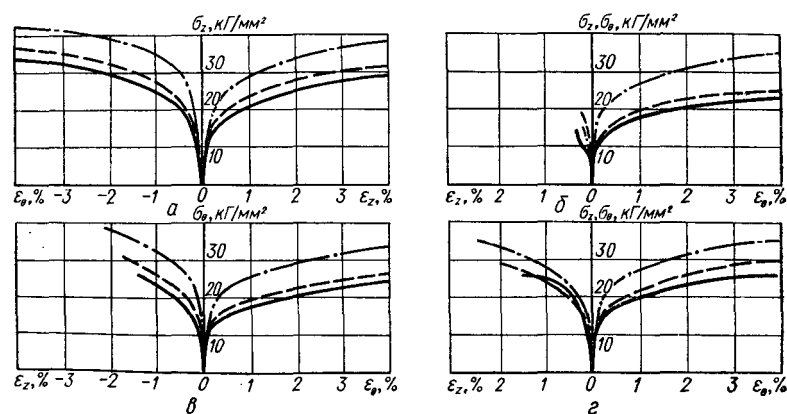


Рис. 159. Первичные кривые деформирования сплава Д16Т:

а —  $K = \infty$ ; б —  $K = 0,5$ ; в —  $K = 0$ ; г —  $K = 1$ ; обозначения кривых те же, что и на рис. 156.

когда соотношение главных напряжений составляло 0,5, в направлении меньшего напряжения наблюдалась заметная деформация (рис. 159, б и 160, б); равномерное двухосное растяжение сопровождается большим сопротивлением и меньшей пластичностью в осевом направлении (рис. 159, г и 160, г). Вопрос о характере изменения анизотропии механических свойств сплавов подробно рассмотрен в § 5 следующей главы.

По данным ряда работ (см., например, [387]) алюминиевые сплавы, как и некоторые низкоуглеродистые стали и магниевые сплавы, по-разному сопротивляются растяжению и сжатию. Это, как правило, объясняется склонностью металла к физико-химическим превращениям при пластическом деформировании или эффектом Баушингера, проявление которого обусловлено наличием остаточных напряжений. К сожалению, существующие методики не позволяют получить надежные данные о предельном сопротивлении материала сжатию. Методика, использованная в настоящей работе, дает возможность испытывать материал при одноосном сжатии только в осевом направлении и только при упругих и малых упруго-пластических деформациях. При развитых пластических деформациях, как уже отмечалось, тонкостенный образец теряет устойчивость — в рабочей части образца образуется гофр. Поэтому проведение достаточно широкого исследования по указанному вопросу не представилось возможным. Однако полученные данные позволяют сделать определенные количественные оценки. Так, если при нормальной температуре условные пределы текучести при растяжении и сжатии сплава АЛ-19 равны, то при температуре  $-100^{\circ}\text{C}$  предел текучести при сжатии на 15% выше соответствующего предела текучести при растяжении в том же направлении. Аналогичное различие в

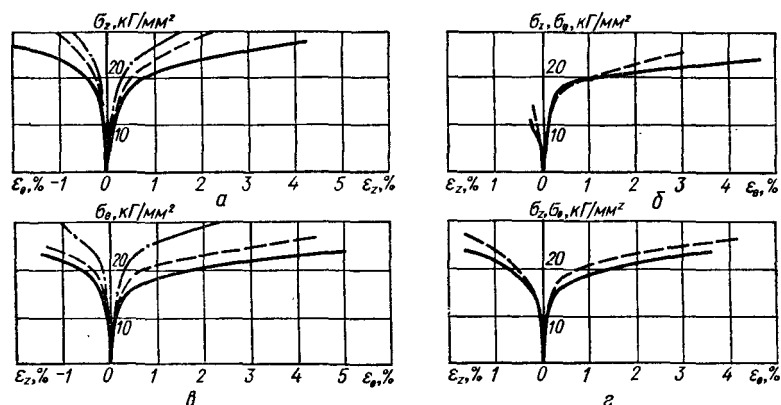


Рис. 160. Первичные кривые деформирования сплава АЛ-19. (Обозначения те же, что и на рис. 156.)

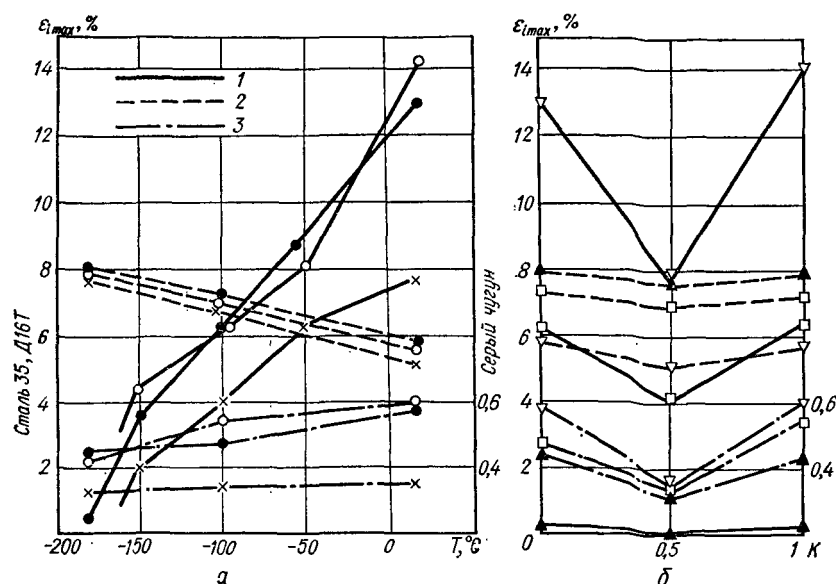


Рис. 161. Влияние температуры (а) и вида напряженного состояния (б) на пластические свойства материалов:

1 — сталь 35; 2 — сплав Д16Т; 3 — серый чугун; ● —  $K = 0$ ; × —  $K = 0,5$ ; ○ —  $K = 1$ ; ▽ —  $T = 20^\circ \text{C}$ ; □ —  $T = -100^\circ \text{C}$ ; ▲ —  $T = -180^\circ \text{C}$ .

пределах прочности при растяжении и сжатии некоторых алюминиевых сплавов в условиях низких температур отмечалось в работе [532].

В упругой области кривые растяжения и сжатия практически совпадают и при низких температурах. Модуль упругости при сжатии оказался  $E_c = 7,12 \cdot 10^3 \text{ кг/мм}^2$ , что практически совпадает с модулем упругости при растяжении.

Анализ кривых деформирования исследованных материалов показывает, что в зависимости от соотношений главных напряжений, при котором производится нагружение, металл может проявлять различные пластические свойства. При этом степень влияния температуры и вида напряженного состояния зависит от природы материала и его структуры.

Величина предельной деформации оказалась чувствительной к условиям проведения опыта. Поэтому даже в случае испытания образцов в идентичных температурно-силовых условиях, когда кривые деформирования по напряжениям практически совпадали, деформации, соответствующие моменту разрушения, часто были существенно различны. Проведение повторных опытов позволило осреднить полученные результаты. Наиболее характерные данные приведены на рис. 161. Здесь в качестве характеристик пласти-

ческих свойств металла принята интенсивность деформаций. Приведенные закономерности изменения пластичности металлов в связи с влиянием температуры и вида напряженного состояния качественно сохраняются, если пластические свойства металла оценивать значением максимальной деформации при разрушении.

Деформационные свойства углеродистых сталей существенно зависят как от температуры, так и от вида напряженного состояния. Так, если при температуре  $-180^{\circ}\text{C}$  в условиях одноосного растяжения среднеуглеродистая сталь (С — 37%) разрушалась при заметной пластической деформации (около 0,4%), то при той же температуре в условиях двухосного растяжения разрушение стали происходило квазихрупко. Следовательно, наложение второй растягивающей компоненты напряжений приводит к заметному уменьшению деформационной способности углеродистой стали: при сравнительно высоких температурах величина максимальной деформации при двухосном растяжении составляет приблизительно половину соответствующей деформации при одноосном растяжении. При очень низких температурах наличие второй растягивающей компоненты может привести к хрупкому разрушению металла (этот вопрос более подробно рассмотрен в следующей главе).

Хромоникелевые стали, серый чугун и сплав АЛ-19 в отношении деформационных свойств оказались менее чувствительными к изменениям температуры. Максимальная деформация этих материалов в зоне температур от  $-160$  до  $-180^{\circ}\text{C}$  при всех исследованных соотношениях главных напряжений составляет примерно 70—75% соответствующей деформации при нормальной температуре, а пластичность сплава Д16Т с понижением температуры увеличивается.

Из рис. 161 видно также, что температурные зависимости предельной деформации при всех соотношениях главных напряжений близки к линейным, причем угловые коэффициенты при одноосном и двухосном растяжении в большинстве случаев оказались практически одинаковыми.

Деформационная способность материалов существенно зависит от вида напряженного состояния. При этом характер зависимости пластичности металла от соотношения главных напряжений при низкой температуре такой же, как и при нормальной. Минимальная пластичность всех исследованных материалов независимо от температуры испытания наблюдается при двухосном растяжении с соотношением главных напряжений 0,5 (рис. 161).

### § 3. О коэффициенте поперечной деформации материалов

Характер деформирования твердого тела под нагрузкой определяется не только его природой, но и величиной приложенных усилий. Достаточно проследить зависимость  $\sigma(\epsilon)$  для углеродистой стали,

чтобы убедиться, что на отдельных этапах деформирования материал может быть линейно-упругим, нелинейно-упругим, упруго-пластическим и пластическим. У таких материалов, как серые чугуны первый и последний этапы практически отсутствуют, соотношения между напряжениями и деформациями нелинейны, уже при незначительных напряжениях появляются остаточные деформации.

При адекватности кривых  $\sigma(\epsilon)$  на определенных этапах нагружения образцов из стали и чугуна наблюдается различный характер изменения объема этих материалов в процессе деформирования. При этом, как известно, величина соотношения работ, затрачиваемых на объемную деформацию и на формоизменение, изменяется в процессе деформирования в соответствии с изменением коэффициента поперечной деформации, который в данном случае является показателем деформационной способности материала.

Результаты соответствующих испытаний стали и чугуна при нормальной температуре обсуждались в работах [43, 100, 140, 216, 350, 475]. По данным этих работ коэффициент поперечной деформации углеродистой стали по мере развития пластических деформаций увеличивается, асимптотически приближаясь к своему предельному значению 0,5, при котором изменения объема не происходит. Качественно иная картина наблюдается у чугунов: при деформировании растяжением коэффициент поперечной деформации существенно уменьшается, а при сжатии увеличивается.

Подобные исследования при низких температурах, по нашим данным, не проводились, хотя не вызывает сомнений, что исследование влияния низких температур на соответствующие закономерности представляет несомненный интерес.

Рассмотрим результаты испытаний среднеуглеродистой стали (С — 0,37%) и серого чугуна С412—28 второй плавки при нормальной и низкой температурах.

Проверка изотропии металла была проведена путем испытания трубчатых образцов на одноосное растяжение в продольном и тангенциальном направлениях. Опыты показали, что кривые растяжения  $\sigma_z(\epsilon_z)$  и  $\sigma_\theta(\epsilon_\theta)$  как стали, так и чугуна практически совпали.

Результаты испытаний углеродистой стали представлены на рис. 162. На рис. 162, а приведены кривые деформирования углеродистой стали, а на рис. 162, б — экспериментальные точки, соответствующие значениям коэффициента  $\mu$  при различной степени деформации. Результаты опытов показывают, что характер изменения  $\mu$  в процессе деформирования с понижением температуры остается качественно тем же, т. е. коэффициент  $\mu$  монотонно возрастает. Однако при низких температурах коэффициент поперечной деформации достигает максимального значения при

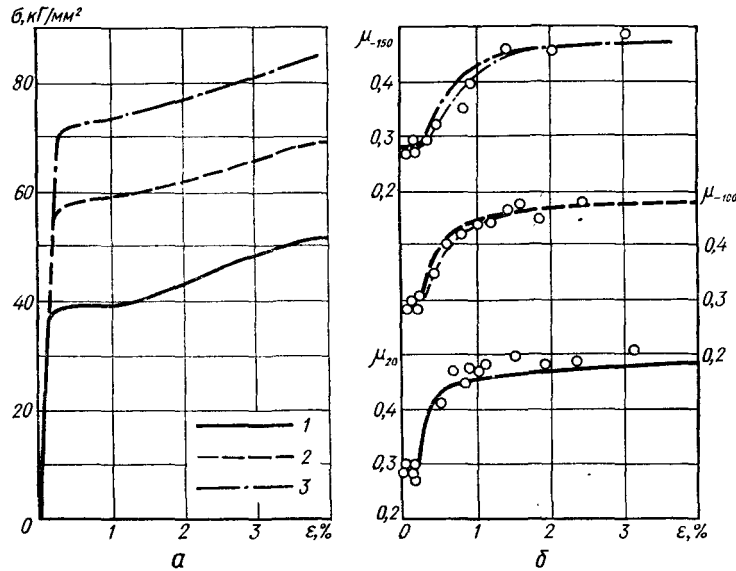


Рис. 162. Диаграммы растяжения (а) и зависимости коэффициента поперечной деформации от величины деформации (б) для углеродистой стали:

1 —  $T = 20^\circ\text{C}$ ; 2 —  $T = -100^\circ\text{C}$ ; 3 —  $T = 150^\circ\text{C}$ .

заметно больших деформациях (порядка 3%). Следовательно, при низких температурах упруго-пластическое деформирование при  $\epsilon_{\max} < 3\%$  сопровождается большим изменением объема материала, чем при нормальной температуре.

Известно, что пренебрежение изменением объема материала при расчетах различных конструкций в области малых упруго-пластических деформаций может привести к погрешностям порядка 10—40% [201, 483]. Из приведенных выше данных видно, что точность соотношений между напряжениями и деформациями, основанных на условии несжимаемости материала ( $\mu = 0,5$ ), с понижением температуры уменьшается.

В соответствии с первой гипотезой теории малых упруго-пластических деформаций объемная деформация пропорциональна среднему нормальному напряжению

$$\epsilon_0 = \frac{1}{3K} \sigma_0, \quad (\text{X.1})$$

где  $K = \frac{E}{3(1-2\mu')}$  — модуль объемной упругости;  $E$ ,  $\mu'$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Из пропорциональности девиаторов следует

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\sigma_1 - \sigma_0} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\sigma_2 - \sigma_0} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_0}{\sigma_3 - \sigma_0}. \quad (\text{X.2})$$

При одноосном растяжении  $\sigma_1 = \sigma$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ;  $\sigma_0 = \frac{\sigma}{3}$ . Подставляя (X.1) в (X.2), получаем [279]

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - 2\mu'}{E} \sigma + \varepsilon_1 \right),$$

откуда

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right| = \left| \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \right| = 0,5 - \frac{\sigma}{E\varepsilon_1} (0,5 - \mu')$$

или

$$\mu = 0,5 - \frac{E_1}{E} (0,5 - \mu'). \quad (\text{X.3})$$

Здесь  $E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1}$  — секущий модуль.

На рис. 162 приведены кривые, построенные по формуле (X.3). Как видно из рисунка, в зоне малых упруго-пластических деформаций темп роста  $\mu$  с понижением температуры (тонкие линии) несколько ниже предсказываемого теорией (жирные линии), что, вероятно, связано с изменением механизма пластической деформации металла при понижении температуры испытаний: наряду со скольжением заметную роль начинают играть такие механизмы, как двойникование и сброс.

Формула (X.3) получена в результате обобщения гипотез (X.1) и (X.2). Поэтому отмеченное несоответствие теоретической кривой и опытных данных формально может быть объяснено невыполнением указанных условий или, по крайней мере, одного из них.

Элементарный анализ формулы Бриджмена

$$\theta = aP + bP^2$$

с учетом значений входящих в нее констант (см. § 2 гл. IX) показывает, что при технически осуществимых давлениях остаточное изменение объема ничтожно мало, т. е. за счет пластической деформации изменения объема не происходит, а гипотеза (X.1) об упругом изменении объема выполняется как в упругой, так и в пластической области.

Следовательно, полученные при низких температурах отклонения опытных данных от значений, предсказываемых формулой (X.3) (см. рис. 162), можно полностью отнести за счет нарушения пропорциональности девиаторов при понижении температуры испытаний.

Количественные данные по этому вопросу, полученные на основании испытаний среднеуглеродистой стали, приведены в следующем параграфе. Здесь отметим лишь, что с понижением



температуры от нормальной до  $-150^{\circ}\text{C}$  параметр вида девиатора деформаций

$$\mu_{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$$

при одноосном растяжении ( $\mu_{\sigma} = -1$ ) уменьшается (по абсолютной величине); при температурах  $-100$  и  $-150^{\circ}\text{C}$  его средние значения по двум опытам (одноосное растяжение трубчатого образца в продольном и тангенциальном направлениях) соответственно равны  $-0,79$  и  $-0,75$ .

Результаты испытаний серого чугуна при растяжении и сжатии представлены на рис. 163 и 164. Значения коэффициента поперечной деформации в диапазонах  $0 < \varepsilon < 0,5\%$  в случае растяжения и  $0 < \varepsilon < 1\%$  в случае сжатия определяли непосредственно по результатам измерений продольных и поперечных деформаций образца. При больших деформациях обработка опытных данных производилась следующим образом: результаты измерений использовали для построения в достаточно большом масштабе диаграмм деформирования  $\sigma(\varepsilon_1)$  и  $\sigma(\varepsilon_2)$ , по которым с интервалом по  $\varepsilon_1$  в  $0,05\%$  определяли коэффициент поперечной деформации.

При одноосном растяжении коэффициент поперечной деформации в процессе деформирования уменьшается, причем это уменьшение более заметно при низких температурах. В случае одноосного сжатия, наоборот, — рост деформаций сопровождается ростом коэффициента  $\mu$ . При этом кривые  $\mu(\varepsilon_1)$ , полученные

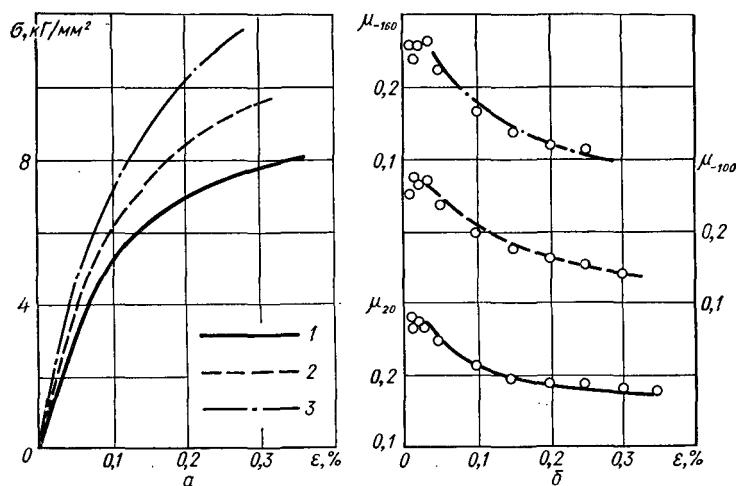


Рис. 163. Диаграммы растяжения (а) и зависимости коэффициента поперечной деформации от величины деформации (б) для серого чугуна:

1 —  $T = 20^{\circ}\text{C}$ ; 2 —  $T = -100^{\circ}\text{C}$ ; 3 —  $T = -160^{\circ}\text{C}$ .

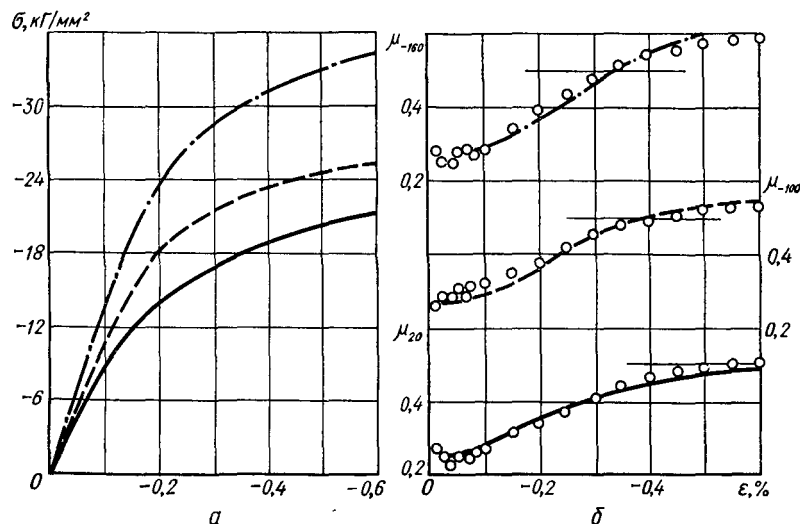


Рис. 164. Диаграммы сжатия (а) и зависимости коэффициента поперечной деформации от величины деформации (б) для серого чугуна. (Обозначения те же, что и на рис. 163.)

при низких температурах, расположены выше соответствующих кривых, полученных при нормальной температуре.

Из рис. 164, б видно, что кривые  $\mu(\epsilon_1)$  пересекают линию  $\mu = 0,5$ , соответствующую несжимаемому материалу. Следовательно, при одноосном сжатии, начиная с деформаций 0,3—0,4%, происходит увеличение объема металла; критическое значение деформаций, при которых  $\mu \geq 0,5$ , тем меньше, чем ниже температура испытаний.

Если упругую и необратимую объемные деформации обозначить соответственно через  $\theta'$  и  $\theta''$ , то, учитывая, что относительное изменение объема

$$\theta = \theta' + \theta'',$$

можно записать

$$(1 - 2\mu)\epsilon_1 = (1 - 2\mu')\epsilon_1' + (1 - 2\mu'')\epsilon_1'', \quad (\text{X.4})$$

где  $\epsilon_1'$  и  $\epsilon_1''$  — упругая и остаточная деформации в направлении приложенного усилия;  $\mu'$ ,  $\mu''$  — коэффициенты поперечной деформации, соответствующие  $\epsilon_1'$  и  $\epsilon_1''$ .

Решая соотношение (X.4) относительно  $\mu$  и учитывая, что  $\epsilon_1'' = \epsilon_1 - \epsilon_1'$ , получаем

$$\mu = \mu'' - \frac{\epsilon_1'}{\epsilon_1}(\mu'' - \mu'). \quad (\text{X.5})$$

Связь между напряжениями и упругими компонентами полных деформаций при пластическом деформировании описывается законом Гука, поэтому для одноосного напряженного состояния можно записать  $\epsilon_1' = \frac{\sigma}{E}$ , а выражение (X.5) представить в виде

$$\mu = \mu'' - \frac{\sigma}{E\epsilon_1}(\mu'' - \mu')$$

или, по аналогии с (X.3),

$$\mu = \mu'' - \frac{E'}{E}(\mu'' - \mu'). \quad (X.6)$$

Если остаточные деформации  $\epsilon_1''$  не сопровождаются изменением объема, то  $\mu'' = 0,5$ . При этом выражение (X.6) принимает вид формулы (X.3), которая, как было показано выше, удовлетворительно согласуется с результатами испытаний углеродистой стали, имеющей достаточно однородную и стабильную структуру.

Для структуры серого чугуна характерна существенная неоднородность, обусловленная наличием в нем пластинок графита с зонами местных надразов в основном металле. При нагружении чугуна происходит отслаивание графита с образованием микропор и трещин, около которых возникают пики напряжений, приводящие уже при сравнительно малых макродеформациях к необратимому изменению формы и размеров дефектов, заметной анизотропии металла и уменьшению его плотности.

Эффект увеличения объема при одноосном сжатии был обнаружен у таких материалов, как чугун, норвежское железо, отдельные горные породы и т. п. [43]. При испытании чугуна после снятия нагрузки, соответствующей остаточному укорочению 1,5%, остаточное увеличение объема составило 0,19%.

На «разрыхление» материалов типа серых чугунов при их деформировании обращалось внимание в работе [363], где на основе гипотезы о пропорциональности деформаций, связанных с разрыхлением, и модулей пластических деформаций сдвига получены соотношения, удовлетворительно описывающие закономерности деформирования «полухрупких» тел.

В соответствии с процессами, протекающими в материале при его нагружении, изменяется и коэффициент поперечной деформации. Необратимое изменение объема характеризуется коэффициентом  $\mu''$ . Если в процессе деформирования плотность металла уменьшается, то значение  $\mu''$  при растяжении должно быть меньше  $\mu''$  при сжатии, т. е.  $\mu_p'' < \mu_c''$ . В соответствии с формулой (X.6) падение коэффициента поперечной деформации при растяжении возможно только при условии  $\mu_p'' < \mu'$ . В то же время, если остаточное изменение объема положительно,

$$\theta'' = (1 - 2\mu'')\epsilon_1'' > 0, \quad (X.7)$$

то при сжатии ( $\varepsilon_1 < 0$ ) условие (X.7) имеет смысл только в случае, когда  $\mu'' = \mu_c > 0,5$ .

Приведенные на рис. 163 и 164 результаты позволяют провести более детальный анализ. Прежде всего необходимо проверить достоверность формулы (X.6). Если предположить, что необратимое изменение объема, связанное с пластическим течением металла и образованием и развитием дефектов (разрыхлением), происходит таким образом, что соотношение между остаточными деформациями в поперечном и продольном направлениях остается постоянным<sup>1</sup>, т. е. если

$$\frac{\varepsilon_2''}{\varepsilon_1''} = -\mu'' = \text{const}, \quad (\text{X.8})$$

то, определив коэффициент  $\mu''$  при любой фиксированной деформации, формулу (X.6) можно распространить на весь диапазон деформирования. Значения  $\mu''$ , полученные на основании (X.6) при  $\varepsilon_1 = 0,2\%$  (в случае растяжения) и при  $\varepsilon_1 = 0,3\%$  (в случае сжатия), приведены в табл. 9. Там же указаны средние значения коэффициента Пуассона  $\mu'$  и модуля упругости  $E$ , который определяется по углу наклона касательной к кривой деформирования в начале координат.

Кривые  $\mu(\varepsilon_1)$ , построенные по соотношению (X.6) с учетом данных таблицы, представлены на рис. 163, б и 164, б. Хорошее соответствие теоретических и экспериментальных результатов во всем диапазоне деформирования подтверждает справедливость принятого допущения (X.8) и достаточно высокую точность формулы (X.6) как при нормальной, так и при низких температурах.

Соотношение (X.8) можно записать в виде

$$\frac{\varepsilon_{2\text{пл}}'' + \varepsilon_{2\text{р}}''}{\varepsilon_{1\text{пл}}'' + \varepsilon_{1\text{р}}''} = -\mu'', \quad (\text{X.9})$$

где  $\varepsilon_{1\text{пл}}''$ ,  $\varepsilon_{2\text{пл}}''$  — сдвиговые пластические деформации в продольном и поперечном направлениях;  $\varepsilon_{1\text{р}}''$ ,  $\varepsilon_{2\text{р}}''$  — деформации разрыхления в тех же направлениях.

Пластические деформации сдвигом происходят без изменения объема. Поэтому при одноосном напряженном состоянии всегда

$$\varepsilon_{2\text{пл}}'' = -0,5\varepsilon_{1\text{пл}}''. \quad (\text{X.10})$$

<sup>1</sup> Постоянство соотношения между остаточными деформациями в поперечном и продольном направлениях следует, в частности, из зависимостей деформаций от напряжений, полученных в работе [363] для «полухрупких» тел.

С другой стороны, на основании гипотезы [363] о пропорциональности составляющих необратимой деформации разрыхления и модулей компонентов пластической деформации можно записать

$$\varepsilon_{ip}'' = \lambda |\varepsilon_{ipl}|, \quad i = 1, 2, 3, \quad (X.11)$$

где  $\lambda$  — коэффициент пропорциональности, постоянный при заданном виде напряженного состояния.

При одноосном растяжении

$$\varepsilon_{1pl}'' > 0; \quad \varepsilon_{2pl}'' = -0,5\varepsilon_{1pl}'' < 0. \quad (X.12)$$

Подставляя (X.11) в (X.9) и учитывая (X.12), получаем

$$\frac{1 - \lambda_p}{1 + \lambda_p} = 2\mu_p'',$$

откуда

$$\lambda_p = \frac{1 - 2\mu_p''}{1 + 2\mu_p''}. \quad (X.13)$$

В случае одноосного сжатия

$$\lambda_c = \frac{2\mu_c' - 1}{2\mu_c' + 1}. \quad (X.14)$$

Вычисленные по формулам (X.13) и (X.14) значения параметров разрыхления  $\lambda$  приведены в табл. 9.

В работе [262] на основании результатов испытания чугуна марки СЧ 15—32 было показано, что параметр  $\lambda$  зависит от вида напряженного состояния и для серого чугуна может быть определен по формуле

$$\lambda = \eta \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}, \quad (X.15)$$

Т а б л и ц а 9

T, °C	E, кг/мм <sup>2</sup>	$\mu'$	$\mu''$	$\lambda$	$\eta$
+20	$\frac{8,9 \cdot 10^3}{10,8 \cdot 10^3}$	$\frac{0,270}{0,250}$	$\frac{0,133}{0,607}$	$\frac{0,340}{0,097}$	$\frac{0,17}{0,19}$
	$\frac{9,8 \cdot 10^3}{11,5 \cdot 10^3}$	$\frac{0,268}{0,270}$	$\frac{0,067}{0,720}$	$\frac{0,760}{0,180}$	$\frac{0,38}{0,36}$
-100	$\frac{12,0 \cdot 10^3}{13,8 \cdot 10^3}$	$\frac{0,265}{0,270}$	$\frac{-0,021}{0,850}$	$\frac{1,080}{0,260}$	$\frac{0,54}{0,52}$

П р и м е ч а н и е. В числителе приведены данные, полученные при растяжении, в знаменателе — при сжатии.

где  $\eta$  — константа материала;  $\alpha$  — отношение среднего нормального напряжения к наибольшему (по абсолютной величине) при данном виде напряженного состояния.

Для одноосного растяжения ( $\alpha = \frac{1}{3}$ ) на основании (X.15) получим

$$\lambda_p = 2\eta, \quad (X.16)$$

для одноосного сжатия ( $\alpha = -\frac{1}{3}$ ) —

$$\lambda_c = 0,5\eta. \quad (X.17)$$

Подставляя (X.13) в (X.16), получаем

$$\eta_p = \frac{1 - 2\mu_p''}{2(1 + 2\mu_p'')} . \quad (X.18)$$

Из выражений (X.14) и (X.17) находим

$$\eta_c = \frac{2(2\mu_c'' - 1)}{2\mu_c'' + 1} . \quad (X.19)$$

Формула (X.15) подтверждена экспериментально в работе [262]. Поэтому если соотношения (X.13) и (X.14) также верны, то значения константы  $\eta$ , имеющей смысл параметра разрыхления при чистом сдвиге, найденные по выражениям (X.18) и (X.19), должны быть одинаковыми для данного материала при заданной температуре. Результаты соответствующих расчетов приведены в последнем столбце табл. 9, откуда видно, что значения константы  $\eta$ , найденные по результатам испытания чугуна при растяжении и сжатии, практически совпадают как при нормальной, так и при низких температурах. Это подтверждает правильность исходных предпосылок при выводе формулы (X.6), а также достаточно хорошее приближение гипотезы (X.11) и полученных на ее основе соотношений (X.13) и (X.14).

#### § 4. Пропорциональность девиаторов напряжений и деформаций при низких температурах

Данные об экспериментальной проверке гипотезы о пропорциональности девиаторов при деформировании металла в условиях низких температур в литературе отсутствуют. Анализ результатов, полученных при нормальной температуре, показывает, что имеющиеся отклонения связаны с нестабильностью структуры металла при деформировании [300] или с начальной анизотропией [143]. Было отмечено также, что отклонения тем заметнее, чем сильнее упрочняется металл в процессе деформирования.

Ниже приведены результаты проверки гипотезы о пропорциональности девиаторов при нормальной и низкой температурах на образцах из среднеуглеродистой (С — 0,37%) и хромоникелевой (Х18Н10Т) сталей.

Для проверки изотропии материала трубчатые образцы были испытаны на одноосное растяжение в осевом и тангенциальном направлениях. Для растяжения в тангенциальном направлении образец нагружался внутренним давлением. Возникающая при этом осевая компонента напряжений снималась дополнительным осевым усилием (сжатие, величину которого определили из предварительных калибровочных опытов). Полученные данные показали, что исследуемые стали перед испытанием были достаточно изотропны.

Высокая изотропность сталей подтвердилась результатами испытаний сплошных образцов, вырезанных из прутка в продольном и поперечном направлениях. Расхождение между средними значениями пределов текучести не превышало 1%, а пределов прочности — 2%.

Учитывая, что в процессе нагружения образца наблюдалось незначительное колебание фактического соотношения между напряжениями относительно среднего (расчетного) значения, параметры Лоде — Надаи определяли по кривым деформирования, построенным в достаточно большом масштабе по экспериментальным точкам. При этом напряжения и деформации, входящие в формулы Лоде — Надаи, находили следующим образом.

Известно, что при любом соотношении главных напряжений деформирование изотропного материала сопровождается более интенсивным ростом деформации в направлении большего по абсолютной величине главного напряжения. По кривой деформирования в этом направлении определяли напряжение  $\sigma_1$ , соответствующее условно принятой пластической деформации  $\epsilon'$ . На кривой деформирования в перпендикулярном направлении находили вторую компоненту напряжений  $\sigma_2 = \frac{1}{K} \sigma$  и соответствующую ей деформацию  $\epsilon''$ . Третью компоненту деформаций  $\epsilon'''$  (радиальную деформацию) определяли, исходя из гипотезы об упругом изменении объема по формуле (VII.15), которая по данным § 3 настоящей главы удовлетворительно согласуется с результатами опытов.

В зависимости от вида напряженного состояния каждая из деформаций  $\epsilon'$ ,  $\epsilon''$  и  $\epsilon'''$  может быть алгебраически наибольшей. Поэтому распределение их по  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  в первом соотношении

$$\mu_\epsilon = \frac{2\epsilon_2 - \epsilon_1 - \epsilon_3}{\epsilon_1 - \epsilon_3}$$

производилось с учетом неравенства  $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$ .

Для каждого соотношения главных напряжений параметр  $\mu_\epsilon$  определялся путем осреднения значений параметра, полученных

на разных стадиях пластического деформирования. Учитывая, что при испытаниях на одноосное сжатие и чистый сдвиг величина предельной регистрируемой деформации была ограничена в связи с потерей устойчивости образца, в качестве базы были приняты деформированные состояния, при которых бо́льшая по абсолютной величине пластическая деформация составляла 0,2 и 0,6%, а также предельное состояние, соответствующее конечным точкам на кривых деформирования. При этом, если в заданных условиях испытания пластическая деформация  $\epsilon_{пл}$  при разрушении была не менее 0,6%, то в расчет принималось среднее из трех полученных значений параметра Лоде — Надаи, если  $0,2 < \epsilon_{пл} < 0,6\%$ , то — среднее из двух значений  $\mu_\epsilon$ . В случае, когда разрушение наступало при  $\epsilon_{пл} < 0,2\%$ , параметр  $\mu_\epsilon$  определялся по остаточным деформациям при разрушении  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -\mu_\epsilon \epsilon_3$  ( $\mu$  — коэффициент поперечной деформации), при которых параметр  $\mu_\epsilon$  соответственно равен  $-1$  и  $+1$ .

Рассмотрим этот вопрос более подробно. Заметные отклонения от условия пропорциональности девиаторов при одноосных напряженных состояниях (растяжение, сжатие) наблюдаются только при низких температурах. При нормальной температуре в случае растяжения  $\mu_\epsilon = -0,93$ , при сжатии  $\mu_\epsilon = +0,9$ . Таким образом, можно предположить, что полученные отклонения лежат в пределах обычного разброса опытных данных при такого рода испытаниях [148, 438], а условие пропорциональности девиаторов при нормальной температуре выполняется.

Следует, однако, иметь в виду, что систематическое отклонение от условия  $\mu_\epsilon = \mu_\sigma$  при одноосном напряженном состоянии наблюдали многие исследователи. Обычно это объяснялось недостаточной точностью построения диаграммы растяжения [168], распространением краевого эффекта на рабочую часть образца [148], начальной анизотропией металла [143], неустойчивостью его структуры при деформировании [300], определенными методическими обстоятельствами, связанными с испытанием тонкостенных трубчатых образцов, и т. п.

Каждый из этих факторов, естественно, может оказывать влияние на результаты эксперимента. Однако в нашем случае бо́льшие или меньшие отклонения от условия подобия получены при изменении одного независимого параметра — температуры. Поэтому факторы, связанные с методикой испытания, естественно, отпадают. По данным специальных исследований (§ 8 гл. XI), анизотропия металлов, в том числе и углеродистых сталей, с понижением температуры уменьшается, что должно привести к уменьшению отклонений от условия  $\mu_\epsilon = \mu_\sigma$ .

По указанной методике были обработаны данные испытаний в условиях нормальных и низких температур при трех значениях



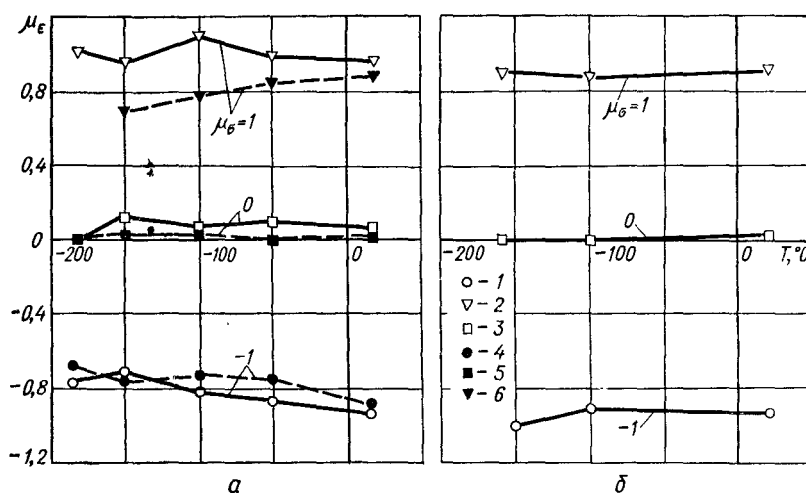


Рис. 165. Влияние температуры на соотношение между параметрами вида девиаторов по данным испытаний углеродистой (а) и хромоникелевой (б) сталей:

1 —  $K = \infty$ ; 2 —  $K = 1$ ; 3 —  $K = 0,5$ ; 4 —  $K = 0$ ; 5 —  $K = -1$ ; 6 —  $K = -\infty$ .

параметра  $\mu_\sigma$  ( $-1$ ,  $0$  и  $+1$ ), причем при анализе результатов испытаний углеродистой стали для каждого из этих значений использованы данные двух опытов: одноосное растяжение в осевом и тангенциальном направлениях ( $\mu_\sigma = -1$ ), неравномерное двухосное растяжение и чистый сдвиг ( $\mu_\sigma = 0$ ), одноосное сжатие и двухосное растяжение при равных главных напряжениях ( $\mu_\sigma = 1$ ).

Нагружение образца было близким к простому и не сопровождалось поворотом главных осей тензора напряжений. Поэтому в соответствии со второй гипотезой на участке пластического деформирования должно выполняться условие  $\mu_\epsilon = \mu_\sigma$ .

Из рис. 165, а, на котором представлены температурные зависимости параметра  $\mu_\epsilon$  для углеродистой стали при различных значениях параметра  $\mu_\sigma$ , видно, что с понижением температуры отклонение от пропорциональности девиаторов увеличивается. Степень отклонения зависит от вида напряженного состояния. Так, если при чистом сдвиге ( $K = -1$ ) и двухосном равномерном растяжении ( $K = +1$ ) вторая гипотеза с допустимой точностью подтверждается на всем диапазоне температур, то при других соотношениях главных напряжений нарушение условия  $\mu_\epsilon = \mu_\sigma$  может быть значительным.

Обращает на себя внимание тот факт, что большие отклонения наблюдаются при одноосном растяжении и одноосном сжатии. Этот результат, на первый взгляд, представляется несостоятель-

ным, так как при одноосном растяжении и одноосном сжатии для изотропного материала, по соображениям симметрии, на всех этапах деформирования должны сохраняться соотношения  $\epsilon_3 = \epsilon_2 = -\mu\epsilon_1$ .

Следовательно, полученные результаты можно объяснить только определенными изменениями в структуре и особенностями протекания внутренних процессов в материале при его деформировании в условиях низких температур. Очевидно, с понижением температуры вследствие различия коэффициентов линейного расширения и упругих констант отдельных зерен и фаз внутри зерна происходит рост напряжений второго рода. На стыках зерен возникает концентрация напряжений, приводящая к повышению неоднородности поля напряжений и образованию микротрещин. Анализ микроструктуры стали в исходном состоянии и того же металла, подверженного охлаждению до температуры  $-196^\circ\text{C}$ , при двухтысячекратном увеличении показал, что для предварительно охлажденного металла характерно наличие трещин в зернах перлита, как более хрупких компонентов. Происходят изменения и на субмикроуровне. Так, по данным рентгеноструктурных измерений, в углеродистой стали с понижением температуры изменяется размер блоков мозаики [406].

Повышение «дефектности» металла подтверждается увеличением внутреннего трения после охлаждения. Как видно из табл. 10, в которой приведены результаты специально поставленных опытов по определению декремента колебаний при кручении, потери на внутреннее трение даже при очень низких уровнях напряжений ( $0,5\text{--}2,5 \text{ кг/мм}^2$ ) возрастают после охлаждения на  $12\text{--}13\%$ .

Отмеченные выше трансформации в структуре углеродистой стали значительно усложняют кинетику ее низкотемпературного деформирования [186]. В микрообъемах металла, в связи с ростом напряжений второго рода, проявляется эффект Баушингера, наряду со скольжением существенную роль начинают играть изгибание, двойникование и сброс. В результате происходит дезориентация микропластических деформаций по отношению к действующим

Т а б л и ц а 10

Состояние металла	Декремент колебаний $\delta$ , %, при напряжении $\tau$ , $\text{кг/мм}^2$				
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
Исходное	0,047	0,060	0,078	0,097	0,120
После охлаждения до температуры $-196^\circ\text{C}$	0,053	0,069	0,090	0,112	0,135

Примечание. Охлаждение в смеси изопентана с азотом со скоростью  $6\text{--}7^\circ\text{град/мин}$ , нагрев до комнатной температуры вместе с криостатом в течение двух часов.

Таблица 11

Вид напряженного состояния	Параметр $\mu_\varepsilon$ при температуре, °C		
	20	—100	—180
$K = 0,5$ $K = -1$	0,13 —0,30	0,13 —0,35	0,11 —0,34

напряжениям, приводящая к отклонению направлений главных линейных деформаций от соответствующих направлений главных нормальных напряжений и, следовательно, к нарушению подобия девиаторов.

Необходимо отметить, что полученные результаты находятся в соответствии с проведенным в предыдущем параграфе анализом характера изменения коэффициента поперечной деформации углеродистой стали при пластическом деформировании — при нормальной температуре экспериментальные точки удовлетворительно согласуются с теоретической кривой (X.3), полученной из условия  $\mu_\varepsilon = \mu_\sigma$ . С понижением температуры несоответствие экспериментальных и теоретических результатов увеличивается (см. рис. 162, б).

На рис. 165, б представлены соответствующие результаты испытаний хромоникелевой стали. Из рисунка видно, что для этой стали условие подобия девиаторов хорошо выполняется в широком температурном интервале.

О степени отклонения от условия подобия при деформировании серого чугуна можно судить по данным табл. 11, в которой представлены значения параметра  $\mu_\varepsilon$  для чистого сдвига и двухосного растяжения при  $K = 0,5$ , когда  $\mu_\sigma = 0$ . Значения  $\mu_\varepsilon$  найдены по предельным деформациям. Как видно из таблицы, условие пропорциональности девиаторов для серого чугуна не выполняется как при нормальной, так и при низких температурах. Учитывая неизбежный разброс экспериментальных данных, можно считать, что степень отклонения от условия подобия девиаторов при снижении температуры испытания остается приблизительно на том же уровне.

### § 5. Обобщенные кривые деформирования

Опубликованные в литературе данные о характере рассеяния обобщенных кривых в связи с влиянием температуры крайне ограничены.

В работе [558] приведены кривые деформирования октаэдрическое касательное напряжение — октаэдрический сдвиг, построенные по результатам испытания стальных труб (в том числе сварных) на растяжение с внутренним давлением при нормальной

температуре и температуре  $-50^{\circ}\text{C}$ . В обоих случаях экспериментальные точки, соответствующие двухосному растяжению, отклоняются от кривой одноосного растяжения в пределах обычного разброса экспериментальных данных. Интересно отметить, что кривые, построенные в координатах  $\gamma_{\max} - \tau_{\max}$ , имеют заметное рассеяние, не увеличивающееся, однако, с понижением температуры.

Некоторые качественные результаты о деформационных свойствах хромоникелевых сталей в условиях двухосного растяжения на крестообразных образцах при температурах жидкого азота, водорода и гелия приведены в работе [164].

Этих данных, естественно, недостаточно для каких-либо обобщений или экстраполяций на более низкие температуры.

Ниже обсуждаются результаты исследований авторов с сотрудниками, относящиеся к изучению обобщенных кривых деформирования углеродистых и хромоникелевых сталей, серого чугуна, алюминиевых сплавов при нормальной и низких температурах в условиях  $N$ - $p$ -опытов (осевая сила + внутреннее давление).

На рис. 166 представлены результаты испытаний углеродистой стали ( $C - 0,37\%$ ) при различных температурах. С целью получения необходимого масштаба в пределах чертежа на рисунке приведены только участки кривых, ограниченные деформацией 4%.

Согласно приведенным графикам при нормальной температуре кривая  $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$  инвариантна к виду напряженного состояния. Незначительное расхождение можно отнести за счет неизбежных ошибок при регистрации и обработке экспериментальных данных. Вид напряженного состояния в этом случае, как уже отмечалось при обсуждении первичных кривых деформирования, оказывает влияние лишь на величину предельной пластической деформации при разрушении.

По мере снижения температуры расхождение кривых существенно увеличивается и, начиная с температуры  $-50^{\circ}\text{C}$ , при деформациях  $\epsilon_i = 0,2 \div 1,0\%$  составляет по напряжениям  $\pm 15-20\%$ . При этом в расположении графиков, полученных при одной и той же температуре, наблюдается следующая закономерность: кривые деформирования, полученные при напряженных состояниях, когда обе компоненты напряжений положительны, лежат ниже соответствующей кривой деформирования при одноосном растяжении; для напряженных состояний, при которых главные напряжения имеют противоположные знаки, а также для случая одноосного сжатия, характерно более высокое расположение кривых. Из приведенных данных и анализа первичных кривых деформирования (см. § 2 настоящей главы) следует, что углеродистая сталь при низких температурах лучше сопротивляется сжатию, чем растяжению.

Расхождение обобщенных кривых, построенных по результатам испытаний материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, обычно объясняют влиянием шарового тензора, а инвариантные к напряженному состоянию функции ищут в виде [27]

$$\varepsilon_i = \Phi(\sigma_i, \sigma_0). \quad (X.20)$$

Проведенный в предыдущем параграфе анализ показал, что в процессе деформирования стали наблюдается отклонение главных осей тензора деформаций от главных осей тензора напряжений. Следовательно, в выражении для эквивалентного напряжения необходимо сделать соответствующую коррекцию с целью учета вида девиатора напряжений. Функция (X.20) в этом случае принимает вид

$$\varepsilon_i = \Phi_1(\sigma_i, \sigma_0, \mu_\sigma),$$

или, что то же,

$$\gamma_{\text{окт}} = \Phi_2(\tau_{\text{окт}}, \sigma_{\text{окт}}, \mu_\sigma). \quad (X.21)$$

Влияние как октаэдрического нормального напряжения (шарового тензора), так и вида девиатора напряжений в определенной форме отражено в обобщенных критериях, которые, учитывая, что

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \tau_{\text{окт}}; \quad \sigma_1 = \sigma_{\text{окт}} + \frac{3 - \mu_\sigma}{\sqrt{2} \sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} \tau_{\text{окт}}, \quad (X.22)$$

можно записать в виде (X.21).

Как уже отмечалось, «дефектность» стали в условиях охлаждения существенно увеличивается. Поэтому выражение для эквивалентного напряжения запишем в следующем виде (см. гл. V):

$$\bar{\eta}_\Sigma = \bar{\chi} \sigma_i + (1 - \bar{\chi}) \sigma_1 A^{1-I}. \quad (X.23)$$

Параметр  $\bar{\chi}$  можно определить по результатам испытаний при одноосном растяжении и одноосном сжатии. Условие совпадения кривых

$$\varepsilon_i = f(\bar{\eta}_\Sigma) \quad (X.24)$$

при этих видах испытаний будет

$$\bar{\eta}_{\Sigma p} = \bar{\eta}_{\Sigma c},$$

откуда следует

$$\bar{\chi} = \frac{\bar{\sigma}_p}{\bar{\sigma}_c}. \quad (X.25)$$

Здесь  $\bar{\sigma}_p$  — напряжение, соответствующее деформации  $\varepsilon_i$  при одноосном растяжении;  $\bar{\sigma}_c$  — напряжение, соответствующее той же деформации при одноосном сжатии. При нормальной температуре кривые деформирования при растяжении совпадают с

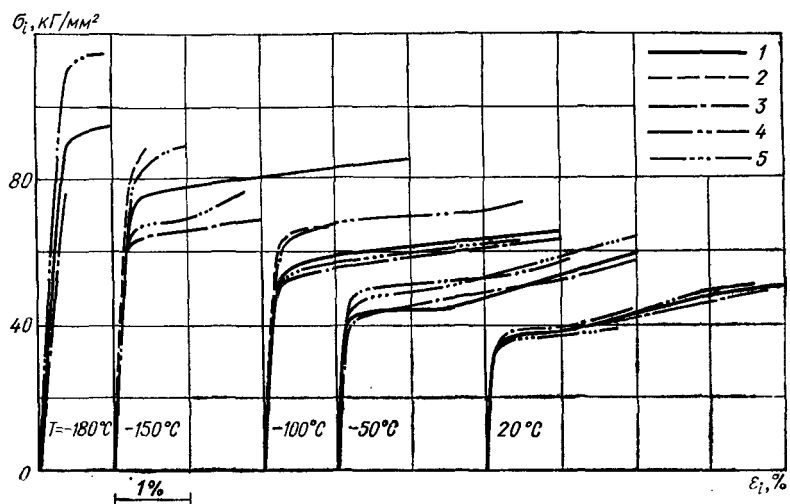


Рис. 166. Обобщенные кривые деформирования углеродистой стали: 1 —  $K = \infty$ ; 2 —  $K = -\infty$ ; 3 —  $K = 1$ ; 4 —  $K = -1$ ; 5 —  $K = 0.5$ .

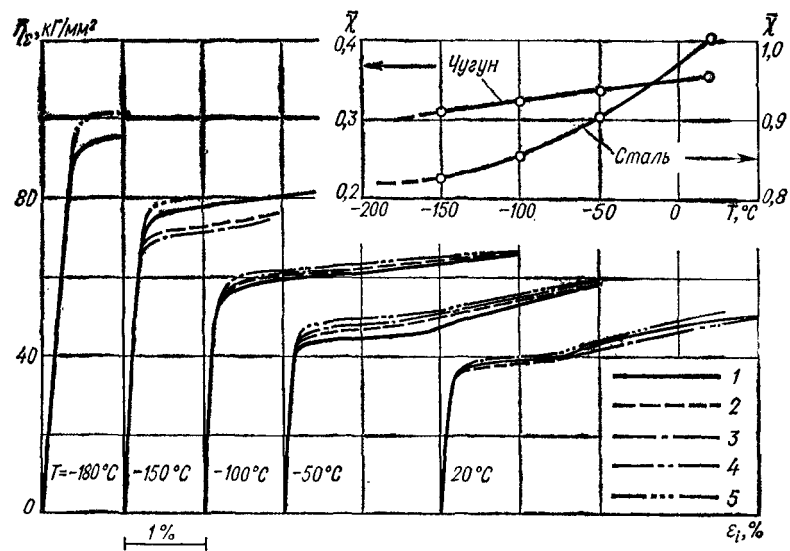


Рис. 167. Обобщенные кривые  $\eta_{\Sigma} = f(\epsilon_i)$  по данным испытаний углеродистой стали 35. (Обозначения те же, что и на рис. 166.) Вверху справа показана зависимость параметра  $\chi$  от температуры.

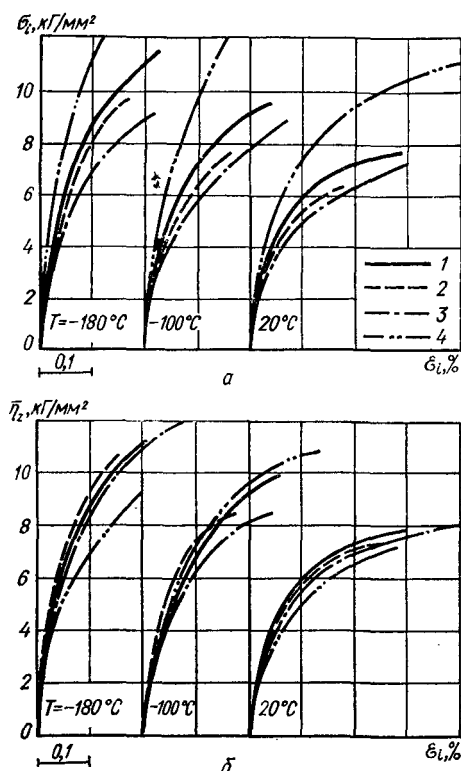


Рис. 168. Обобщенные кривые деформирования серого чугуна:

1 —  $K = 0$ ; 2 —  $K = 0,5$ ; 3 —  $K = 1$ ; 4 —  $K = -1$ .

кривыми деформирования при сжатии, т. е.  $\bar{\sigma}_p = \bar{\sigma}_c$  и  $\bar{\lambda} = 1$ . В этом случае критерий (X.23) преобразуется в критерий Мизеса, а обобщенные кривые  $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$  совпадают (рис. 166).

Как уже отмечалось, рост сопротивления материала сжатию с понижением температуры опережает рост сопротивления материала растяжению, что приводит к уменьшению параметра  $\bar{\lambda}$ . Поэтому обобщенные кривые в форме (X.24) строили с учетом значений  $\bar{\lambda}$  при данной температуре. Результаты расчетов при  $A = 0,75$  (среднестатистическое значение структурного параметра) представлены на рис. 167. Из сопоставления данных рис. 166 и 167 следует, что соотношение (X.23) с достаточным приближением может быть принято в качестве эквивалентного напряжения при установлении соотношений между напряжениями и деформациями

углеродистых сталей при низких температурах.

При установлении соотношений между напряжениями и деформациями для таких «полухрупких» материалов, каким является серый чугун, в случае произвольного напряженного состояния часто прибегают к линейной аппроксимации кривой деформирования [6]. С другой стороны, явно выраженное отклонение от закона Гука дает основание решать задачу при сравнительно малых деформациях в нелинейно-упругой постановке [187]. Оба этих подхода исключают из комплекса физических процессов, протекающих в материале под действием приложенных напряжений, наличие пластических деформаций, которые в сером чугуне, по данным работ [441, 476], соизмеримы с упругими уже в начальной стадии деформирования. Поэтому зависимости между напряжениями и деформациями для рассматриваемого упруго-пластического тела можно искать в форме, аналогичной соответ-

ствующим соотношениям теории пластичности. В этом случае принципиально важным является экспериментальное обоснование обобщенных кривых деформирования. На рис. 168, а приведены экспериментальные кривые  $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$  для четырех соотношений главных напряжений и трех температур.

Рассеяние экспериментальных кривых весьма существенно как при нормальных, так и при низких температурах; с понижением температуры разброс по напряжениям при фиксированных деформациях  $\varepsilon_i$  увеличивается. Наибольшее отклонение при всех температурах имеет диаграмма деформирования образца, испытанного при чистом сдвиге ( $K = -1$ ). Общая тенденция такова, что с увеличением параметра  $K$  степень упрочнения, характеризуемая отношением  $\frac{\Delta\sigma_i}{\Delta\varepsilon_i}$ , уменьшается.

Результаты испытаний серого чугуна также были обработаны по критерию (X.23). Средние для всего диапазона деформирования значения параметра  $\bar{\chi}$ , рассчитанные по выражению (X.25), следующие:

Температура, °C	+20	—100	—180
Параметр $\bar{\chi}$	0,347	0,320	0,311

Из рис. 168, б, на котором результаты испытаний чугуна представлены в координатах  $\bar{\eta}_\Sigma - \varepsilon_i$ , видно, что построение кривых по обобщенному критерию (X.23) дает сравнительно небольшое рассеяние, хотя при снижении температуры оно незначительно увеличивается в основном за счет отклонения кривой, полученной при двухосном равномерном растяжении. Учитывая наличие некоторого разброса экспериментальных данных, в первом приближении можно считать, что для материалов типа серых чугунов зависимость (X.24) инвариантна к напряженному состоянию как при нормальных, так и при низких температурах. Вид этой зависимости определяется механическими свойствами материала.

Интересно отметить, что предельные деформации  $\varepsilon_{i\max}$  в условиях одноосного и двухосного равномерного растяжения одинаковы при всех температурах; с понижением температуры разброс кривых  $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$  (рис. 168) по деформациям снижается, хотя по напряжениям, как уже отмечалось, увеличивается.

Обобщенные кривые  $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$  для хромоникелевой стали X18H10T приведены на рис. 169, из которого видно, что для этой стали разброс точек по напряжениям как при нормальной, так и при низких температурах не превышает  $\pm 6\%$ .

Таким образом, общие закономерности низкотемпературного деформирования серого чугуна и хромоникелевой стали в условиях сложного напряженного состояния описываются теми же соотношениями, что и при нормальной температуре.



Данные о деформационных свойствах алюминиевых сплавов при сложном напряженном состоянии в условиях нормальных температур приведены в работах [140, 387, 548, 568]. Было установлено, что закон пропорциональности девиаторов напряжений и деформаций для этих материалов не выполняется, а обобщенные кривые  $\sigma_i \Rightarrow \Phi(\epsilon_i)$  зависят от вида напряженного состояния; это объяснялось как анизотропией сплавов [140], так и их метастабильностью [387].

Качественно аналогичные результаты получены при испытании сплавов Д16Т и АЛ-19. Однако специально проведенные испытания показали, (см. гл. XI), что с понижением температуры анизотропия упругих, пластических и прочностных свойств сплавов заметно уменьшается. Это дает основание предполагать соответствующее уменьшение разброса обобщенных кривых.

Результаты расчетов для сплава Д16Т приведены на рис. 170, из которого видно, что обобщенные кривые  $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$  в указанных координатах не совпадают как при нормальной, так и при низких температурах.

Снижение температуры испытания сплава Д16Т практически не приводит к расширению или сужению веера кривых: абсолютные отклонения остаются на том же уровне. Однако при низких температурах значения текущих напряжений значительно выше. Поэтому относительная величина отклонений с понижением температуры уменьшается. Так, например, если при нормальной температуре отклонение кривых от среднего значения интенсивности напряжений для  $\epsilon_i = 3\%$  составляет около 20%, то при температуре  $-180^\circ\text{C}$  соответствующее отклонение не превышает 14%. Заметное расхождение обобщенных кривых получено и при испытаниях литейного сплава АЛ-19. Это расхождение существенно больше при температуре  $-100^\circ\text{C}$ . Расширение веера кривых

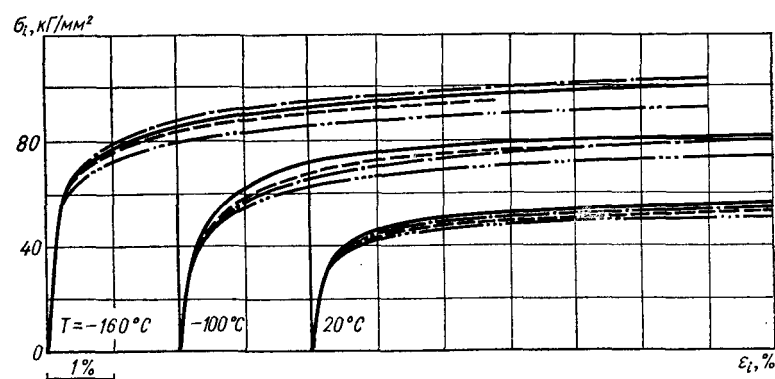


Рис. 169. Обобщенные кривые деформирования хромоникелевой стали. (Обозначения кривых те же, что и на рис. 168.)

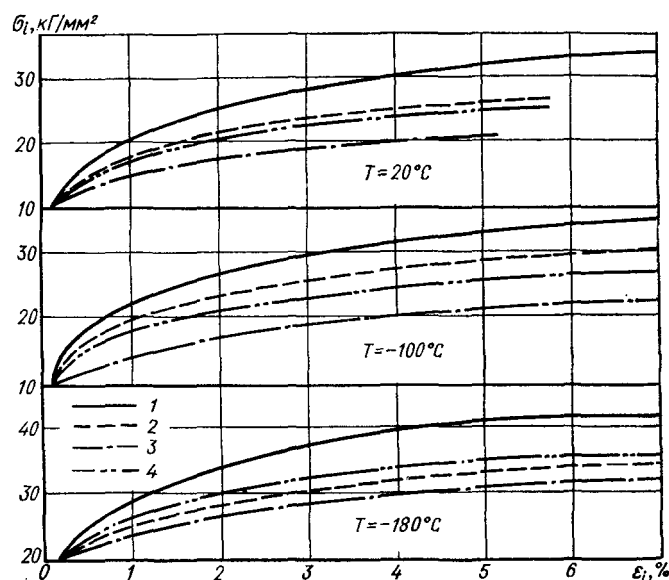


Рис. 170. Обобщенные кривые деформирования алюминиевого сплава Д16Т:

1 —  $K = \infty$ ; 2 —  $K = 1$ ; 3 —  $K = 0,5$ ; 4 —  $K = 0$ .

при снижении температуры произошло в основном за счет более высокого расположения кривой одноосного сжатия и относительного снижения кривых, полученных при двухосном растяжении.

Интересно отметить, что кривая одноосного растяжения в тангенциальном направлении (направление меньшего сопротивления) на приведенных графиках занимает срединное положение и ближе примыкает к кривым, полученным при двухосном растяжении.

По результатам проведенных испытаний строились также кривые Людвига. Расхождение этих кривых по относительным отклонениям  $\frac{\Delta \tau_{\max}}{\tau_{\max}}$  были одного порядка или больше расхождений кривых  $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$  по  $\frac{\Delta \sigma_i}{\sigma_i}$ . Поэтому кривые Людвига не обсуждаются.

Влияние повышенных температур (до  $300^\circ \text{C}$ ) на закономерности деформирования сложно-легированной высокопрочной стали исследовано В. Н. Бастуном [22]. В качестве рабочей среды для создания внутреннего давления в трубчатом образце использовался глицерин. Нагрев образцов производился непосредственным пропусканием тока [23] с подогревом хвостовиков для по-

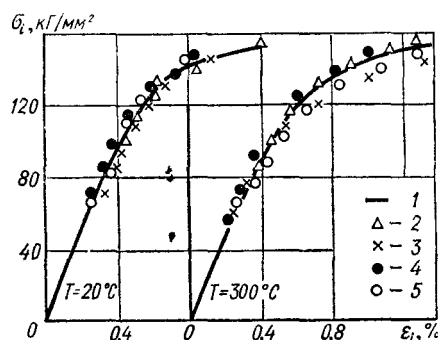


Рис. 171. Обобщенные кривые деформирования высокопрочной стали [22]:

1 —  $K = \infty$ ; 2 —  $K = 0$ ; 3 —  $K = 0,5$ ; 4 —  $K = 1$ ; 5 —  $K = 2$ .

ропрочных сплавов, в том числе при сложном нагружении, достаточно полно описаны в работе [114]. По этим данным повышение температуры стали не сопровождается проявлением каких-либо новых эффектов.

лучения однородного температурного поля на рабочей длине. Деформации измеряли механическим тензометром. По данным этих исследований (рис. 171) с повышением температуры расхождение обобщенных кривых  $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$  несколько увеличивается, причем наибольшие отклонения от кривой одноосного растяжения наблюдаются при неравномерном двухосном растяжении с соотношением главных напряжений 1:2.

Результаты изучения влияния высоких температур на рассеяние обобщенных кривых жа-

## § 6. Закономерности низкотемпературного деформирования металла при сложном нагружении

Влияние температуры на процесс упруго-пластического деформирования материала при сложном нагружении должно быть наиболее ярко выражено на материалах, пластичность которых заметно понижается при охлаждении. К таким материалам следует, прежде всего, отнести углеродистые стали.

Рассмотрим некоторые экспериментальные результаты изучения влияния сложного нагружения на инвариантность обобщенных кривых  $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ , а также опытной проверки постулата изотропии и закона запаздывания в условиях нормальной и низких температур, полученные в Институте проблем прочности АН УССР.

Трубчатые тонкостенные образцы были изготовлены из углеродистой стали следующего состава: C — 0,49; Si — 0,21; Mn — 0,46; P — 0,022; S — 0,026%. Заготовки подвергнуты отжигу по режиму: нагрев до температуры 800° C, выдержка при этой температуре 2,5 ч, охлаждение с печью.

Изотропия материала проверялась путем отдельных испытаний на осевое и тангенциальное растяжение при нормальной температуре. При этом обнаружено некоторое расхождение кривых растяжения в начальной стадии деформирования. При разви-

тых пластических деформациях анизотропия металла по текущим напряжениям не превышала 3%.

Испытания проводились на установке СНТ—5П в условиях двухосного растяжения, создаваемого осевой силой и внутренним давлением, при температурах 20, —100 и —150° С. Осевые и тангенциальные деформации измеряли электромеханическим тензором на базе 25 мм с точностью  $\pm 5$  мк. Радиальную деформацию определяли из условия упругого изменения объема.

При расчете  $\epsilon$ , использовали средние значения модулей упругости и коэффициентов Пуассона, определенных при одноосном растяжении в осевом и тангенциальном направлениях при соответствующих температурах. Значения упругих постоянных приведены в табл. 12.

При выполнении исследования были реализованы четыре программы испытаний.

При испытаниях по программе 1 образец сначала растягивали осевой силой (до  $\sigma_z = \sigma_i = 50$  кг/мм<sup>2</sup> при  $T = 20^\circ$  С, до  $\sigma_i = 58$  кг/мм<sup>2</sup> при  $T = -100^\circ$  С и до  $\sigma_i = 76$  кг/мм<sup>2</sup> при  $T = -150^\circ$  С), а затем при постоянной осевой силе нагружали внутренним давлением до разрушения.

Испытание по программе 2 состояло в следующем: образец нагружали внутренним давлением до указанных выше значений интенсивности напряжений, а затем доводили до разрушения осевой силой при постоянном давлении.

При реализации программы 3 образцы испытывали в условиях простого нагружения при соотношении главных напряжений  $K = \frac{\sigma_z}{\sigma_\theta} = 1,37$ .

Испытания по описанным выше программам обеспечивали пересечение траекторий нагружения в одной точке.

При испытаниях по программе 4 образцы путем комбинированного нагружения внутренним давлением и осевой сжимающей силой растягивали в поперечном направлении.

Как видно из рис. 172, на котором представлены фактические траектории нагружения в истинных напряжениях, в результате изменения размеров образца траектории при развитых пластических деформациях искривлялись ( $A_{1,2,3}$ ,  $B_{1,2,3}$  — точки излома

Т а б л и ц а 12

$T, ^\circ\text{C}$	$E_z, \text{кг/мм}^2$	$E_\theta, \text{кг/мм}^2$	$E_{\text{ср}}, \text{кг/мм}^2$	$\mu_z$	$\mu_\theta$	$\mu_{\text{ср}}$
20	$2,11 \cdot 10^4$	$2,21 \cdot 10^4$	$2,16 \cdot 10^4$	0,28	0,26	0,27
—100	$2,14 \cdot 10^4$	$2,27 \cdot 10^4$	$2,20 \cdot 10^4$	0,29	0,25	0,27
—150	$2,26 \cdot 10^4$	$2,30 \cdot 10^4$	$2,28 \cdot 10^4$	0,27	0,26	0,27

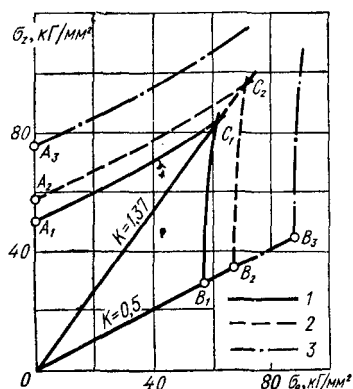


Рис. 172. Программы испытаний:

1 —  $T = 20^\circ \text{C}$ ; 2 —  $T = -100^\circ \text{C}$ ;  
3 —  $T = -150^\circ \text{C}$ .

траекторий;  $C_{1,2,3}$  — точки встречи траекторий). Для обеспечения пересечения трех траекторий в одной точке расчет по программе 3 производили по фактическим размерам образца, определенным при пробных испытаниях. При температуре  $-150^\circ \text{C}$  образцы разрушались до пересечения траекторий нагружения.

На рис. 173 и 174 представлены первичные кривые деформирования при различных температурах. Как видно из рисунков, понижение температуры вызывает интенсивный рост сопротивления стали деформированию как при простом, так и при сложном нагружении. В этом случае пластичность стали уменьшается. При всех температурах на участке, где  $\sigma_\theta = \text{const}$ , деформация  $\epsilon_\theta$  продолжает возрастать.

Интересно отметить, что при температуре  $-100^\circ \text{C}$  кривые деформирования исследуемой стали имеют на начальном участке область с незначительным упрочнением, напоминающую площадку текучести.

Обобщенные кривые деформирования  $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$  стали для четырех программ нагружения представлены на рис. 175. Крестиками на рис. 173 и 175 отмечены кривые деформирования образцов, не доведенных до разрушения. Анализ кривых, соответствующих простому нагружению с различным соотношением

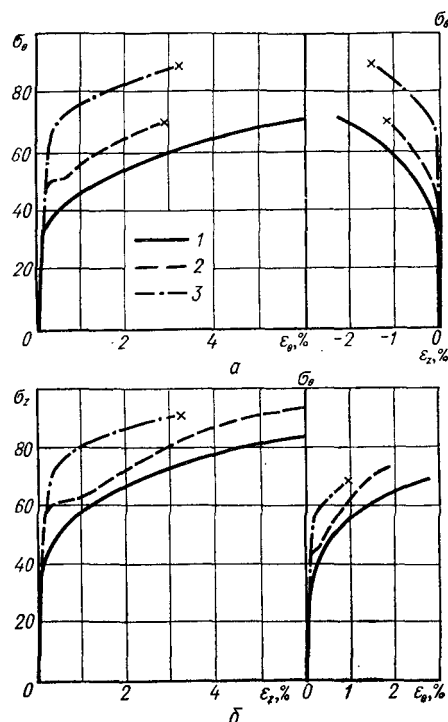


Рис. 173. Кривые деформирования стали при простом нагружении:

а — по программе 4,  $K = 0$ ; б — по программе 3,  $K = 1,37$ .

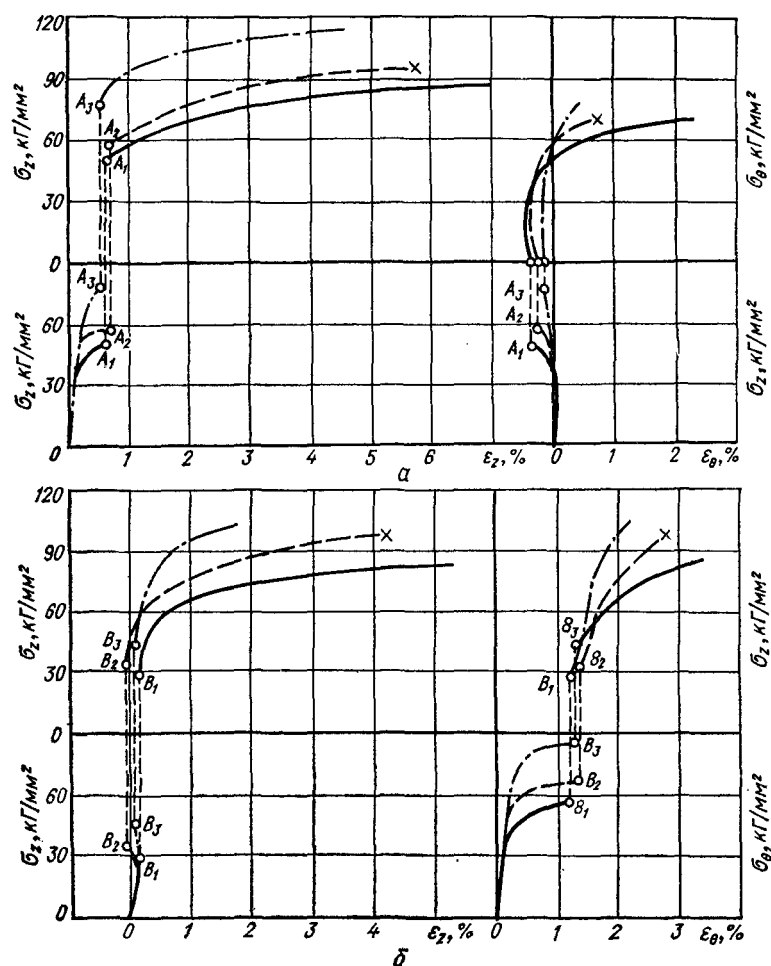


Рис. 174. Кривые деформирования стали при сложном нагружении: а — по программе 1; б — по программе 2. (Обозначения кривых те же, что и на рис. 172.)

главных напряжений ( $K = \infty$  — до точки А,  $K = 1,37$ ,  $K = 0,5$  — до точки В,  $K = 0$ ) показывает, что при нормальной температуре и температуре  $-100^\circ\text{C}$  в случае двухосного растяжения кривые  $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$  практически не зависят от вида напряженного состояния. Некоторое расхождение обусловлено, по-видимому, небольшой начальной анизотропией стали. Это предположение подтверждается наблюдаемой закономерностью в рассеивании кривых — они расположены одна под другой в соответствии со значениями величины

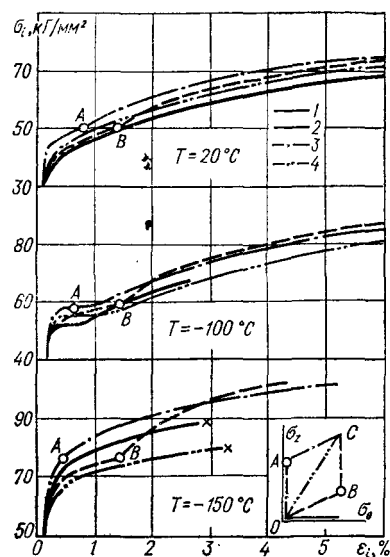


Рис. 175. Обобщенные кривые деформирования стали при простом и сложном нагружении:

1 —  $K = 0$ ; 2 — нагружение по  $OBC$ ; 3 — нагружение по  $AC$ ; 4 — нагружение по  $OC$ .

простом нагружении до точки излома. За ним следует зона более интенсивного упрочнения металла. В дальнейшем характер кривой такой же, как и при простом нагружении до точки излома.

При понижении температуры испытаний до  $-150^\circ\text{C}$  за точкой излома траектории наблюдается интенсивный рост сопротивления стали пластическому деформированию, в результате чего расхождение кривых увеличивается.

Результаты опытов по траекториям сложного нагружения (программы 1 и 2) были использованы для экспериментальной проверки постулата изотропии при двухосном растяжении.

По данным работ [256, 258, 259] опыты подтверждают постулат изотропии в условиях нормальных температур при программировании испытаний в пространстве вектора деформаций.

Согласно теореме изоморфизма образов процессов [165, 169] за основное может быть принято как пространство вектора деформаций, так и пространство вектора напряжений. В настоящих исследованиях процесс нагружения задавали траекториями нагружения (траекториями напряжений) в плоскости двумерного вектора  $S = S_1 p_1 + S_2 p_2$  ( $p_1, p_2$  — единичные векторы), составляю-

$K = \frac{\sigma_z}{\sigma_\theta}$ , т. е. по мере перехода от

одноосного растяжения в осевом направлении к одноосному растяжению в тангенциальном направлении. С понижением температуры испытаний до  $-150^\circ\text{C}$  расхождение кривых  $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$  увеличивается.

Испытания в условиях сложного нагружения осуществлялись без поворота главных осей тензора напряжений и сопровождались непрерывным ростом интенсивности напряжений.

Из рис. 175 видно, что снижение температуры до  $-100^\circ\text{C}$  не приводит к существенному увеличению рассеивания обобщенных кривых деформирования при переходе от простого нагружения к сложному по принятым траекториям. На кривых деформирования с момента излома траектории нагружения (точки  $A$  и  $B$ ) наблюдается небольшой участок с упрочнением, примерно равным упрочнению кривой при

щие которого определяли по формулам

$$S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \sigma_z - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right); \quad S_2 = \frac{1}{2} \sigma_\theta.$$

Компоненты вектора деформаций  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 \mathbf{p}_1 + \mathfrak{E}_2 \mathbf{p}_2$  определяли из выражений

$$\mathfrak{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} (\varepsilon_z - \varepsilon_\theta); \quad \mathfrak{E}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (2\varepsilon_\theta + \varepsilon_z - \varepsilon_0),$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} (\varepsilon_z + \varepsilon_\theta + \varepsilon_r).$$

Во всех экспериментах интенсивность напряжений непрерывно возрастала, а излом траекторий нагружения происходил на стадии упрочнения.

В пространстве вектора напряжений образ процесса представляет собой совокупность траектории нагружения и построенных в каждой ее точке соответствующих векторов деформаций. Согласно постулату изотропии образ процесса в пространстве вектора

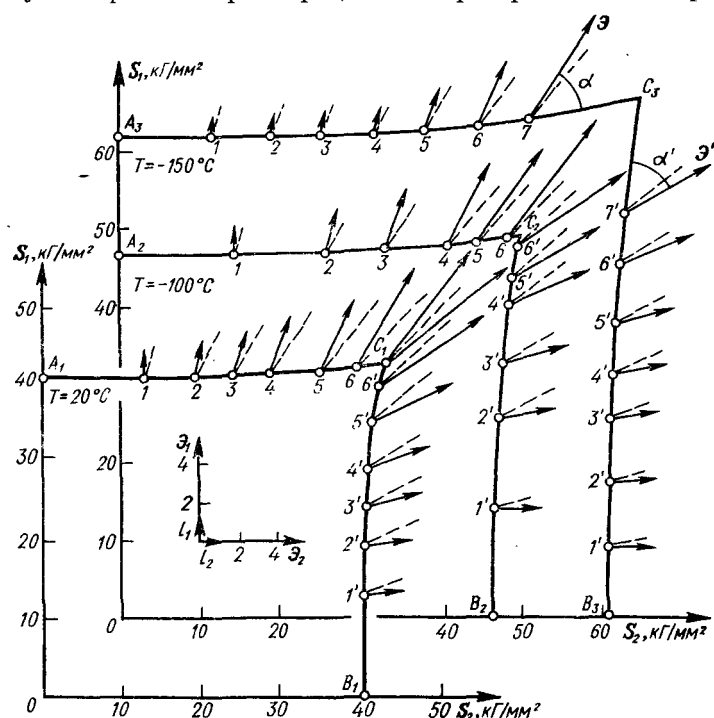


Рис. 176. Картины образов процессов для траекторий сложного нагружения стали в пространстве вектора напряжений.



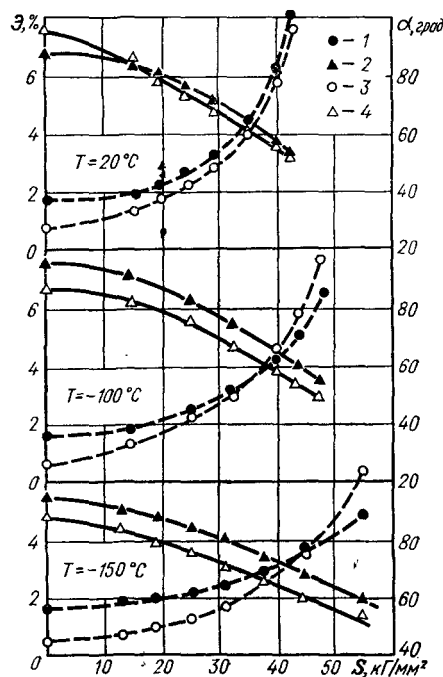


Рис. 177. Зависимость модуля вектора деформации и угла его наклона к траектории нагружения от длины траектории, отсчитываемой от точки излома: 1, 2 — нагружение по ОВС; 3, 4 — нагружение по ОАС (см. рис. 175).

рис. 176 в отдельных точках траекторий нагружения, равноудаленных от точек излома (1 и 1', 2 и 2' и т. д.), построены векторы деформаций. Здесь же штриховыми линиями показаны направления векторов напряжений в соответствующих точках траектории нагружения. Графики зависимости величины  $\Delta$  и угла  $\alpha$  от длины траектории нагружения  $S$ , отсчитываемой от точек излома  $A$  и  $B$ , при трех температурах испытаний представлены на рис. 177, а соответствующие числовые значения — в табл. 13.

Анализ полученных результатов показывает, что при нормальной температуре экспериментальные данные удовлетворительно согласуются с постулатом изотропии. Векторы деформаций в соответствующих точках траектории напряжений достаточно близки по модулю и по наклону к соответствующим траекториям нагружения. Расхождение кривых  $\Delta(S)$  (штриховые линии) и  $\alpha(S)$  (сплошные линии) в начальной стадии деформирования вызвано, по-видимому, некоторой начальной анизотропией стали.

напряжений должен быть инвариантен относительно преобразований вращения и отражения.

На рис. 176 показаны картины образов процессов, полученных при выполнении программ 1 и 2, траектории которых являются взаимными отражениями по отношению к биссектрисе координатного угла. Как видно из рисунка, незначительное искривление траекторий, обусловленное изменением геометрических размеров образца в процессе деформирования, не нарушило их симметрии.

Из постулата изотропии следует, что в пространстве напряжений абсолютные величины вектора  $\Delta$  и угла  $\alpha$  его наклона к траектории нагружения для траекторий, имеющих одну и ту же внутреннюю геометрию, зависят только от длины траектории, отсчитываемой от точки излома. Для проверки этого положения на

С понижением температуры испытаний наблюдается зависимость векторных и скалярных свойств от траектории нагружения. Векторы деформаций, построенные для идентичных точек рассматриваемых траекторий, отличаются между собой как по абсолютной величине, так и по ориентации. Причем, как видно из рис. 177, при понижении температуры до  $-100^{\circ}\text{C}$  нарушение инвариантности образа процесса происходит вследствие векторных свойств, а при температуре  $-150^{\circ}\text{C}$  — как векторных, так и скалярных свойств материала.

Векторными свойствами материала определяется также закон запаздывания, получивший экспериментальное подтверждение при нормальной температуре в пространстве вектора деформаций [256, 258].

Из принципа запаздывания следует, что на прямолинейном участке траектории деформаций после любого процесса сложного нагружения направление вектора напряжений стремится к совпадению с направлением траектории деформаций.

На рис. 178 показаны траектории деформаций, которые имели место при испытаниях стали по программам 1 и 2. В адекватных

Таблица 13

$T, ^{\circ}\text{C}$	Точки траекторий	$S, \text{кг/мм}^2$	$\vartheta, \%$	$\vartheta', \%$	$\alpha, \text{град}$	$\alpha', \text{град}$
20	A; B	40,7	0,759	1,671	$97^{\circ} 33'$	$87^{\circ} 14'$
	1; 1'	42,9	1,375	1,892	$86^{\circ} 10'$	$84^{\circ} 43'$
	2; 2'	45,3	2,047	2,212	$79^{\circ} 6'$	$81^{\circ} 38'$
	3; 3'	47,8	2,268	2,644	$73^{\circ} 50'$	$76^{\circ} 30'$
	4; 4'	50,7	2,850	3,285	$67^{\circ} 50'$	$71^{\circ} 14'$
	5; 5'	54,8	4,167	4,552	$62^{\circ} 10'$	$64^{\circ} 6'$
	6; 6'	58,5	5,854	6,332	$57^{\circ}$	$75^{\circ} 55'$
	7; 7'	61,1	7,620	8,119	$52^{\circ} 50'$	$54^{\circ} 12'$
-100	A; B	47,2	0,592	1,624	$95^{\circ}$	$87^{\circ}$
	1; 1'	48,9	1,297	1,859	$91^{\circ} 30'$	$81^{\circ} 8'$
	2; 2'	55,1	2,313	2,448	$83^{\circ} 23'$	$70^{\circ} 40'$
	3; 3'	58,7	3,060	3,160	$75^{\circ} 00'$	$66^{\circ} 50'$
	4; 4'	63,5	4,588	4,264	$65^{\circ} 55'$	$60^{\circ} 05'$
	5; 5'	66,1	5,900	5,081	$61^{\circ} 25'$	$54^{\circ} 45'$
	6; 6'	69,4	7,673	6,600	$56^{\circ} 20'$	$52^{\circ} 10'$
	7; 7'	71,0	8,083	7,153	$55^{\circ} 5'$	$49^{\circ} 45'$
-150	A; B	61,9	0,515	1,619	$88^{\circ} 10'$	$94^{\circ} 30'$
	1; 1'	63,0	0,616	1,871	$83^{\circ} 30'$	$90^{\circ} 20'$
	2; 2'	64,7	0,808	1,969	$79^{\circ} 43'$	$87^{\circ} 30'$
	3; 3'	67,6	1,066	2,171	$76^{\circ} 5'$	$84^{\circ} 3'$
	4; 4'	70,1	1,470	2,387	$71^{\circ} 20'$	$80^{\circ} 38'$
	5; 5'	73,6	2,304	2,914	$66^{\circ} 10'$	$74^{\circ}$
	6; 6'	78,1	3,619	3,705	$61^{\circ} 20'$	$67^{\circ} 25'$
	7; 7'	82,5	6,242	5,018	$54^{\circ} 15'$	$60^{\circ}$

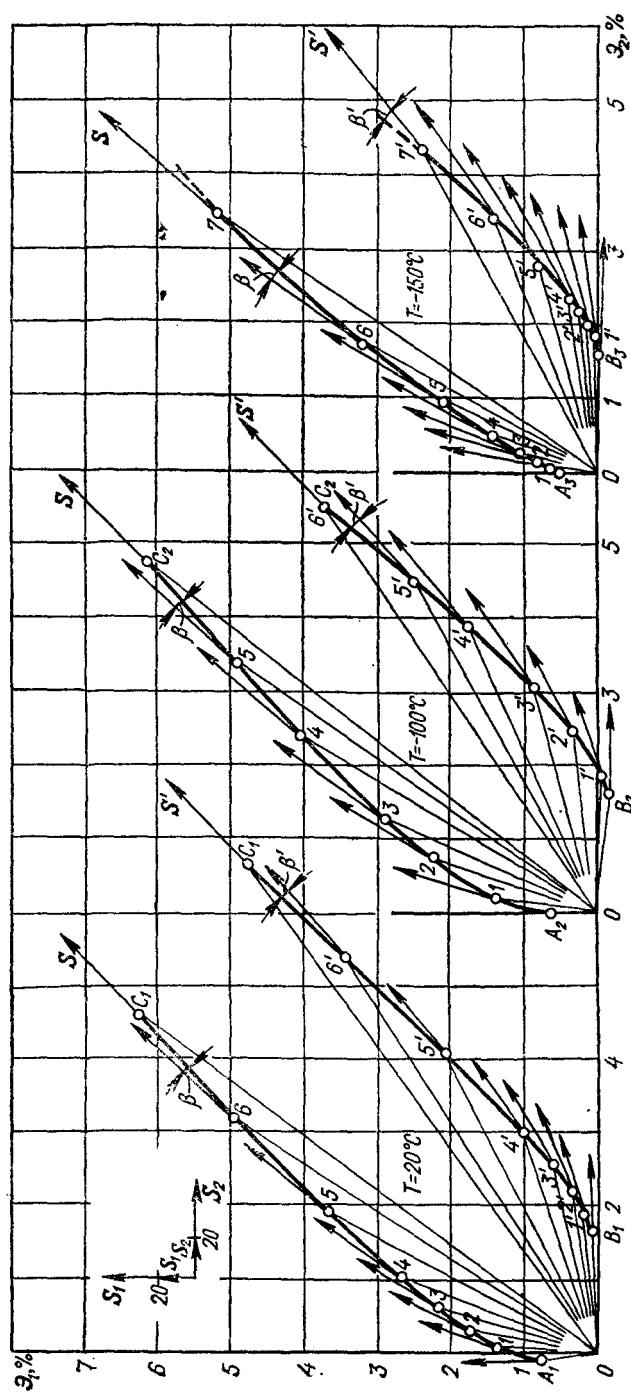


Рис. 178. Траектории деформаций стали в опытах на сложное нагружение.

точках траекторий (1 и 1', 2 и 2' и т. д.) построены соответствующие векторы напряжений. Как видно из рисунка, при всех температурах на втором этапе нагружения (участки  $AC$  и  $BC$ ) криволинейные траектории деформирования становятся траекториями малой кривизны; при этом наблюдаемые сразу после излома (точки  $A$  и  $B$ ) отклонения векторов напряжений от траекторий деформаций уменьшаются по мере приближения к точке  $C$ .

Графики зависимости угла  $\beta$  наклона вектора напряжений к траектории деформаций от длины  $\Delta$  этой траектории представлены на рис. 179. Уменьшение угла  $\beta$  с возрастанием значения  $\Delta$  показывает, что явление запаздывания векторных свойств материала проявляется как при нормальных, так и при низких температурах.

Расположение траекторий деформаций относительно биссектрисы координатного угла  $AOB$  (см. рис. 172), близкое к симметричному, а также достаточно малое (в пределах разброса экспериментальных данных) расхождение кривых  $\beta(\Delta)$ , соответствующих нагружениям по первой и второй программам (рис. 179) при  $20^\circ\text{C}$ , подтверждают постулат изотропии при нормальных температурах.

Понижение температуры испытаний приводит к изменению внутренней геометрии траектории деформаций, сопровождающемуся нарушением их симметрии. При этом наблюдается увеличивающееся с понижением температуры расхождение кривых  $\beta(\Delta)$ . Это обстоятельство свидетельствует о нарушении постулата изотропии в условиях низких температур.

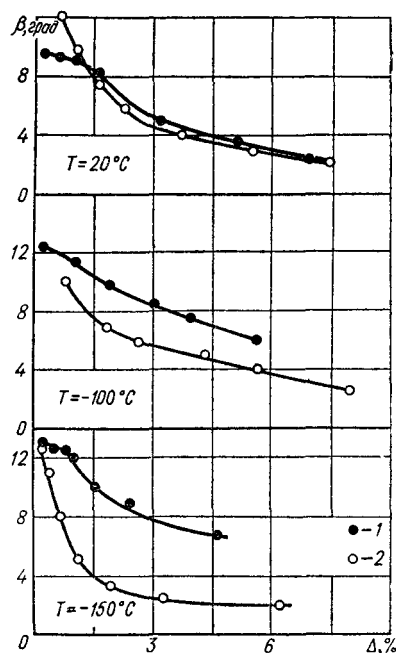


Рис. 179. Зависимость угла наклона вектора напряжений к траектории деформирования от длины траектории, отсчитываемой от точки излома:

1 — траектория  $OBC$ ; 2 — траектория  $OAC$  (см. рис. 175).

## Глава XI

### РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ МАТЕРИАЛОВ ПРИ НИЗКИХ И ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

#### § 1. Критерии пластичности и предельного сопротивления углеродистых сталей в условиях низких температур

Конструкционные углеродистые стали относятся к металлам с объемно-центрированной кубической решеткой. При низких температурах эти стали (пластичные в обычных условиях) начинают проявлять все признаки квазихрупкого материала.

В литературе нет надежных экспериментальных данных о влиянии низких температур на предельное состояние материалов при сложном напряженном состоянии. Однако из опубликованных работ [40, 177, 287, 454] видно, что степень этого влияния существенно зависит от природы материала и его структуры.

Результаты исследования малоуглеродистых сталей с различными размерами зерна при растяжении и кручении [177] представлены на рис. 180. Испытания, проведенные при температуре жидкого азота, показали, что с увеличением размера зерна увеличивается уровень деформаций и напряжений, соответствующих предельным напряженным состояниям материала. Условия Мизеса и Кулона не описывают разрушение стали. Экспериментальные

точки для состояния текучести находятся между прямыми  $\frac{\tau_k}{\sigma_t} = 0,5$  (условие Кулона) и  $\frac{\tau_k}{\sigma_t} = 0,577$  (условие Мизеса) или выше этих прямых.

Влияние напряженного состояния на сопротивление сталей 45 и 40Х при температуре жидкого азота исследовалось в работе [210] путем определения прочности серии цилиндрических образцов с набором выточек различной глубины, но имеющих такую кривизну, при которой местное повышение напряжений оставалось неизменным ( $K_t = \text{const}$ ). На рис. 181 показаны результаты испытаний стали 45 при нормальных и низких температурах. Легко заметить, что вид напряженного состояния (глубина  $t$  выточки) по-разному влияет на прочность образцов при нормальных и низких температурах. Так, если при нормальных температурах с возрастанием объемности напряженного состояния прочность увеличивается, то при температуре  $-196^\circ \text{C}$  с увеличением выточки от 2 до 5 мм она уменьшается на всем диапазоне значений коэффициента концентрации. Кроме того, начиная с  $K_t = 2$ ,

прочность при низких температурах уменьшается при всех исследованных видах напряженного состояния ( $t = 0,5; 2; 5$ ).

Интересные качественные результаты по низкотемпературным испытаниям некоторых малоуглеродистых и низколегированных сталей при плоском напряженном состоянии получены в работах [14, 292, 558, 576, 577, 578]. Однако данные этих испытаний не позволяют делать количественные оценки критериев низкотемпературной прочности материалов при сложном напряженном состоянии. Ниже, по данным работ, выполненных в Институте проблем прочности АН УССР, дается анализ влияния температуры на предельное состояние текучести и разрушения трех сталей с различным содержанием углерода (0,53; 0,37; 0,05%). Вопросы, связанные с технологией обработки двух первых сталей, освещены в гл. X. Образцы из малоуглеродистой стали (C—0,05%) были изготовлены из прутков диаметром 30 мм одной плавки и подвергнуты отжигу в вакууме порядка  $10^{-5}$  мм рт. ст. при температуре  $1280^\circ\text{C}$  в течение четырех часов; охлаждение — вместе с печью.

Обработка экспериментальных данных производилась в истинных напряжениях. Условный предел текучести определялся по допуску на деформацию 0,2% в направлении, по которому процесс деформирования протекал более интенсивно. Разрушающие напряжения — пределы прочности — рассчитывали по максимальным нагрузкам.

Наиболее полно исследована среднеуглеродистая сталь (C — 0,37%). Испытания проводили при температурах 20,  $-50$ ,  $-100$  и  $-180^\circ\text{C}$  и шести-семи соотношениях главных напряжений, включая чистый сдвиг и одноосное сжатие. Однако при этих видах испытания, ввиду потери устойчивости образца при развитии пластических деформациях, определить предел прочности стали не представилось возможным.

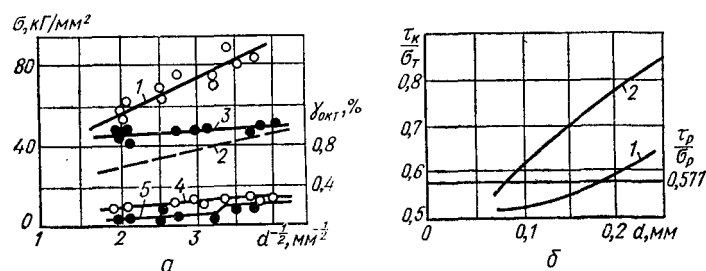


Рис. 180. Результаты испытаний углеродистых сталей с различными размерами зерен при температуре  $-196^\circ\text{C}$  [177]:

$a$  — предельные значения напряжений; 1 — нормальные напряжения при растяжении; 2, 3 — касательные напряжения при растяжении и кручении; 4, 5 — октаэдрические деформации при растяжении и кручении;  $b$  — соотношения между пределами текучести (1) и пределами прочности (2)

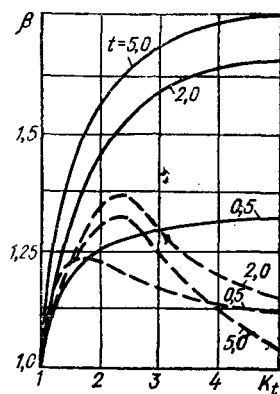


Рис. 181. Результаты испытаний образцов с надрезом из стали 45 при нормальных (сплошные линии) и низких (штриховые линии) температурах [210].

Результаты расчетов в координатах  $\sigma_1 - \sigma_2$  приведены на рис. 182, где экспериментальные точки, соответствующие условному пределу текучести, показаны светлыми кружками, а точки, соответствующие разрушению, — темными. Здесь же для сравнения нанесены предельные кривые Мизеса (штрих-пунктирные) и Кулона—Мора (штриховые), построенные по условному пределу текучести и пределу прочности при одноосном растяжении.

На трех образцах по техническим причинам программа испытаний была выполнена не полностью. Результаты этих опытов представлены на рисунках только одной точкой: на кривой текучести, если образец не был доведен до разрушения, или на предельной кривой разрушения, если в процессе испытаний диаграмму деформирования не записывали.

Как видно из рисунка, при нормальных температурах текучесть исследованной стали удовлетворительно описывается условием Мизеса, а разрушение — условием Кулона. Однако при снижении температуры расширение области безопасных напряжений сопровождается изменением формы предельной кривой. Общая тенденция такова, что в первом квадранте происходит относительное уменьшение сопротивления материала, а во втором (растяжение — сжатие), наоборот, — относительное увеличение. В результате экспериментальные точки, соответствующие пределу текучести

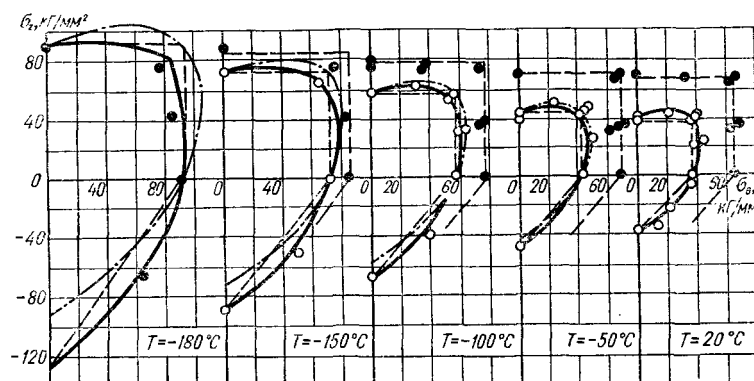


Рис. 182. Предельные кривые текучести и разрушения среднеуглеродистой стали.

части при двухосном растяжении, лежат внутри эллипса Мизеса, а при чистом сдвиге — вне его. Кроме того, понижение температуры сопровождается более интенсивным ростом сопротивления материала одноосному сжатию по сравнению с сопротивлением одноосному растяжению.

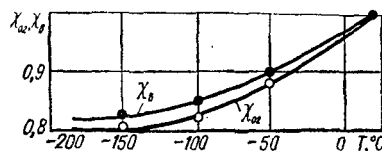


Рис. 183. Зависимость параметров  $\chi_{02}$  и  $\chi_{\alpha}$  от температуры.

При построении обобщенных диаграмм деформирования в координатах  $\eta'_2 - \epsilon_i$  (см. § 4 гл. X) параметр  $\chi' = \frac{\sigma'_p}{\sigma_c}$ , характеризующий

относительное сопротивление материала растяжению и сжатию, определялся по соответствующим кривым зависимости текущих напряжений от интенсивности деформаций в диапазоне  $\epsilon_i = 0,5 \div 2\%$ . При анализе предельных состояний нас интересуют разрушающие напряжения (пределы прочности) и уровни напряжений, соответствующие относительному удлинению  $\epsilon_i = 0,2\%$  (условные пределы текучести). В общем случае может оказаться,

что  $\chi_{02} \neq \chi_{\alpha}$ , так как параметр  $\chi_{\alpha} = \frac{\sigma_{\alpha,p}}{\sigma_{\alpha,c}}$  определяется по пределам прочности без учета величины деформации при разрушении.

Как уже отмечалось, определить пределы прочности при сжатии не представилось возможным. Поэтому здесь ограничимся анализом параметра  $\chi_{02}$ , температурная зависимость которого представлена на рис. 183, где для сравнения показана также зависимость  $\chi_{\alpha} = f(T)$ . Расхождение приведенных кривых незначительное. Однако более высокое расположение кривой  $\chi_{\alpha} = f(T)$  указывает на то, что расхождение кривых деформирования при растяжении и сжатии в условиях низких температур несколько увеличивается по мере развития пластических деформаций.

Из данных, приведенных на рис. 182, видно, что при снижении температуры не происходит изотропного расширения предельной поверхности в связи с увеличением сопротивления материала деформированию. Наряду с расширением поверхности происходит упорядоченное изменение ее формы — цилиндр Мизеса трансформируется в более сложную поверхность. Это связано, очевидно, с изменением механизма пластической деформации и разрушением металла при низкой температуре в связи с более резкой концентрацией напряжений на границах зерен и образованием микротрещин.

Увеличение неоднородности поля напряжений и «дефектности» материала позволяет рассматривать его сопротивление в этом случае с учетом статистических закономерностей, анализ которых дан в гл. V. На рис. 182 сплошными линиями показаны предельные



кривые, построенные по условию (см. гл. V)

$$\bar{\eta}_{\Sigma} = \chi_{02}\sigma_i + (1 - \chi_{02})\sigma_1 A^{1-I}. \quad (\text{XI.1})$$

При нормальной температуре ( $\chi_{02} = 1$ ) условие (XI.1) совпадает с критерием Мизеса. В случае низких температур форма предельных кривых находится в соответствии с характером расположения экспериментальных точек. Учитывая, что кривые строились без предварительного уточнения константы  $A$  (принято  $A = 0,75$ ), можно сказать, что экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретическими кривыми.

Результаты испытаний мало- и высокоуглеродистой сталей при двухосном растяжении приведены на рис. 184. Характер расположения экспериментальных точек показывает, что изменение свойств этих материалов с понижением температуры такое же, как и у среднеуглеродистой стали: наложение второй растягивающей компоненты напряжений приводит к уменьшению темпа роста предельного сопротивления с понижением температуры. Это свойство углеродистых сталей иллюстрируется данными рис. 185, где штриховыми линиями показаны осредненные для трех сталей значения отношений условных пределов текучести  $\sigma_{02}^{\text{ДВ}}/\sigma_{02}$  и пределов прочности  $\sigma_{\text{В}}^{\text{ДВ}}/\sigma_{\text{В}}$  при равномерном двухосном

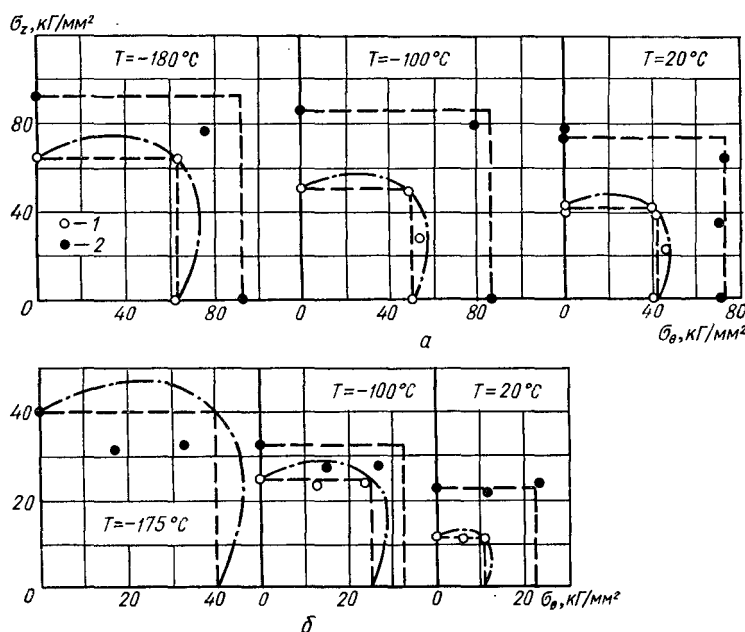


Рис. 184. Предельные кривые текучести (1) и разрушения (2) высокоуглеродистой (а) и малоуглеродистой (б) сталей.

( $K = 1$ ) и одноосном растяжении в зависимости от температуры. Как видно из рисунка, при нормальной температуре наличие второй растягивающей компоненты практически не сказывается на сопротивлении стали ( $\sigma_{0,2}^{дв}/\sigma_{0,2} \approx 1$ ,  $\sigma_{\text{в}}^{дв}/\sigma_{\text{в}} \approx 1$ ). С понижением температуры величины указанных отношений уменьшаются, причем темп снижения величины  $\sigma_{0,2}^{дв}/\sigma_{0,2}$  приблизительно в два раза более высокий, чем величины  $\sigma_{\text{в}}^{дв}/\sigma_{\text{в}}$ . Следовательно, при низких температурах влияние второй компоненты напряжений на предельное состояние текучести углеродистых сталей менее существенно по сравнению с ее влиянием на предельное состояние разрушения.

Эти обстоятельства необходимо учитывать при расчете высоконапряженных элементов конструкций, эксплуатируемых при низких температурах, таких как различного рода резервуары, трубопроводы и т. п., материал которых работает в условиях двухосного растяжения.

## § 2. Влияние низких температур на прочность серого чугуна при сложном напряженном состоянии

Несмотря на большой опыт эксплуатации чугунных деталей, механические свойства чугуна изучены недостаточно. Крайне мало освещены в литературе вопросы низкотемпературной прочности этого материала.

Некоторые результаты и библиография по исследованию прочности различных марок чугунов при плоском напряженном состоянии приведены в работе [207]. В литературе имеются отдельные данные о механических свойствах серого чугуна при низких температурах [441]. В настоящем параграфе приведены результаты исследования совместного влияния вида напряженного состояния и температуры на прочность серого чугуна (C — 0,38; Mn — 0,5; Si — 1,43; S — 0,08; P — 0,7%).

Образцы нагружали осевой силой и внутренним давлением, что обеспечивало проведение испытаний при двухосном растяжении с соотношением главных напряжений  $K = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0,5$  и  $K = 1$  и при

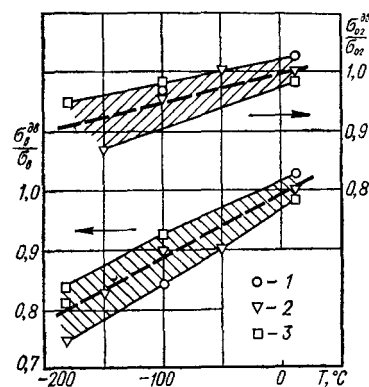


Рис. 185. Влияние температуры на соотношение между условными пределами текучести и пределами прочности стали при одноосном и двухосном растяжении:  
1 — 0,06% C; 2 — 0,37% C; 3 — 0,53% C.

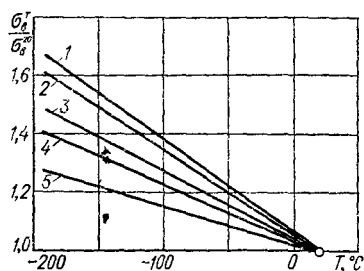


Рис. 186. Зависимость относительной прочности чугуна от температуры:

1 —  $K = -1$ ; 2 —  $K = -\infty$ ; 3 —  $K = 0$ ; 4 —  $K = 0,5$ ; 5 —  $K = 1$ .

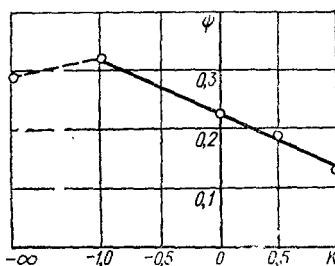


Рис. 187. Зависимость углового коэффициента  $\psi$  от соотношения главных напряжений.

чистом сдвиге ( $K = -1$ ). Кроме того, были определены пределы прочности при одноосном растяжении и одноосном сжатии. В процессе испытания как при нормальной, так и при температурах  $-100$  и  $-180^\circ \text{C}$  записывали кривые деформирования. С целью контроля рассеяния результатов некоторые опыты повторяли. Максимальное отклонение данных (при одноосном сжатии) от среднего значения составляло около 4%. Основные результаты проведенных экспериментов представлены в табл. 14. Температурные зависимости пределов прочности чугуна при различных видах напряженного состояния показаны на рис. 186. По оси ординат отложена величина отношения предела прочности при температуре испытания к пределу прочности при нормальной температуре в аналогичных условиях механического нагружения. Экспериментальные данные аппроксимированы прямыми

$$\frac{\sigma_{\text{в}}^T}{\sigma_{\text{в}}^{20}} = 1 + \psi (20 - T^\circ \text{C}).$$

Таблица 14

Вид нагружения	Предел прочности, $\text{кг/мм}^2$ , при температуре, $^\circ\text{C}$			Коэффициент $\psi$		
	20	-100	-180	при $-100^\circ \text{C}$	при $-180^\circ \text{C}$	Средние значения
Двухосное равномерное растяжение ( $K = 1$ )	7,2	8,5	9,0	0,150	0,112	0,131
Двухосное неравномерное растяжение ( $K = 0,5$ )	7,6	8,9	11,2	0,141	0,245	0,193
Одноосное растяжение ( $K = 0$ )	7,8	9,6	11,2	0,234	0,220	0,227
Чистый сдвиг ( $K = -1$ )	6,3	8,8	10,0	0,334	0,293	0,315
Одноосное сжатие ( $K = -\infty$ )	22,5	30,0	36,6	0,275	0,305	0,290

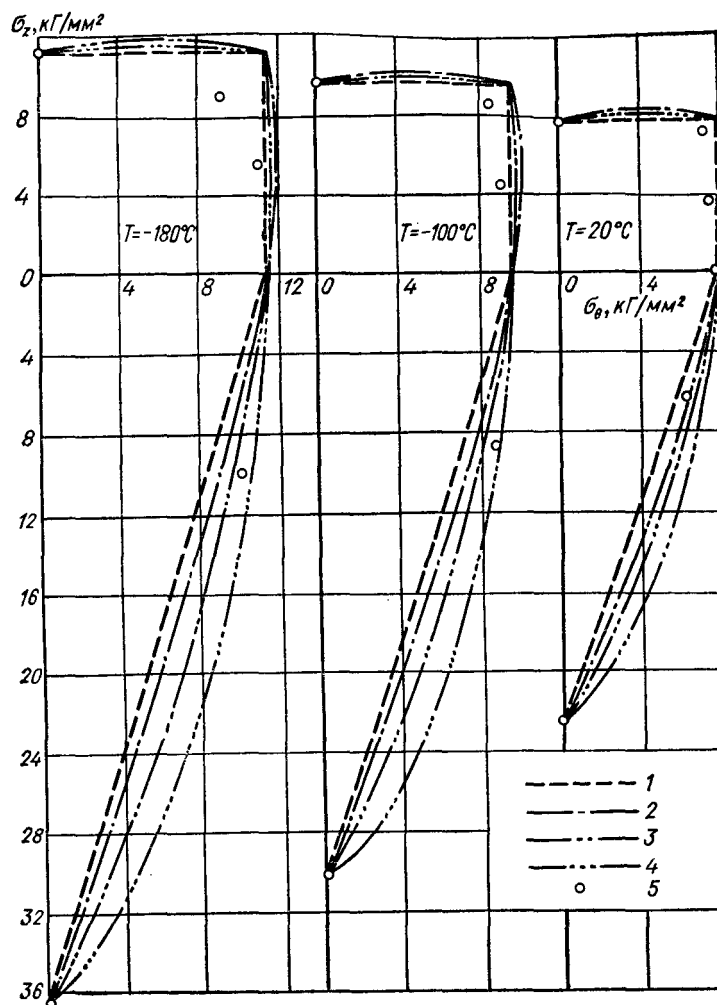


Рис. 188. Предельные кривые разрушения чугуна:

1 — по теории Мора; 2 — по критерию (IV.17а); 3 — по критерию (IV.17б); 4 — по критерию (IV.17в); 5 — результаты опытов.

Угловой коэффициент  $\psi$  определен по результатам испытаний при температурах  $-100$  и  $-180^\circ\text{C}$ . В расчет принимали средние значения коэффициента, приведенные в табл. 14.

Из рисунка видно, что с понижением температуры при всех соотношениях главных напряжений предел прочности чугуна увеличивается, причем в случае одноосного сжатия и чистого сдвига упрочнение материала, связанное с влиянием температуры,

более заметно. Минимальное упрочнение наблюдается при двухосном равномерном растяжении. Таким образом, коэффициент  $\psi$ , характеризующий степень влияния температуры на прочность материала, увеличивается с уменьшением параметра нагружения  $K$ . Как видно из рис. 187, зависимость  $\psi = f(K)$  в диапазоне  $-1 \leq K \leq +1$  может быть принята линейной. При переходе к напряженным состояниям, близким к одноосному сжатию, значение коэффициента  $\psi$  начинает уменьшаться.

Исключительно важным в практическом и в принципиальном отношениях является вопрос о применимости к чугунам известных критериев прочности для установления эквивалентных напряжений при низких температурах.

По данным работ [180, 344], при расчетах на прочность элементов конструкций из «полухрупких» материалов типа серого чугуна наилучшее совпадение с опытными данными дают обобщенные критерии (IV.17).

На рис. 188 приведены кривые, построенные по этим критериям, в сравнении с результатами испытаний серого чугуна. Полученное несоответствие предельных кривых и опытных данных в области двухосного растяжения (увеличивающееся по мере снижения температуры испытаний) объясняется, очевидно, заметной структурной неоднородностью материала, обусловленной наличием в нем пластинок графита с зонами местных надразов в основном металле, где в процессе деформирования возникают пики

Таблица 15

T, °C	$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$	Опытные данные, $\sigma_1$	По теории максимальных нормальных напряжений			По Баландину			По Боткину — Миролубову			По Друккеру — Прагеру		
			$\sigma_1'$	$\Delta\sigma$	$\delta$	$\sigma_1'$	$\Delta\sigma$	$\delta$	$\sigma_1'$	$\Delta\sigma$	$\delta$	$\sigma_1'$	$\Delta\sigma$	$\delta$
20	1	7,2	7,8	0,6	8,3	5,1	2,1	29,2	5,9	1,3	18,1	6,3	0,9	12,5
	0,5	7,6	7,8	0,2	2,6	6,5	1,1	14,5	7,3	0,3	3,9	7,6	0	0
	—1	6,3	7,8	1,5	24	7,6	1,3	20,6	6,7	0,4	6,4	6,2	0,1	1,6
—100	1	8,5	9,6	1,1	13	6,1	2,4	28,2	7,2	1,3	15,3	7,8	0,7	8,2
	0,5	8,9	9,6	0,7	7,9	7,9	1,0	11,2	9,0	0,1	1,1	9,3	0,4	4,5
	—1	8,8	9,6	0,8	9,1	9,8	1,0	11,4	8,4	0,4	4,6	7,7	1,1	12,5
—180	1	9,0	11,2	2,2	24	7,1	1,9	21,1	8,3	0,7	7,8	9,0	0	0
	0,5	11,2	11,2	0	0	9,1	2,1	18,7	10,3	0,9	8,0	11,1	0,1	0,9
	—1	10,0	11,2	1,2	12	11,7	1,7	17,0	9,9	0,1	1,0	9,1	0,9	9,0
Среднее относительное отклонение, %			11,2			19,1			7,4			5,5		

Примечание. В таблице  $\sigma_1'$  — напряжение, рассчитанное по соответствующему критерию отклонения от опытных данных, %.

напряжений. Поэтому результаты испытаний были обработаны по критерию (V.14) [см. также (XI. 1)], в котором отражены статистические аспекты прочности, и, для сравнения, по другим наиболее распространенным критериям, применяемым для установления эквивалентных напряженных состояний хрупких материалов. При этом рассматривались только соотношения, не требующие проведения более двух опытов для определения соответствующих констант материала. Результаты расчетов приведены в табл. 15, из которой видно, что наименьшее отклонение от экспериментальных данных дают условие Друккера — Прагера

$$(\sigma_c - \sigma_p)^2 \sigma_i = [(\sigma_c \sqrt{\sigma_p} + \sigma_p \sqrt{\sigma_c}) - (\sqrt{\sigma_c} - \sqrt{\sigma_p}) \sigma_0]^2$$

и критерий (V.14).

Среднее отклонение предельных напряжений, рассчитанных по этим критериям, не превышает 7%, полученных экспериментально.

Для повышения точности расчетов по уравнению (V.14) необходимо уточнить значение константы  $A$ , так как величина 0,75, принятая в расчет, является среднестатистической для широкого класса неоднородных материалов, включая бетон, металлокерамические композиции, пористое железо и т. п. Как было показано в гл. V, точное значение константы  $A$  можно определить по формуле

$$A = \frac{\varphi - \sqrt{3}\chi}{1 - \chi},$$

По Доштинскому			По Зенделю			По Липатову			По Мору			По уравнению (V.14)					
												$A = 0,75$			$A = 0,87$		
$\sigma'_1$	$\Delta\sigma$	$\delta$	$\sigma'_1$	$\Delta\sigma$	$\delta$	$\sigma'_1$	$\Delta\sigma$	$\delta$	$\sigma'_1$	$\Delta\sigma$	$\delta$	$\sigma'_1$	$\Delta\sigma$	$\delta$	$\sigma'_1$	$\Delta\sigma$	$\delta$
5,6	1,6	22,2	5,8	1,4	19,5	7,8	0,6	8,3	7,8	0,6	3,3	6,4	0,8	11,1	7,1	0,1	1,4
7,0	0,6	7,9	6,7	0,9	11,8	7,8	0,2	2,6	7,8	0,2	2,6	7,1	0,5	6,6	7,6	0	0
6,9	0,3	4,8	5,8	0,5	7,9	7,0	0,7	11,1	5,8	0,5	7,9	7,1	0,8	12,7	6,7	0,4	6,3
6,8	1,7	20,0	7,2	1,3	15,3	9,6	1,1	13,0	9,6	1,1	13,0	7,8	0,7	8,2	8,7	0,2	2,3
9,1	0,2	2,3	8,2	0,7	7,9	9,6	0,7	7,9	9,6	0,7	7,9	8,6	0,8	3,4	9,3	0,4	4,5
8,7	0,1	1,1	7,3	1,5	17,1	8,7	0,1	1,1	7,3	1,5	17,1	9,0	0,2	2,3	8,4	0,4	4,6
7,9	1,1	12,2	8,3	0,7	7,8	11,2	22	24,4	11,2	2,2	24,4	9,1	0,1	1,1	10,2	1,2	13
10,0	1,2	10,7	9,6	1,6	14,3	11,2	0	0	11,2	0	0	10,0	1,2	10,7	10,8	0,4	3,5
10,3	0,3	3,0	8,5	1,5	15,0	10,3	0,3	3,0	3,6	1,4	14,0	10,6	0,6	6,0	9,9	0,1	1,0
9,4			13,0			7,9			10,6			7,0			4,1		

рию;  $\kappa\Gamma/\text{мм}^2$ ;  $\Delta\sigma$  — величина абсолютного отклонения от опытных данных,  $\kappa\Gamma/\text{мм}^2$ ;  $\delta$  — отно-

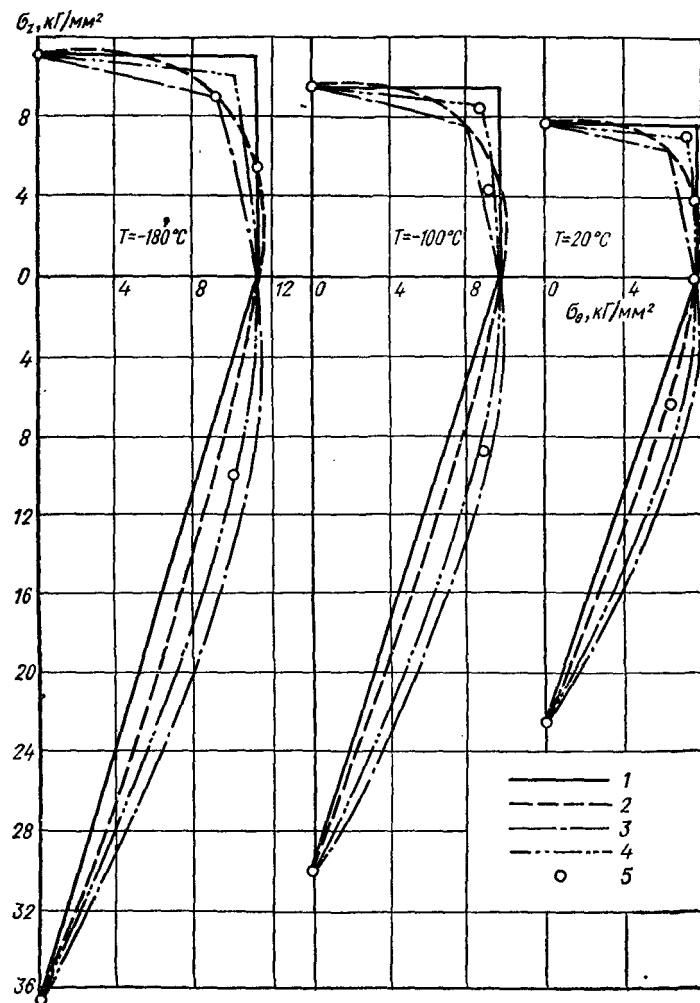


Рис. 189. Предельные кривые разрушения чугуна:  
 1 — по теории Кулона — Мора; 2 — по критерию Друккера — Прагера;  
 3 — по критерию (V.14) при  $A = 0,75$ ; 4 — по критерию (V.14) при  $A = 0,87$ ; 5 — результаты опытов.

где  $\varphi = \frac{\sigma_p}{\tau_k}$  — отношение пределов прочности при одноосном растяжении и чистом сдвиге.

В рассматриваемом случае для трех температур получим соответственно  $A_{20} = 0,98$ ;  $A_{-100} = 0,79$ ;  $A_{-180} = 0,85$ .

Отсутствие определенных закономерностей изменения констан-

ты  $A$  с понижением температуры объясняется, очевидно, разбросом экспериментальных точек. Поэтому для оценки предельного сопротивления чугуна в первом приближении можно принять среднее значение  $A = 0,87$ . Из приведенных в последней строке таблицы данных видно, что в этом случае среднее отклонение от результатов опыта уменьшилось более, чем на одну треть и составляет 4,1%. Такое расхождение теоретических и экспериментальных значений пределов прочности следует считать вполне допустимым.

Наглядное представление о взаимном расположении экспериментальных точек и предельных кривых, построенных в соответствии с критерием Друккера — Прагера и критерием (V.14) (при среднестатистическом и уточненном значении  $A$ ), можно получить из рис. 189, где для сравнения показана предельная кривая (сплошная линия), построенная согласно теории прочности Кулона — Мора.

### § 3. Текучесть и разрушение алюминиевых сплавов и хромоникелевых сталей при низких температурах в условиях сложного напряженного состояния

Алюминиевые сплавы широко используются для изготовления многих элементов машин и аппаратов, работающих при сложном напряженном состоянии в условиях низких температур. Однако их прочностные свойства в этих условиях изучены недостаточно.

По данным работ [5, 211] прочность сплава при одноосном растяжении с понижением температуры увеличивается. При двухосном растяжении в направлении главных осей анизотропии переход сплава в пластическое состояние при нормальной температуре в равной мере удовлетворительно описывается условиями пластичности Мизеса и Сен-Венана для анизотропного тела [139]. Экспериментальные точки, соответствующие разрушению, в пределах разброса опытных данных лежат на прямоугольнике Сен-Венана.

Высокопрочные алюминиевые сплавы, по данным работы [287], при двухосном растяжении в условиях низких температур разрушаются при более низких уровнях напряжений, чем при одноосном растяжении.

Большой цикл работ по исследованию низкотемпературной прочности элементов конструкций из алюминиевых сплавов, работающих в условиях плоского напряженного состояния, выполнен в МВТУ им. Баумана под руководством С. А. Куркина [454 и др.]. Однако эти работы были проведены с целью изучения влияния вида напряженного состояния на прочность сварных соединений, поэтому полученные результаты не позволяют оценить



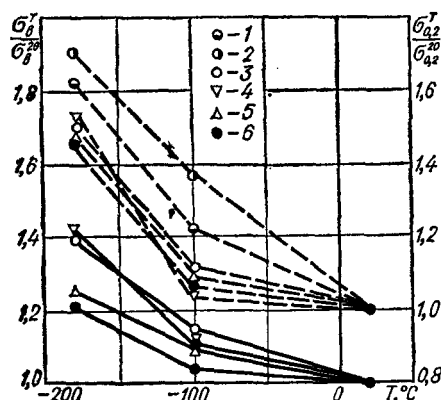


Рис. 190. Влияние температуры на относительный предел прочности (сплошные линии) и относительный предел текучести (штриховые линии) сплава Д16Т:

1 —  $K = -\infty$ ; 2 —  $K = -1$ ; 3 —  $K = 0$ ;  
4 —  $K = 0,5$ ; 5 —  $K = 1$ ; 6 —  $K = \infty$ .

ным характеристикам при нормальной температуре. Из рисунка видно, что при всех соотношениях главных напряжений происходит рост пределов прочности и пределов текучести. При этом изменение пределов текучести с понижением температуры происходит более интенсивно.

На упрочнение материала, связанное с температурой, влияет вид напряженного состояния. С уменьшением отношения  $K =$

$= \frac{\sigma_z}{\sigma_\theta}$  темп роста пределов прочности и пределов текучести увеличивается. Наибольшее упрочнение (по пределам текучести) наблюдается при одноосном сжатии и чистом сдвиге.

Сопоставление условных пределов текучести при одноосном сжатии ( $K = -\infty$ ) и одноосном растяжении ( $K = \infty$ ) показывает, что при нормальной температуре  $\sigma_{02}^z$  на сжатие несколько ниже  $\sigma_{02}^z$  на растяжение. При температуре  $-180^\circ \text{C}$  предел текучести на сжатие на 5,1% выше соответствующего предела текучести на растяжение в том же направлении.

Полученные результаты использованы для проверки достоверности при низких температурах известных критериев предельного состояния анизотропных материалов.

Предположение о существовании пластического потенциала для изотропных сред Мизес распространил на среды анизотропные. Условие пластичности Мизеса в общем случае содержит 15 констант материала. Если оси анизотропии совпадают с главными,

предельное состояние материалов, из которых были изготовлены испытываемые элементы конструкций.

Результаты испытаний сплавов Д16Т и АЛ-19 в условиях плоского напряженного состояния при нормальной и низких температурах приведены в табл. 16.

Температурные зависимости пределов прочности и пределов текучести сплава Д16Т при различных видах напряженного состояния показаны на рис. 190. По оси ординат отложена величина отношения предела прочности и предела текучести при температуре испытаний к соответствующим прочност-

Таблица 16

Материал	$K = \frac{\sigma_z}{\sigma_0}$	20° С				-100° С				-180° С			
		$\sigma_{02}^z$	$\sigma_{02}^\theta$	$\sigma_B^z$	$\sigma_B^\theta$	$\sigma_{02}^z$	$\sigma_{02}^\theta$	$\sigma_B^z$	$\sigma_B^\theta$	$\sigma_{02}^z$	$\sigma_{02}^\theta$	$\sigma_B^z$	$\sigma_B^\theta$
Д16Т	$\infty$	16,0	—	37,4	—	17,8	—	38,8	—	23,5	—	45,2	—
	1,3	—	—	—	—	—	—	37,0	29,4	22,0	17,0	43,5	33,5
	1,0	15,2	15,2	26,6	28,2	16,2	16,2	29,3	31,3	22,5	22,5	33,6	35,6
	0,5	7,2	14,3	13,0	25,9	7,5	14,9	14,1	28,2	10,9	21,8	18,3	36,7
	0,0	—	14,5	—	27,3	—	16,0	—	30,9	—	21,8	—	38,2
	-1,0	-7,4	7,4	—	—	-10,1	10,1	—	—	-12,5	12,5	—	—
АЛ-19	$-\infty$	-15,5	—	—	—	-19,0	—	—	—	-24,7	—	—	—
	$\infty$	17,3	—	27,7	—	19,8	—	34,8	—	22,2	—	32,0	—
	1	16	—	—	—	16,8	16,8	—	—	—	—	—	—
	0,5	9	17,9	—	—	8,9	17,8	—	—	—	—	—	—
	0,0	—	15,2	—	23,6	—	18,2	—	27,0	—	23,2	—	30,6
	-1,0	-9,2	9,2	—	—	-12,2	12,2	—	—	—	—	—	—
	$-\infty$	-17,0	—	—	—	-23,2	—	—	—	—	—	—	—

Примечание. Значения напряжений приведены в кг/мм<sup>2</sup>.

то, согласно Хиллу, условие эквивалентности Мизеса при плоском напряженном состоянии запишется в виде

$$\sigma_z^2 - \sigma_z \sigma_\theta + \left( \frac{\sigma_z}{\sigma_\theta} \right)^2 \sigma_\theta^2 = (\sigma_T^z)^2. \quad (\text{XI.2})$$

Расчет эквивалентного напряжения по условию (XI.2) для различных соотношений главных напряжений удобно вести, представив его в виде

$$\sigma_\theta^2 (\alpha^2 + K^2 - K) = (\sigma_T^z)^2, \quad (\text{XI.3})$$

где  $\alpha = \frac{\sigma_z}{\sigma_\theta}$  (для заданной температуры испытаний).

Условие пластичности Марина — Ху для плоского напряженного состояния при тех же обозначениях имеет вид

$$\sigma_\theta^2 (\alpha^2 + K^2 - \alpha K) = (\sigma_T^z)^2 \alpha^2. \quad (\text{XI.4})$$

Стороны прямоугольников на рис. 191 (сплошные линии) геометрически изображают условие прочности Сен-Венана с поправкой на анизотропию для случая, когда главные оси тензора напряжений и главные оси анизотропии совпадают. Экспериментальные точки, соответствующие условному пределу текучести, — светлые, а точки, соответствующие разрушению, — темные.

Условия (XI.3) и (XI.4) принципиально приемлемы для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Учиты-

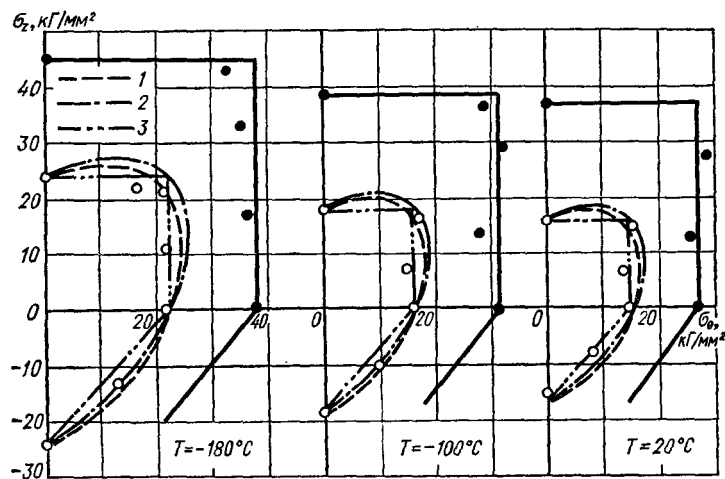


Рис. 191. Предельные кривые текучести и разрушения сплава Д16Т при различных температурах:

1 — условие Мизеса — Хилла; 2 — условие Марина — Ху; 3 — условие пластичности Сен-Венана.

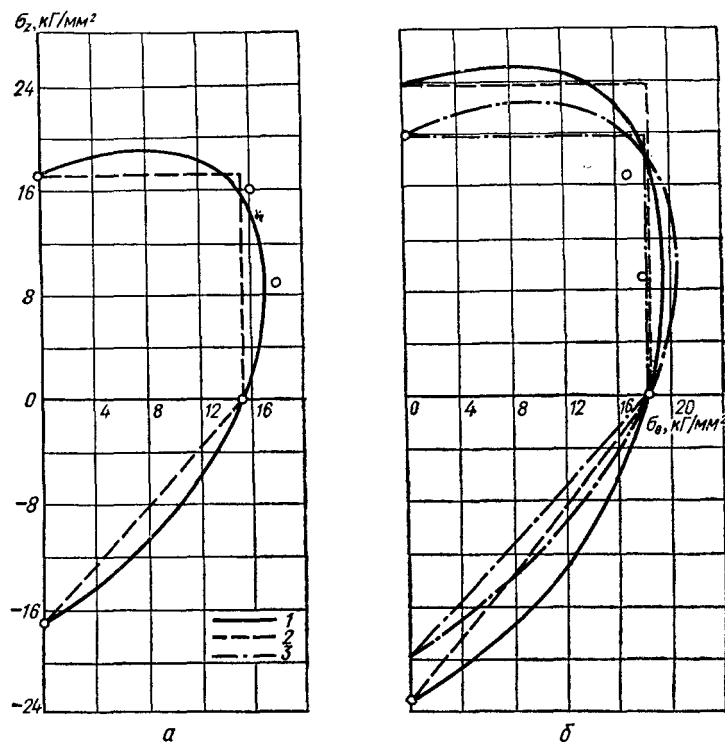


Рис. 192. Предельные кривые текучести сплава АЛ-19 при температурах  $20^\circ \text{C}$  (а) и  $-100^\circ \text{C}$  (б):

1 — условие Мизеса — Хилла; 2 — условие Сен-Венана; 3 — соответственно те же кривые при  $\sigma_z^2 = 19,8 \text{ кг/мм}^2$ .

вая незначительное (около 5%) различие в пределах текучести на растяжение и сжатие исследуемого сплава, построение предельных кривых согласно приведенным уравнениям вели по условным пределам текучести при одноосном растяжении.

Сопоставление экспериментальных результатов с критериями, учитывающими различное сопротивление материалов растяжению и сжатию, не представилось возможным, так как принятая методика исследования не позволяет определить пределы текучести и прочности на сжатие в тангенциальном направлении.

Из рис. 191 видно, что экспериментальные точки как при нормальной, так и при низких температурах тяготеют к прямоугольникам, интерпретирующим условия пластичности и прочности Сен-Венана.

Влияние вида напряженного состояния на темп роста пределов текучести с понижением температуры у литейного сплава АЛ-19

более существенно по сравнению с деформируемым сплавом Д16Т. Так, если при одноосном растяжении понижение температуры до  $-100^{\circ}\text{C}$  приводит к увеличению предела текучести на 14,5%, то при одноосном сжатии соответствующий прирост составляет около 38%. В результате при температуре  $-100^{\circ}\text{C}$  различие в пределах текучести при растяжении и сжатии для сплава АЛ-19 составляет 17%.

Предельное состояние текучести сплава АЛ-19 при температурах 20 и  $-100^{\circ}\text{C}$  иллюстрируется данными рис. 192. Ввиду различного сопротивления сплава растяжению и сжатию в условиях низких температур на рис. 192, б приведены четыре предельные кривые. Две из них построены по условиям (XI.3) и (XI.4), когда за величину  $\sigma_T^z$  принят предел текучести при растяжении  $\sigma_{T,p}^z$  и две — по тем же условиям при  $\sigma_T^z = \sigma_{T,c}^z$ .

Расположение экспериментальных точек на рис. 192 в непосредственной близости от предельной кривой, соответствующей условию Мизеса — Хилла, дает основание считать, что это условие может быть использовано применительно к литейному сплаву АЛ-19 как при нормальной, так и при низких температурах (если принять  $\sigma_T^z = \sigma_{T,c}^z$ ).

Испытание стали Х18Н10Т производилось при шести соотношениях главных напряжений ( $K = \infty; 1; 0,5; 0; -1; -\infty$ ). Некоторые опыты повторяли. Всего было испытано 28 образцов, из них по 10 — при нормальной температуре и температуре  $-100^{\circ}\text{C}$  и 8 — при температуре  $-160^{\circ}\text{C}$ . Сталь оказалась достаточно изотропной. Расхождение между условными пределами текучести при одноосном растяжении в продольном и поперечном направлениях составляло около 2%.

Экспериментальные результаты в координатах  $\sigma_1 - \sigma_2$  представлены на рис. 193. Как видно из рисунка, при нормальной температуре предельное состояние текучести стали хорошо описывается условием Мизеса, а разрушение — условием Кулона. Понижение температуры испытаний приводит к заметному повышению как пределов текучести, так и пределов прочности. При этом темп роста пределов текучести значительно ниже темпа роста пределов прочности. Так, если при понижении температуры до  $-160^{\circ}\text{C}$  пределы текучести возрастают в среднем на 40—45%, то соответствующее увеличение пределов прочности составляет около 150%. Сравнительно равномерное увеличение сопротивления при различных напряженных состояниях приводит к изотропному расширению предельных поверхностей с понижением температуры.

Сопоставляя данные низкотемпературных испытаний углеродистых и хромоникелевой сталей, можно обнаружить следующее: в углеродистых сталях темп роста пределов текучести

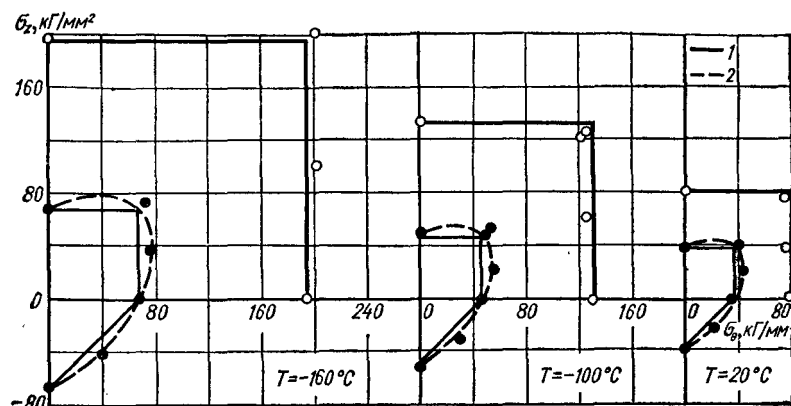


Рис. 193. Результаты испытаний хромоникелевой стали X18H10T:  
1 — условие Кулона; 2 — условие Мизеса.

с понижением температуры превышает темп роста пределов прочности, в хромоникелевой стали — наоборот; в углеродистых сталях понижение температуры приводит к расширению предельных поверхностей, сопровождающемуся изменением их формы; у хромоникелевых сталей расширение предельных поверхностей происходит изотропно.

Таким образом, область безопасных в отношении текучести и разрушения напряжений стали X18H10T и сплавов Д16Т, АЛ-19 с понижением температуры расширяется без изменения формы предельной кривой. Предельные состояния этих материалов при низких температурах описываются теми же критериями, что и при нормальной температуре. Достаточная общность этого вывода применительно к неохрупчивающимся материалам подтверждена результатами испытаний хромоникелевой стали X16H6, алюминиевого сплава АМг-6, титанового сплава ВТ-1кТ [253].

#### § 4. Характер разрушения трубчатых образцов при нормальной и низких температурах

Как уже отмечалось, в зависимости от температурно-силовых условий нагружения один и тот же материал может проявлять различную способность пластически деформироваться. С изменением условий испытания изменяется и характер разрушения образца. При этом в каждом отдельном случае обнаруживается специфический характер формирования поверхности раздела.

Детальное фратографическое изучение зоны разрушения в рамках проведенных в ИПП АН УССР исследований не проводилось. Поэтому ниже анализ характера разрушения ограничен описанием образцов после испытаний.

В случае одноосного растяжения в осевом направлении ( $K = \infty$ ) разрушение образцов из углеродистых сталей почти всегда происходило перпендикулярно растягивающей силе. Исключение составляет один образец, испытанный при температуре  $-50^\circ\text{C}$ . В этом случае разрушение произошло по сечению, наклоненному к образующей под углом  $25-30^\circ$ .

При одноосном растяжении в тангенциальном направлении ( $K = 0$ ) образцы разрушались по образующей. При нормальной температуре длина трещины составляла приблизительно одну треть рабочей части образца. По мере снижения температуры длина трещины увеличивалась, распространяясь при температуре  $-180^\circ\text{C}$  на всю рабочую часть.

При плоском напряженном состоянии ( $K = 0,5; 1$ ) разрушение происходило также по образующей. Как правило, трещина возникала в средней части образца. При температурах  $-100^\circ\text{C}$  и ниже трещина распространялась практически на всю длину рабочей части и, разветвляясь у галтелей, принимала форму ласточкина хвоста. Иногда развивалось сразу несколько трещин, в результате чего образец крошился, поверхность разрушения не имела определенной ориентации.

При испытаниях на чистый сдвиг ( $K = -1$ ) и осевое сжатие ( $K = -\infty$ ) образцы при определенном уровне сжимающих напряжений теряли устойчивость. Гофр, как правило, образовывался в зонах, примыкающих к галтелям. При температуре  $-180^\circ\text{C}$  разрушение образца при сжатии происходило в зоне первого витка резьбы.

При нормальной температуре и температуре  $-50^\circ\text{C}$  как при одноосном растяжении, так и при плоском напряженном состоянии разрушение происходило по площадкам, где действуют максимальные касательные напряжения, — под углом к радиальному лучу; при более низких температурах — по площадкам, перпендикулярным максимальным нормальным напряжениям. С понижением температуры поверхность разрушения становилась более рельефной.

Разрушение образцов из серых чугунов независимо от вида напряженного состояния и температуры испытаний происходило по площадкам, перпендикулярным направлению максимальных нормальных напряжений.

При одноосном растяжении в продольном направлении образцы разрушались перпендикулярно оси образца. В случае сжатия разрушение происходило с образованием мелких осколков. При испытаниях с внутренним давлением, когда  $K = 1; 0,5; -1$ , трещина развивалась в направлении образующей и распространялась при всех температурах приблизительно на половину длины рабочей части образца. При испытаниях на чистый сдвиг ( $K = -1$ ) путем скручивания образца трещина также ориенти-

рована в направлении площадок, где действуют максимальные нормальные напряжения.

Ориентация отдельных участков трещин во всех случаях отличается от ее магистрального направления, причем длина этих участков при снижении температуры уменьшается.

Характер разрушения образцов из хромоникелевой стали X18H10T и алюминиевых сплавов с понижением температуры практически не изменялся. Разрушение происходило по площадкам действия максимальных касательных напряжений. При испытаниях с внутренним давлением ( $K = 0; 0,5; 1$ ) трещина распространялась по образующей приблизительно на половину длины рабочей части у образцов из хромоникелевой стали и на треть длины у образцов из алюминиевых сплавов. Нагружение внутренним давлением сопровождалось выпучиванием рабочей части образца (особенно это заметно у стали X18H10T). При испытаниях изотропных материалов (углеродистые и хромоникелевые стали) приращение диаметра образца соответствовало равномерному удлинению в продольном направлении при осевом растяжении.

Интересно отметить, что в случае разрушения по площадкам действия максимальных касательных напряжений поверхность разрушения наклонена под углом приблизительно  $45^\circ$  к радиальному лучу, причем ориентация этой поверхности на протяжении трещины изменяется на  $90^\circ$  несколько раз. Последнее обстоятельство указывает, с одной стороны, на идентичность качества внутренней и наружной поверхностей испытанных образцов, а с другой, — на незначительное влияние радиальных напряжений от внутреннего давления.

Обращает на себя внимание факт несоответствия характера разрушения образцов отправным гипотезам критериев, которыми описываются предельные состояния исследованных материалов. Так, образцы из чугуна и стали (при низких температурах) разрушались по площадкам, перпендикулярным максимальным нормальным напряжениям. Однако, как было показано в § 1 и 2 настоящей главы, максимальное нормальное напряжение не может быть принято в качестве критерия прочности этих материалов. Роль касательных напряжений здесь очевидна. В местах, где микроскопические деформации, возникающие под действием касательных напряжений, достигают некоторой критической величины, при благоприятной ориентации нормальных напряжений возникают микротрещины. Последние, коагулируясь с различными дефектами структуры, образуют макротрещину, развивающуюся в дальнейшем по площадкам, перпендикулярным к главным осям.

Таким образом, по ориентации поверхности раздела нельзя судить о степени ответственности за разрушение касательных



или нормальных напряжений и делать вывод о приемлемости для описания предельного состояния данного материала того или иного критерия прочности.

### § 5. Результаты испытаний материалов при высоких температурах

Материалы, предназначенные для работы при повышенных и высоких температурах, обычно подвергаются длительным испытаниям с целью получения характеристик ползучести, длительной прочности и релаксационной стойкости. Однако по этим критериям нельзя, например, оценить прочность детали, работающей при повышенных температурах, когда ползучесть еще практически не проявляется. В этих условиях, как и в случае кратковременных перегревов, сопротивление материала наиболее целесообразно оценивать по характеристикам кратковременной прочности при данной температуре.

По данным работ [22, 114], в которых описаны результаты испытаний некоторых высокопрочных и легированных сталей при плоском напряженном состоянии в условиях повышенных температур, существенного изменения закономерностей деформирования и разрушения исследованных материалов с повышением температуры не наблюдается. Тем не менее испытания сложнолегированной высокопрочной стали [22] показали (рис. 194), что наблюдаемое с повышением температуры сокращение области безопасных состояний сопровождается некоторым изменением формы предельных кривых. Наиболее заметно сокращение областей, соответствующих меньшим допускам на остаточную деформацию; при этом с повышением температуры экспериментальные точки перемещаются внутрь эллипса Мизеса ближе к прямоугольнику Кулона.

Таблица 17

Направление выре- зки $\alpha$ , град	Номер образца	$\sigma_B$ , кг/мм <sup>2</sup>	Среднее значение $\sigma_B$ , кг/мм <sup>2</sup>
0	1—1	67,3	67,3
	1—2	66,8	
	1—3	67,0	
45	2—1	66,6	66,90
	2—2	67,1	
	2—3	67,0	
90	3—1	67,1	66,57
	3—2	66,3	
	3—3	67,3	

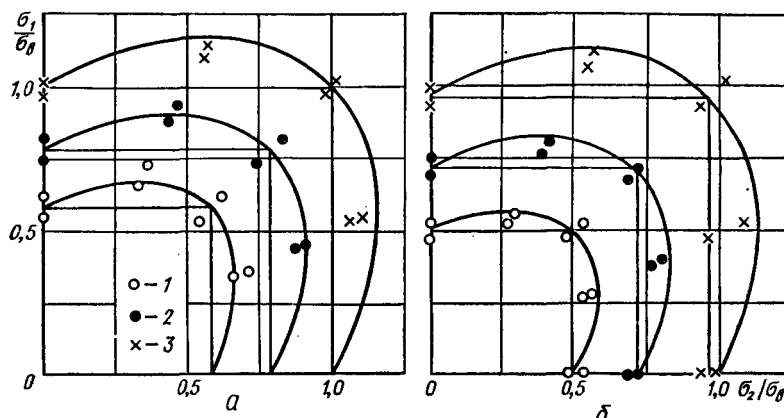


Рис. 194. Результаты испытаний высокопрочной сложно-легированной стали при температурах 20° С (а) и 300° С (б) [22]:

1 — граница упругости; 2 — граница текучести; 3 — граница предельного сопротивления.

Рассмотрим более подробно результаты испытаний хромоникелевой стали X18H9T при температурах до 820° С. Испытания проведены на установке типа СНТ; для создания внутреннего давления в трубчатом образце использовалась газовая рабочая среда (сжатый воздух). Технология изготовления образцов и режим термической обработки описаны в § 1 гл. X.

Для проверки изотропности материала из трубчатой заготовки были вырезаны 9 микрообразцов сечением  $4 \times 1,5$  мм и длиной рабочей части 15 мм. Образцы вырезались по образующей под углом 45° и перпендикулярно к ней по три в каждом из указанных направлений. Результаты испытаний на растяжение при комнатной температуре представлены в табл. 17.

Как видно из таблицы, максимальное отклонение предела прочности от среднего значения по трем партиям ( $66,85 \text{ кг/мм}^2$ ) составляет менее 0,4%, что указывает на достаточно хорошую начальную изотропию материала.

Всего было испытано 58 образцов при следующих уровнях температур: 20° С — 10, 220° С — 11, 420° С — 10, 620° С — 12, 820° С — 11 образцов<sup>1</sup>.

Продолжительность испытания в большинстве опытов не превышала двух минут, поэтому ответственными за разрушение будем считать только напряженное и деформированное состояние.

Поскольку разрушение образца носило характер взрыва, измерение деформаций в процессе нагружения не представлялось

<sup>1</sup> Результаты семи опытов (три — при температуре 200° С и по два — при температурах 400 и 800° С) признаны сомнительными по причине нарушения условий испытания и в дальнейшем не обсуждаются.

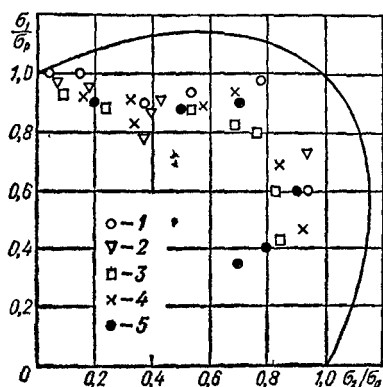


Рис. 195. Диаграмма предельных напряжений стали X18H9T, рассчитанных по данным обмера образца в зоне разрушения: 1 —  $T = 20^\circ \text{C}$ ; 2 —  $T = 220^\circ \text{C}$ ; 3 —  $T = 420^\circ \text{C}$ ; 4 —  $T = 620^\circ \text{C}$ ; 5 —  $T = 820^\circ \text{C}$ .

сравнению с пластической, пренебрегали. Такая методика обработки экспериментальных данных была успешно использована Дэвисом [543].

Разрушение образцов при определенных температурно-силовых условиях нагружения происходило с образованием шейки. Поэтому расчет истинных разрушающих напряжений можно производить как по результатам обмера образцов в зоне разрушения, так и по предельным равномерным деформациям (без учета шейки). Характер деформированного состояния, а следовательно, и уровень предельных напряжений в этих случаях могут оказаться различными. Экспериментальные точки (в относительных координатах), соответствующие предельным напряжениям, рассчитанным по результатам обмеров образцов в зоне разрушения, показаны на рис. 195, из которого видно, что пределы прочности при двухосном растяжении меньше, чем при одноосном, причем ожидаемых закономерностей их расположения не наблюдается.

Учитывая, что, по данным работы [114], сталь X18H9T имеет универсальную зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций, а также принимая во внимание, что инвариантность кривой  $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$  подтверждена результатами испытаний близкой по химическому составу хромоникелевой стали X18H10T (см. гл. X), можно предположить, что образование шейки действительно приводит к изменению расчетных соотношений главных нормальных напряжений, которое может явиться причиной дополнительных погрешностей при построении предельных кривых разрушения.

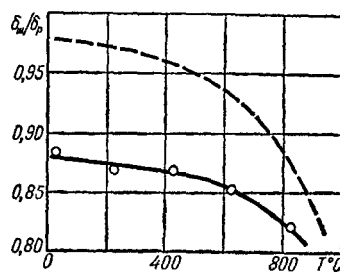


Рис. 196. Зависимость относительной толщины образца в зоне шейки от температуры.

возможным. Расчет осевой, окружной и радиальной деформаций, как и истинных разрушающих напряжений, производился по результатам обмера образцов после разрушения. Упругой частью деформации, ввиду ее малости по

Тщательный обмер образцов показал, что степень уменьшения толщины стенки образца в зоне разрушения может быть существенной и зависит как от вида напряженного состояния, так и от температуры. Наиболее заметно локальное уменьшение толщины стенки при одноосном растяжении и напряженных состояниях, близких к нему. Однако зона влияния распространяется по длине образца не более, чем на 10—15 мм от места разрушения. Далее следует зона равномерного деформирования, которая, очевидно, может с достаточным приближением характеризовать деформированное состояние материала в момент начала образования шейки.

На рис. 196 сплошной линией показан характер изменения отношения толщины  $\delta_{ш}$  стенки в зоне шейки к толщине  $\delta_p$  стенки в зоне равномерного деформирования при одноосном растяжении в зависимости от температуры испытания. При увеличении второй компоненты напряжений указанное отношение увеличивается, стабилизируясь при значениях параметра  $K = 0,25$ . Изменение отношения  $\delta_{ш}/\delta_p$  с повышением температуры при  $K \geq 0,25$  показано штриховой линией. Как видно из рисунка, относительное уменьшение толщины стенки может достигать более 15 %, что, естественно, должно заметно сказаться на величине расчетных значений истинных напряжений.

На рис. 197, а представлены результаты расчета истинных предельных напряжений для пяти уровней температур с учетом деформированного состояния в зоне равномерной пластической деформации. Экспериментальные точки, как видно из рисунка, находятся в основном между эллипсом Мизеса и прямоугольником Кулона. Аналогичный характер расположения экспериментальных точек имеет место и при построении предельных кривых в условных напряжениях (рис. 197, б).

Таким образом, расчет истинных предельных напряжений по деформациям в зоне равномерного деформирования не дает (в пределах неизбежного разброса) качественно новых предельных кривых по сравнению с соответствующими предельными кривыми, построенными в условных напряжениях. И в том и в другом случае предельные кривые разрушения хромоникелевой стали X18H9T в диапазоне температур от нормальных до 820° С находятся в зоне, ограниченной условием Мизеса и условием Кулона. При высоких температурах экспериментальные точки больше тяготеют к условию Кулона.

Тщательный осмотр образцов после разрушения показал, что поверхности разрушения во всем интервале температур были образованы путем сдвига и составляли угол примерно 45° с плоскостью, касательной к поверхности цилиндра, причем направление поверхности как при поперечном, так и при продольном разрушении на всех образцах менялось на 90° С от двух до пяти раз.

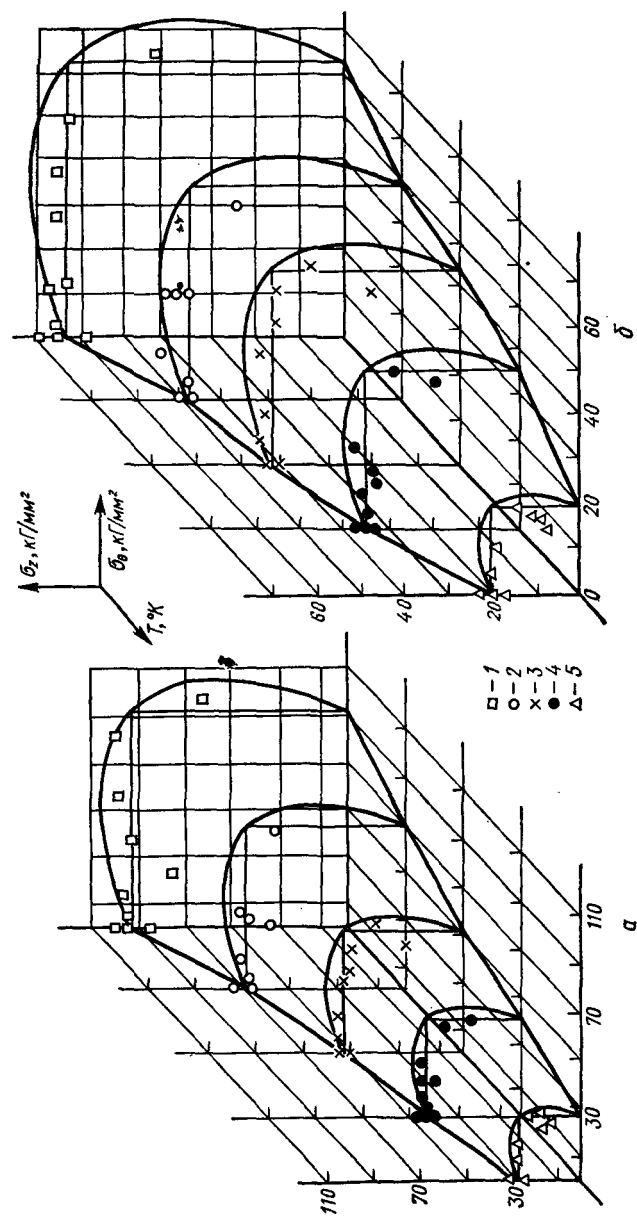


Рис. 197. Результаты обработки экспериментальных данных в истинных (а) и условных (б) напряжениях:  
 1 —  $T = 20^\circ \text{C}$ ; 2 —  $T = 220^\circ \text{C}$ ; 3 —  $T = 420^\circ \text{C}$ ; 4 —  $T = 620^\circ \text{C}$ ; 5 —  $T = 820^\circ \text{C}$ .

В некоторых образцах (большинство из них разрушалось по образующей) имелись участки, где разрушение происходило по плоскостям, перпендикулярным направлению максимальных нормальных напряжений. Этот переход от разрушения сдвигом к разрушению отрывом, очевидно, связан со спецификой условий нагружения образцов. В литературе [309] уже высказывалось мнение о том, что процесс образования и тип поверхности разрушения в значительной степени определяются количеством энергии, накопленной рабочей средой в образце. Сразу после образования первой течи через трещину от сдвига в период начальной стадии процесса разрушения потенциальная энергия газовой рабочей среды переходит в кинетическую и при определенных ее значениях разрушение путем сдвига переходит в разрушение путем отрыва, т. е. вид разрушения — сдвигом или отрывом — определяется скоростью распространения трещины.

В рассматриваемых опытах, благодаря большой потенциальной энергии газовой рабочей среды в образце, начальная трещина, ориентированная по образующей, при истечении газа с большой скоростью распространялась на всю рабочую часть образца и, приближаясь к головкам, раздваивалась, принимая форму ласточкина хвоста.

Казалось бы, при  $K = 1$  ( $\sigma_0 = \sigma_z$ ) ориентация сечений, по которым происходит разрушение, может быть любой. Однако переориентация трещины от осевого направления к окружному происходила при  $K = 0,93 \div 0,82$ . Это нельзя объяснить дефектами технологии, так как внутренняя поверхность образцов доводилась притиркой, а наружная — шлифованием. Поэтому неизбежные риски на поверхности были ориентированы в окружном направлении и не могли служить причиной разрушения по образующей. Интересно отметить, что в опытах Дэвиса, описанных Надаи [309], изменение направления поверхности разрушения от осевого к окружному также происходило при  $K < 1$ , а именно при  $K = 0,76$ . Дэвис объясняет это анизотропией материала. Обращает также на себя внимание тот факт, что величина радиальной деформации в пределах разброса не зависит от вида напряженного состояния и температуры. На всем диапазоне исследованных температур и напряженных состояний отклонение большинства точек от среднего значения радиальной деформации (примерно 0,2) составляло не более 9 %.

Весьма показательны в отношении влияния температуры результаты испытаний металлокерамической композиции на основе карбида кремния, прочность которой с повышением температуры до  $1100 \div 1200^\circ \text{C}$  возрастает, что объясняется размягчением некоторых компонентов структуры и уменьшением локальных возмущений поля напряжений. Так, повышение температуры до  $1000^\circ \text{C}$  приводит к увеличению прочности при сжатии на 15—

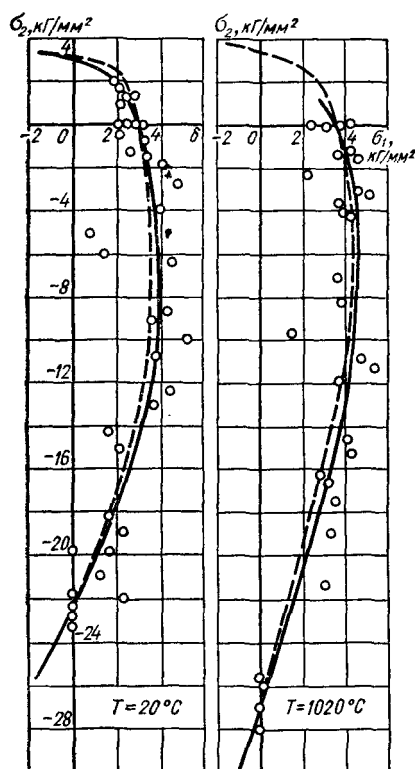


Рис. 198. Предельные кривые кермета по данным статистической обработки результатов испытаний (сплошные) и теоретических расчетов по критерию (V.14) (штриховые).

мальных, ни приведенных нормальных напряжений. Не находится в соответствии с опытом и теория Кулона — Мора, предполагающая при плоском напряженном состоянии линейную зависимость максимального касательного напряжения от шарового тензора.

Статистическая обработка опытных данных методом применения корреляционных уравнений показала, что зависимость  $\tau_{\max}(\sigma_0)$  хорошо описывается кривой второго порядка.

Константы  $\chi_{20} = 0,125$  и  $\chi_{1020} = 0,130$  определены по средним значениям пределов прочности при растяжении и сжатии, а константы  $A_{20} = 0,67$  и  $A_{1020} = 0,75$  — по коэффициентам гомогенности кермета при соответствующей температуре [362]:  $m_{20} = 3,0$  и  $m_{1020} = 4,0$  [см. формулу (V.22)].

20%, при растяжении на 25—30%.

Испытание кермета при сложном напряженном состоянии производилось на установке ЦДМУ-30 путем нагружения трубчатых образцов, изготовленных по специальной технологии, осевой силой, внутренним давлением (при нормальной температуре) и крутящим моментом. Нагрев образца до температуры  $1020^\circ\text{C}$  производился изнутри при помощи силитового нагревателя. Результаты испытаний при нормальной и высокой температурах графически представлены на рис. 198.

Разрушение образцов независимо от температуры и вида напряженного состояния происходило по площадкам, практически перпендикулярным растягивающим напряжениям. Этот факт, казалось бы, свидетельствует о том, что ответственными за разрушение являются нормальные напряжения. Однако характер расположения экспериментальных точек на диаграмме  $\sigma_1 - \sigma_2$  указывает на неприемлемость в качестве критерия прочности ни макси-

Из рис. 198 видно, что расхождение экспериментальных и теоретических кривых находится в пределах неизбежного разброса опытных данных. Это расхождение объясняется отчасти и тем, что значения коэффициента однородности  $m$  для исследованного кермета, заимствованные из литературных источников, были получены на образцах другой партии. Если для определения констант  $A_{20}$  и  $A_{1020}$  использовать результаты испытаний на чистый сдвиг, то расхождения экспериментальных и теоретических кривых, построенных (V.14), практически не наблюдается.

#### § 6. Длительная прочность материалов при сложном напряженном состоянии

Экспериментальное изучение ползучести и длительной прочности материалов при сложном напряженном состоянии производится главным образом на тонкостенных цилиндрических трубах, нагружение которых осуществляется одновременным наложением осевой силы, скручивающего момента и внутреннего давления в различных комбинациях. Достаточно полный обзор этих исследований дан в работах [190, 328, 382].

В большинстве исследований устанавливались соотношения между компонентами тензора напряжений и тензора скоростей ползучести. Опыты над углеродистыми сталями, медью, свинцом, алюминием и другими материалами показывают, что такие зависимости существуют. Более противоречивы опытные данные о ползучести аустенитных сталей и жаропрочных сплавов, течение которых отличается рядом особенностей. Большое внимание, особенно в последнее время, уделяется экспериментальному исследованию длительной прочности для установления условий эквивалентности при различных напряженных состояниях.

В течение 1940—1960 гг. Джонсон выполнил большую программу испытаний ряда материалов при различных температурах. Нагружение тонкостенных образцов производилось как осевой силой и скручивающим моментом, так и осевой силой при наличии внутреннего давления в образце [120]. Несмотря на сравнительно малую базу испытаний (приблизительно 150 ч) и заметный разброс данных, из первых работ Джонсона можно сделать вывод, что для всех испытанных материалов имеется характерная для данного материала и данной температуры зависимость интенсивности скоростей деформаций от интенсивности касательных напряжений. Джонсон показал, что при сравнительно низких уровнях напряжений опытные данные согласуются с уравнениями теории течения. При больших напряжениях расхождение значительно увеличивается. Автор объясняет это большими начальными пластическими деформациями, вызывающими деформационную анизотропию материала.



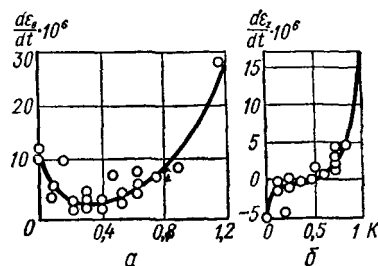


Рис. 199. Зависимость интенсивности течения свинцовых труб в окружном (а) и осевом (б) направлениях от параметра  $K$ .

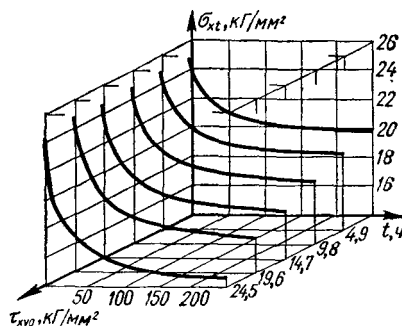


Рис. 200. Первичные кривые релаксации осевых растягивающих напряжений при различных уровнях скручивающих напряжений [332].

В более поздних работах Джонсон для проверки идей Зигфрида о причинах интер- и транскристаллического разрывов провел серию испытаний с доведением образца до разрушения. Опыты, проведенные на различных материалах, показали, что критерием прочности при длительной работе материала в условиях высоких температур может быть максимальное нормальное напряжение.

В 1951 г. были опубликованы опыты Бейли [519] по испытанию свинцовых труб под действием внутреннего давления и осевой силы при комнатной температуре. Результаты этих опытов представлены на рис. 199. Из графиков видно, что при  $K \approx 0,5$  (внутреннее давление без осевой силы) течение в направлении оси трубы отсутствует, а скорость ползучести в тангенциальном направлении имеет значение, близкое к наименьшему. Такой характер расположения экспериментальных кривых подтверждает справедливость условия Мизеса, так как минимуму потенциала пластичности также соответствует  $K = 0,5$ . Действительно, если тангенциальное напряжение  $\sigma_\theta = \sigma$ , а осевое  $\sigma_z = K\sigma$ , то критерий Мизеса можно представить в виде  $F = (K\sigma)^2 + \sigma^2 + (1-K)^2\sigma^2$ . Дифференцируя по  $K$  и приравнявая нулю, находим, что минимум соответствует  $K = 0,5$ .

В Советском Союзе систематическим изучением ползучести и длительной прочности материалов при сложном напряженном состоянии занимались И. А. Одинг [328, 330], В. С. Наместников [310, 311, 312], В. П. Сдобырев [407, 408], Ш. Н. Кац [192], И. И. Трунин [447, 448] и др.

Результаты исследований по изучению ползучести показали, что теории, развитые на базе теорий пластического течения и деформационных теорий, в большинстве случаев пригодны для описания процессов установившейся ползучести длительностью до 2000 ч [330].

Мало пока изучена ползучесть при сложном нагружении. Опыты В. С. Наместникова [312] по исследованию влияния пути нагружения на ползучесть показали, что при постоянном значении интенсивности напряжений эффект упрочнения при смене нагрузки почти не проявляется, что указывает на направленный характер упрочнения.

Для проверки отдельных аспектов теории ползучести и установления критериев релаксационной стойкости материалов ставились опыты по изучению релаксации напряжений при сложном напряженном состоянии. Работы, посвященные этому вопросу, в литературе уже обсуждались [382]. Здесь рассмотрим опыты, проведенные в Институте проблем прочности АН УССР на цилиндрических и трубчатых образцах из сталей ЭИ612 и Х18Н9Т при температуре 650° С [332, 333].

На рис. 200 показаны первичные кривые релаксации осевых напряжений, полученные при испытании сплошных образцов из стали ЭИ612 (при испытании стали Х18Н9Т были получены качественно аналогичные кривые). Из рисунка видно, что с увеличением уровня начальных тангенциальных напряжений  $\tau_{xy0}$  скорость релаксации осевых напряжений заметно увеличивается. Связать падение осевых напряжений с величиной  $\tau_{xy0}$  по той или иной теории эквивалентных состояний не удалось. На основании полученных экспериментальных данных найдена следующая зависимость:

$$\Delta\sigma_{xt}^{\tau} = \Delta\sigma_{xt}^0 \left( 1 + k \frac{\tau_{xy0}}{\sigma_{x0}} \right)^p,$$

где  $\Delta\sigma_{xt}^0$  — падение осевых напряжений при одноосном растяжении;  $\Delta\sigma_{xt}^{\tau}$  — падение осевых напряжений при начальном напряженном состоянии, определяемом осевым напряжением  $\sigma_{x0}$  и тангенциальным напряжением  $\tau_{xy0}$ ;  $k$  и  $p$  — коэффициенты, зависящие от размеров и формы образца; для проведенных испытаний  $k \approx p \approx 1$ . Результаты обработки по этой формуле данных, полученных на базе 240 ч, показаны на рис. 201 штрих-пунктирной линией. Отклонение расчетных данных от экспериментальных (сплошная линия) для обеих сталей не превышает 4 %. Точность формулы, естественно, снижается при напряжениях, превышающих предел текучести, когда прямолинейная зависимость между падением осевых напряжений и начальным тангенциальным напряжением нарушается. Для сравнения на рис. 201 штриховой линией показана кривая, полученная по условию Мизеса.

При однородном напряженном состоянии (испытания трубчатых образцов из стали ЭИ612) дополнительное наложение тангенциальных (или осевых) напряжений также увеличивает скорость релаксации осевых (или тангенциальных) напряжений. Замечено, что тангенциальные напряжения оказывают более существенное

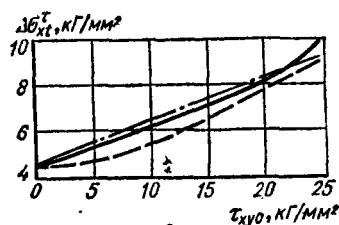


Рис. 201. Сопоставление опытных данных по релаксации напряжений при сложном напряженном состоянии с результатами теоретических расчетов [332].

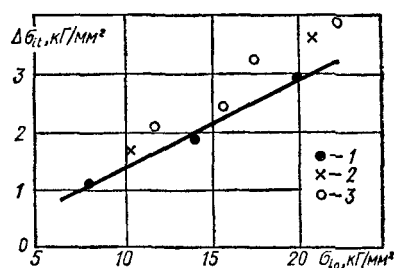


Рис. 202. Зависимость интенсивности падения напряжений за 100 ч от интенсивности начальных напряжений [333]:

1 — одноосное растяжение; 2 — кручение; 3 — растяжение с кручением.

влияние. Результаты этих опытов [333] были обработаны по критерию Мизеса. На рис. 202 приведена зависимость интенсивности падения напряжений за 100 ч от интенсивности начальных напряжений. Хотя точки, соответствующие кручению и кручению с растяжением, расположены выше точек, полученных при одноосном растяжении, авторы работы [333] считают возможным в первом приближении принять интенсивность напряжений в качестве критерия релаксационной стойкости стали ЭИ612. Однако и в этом случае критерий Мизеса приводит к значительным ошибкам, достигающим иногда, как это видно из рис. 202, 20 % и более. Это обстоятельство усугубляется еще и тем, что теоретические расчеты дают заниженные значения скорости падения напряжений при сложном напряженном состоянии и, следовательно, могут явиться причиной недопустимо малого запаса прочности конструкции по релаксационной стойкости.

Большой интерес представляют экспериментальные работы, проведенные для установления критерия длительной прочности материалов. Рассмотрим результаты опытов, полученные для стали X18H12T [447].

На рис. 203 сопоставлены результаты длительных испытаний этой стали с данными расчетов по критериям  $\sigma_i$ ,  $\sigma_1$  и  $\eta = \frac{\sigma_i + \sigma_1}{2}$ .

На основании анализа подобных диаграмм И. И. Трунин [447] сделал вывод, что разрушение исследованной стали хорошо описывается критерием В. П. Сдобырева. Результаты обработки опытных данных с целью определения коэффициента  $\chi_d$  в критерии (VI.9) представлены на рис. 203, г, где приведены диаграммы длительной прочности, соответствующие одноосному растяжению и чистому кручению. Для кручения построены диаграммы  $\sigma_1 = f_1(\lg \tau)$  и  $\sigma_i = f_2(\lg \tau)$ . По этим диаграммам графически определены величины  $\sigma_p$ ,  $\sigma_i$  и  $\sigma_1$  на базе 100 и 1000 ч и по уравнению

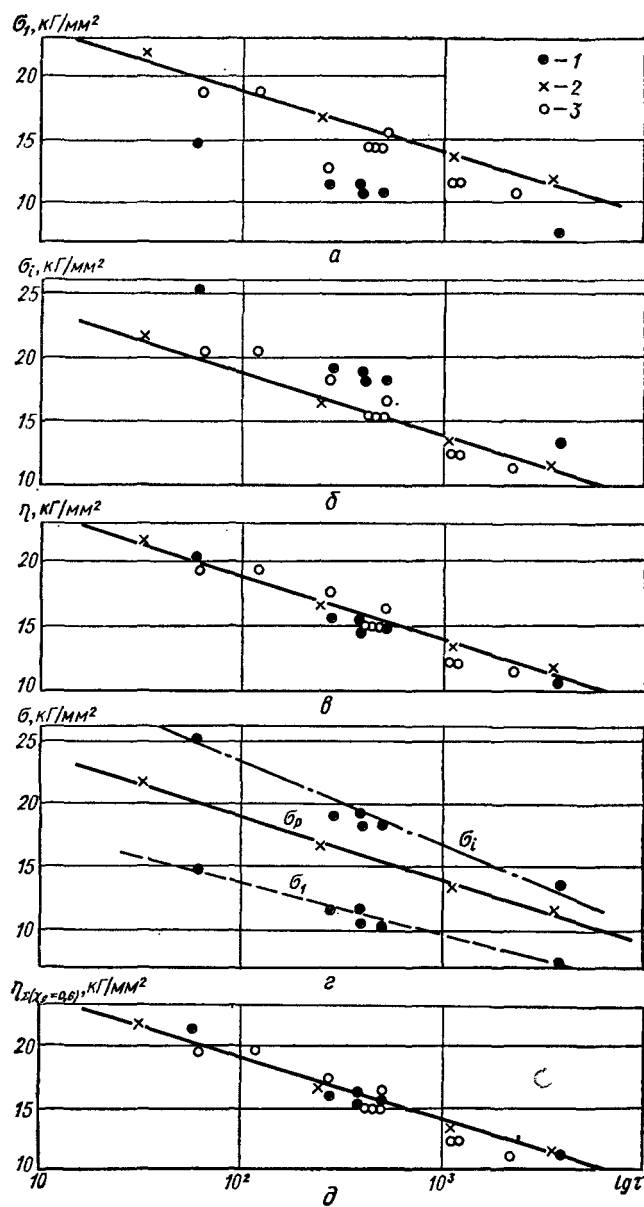


Рис. 203. Результаты обработки опытных данных И. И. Трунина по различным критериям длительной прочности:  
 а — по критерию Джонсона  $\sigma_1$ ; б — по интенсивности напряжений  $\sigma_i$ ; в — по критерию Сдобырева  $\eta$ ; г — к определению константы  $\chi_p$ ; д — по обобщенному критерию (VI.9); 1 — кручение; 2 — растяжение; 3 — растяжение с кручением.

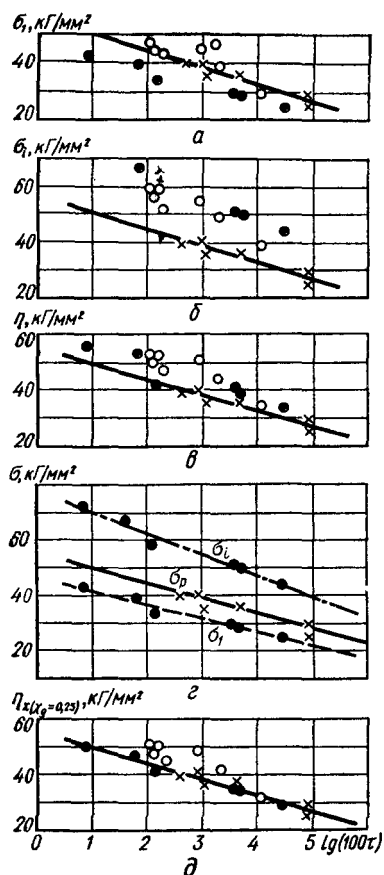


Рис. 204. Результаты обработки опытных данных В. П. Сдобырева по различным критериям длительной прочности. (Обозначения те же, что и на рис. 203.)

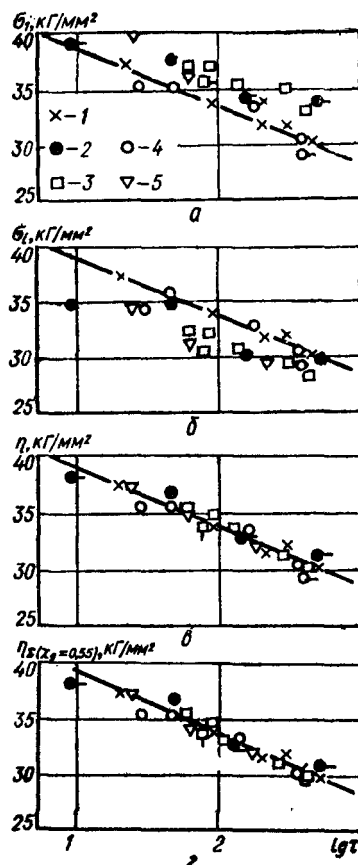


Рис. 205. Результаты испытаний стали X18N9T:

а, б, в — то же, что и на рис. 203;  
 г — по обобщенному критерию (VI.9);  
 1 —  $K = \infty$ ; 2 —  $K = 3,33$ ; 3 —  $K = 2$ ;  
 4 —  $K = 1$ ; 5 —  $K = 0,5$ .

(VI.10) рассчитаны соответствующие значения коэффициента  $\chi_d$ :  $\chi_{100} = 0,54$ ,  $\chi_{1000} = 0,65$ . Поскольку графический метод дает некоторую погрешность, диаграмма длительной прочности в координатах  $\eta_\Sigma - \lg \tau$  строилась для  $\chi = 0,6$  (рис. 203, д). Сравнивая расположение экспериментальных точек на рис. 203, в и г, приходим к выводу, что обобщенный критерий  $\eta_\Sigma$  значительно лучше описывает разрушение, чем критерий  $\eta = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_i)$ .

По такой же методике были обработаны данные В. П. Сдобырева [620] для сплава ЭИ437Б, представленные на рис. 204. Сравни-

вая расположение экспериментальных точек на приведенных диаграммах, можно констатировать, что и в этом случае обобщенный критерий  $\eta_2$  лучше согласуется с опытом.

Экспериментальное изучение длительной прочности хромоникелевой стали X18H9T в условиях двухосного растяжения проведено авторами. Технология изготовления образцов и химический состав металла были те же, что и при кратковременных испытаниях.

Учитывая, что выдержка образцов во времени после их изготовления является существенным фактором, снижающим разброс опытных данных [592], образцы выдерживались до испытания не менее восьми месяцев. Данные об изотропности материала приведены в § 5 настоящей главы.

Нагружение образцов производилось ступенями и было близким к простому.

В качестве рабочей среды для создания давления во внутренней полости образца использовался воздух, подаваемый под необходимым давлением от специального блока. При этом уменьшения толщины стенки образца в результате угара от окисления не обнаружено.

Испытания проводились при температуре 520° С. Всего испытано 23 образца, из них пять — при одноосном растяжении, четыре — при  $K = 3,33$ , шесть — при  $K \approx 2$ , пять — при  $K \approx 1$  и восемь — при  $K = 0,5$ . Пять образцов не были доведены до разрушения. Испытание этих образцов было прекращено на третьем участке ползучести. Поэтому экспериментальные точки, соответствующие этим образцам, на рис. 25 дополнены горизонтальной черточкой, направленной в сторону больших времен.

При длительных опытах, как и в случае кратковременных испытаний при повышенной температуре (описанных в предыдущем параграфе), переход от разрушения по окружности к разрушению по образующей наблюдался при  $K < 1$ . Из пяти образцов, испытанных при  $K = 1$ , только один имел поперечный разрыв.

Ориентация поверхности разрушения не отличалась от той, которая наблюдалась при соответствующих кратковременных испытаниях. Разрушение происходило по плоскостям, составляющим угол с образующей приблизительно 45°. В случае разрушения по образующей трещина распространялась на всю рабочую часть образца, раздваиваясь возле головок.

При испытаниях, когда  $K \leq 1$ , разрушению, как правило, предшествовала местная потеря устойчивости образца. Перед разрушением в месте образования первой трещины рабочая часть образца «выдувалась». При этом наблюдался значительный рост окружной деформации, сопровождающийся иногда отрицательной деформацией в осевом направлении.

Результаты обработки экспериментальных данных по существующим критериям длительной прочности приведены на рис. 205,

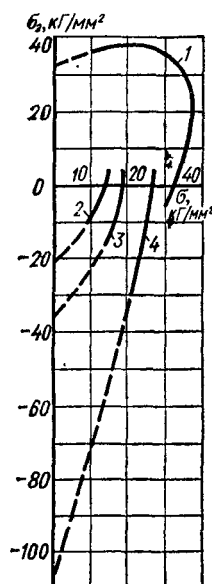


Рис. 206. Предельные кривые, построенные по обобщенному критерию длительной прочности:

1 — сталь X18H9T,  $T = 520^\circ \text{C}$ ,  $\tau = 100$  ч,  $\chi_d = 0,55$ ; 2 — сталь X18H12T,  $T = 510^\circ \text{C}$ ,  $\tau = 1000$  ч,  $\chi_d = 0,67$ ; 3 — сталь X18H12T,  $T = 510^\circ \text{C}$ ,  $\tau = 100$  ч,  $\chi_d = 0,54$ ; 4 — сплав ЭИ437В,  $T = 600^\circ \text{C}$ ,  $\tau = 1000$  ч,  $\chi_d = 0,25$ .

где диаграммы построены в полулогарифмических координатах напряжение—логарифм времени. Здесь, как и выше, прямая проведена по точкам, соответствующим одноосному растяжению. Экспериментальные точки имеют некоторый разброс. Однако в рамках этого разброса совершенно отчетливо видно, что если по критерию Джонсона значение длительной прочности занижено, то при условии постоянства интенсивности напряжений оно завышено. Следовательно, это условие тем более не может быть принято в качестве критерия. Значительно лучшее совпадение с результатами опытов дает эмпирический критерий В. П. Сдобырева.

Для стали X18H9T оптимальное значение коэффициента  $\chi_d$  оказалось равным 0,55. Соответствующая этому значению коэффициента диаграмма  $\eta_\Sigma = f(\lg \tau)$  (рис. 205, з) подтверждает достаточно высокую достоверность обобщенного критерия.

На рис. 206 приведены предельные кривые для стали X18H9T, стали типа 18-12 (по опытам И. И. Трунина) и сплава ЭИ437В (по опытам В. П. Сдобырева) в координатах  $\sigma_1 - \sigma_2$ , построенные по обобщенному критерию длительной прочности.

Результаты экспериментального исследования длительной прочности стали ЭИ847 при двухосном растяжении в условиях резких теплосмен приведены в работе [194]. В качестве образцов были использованы тонкостенные трубки ( $\delta = 0,2$  мм) с наружным диаметром 20 мм, термически обработанные по режиму: нагрев в вакууме до температуры  $1100^\circ \text{C}$ , выдержка в течение 30 мин, охлаждение в воде.

Образцы нагружались осевой силой и внутренним давлением (рабочая среда — газ). Параметры температурного цикла показаны на рис. 207.

Испытание проведено при трех соотношениях главных напряжений (рис. 208). Экспериментальные данные сравнивались с результатами расчетов по различным критериям длительной прочности для изотермического нагружения. Критерии  $\sigma_1$ ,  $\sigma_i$ ,  $\eta$  предполагают одинаковое сопротивление материала длительному разрушению при  $K = 1$ . Поэтому сопоставлять их следует по

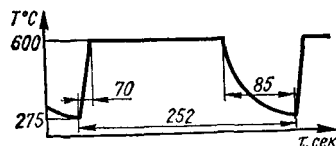


Рис. 207. Параметры температурного цикла в опытах В. Н. Киселевского [194].

результатам, полученным при  $K = 0,5$ . Такое сопоставление показывает, что экспериментальные точки располагаются между критериями Джонсона и Сдобырева. Использование в качестве критерия интенсивности напряжений приводит к очень завышенным значениям длительной прочности.

Константы материала в критерии  $\eta_\Sigma$  и критерии  $\eta$ , содержащем  $\varphi$  (см. стр. 172), определены по результатам опытов при  $K = \infty$  и  $K = 0,5$ . Из расположения экспериментальных точек, соответствующих  $K = 1$ , на двух последних диаграммах видно, что обобщенный критерий лучше описывает длительное разрушение исследованной стали при неизотермических условиях испытания.

По данным испытаний на длительную прочность медных трубок при температуре 250  $^\circ\text{C}$  [515] критерий (VI.9) может быть положен в основу расчета времени до разрушения. Прогнозирование длительности работы металла предлагается вести по формуле

$$\tau = A e^{-\eta_\Sigma},$$

где  $A$  — постоянная.

Накопление экспериментального материала позволит сделать окончательные выводы о возможностях и ограничениях того или иного критерия.

### § 7. Влияние вида напряженного состояния на ресурс пластичности конструкционных материалов при низких температурах

Проблема хрупкого разрушения конструкций приобрела в последнее время особую актуальность. Среди исследований, направленных на решение этой проблемы, одно из первых мест отводится

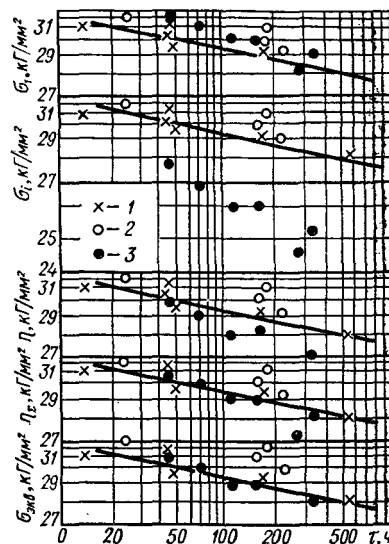


Рис. 208. Сопоставление результатов исследования длительной прочности стали ЭИ847 при двухосном растяжении в условиях резких теплосмен по различным критериям: 1 —  $K = \infty$ ; 2 —  $K = 1$ ; 3 —  $K = 0,5$ .



изучению характеристик особых свойств материала (например, вязкости разрушения), определяющих его способность противостоять развитию хрупкой трещины.

Из большого числа факторов, сопутствующих эксплуатации реальных деталей и способствующих в той или иной мере переходу металла в хрупкое состояние, наиболее изученным является температура. Поэтому хрупкое состояние металла обычно связывают с некоторой критической температурой или интервалом температур. Тем не менее известно, что переход металла из пластического состояния в хрупкое определяется не только температурой, но и многими другими факторами, к которым в первую очередь можно отнести вид напряженного состояния, скорость механического нагружения, градиенты напряжений, среду и т. п. Роль каждого из этих факторов, очевидно, зависит от природы металла и его структурного состояния.

Следовательно, на равных правах с критической температурой хрупкости существуют критическая скорость нагружения, критическое соотношение между компонентами тензора напряжений и т. д. Поэтому при расчете элементов конструкций на хрупкую прочность, кроме температуры, необходимо учитывать многие другие конструктивно-технологические и эксплуатационные факторы, неблагоприятное сочетание которых может явиться причиной внезапного хрупкого разрушения. В этом отношении важно располагать объективной числовой характеристикой, оценивающей склонность материала к хрупкому разрушению с учетом указанных факторов, подобно тому, как имеется число Рейнольдса, выражающее условие течения жидкости и режим этого течения, или критерий краевого подобия Био, в котором отражены размер тела, условия на поверхности и свойства материала.

Анализ случаев хрупкого разрушения элементов конструкций, особенно изготовленных из достаточно пластичных в обычных условиях и неохрупчивающихся с понижением температуры материалов, показывает, что зоны разрушения, как правило, локализуются в местах, где напряженное состояние характеризуется высокими значениями положительного шарового тензора. Показателен в этом отношении пример, приведенный в одной из работ Н. Н. Давиденкова. Известно, что медь не охрупчивается даже при очень низкой температуре. Тем не менее, если медную пластинку, защемленную по контуру, подвергнуть одностороннему равномерному давлению, то металл, работая в условиях двухосного растяжения, проявит все признаки хрупкого разрушения.

Существенное влияние вида напряженного состояния на сопротивление металла хрупкому разрушению обнаруживается при сопоставлении данных испытаний материалов при одноосном растяжении с результатами, полученными при двухосном (труб-

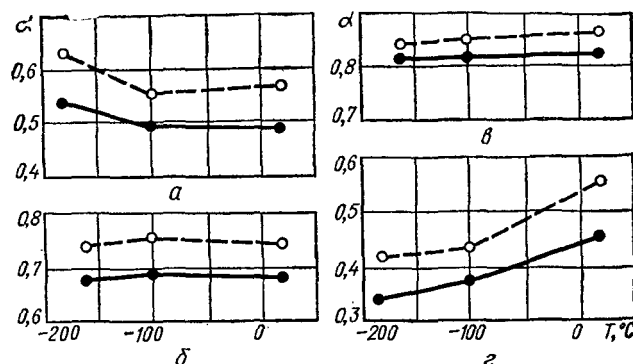


Рис. 209. Влияние температуры на ресурс пластичности алюминиевых сплавов и хромоникелевых сталей при одноосном (сплошные кривые) и двухосном (штриховые кривые) растяжении:

а — сплав Д16Т; б — сплав АМг-6; в — сталь X16Н6; г — сталь X18Н10Т.

чатые образцы) и трехосном (образцы Шарпи) нагружении. Так, по данным работы [576] критическая температура хрупкости углеродистой стали при испытаниях образцов Шарпи лежит в зоне более высоких температур, чем в случае двухосного и одноосного растяжения. В свою очередь, при двухосном растяжении критическая температура хрупкости оказалась выше, чем при одноосном. На несопоставимость результатов, полученных при различных видах испытаний, обращалось внимание в работе [577].

Ниже обсуждаются результаты экспериментального исследования влияния вида напряженного состояния и температуры на склонность к хрупкому разрушению алюминиевых сплавов, углеродистых и хромоникелевых сталей. Опыты проводились на испытательных машинах типа СНТ при нагружении тонкостенных трубчатых образцов осевой силой, внутренним давлением и крутящим моментом в широком диапазоне низких температур (до  $-180^{\circ}\text{C}$ ) с регистрацией осевых, тангенциальных и угловых деформаций.

В качестве параметра, характеризующего ресурс пластичности материала при данной температуре, принято отношение условного предела текучести к пределу прочности. Следовательно, температура, при которой деформация при разрушении не превышает допуска на условный предел текучести (0,2 %), соответствует критической температуре вязко-хрупкого перехода.

Зависимость параметра  $\alpha = \frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_B}$  от температуры для алюминиевых сплавов и хромоникелевых сталей показана на рис. 209. Учитывая некоторую анизотропию механических свойств и неиз-

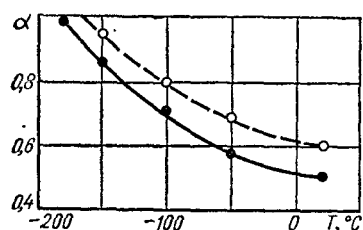


Рис. 210. Влияние температуры на ресурс пластичности среднеуглеродистой стали при одноосном (сплошная кривая) и двухосном (штриховая кривая) растяжении.

бежный разброс экспериментально определяемых характеристик, в качестве пределов текучести и пределов прочности при од-

ноосном растяжении приняты средние величины от соответствующих значений для продольного и поперечного направлений, а при двухосном растяжении — средние величины от значений, полученных для соотношений главных напряжений, равных 0,5 и 1,0.

Согласно приведенным данным, ресурс пластичности рассматриваемых классов материалов с понижением температуры может уменьшаться (Д16Т), оставаться на том же уровне (АМг-6) и даже повышаться (хромоникелевые стали). Однако для всех материалов параметр  $\alpha$  при двухосном растяжении во всем диапазоне температур выше соответствующих значений этого отношения при одноосном растяжении. Следовательно, при более жестких напряженных состояниях (например, при трехосном растяжении в зоне концентратора, где деформирование стеснено) могут создаваться благоприятные условия для хрупкого разрушения. Установленная тенденция позволяет высказать предположение о том, что одной из возможных причин отмечаемых на практике случаев хрупкого разрушения или потери плотности конструкций, изготовленных из материалов, пластичных как при нормальной, так и при низких температурах, является исчерпание пластичности и локальное разрушение в местах, где при достаточно высоких уровнях компонент тензора напряжений реализуется наиболее опасное соотношение между ними.

Эффект влияния вида напряженного состояния особенно ярко проявляется на материалах, пластичность которых существенно уменьшается при охлаждении. К таким материалам следует прежде всего отнести углеродистые стали. На рис. 210 приведены результаты испытаний стали 35 ( $C — 0,37\%$ ). Как видно из рисунка,

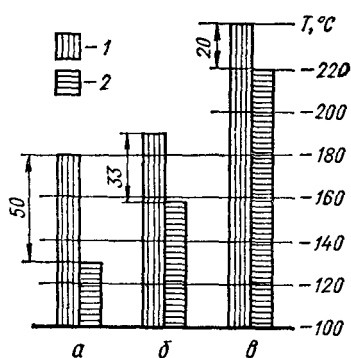


Рис. 211. Гистограммы критических температур хрупкости углеродистых сталей при одноосном (1) и двухосном (2) растяжении:

а —  $C — 0,06\%$ ; б —  $C — 0,37\%$ ; в —  $C — 0,53\%$ .

темп возрастания параметра  $\alpha$  с понижением температуры достаточно высок, причем в интервале температур от  $-160$  до  $-190^\circ\text{C}$  пластичность стали полностью исчерпывается ( $\alpha = 1$ ). Статистическая обработка опытных данных методом вычисления корреляционных уравнений показала, что разность между критическими температурами хрупкости при двухосном и одноосном растяжении составляет для среднеуглеродистой стали более  $30$  град.

Испытания высоко- и низкоуглеродистых сталей позволили установить, что с уменьшением содержания углерода критическая температура хрупкости смещается в зону более высоких температур, при этом влияние вида напряженного состояния увеличивается (рис. 211). Эти результаты находятся в соответствии с данными А. П. Гуляева [98], полученными при испытаниях четырех сталей, содержащих 0,19; 0,28; 0,42 и 0,55% С. В то же время в литературе опубликованы работы, в соответствии с которыми повышение содержания углерода в стали приводит к повышению критической температуры хрупкости [621].

Причину этих расхождений следует искать в различных критериях оценки критической температуры. Так, по данным работы [99] температуре перехода стали в хрупкое состояние, определенной по виду излома, соответствовал довольно высокий уровень ударной вязкости. Кроме того, необходимо учитывать структурные особенности стали — состав и количество карбидных фаз, характер их расположения в ферритной матрице, фазовое распределение легирующих элементов [370]. В зависимости от структурного состояния стали количество углерода может влиять на ее хладноломкость в ту или другую сторону.

Интересны данные испытаний кипящей стали, для которой температурная зависимость предела прочности имеет резкий скачок, соответствующий интервалу температур вязко-хрупкого перехода. Критическая температура хрупкости этой стали при переходе от напряженных состояний, близких к чистому сдвигу и двухосному равномерному растяжению, смещается в сторону высоких температур более чем на  $60$  град (рис. 212).

Специальные металлофизические исследования углеродистых сталей показали, что охлаждение приводит к росту напряжений второго рода и образованию мик-

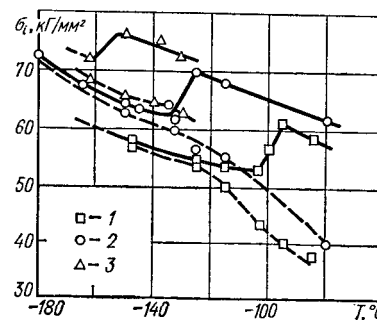


Рис. 212. Влияние температуры на предел прочности (сплошные линии) и предел текучести (штриховые линии) кипящей стали Ст. 3 кп:

1 —  $K = 1$ ; 2 —  $K = 0$ ; 3 —  $K = -2$ .

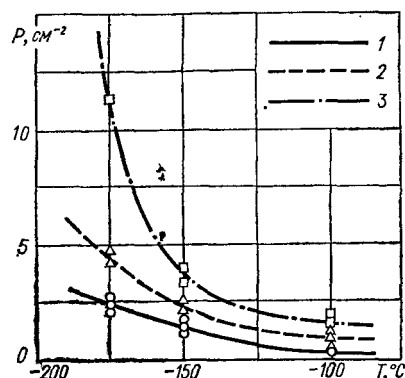


Рис. 213. Влияние температуры на плотность трещин в зоне равномерной деформации (малоуглеродистая сталь):

1 —  $K = 0$ ; 2 —  $K = 0,67$ ; 3 —  $K = 1$ .

ротрещин в отдельных структурных составляющих. Так, по данным испытаний крупнозернистой малоуглеродистой стали трещиноватость деформированного металла с понижением температуры увеличивается. На рис. 213 представлены результаты измерений плотности трещин в зоне равномерной деформации. Поврежденность металла зависит от соотношения главных напряжений, при котором происходило нагружение.

Таким образом, степень влияния вида напряженного состояния на ресурс пластичности металла при низких температурах и уровень критической темпера-

туры хрупкости зависит от природы материала, его химического состава и структурного состояния. В отдельных случаях соотношение между компонентами тензора напряжений может быть ведущим фактором среди способствующих и определяющих хрупкое разрушение конструкций.

Приведенные выше результаты являются первой попыткой дать количественные оценки влияния вида напряженного состояния на ресурс пластичности конструкционных материалов. Рациональное накопление экспериментальных данных по отдельным аспектам сопротивления материалов с учетом характера температурно-силовых воздействий позволит значительно расширить возможности известных подходов к оценке несущей способности конструкций по критерию хрупкого разрушения.

#### § 8. Анизотропия механических свойств материалов при низких температурах

Известно, что равенство тех или иных характеристик материала в направлении трех взаимно перпендикулярных осей еще не определяет его изотропию. Необходимо, чтобы это равенство соблюдалось при произвольном повороте осей.

Учитывая последнее обстоятельство, образцы для изучения влияния температуры на анизотропию механических свойств металла вырезали из заготовки (или предварительно деформировались) таким образом, чтобы главные оси анизотропии совпадали с направлением главных осей тензора напряжений при последующих испытаниях. Если учесть, что технология изготовления заготовок (прутков) обеспечивала симметрию меха-

нических свойств металла, близкую к симметрии ортотропных тел, то при соблюдении указанного условия испытания образцов растяжением в направлениях главных осей анизотропии можно считать достаточными для оценки анизотропии материала.

Степень проявления анизотропии зависит от вида нагружения (статическое кратковременное, длительное, динамическое и т. п.). Поэтому отсутствие анизотропии при каком-либо одном виде испытания не является гарантией изотропности металла при других условиях нагружения [296]. Приведенные ниже результаты относятся к исследованию анизотропии механических свойств при кратковременных статических испытаниях анизотропных в исходном состоянии алюминиевых сплавов АЛ-19 и Д16Т и предварительно деформированной углеродистой стали 45.

Микроструктура сплавов характеризуется вытянутостью составляющих в направлении прокатки. Следовательно, анизотропия этих материалов имеет не только гомогенную, но и гетерогенную природу. Оба вида анизотропии существуют здесь одновременно, хотя гомогенная анизотропия является, очевидно, исходной (начальной), а гетерогенная — вторичной (деформационной).

Анизотропия стали достигалась пластическим деформированием образцов в осевом направлении при нормальной температуре. Остаточная деформация всех образцов составляла 2%, что было достаточным для создания заметной механической текстуры и деформационной анизотропии гетерогенного типа.

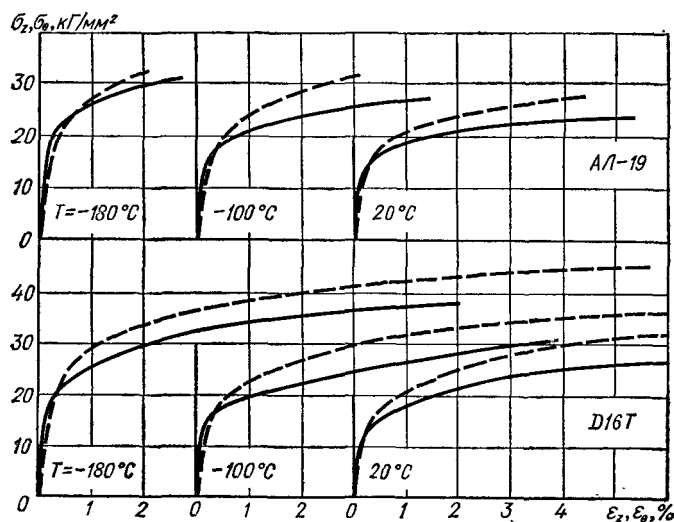


Рис. 214. Кривые деформирования  $\sigma_\theta(\epsilon_\theta)$  (сплошные линии) и  $\sigma_z(\epsilon_z)$  (штриховые линии) алюминиевых сплавов при растяжении в осевом и тангенциальном направлениях.

Экстремальные значения характеристик механических свойств сплавов и стали совпадали с продольным и поперечным направлениями. Поэтому оценку анизотропии по соотношению характеристик в этих направлениях можно считать вполне приемлемой в рамках настоящего исследования.

Испытания трубчатых образцов проведены при нормальной и низких (до  $-180^{\circ}\text{C}$ ) температурах. Растяжение в поперечном направлении осуществлялось внутренним давлением. Возникающие при этом осевые напряжения снимали дополнительным наложением сжимающей осевой силы.

Кривые деформирования сплавов АЛ-19 и Д16Т при различных температурах представлены на рис. 214, а числовые характеристики соответствующих механических свойств — в табл. 18.

Константы упругости сплавов при соответствующих температурах находили по наклону линейного участка диаграмм деформирования, построенных в достаточно большом масштабе по деформациям. В табл. 18 приведены средние значения модулей Юнга, полученные по результатам не менее трех измерений. Сопоставление данных таблицы показывает, что исследованные сплавы в исходном состоянии обладают анизотропией упругих свойств.

Константы упругости сплава АЛ-19 при снижении температуры изменяются незначительно. Полученные отклонения практически лежат в пределах разброса. Более заметно влияние температуры на константы упругости сплава Д16Т. Снижение температуры приводит к увеличению модуля Юнга как в осевом, так и в тангенциальном направлениях. При этом более интенсивный рост модуля наблюдается в осевом направлении. Если при нормальной температуре отношение модуля Юнга в осевом направлении к модулю в тангенциальном направлении составляет 0,91, то при температуре  $-180^{\circ}\text{C}$  оно равно 0,98. Соответствующие отношения коэффициентов Пуассона равны 0,94 и 1,01. Это указывает на заметное уменьшение анизотропии упругих свойств сплава с понижением температуры.

Т а б л и ц а 18

Сплав	Т, °С	Модуль упругости, кг/мм <sup>2</sup>		Предел текучести, кг/мм <sup>2</sup>		Предел прочности, кг/мм <sup>2</sup>		Относительное удлинение, %	
		$\sigma_z$	$\sigma_{\theta}$	$\sigma_z$	$\sigma_{\theta}$	$\sigma_z$	$\sigma_{\theta}$	$\sigma_z$	$\sigma_{\theta}$
АЛ-19	20	7040	7300	17,3	15,2	27,7	23,6	4,4	5,3
	-100	7140	7350	19,8	18,2	31,8	27,0	3,0	4,4
	-180	7600	7660	22,2	23,2	32,0	30,6	2,1	2,7
Д16Т	20	7620	8340	16,0	14,5	37,4	27,3	10,4	5,6
	-100	8340	8750	17,8	16,0	38,8	30,9	11,1	6,8
	-180	8700	8900	23,5	21,8	45,2	38,2	11,5	7,9

Интересно отметить, что модули Юнга сплавов в тангенциальном направлении при всех температурах выше модулей в осевом направлении, хотя сопротивление сплава пластическим деформациям в тангенциальном направлении ниже, чем сопротивление в осевом направлении. В результате на участках между пределом упругости и условным пределом текучести кривые пересекаются. На всем участке пластического деформирования кривая растяжения в осевом направлении расположена выше кривой растяжения в тангенциальном направлении.

По мере деформирования металла расхождение кривых увеличивается. На рис. 215 показан характер изменения соотношения между текущими напряжениями в осевом и тангенциальном направлениях в зависимости от величины деформации. Как видно из приведенных данных, с увеличением пластической

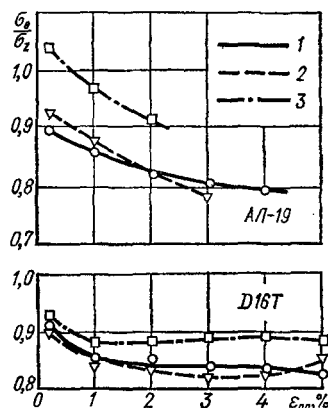


Рис. 215. Соотношения между текущими напряжениями при растяжении в осевом и тангенциальном направлениях для алюминиевых сплавов на различных этапах деформирования:

1 —  $T = 20^\circ \text{C}$ ; 2 —  $T = 100^\circ \text{C}$ ; 3 —  $T = -180^\circ \text{C}$ .

деформации соотношение  $\frac{\sigma_\theta}{\sigma_z}$  уменьшается, что указывает на увеличение анизотропии сопротивления сплава по мере перехода в область развитых деформаций. При этом кривая, полученная при температуре  $-180^\circ \text{C}$ , расположена значительно ближе к прямой  $\frac{\sigma_\theta}{\sigma_z} = 1,0$ , чем кривые, соответствующие нормальной температуре и температуре  $-100^\circ \text{C}$ .

Температурные зависимости условных пределов текучести и пределов прочности сплавов в осевом и тангенциальном направлениях показаны на рис. 216, а, из которого видно, что при понижении температуры изменение сопротивления сплавов в рассматриваемых направлениях происходит неодинаково. При понижении температуры испытаний более интенсивный рост прочности происходит в том направлении, которое при нормальных температурах характеризовалось более низкими прочностными характеристиками. Так, при понижении температуры на  $200^\circ \text{C}$  (от  $20$  до  $-180^\circ \text{C}$ ) условный предел текучести сплава АЛ-19 в осевом направлении увеличился на 29%, а в тангенциальном — на 52%, предел прочности — соответственно на 15,5 и 29,7%. Изменение пределов текучести и пределов прочности сплава Д16Т в осевом и тангенциальном направлениях при понижении температуры на  $200^\circ \text{C}$  составляет:  $\sigma_{0,2z} - 46,8$ ;  $\sigma_{0,2\theta} - 50,3$ ;  $\sigma_{Bz} - 20,8$ ;



Таблица 19

T°, C	Предел текучести, кг/мм <sup>2</sup>		Предел прочности, кг/мм <sup>2</sup>		Относительное удлинение, %	
	$\sigma_z$	$\sigma_\theta$	$\sigma_z$	$\sigma_\theta$	$\sigma_z$	$\sigma_\theta$
20	73,3	54,2	98,1	90,9	9,54	5,37
-100	38,5	68,4	115,8	102,0	8,36	4,86
-150	100,6	88,2	124,5	110,1	5,68	3,07

$\sigma_{\theta\theta}$  — 40%. Приведенные данные свидетельствуют об уменьшении анизотропии алюминиевых сплавов при их охлаждении.

Характер изменения анизотропии пределов текучести и пределов прочности с понижением температуры показан на рис. 216, б, из которого видно, что степень влияния температуры на анизотропию сплавов увеличивается с уменьшением последней. Так, изменение соотношений  $\sigma_{\theta,2\theta}/\sigma_{\theta,2z}$  и  $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_{zz}$  в интервале температур от -100 до -180°С более заметно, чем в интервале от 20 до -100°С, хотя во втором случае диапазон изменения температуры в 1,5 раза шире.

Из рис. 216 видно также, что анизотропия алюминиевых сплавов по пределам прочности выше анизотропии сплавов по пределам текучести, хотя анизотропия металлов по этим харак-

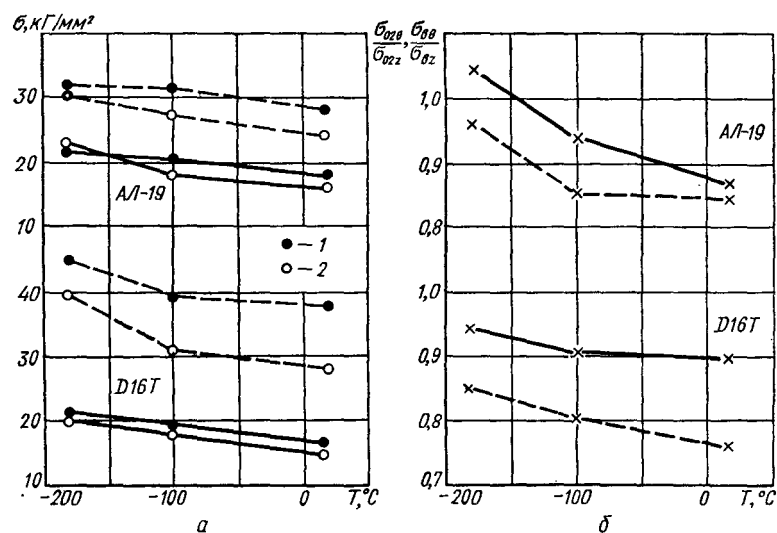


Рис. 216. Результаты испытаний алюминиевых сплавов:

а — температурные зависимости пределов текучести (сплошные линии) и пределов прочности (штриховые линии) в осевом (1) и в тангенциальном (2) направлениях; б — соотношения между пределами текучести (сплошные линии) и пределами прочности (штриховые линии) в осевом и тангенциальном направлениях.

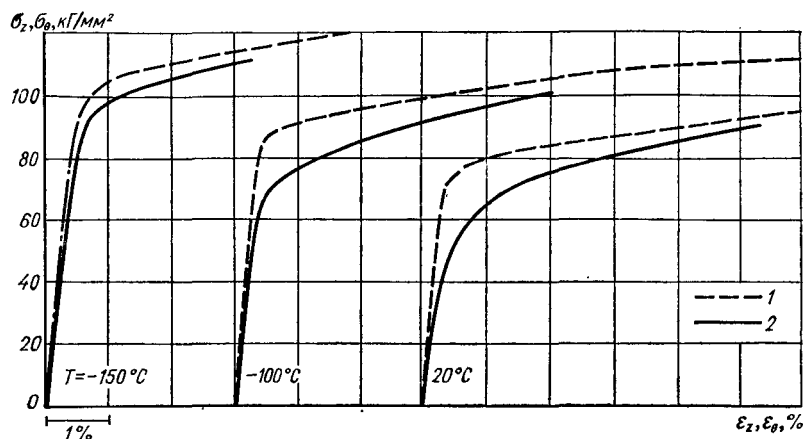


Рис. 217. Результаты испытаний предварительно деформированной углеродистой стали (C — 0,47%) при растяжении в осевом (1) и тангенциальном (2) направлениях.

теристикам, как известно, обусловлена одними и теми же факторами [296]. Полученные результаты можно объяснить различной степенью влияния каждого из этих факторов на анизотропию  $\sigma_{0,2}$  и  $\sigma_B$ .

Если роль механической текстуры в первом приближении одинакова как в отношении пределов текучести, так и в отношении пределов прочности, то влияние возникающих при пластическом деформировании металла ориентированных напряжений второго рода должно проявляться более заметно на анизотропии пределов прочности. Именно этим, в первую очередь, и обусловлено, вероятно, более высокое расположение кривых  $\sigma_{0,2\theta}/\sigma_{0,2z} = f_1(T)$  по сравнению с кривыми  $\sigma_{B\theta}/\sigma_{Bz} = f_2(T)$  на рис. 216.

Для создания определенной начальной анизотропии стали все образцы были продеформированы при нормальной температуре в осевом направлении до  $\varepsilon_z = 2\%$ .

Испытания образцов проводились одноосным растяжением в осевом и тангенциальном направлениях при температурах 20,  $-100$  и  $-150^\circ\text{C}$ . Кривые растяжения  $\sigma_z(\varepsilon_z)$  и  $\sigma_\theta(\varepsilon_\theta)$ , полученные при этих температурах, представлены на рис. 217. Механические характеристики стали приведены в табл. 19.

Результаты опытов при нормальной температуре показали, что

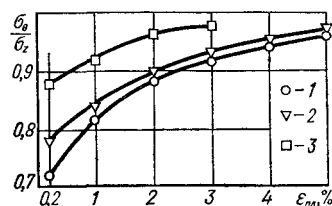


Рис. 218. Зависимость соотношения между текущими напряжениями при растяжении стали в осевом и тангенциальном направлениях от величины пластической деформации:

1 —  $T = 20^\circ\text{C}$ ; 2 —  $T = -100^\circ\text{C}$ ;  
3 —  $T = -150^\circ\text{C}$ .

деформационное упрочнение стали происходит неизотропно. Более того, предварительная деформация в осевом направлении вызывает понижение модуля упругости и падение сопротивления стали пластическому деформированию в тангенциальном направлении. Если условный предел текучести деформированного металла в осевом направлении оказался выше предела текучести металла в исходном состоянии на 19,5%, то предел текучести в тангенциальном направлении уменьшился на 17%. В результате наблюдается заметное расхождение кривых растяжения, особенно в начальной стадии деформирования. С увеличением степени пластического деформирования кривые монотонно сближаются. Интересно отметить, что предварительное деформирование практически не сказалось на пределе прочности стали, хотя деформации, соответствующие разрушению, заметно увеличились:  $\epsilon_{Bz}$  — на 7,4%,  $\epsilon_{B\theta}$  — на 23%.

Снижение температуры приводит к увеличению условного предела текучести и предела прочности как в осевом, так и в тангенциальном направлениях. При этом соотношения между пределами прочности и максимальными деформациями при разрушении изменяются незначительно. В то же время в начальной стадии деформирования сопротивление стали в поперечном направлении растет более интенсивно. В результате при снижении температуры от нормальной до  $-150^\circ\text{C}$  условный предел текучести в осевом направлении увеличился на 36%, а в тангенциальном — на 63%.

О характере изменения анизотропии в рассматриваемой области можно судить по данным рис. 218, где показаны зависимости между соотношениями текущих напряжений в осевом и тангенциальном направлениях от величины пластической деформации при трех температурах. Значение  $\epsilon_{пл} = 0,2\%$  соответствует соотношению условных пределов текучести. С увеличением степени пластического деформирования отношение  $\sigma_\theta/\sigma_z$  при всех температурах увеличивается.

Из приведенных данных следует, что анизотропия стали, вызванная предварительной пластической деформацией, с понижением температуры уменьшается.

Идентичность результатов, полученных на материалах разных классов (алюминиевые сплавы и углеродистая сталь) с различной природой анизотропии, показывает, что уменьшение анизотропии механических свойств с понижением температуры является общим свойством, по крайней мере, большой группы металлических материалов.

Влияние степени пластической деформации на анизотропию металла при низких температурах исследовалось на плоских образцах из отожженной стали 45 сечением  $65 \times 10$  мм, предварительно деформированных при температурах 200, 20 и  $-100^\circ\text{C}$ . Из этих

образцов вырезались вторичные образцы с диаметром рабочей части 3 мм, ориентированные к направлению максимальной остаточной деформации под углом  $\varphi$ , равным 0,25, 45, 65 и 90°. Испытания вторичных образцов проводились при температурах 600, 400, 200, 20, —100 и —196° С.

Полученные данные позволили установить, что, независимо от температуры, при которой проводилось предварительное деформирование, и степени пластической деформации, с повышением температуры до 200° С анизотропия стали уменьшается. Так, средние значения отношений пределов текучести  $\frac{\sigma_{0,2\min}}{\sigma_{0,2\max}}$  металла, предварительно деформированного при температурах —100, 20 и 200° С до  $\varepsilon_{\text{пл}} = 6\%$ , составляют: при —196° С —0,86, при —100° С —0,72, при 20° С —0,61, при 200° С —0,58. Дальнейшее повышение температуры приводит к снижению анизотропии стали (очевидно, вследствие активизации процессов возврата при повышении температуры).

Обработка результатов испытаний в полярных координатах  $\sigma_{0,2} - \varphi$  позволила аппроксимировать экспериментальные данные уравнением

$$\sigma_{0,2\varphi} = a + b\cos 2\varphi + c\cos 4\varphi, \quad (\text{XI.5})$$

где параметры анизотропии  $a$ ,  $b$  и  $c$  можно выразить через пределы текучести в трех направлениях (например, заданных углами  $\varphi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ ) при соответствующих температурах. Отклонения экспериментальных точек от кривой (XI. 5) для углеродистой стали не превышает 4%.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Айва, Куйстра, Таккер.— Тр. Американского об-ва инженеров-механиков. Серия Д, 1966, 4.
2. Алейников Г. Д., Гульбин С. С.— В кн.: Сб. научных трудов факультета прикладной математики и механики, 2. Изд-во Воронежск. ун-та, Воронеж, 1972.
3. Александров А. П., Журков С. Н. Явление хрупкого разрыва. ГТТИ, Л., 1933.
4. Алексеева В. А.— Тр. Одесского технологического ин-та, 1955, 7.
5. Алюминиевые сплавы при низких температурах. (Перевод с англ. яз.). «Металлургия», М., 1967.
6. Амбарцумян С. А., Хагарян А. А.— Инженерный журнал, МТТ, 1966, 2.
7. Андреев Л. С.— Инженерный журнал, 1962, 2, 3.
8. Афанасьев Н. Н. Статистическая теория усталостной прочности металлов. Изд-во АН УССР, Киев, 1953.
9. Ахвенов И. Н., Лукша Л. К.— ДАН БССР, 1965, 9, 2.
10. Ашкенази Е. К. Прочность анизотропных древесных и синтетических материалов. «Лесная промышленность», М., 1966.\*
11. Бабел, Эйтман, Макайвер.— Тр. Американского об-ва инженеров-механиков. Серия Д, 1967, 1.
12. Баландин П. П.— Вестник инженеров и техников, 1937, 1.
13. Баландин П. П.— Вестник инженеров и техников, 1938, 3.
14. Балдин В. А. и др.— В кн.: Исследования по металлическим конструкциям. Госстройиздат, М., 1966.
15. Балдин В. А., Трофимов В. И.— В кн.: Исследование упруго-пластических свойств строительной стали при плоском напряженном состоянии, 4. Изд. ЦНИИСК, М., 1961.
16. Балдин В. А., Трофимов В. И.— В кн.: Строительная механика и расчет сооружений, 6. Госстройиздат, М., 1959.
17. Баренблат Г. И.— ПММ, 1969, 23, 4.
18. Баренблат Г. И.— ПМТФ, 1961, 4.
19. Бартенев Г. М., Ценков Л. П.— ДАН СССР, 1958, 121, 2.
20. Бастун В. Н. Автореф. канд. дис. Институт механики АН УССР, Киев, 1967.
21. Бастун В. Н.— Проблемы прочности, 1974, 2.
22. Бастун В. Н.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 14. «Наукова думка», Киев, 1974.
23. Бастун В. Н., Подгасев П. Г.— Заводская лаборатория, 1968, 34, 12.
24. Бастун В. Н., Черняк Н. И.— Прикладная механика, 1966, 2, 9.
25. Бастун В. Н., Черняк Н. И.— Проблемы прочности, 1971, 9.

26. Бастун В. Н., Ясинский Г. Н.— Заводская лаборатория, 1972, 38, 11.
27. Безухов Н. Н.— Основы теории упругости, пластичности, ползучести. «Высшая школа», М., 1968.
28. Бекер Р.— В кн.: Новые идеи в технике. (Перевод с нем. яз.). «Образование», Петроград, 1915.
29. Берг О. Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона. Госстройиздат, М., 1962.
30. Береснев Б. И., Вережагин А. Ф., Рябинин Ю. Н., Лившиц Л. Д. Некоторые проблемы больших пластических деформаций металлов при высоком давлении. Изд-во АН СССР, М., 1960.
31. Бляшке В. Круг и шар. «Наука», М., 1967.
32. Богайчук Б. И., Козлов И. А., Лихацкий С. И.— Проблемы прочности, 1970, 3.
33. Богатырев И. С. и др.— Инженерный журнал, 1961, 1, 2.
34. Богомолов Ю. С., Седоков М. М.— В кн.: Контактные задачи и их инженерные приложения. Изд. НИИМАШ, М., 1969.
35. Болотин В. В.— В кн.: Статистические методы в строительной механике. Госстройиздат, М., 1961.
36. Боровская Л. П.— В кн.: Ученые записки аспирантов и соискателей ЛПИ им. М. И. Калинина. Л., 1964.
37. Боровская Л. П.— В кн.: Тр. Калининградск. технологического института рыбной промышленности и хозяйства, 19. 1966, Калининградск. книжное изд-во.
38. Борздыка А. М. Методы горячих механических испытаний металлов. Металлургиздат, М., 1962.
39. Боткин А. И.— Изв. ВНИИ гидротехники, 1939, 24.
40. Боткин А. И.— Изв. ВНИИ гидротехники, 1940, 26.
41. Бочвар А. А.— Изв. АН СССР, ОТН, 1948, 5.
42. Боярышников С. В.— В кн.: Расчеты на прочность, жесткость и ползучесть элементов машиностроительных конструкций. Машгиз, М., 1953.
43. Бриджмен П. Исследования больших пластических деформаций и разрыва. ИЛ, М., 1955.
44. Бугаков В. З. Диффузия в металлах и сплавах. ГТТИ, М.—Л., 1949.
45. Будин А. Я.— Тр. Ленинградск. ин-та водного транспорта, 66. «Транспорт», М.—Л., 1964.
46. Бурмакина О. П. Автореф. канд. дис. УПИ, Свердловск, 1963.
47. Васильков А. Н.— Научные труды Казанск. ин-та инженеров-строителей нефтяной промышленности, 1955, 3.
48. Ван Бюрен Х. Дефекты в кристаллах. (Перевод с англ. яз.). ИЛ, М., 1962.
49. Варфаламеев Н. М.— Тр. Николаевск. кораблестроительного ин-та, 7. Машгиз, Киев, 1954.
50. Великанова Т. А., Сергеев С. И.— В кн.: Аппараты и машины кислородных установок, 3. Машгиз, М., 1960.
51. Венгжен В. В., Исаханов Г. В.— Авт. свид. № 283649. Бюл. изобр., 1970, 31.
52. Виноградов И. Н., Ягн Ю. И.— Физика металлов и металловедение, 1956, 3, 1.
53. Виргин К. П.— Бетон и железобетон, 1956, 2.
54. Волков С. Д.— ДАН СССР, 1951, 76, 3.
55. Волков С. Д.— ДАН СССР, 1951, 79, 2.
56. Волков С. Д.— ДАН СССР, 1957, 112, 4.
57. Волков С. Д.— Статистическая теория прочности. Машгиз, Москва—Свердловск, 1960.

58. Волков Н. И.— Проблемы прочности, 1971, 11.
59. Волкогон Г. М.— Заводская лаборатория, 1950, 26, 1.
60. Вялов С. С.— Основания, фундаменты и механика грунтов, 1966, 3.
61. Вялов С. С., Шущерина Е. П.— В кн.: Мерзлотные исследования, 4. Изд-во МГУ, М., 1964.
62. Гаврилов Д. А., Полевой В. А., Черняк Н. И.— В кн.: Надежность и долговечность авиационных газотурбинных двигателей, 2. Изд. КИИГА, Киев, 1971.
63. Гарбер Р. И. и др.— Заводская лаборатория, 1962, 28, 7.
64. Гаррис У. Дж.— В кн.: Усталость и выносливость металлов. ИЛ, М., 1963.
65. Гаспарян С. А., Безер Б. В.— Заводская лаборатория, 1967, 33, 2.
66. Гастев В. А. Краткий курс сопротивления материалов. Физматгиз, М., 1959.
67. Гениев Г. А.— В кн.: Исследования по вопросам строительной механики и теории пластичности. Госстройиздат, М., 1956.
68. Гениев Г. А.— В кн.: Исследования по вопросам пластичности и прочности строительных конструкций. Госстройиздат, М., 1958.
69. Гениев Г. А., Кисюк В. Н.— Бетон и железобетон, 1965, 2.
70. Гигиняк Ф. Ф., Лебедев А. А., Красовский А. Я.— Проблемы прочности, 1972, 4.
71. Гигиняк Ф. Ф., Лебедев А. А., Красовский А. Я.— Проблемы прочности, 1973, 11.
72. Гигиняк Ф. Ф., Лебедев А. А., Новиков Н. В.— Авт. свид. № 249710. Бюл. изобр., 1969, 25.
73. Гиндин И. А., Кравченко С. Ф., Стародубов Я. Д.— В кн.: Машины и приборы для испытания материалов. «Металлургия», М., 1971.
74. Гиндин И. А. и др.— Приборы и техника эксперимента, 1963, 3.
75. Гиндин И. А., Рабухин В. Б., Чечельницкий Г. Г.— Приборы и техника эксперимента, 1966, 6.
76. Гинцбург Я. С.— Заводская лаборатория, 1953, 19, 5.
77. Глебов В. Д. Автореф. канд. дис. ЛПИ им. Калинина, Л., 1965.
78. Глебов В. Д.— В кн.: Ученые записки аспирантов и соискателей ЛПИ им. Калинина. Л., 1964.
79. Глебов В. Д., Елсуфьев С. А.— Изв. ВНИИ гидротехники, 1966, 82.
80. Гладковский В. А.— ФММ, 1955, 1, 3.
81. Гладковский В. А., Олейник М. И.— ФММ, 1957, 4, 3.
82. Головлев В. Д. Новые процессы обработки металлов давлением. Изд-во АН СССР, М., 1962.
83. Гольденблат И. И., Копнов В. А. Критерии прочности и пластичности конструктивных материалов. «Машиностроение», М., 1968.
84. Гольденблат И. И., Копнов В. А.— Механика полимеров, 1965, 2.
85. Гольденблат И. И., Копнов В. А.— Строительная механика и расчет сооружений, 1965, 5.
86. Гольцев Д. И.— В кн.: Вопросы динамики и динамической прочности. Изд-во Латв ССР, Рига, 1953, 1.
87. Гончаров И. Г. Прочность каменных материалов в условиях различных напряженных состояний. Госстройиздат, М.—Л., 1960.
88. Горб М. Л., Островский А. А.— Проблемы прочности, 1970, 6.
89. Горб М. Л., Пелепин В. М., Черняк Н. И.— Прикладная механика, 1965, 1, 10.

90. Гордиенко Л. К., Одинг И. А.— Изв. АН СССР, ОТН, 1959, 6.
91. Грозин Б. Д. Механические свойства закаленной стали. Машгиз, Киев, 1951.
92. Грубин А. И., Лихачев Ю. И.— ЖТФ, 1955, 25, 3.
93. Губкин С. И.— Изв. АН СССР, ОТН, 1947, 1.
94. Губкин С. И. Пластическая деформация металлов. Т.1,2. Металлургиздат, М., 1960.
95. Губкин С. И. Теория металлического вещества. ОНТИ, М., 1935.
96. Губкин С. И., Прибылов Б. П.— Вестник инженеров и техников, 1948, 4.
97. Гуляев Б. А., Максак В. И.— Проблемы прочности, 1974, 2.
98. Гуляев А. П., Неверова-Скоблева И. П.— МТМ, 1957, 1.
99. Гуляев А. П., Никитин В. Н.— МТМ, 1965, 1.
100. Гурьев А. В.— Физика металлов и металловедение, 1954, 2, 3.
101. Давиденков Н. Н.— Вестник инженеров и техников, 1947, 1.
102. Давиденков Н. Н.— Вестник инженеров и техников, 1947, 4.
103. Давиденков Н. Н.— Вестник инженеров и техников, 1949, 4.
104. Давиденков Н. Н.— В кн.: Вопросы машиноведения. Сб. статей, посвященных 60-летию Е. А. Чудакова. Изд-во АН СССР, М., 1950.
105. Давиденков Н. Н. Динамические испытания металлов. ОНТИ, М., 1936.
106. Давиденков Н. Н.— В кн.: Некоторые проблемы механики материалов. Гостехиздат, Л., 1943.
107. Давиденков Н. Н. Некоторые проблемы прочности твердого тела. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1959.
108. Давиденков Н. Н., Васильков Д. М.— Заводская лаборатория, 1952, 18, 5.
109. Давиденков Н. Н., Лихачев В. А. Необратимое формоизменение при циклическом тепловом воздействии. М., Машгиз, 1962.
110. Давиденков Н. Н., Ставрогин А. И.— Изв. АН СССР, ОТН, 1954, 8.
111. Давиденков Н. Н., Ярков В. А.— ЖТФ, 1955, 25, 12.
112. Давиденков Н. Н., Ярошевич В. Д.— ФММ, 1963, 16, 2.
113. Данилов Н. С. и др.— Изд. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, 6.
114. Дегтярев В. П. Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций. Машгиз, М., 1967.
115. Дель Г. Д. Определение напряжений в пластической области по распределению твердости. «Машиностроение», М., 1971.
116. Демина Н. И., Зилова Т. К., Фридман Я. Б.— Заводская лаборатория, 1964, 30, 5.
117. Демина Н. И., Зилова Т. К., Фридман Я. Б.— Заводская лаборатория, 1968, 34, 1.
118. Демина Н. И. и др.— Заводская лаборатория, 1968, 34, 5.
119. Десов А. Е.— Бетон и железобетон, 1971, 1.
120. Джонсон.— В кн.: Механика, 4 (74). (Сб. переводов и обзоров иностранной периодической литературы). ИЛ, М., 1962.
121. Дислокации и механические свойства кристаллов. (Перевод с англ. яз.). ИЛ, М., 1960.
122. Добряков А. А.— Передовой научно-технический опыт, 1965, № 2—65—143/22.
123. Домаров М. М., Латышев В. Ф.— Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, 1.
124. Дощинский Г. А.— Изв. Томск. политехн. ин-та, 1957, 85.
125. Дощинский Г. А.— Изв. Томск. политехн. ин-та, 1959, 96.



126. Драчинский А. С., Трефилов В. И. — В кн.: Вопросы физики металлов и металловедения, 15. Изд-во АН УССР, Киев, 1962.
127. Дрейер Г. Учение о прочности и упругости. (Перевод с нем. яз.). «Машиностроение», М., 1964.
128. Друккер Д. — В кн.: Механика, 4 (44). (Сб. переводов и обзоров иностранной периодической литературы). ИЛ, М., 1957.
129. Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В. Краткий курс математической статистики для технических приложений. Физматгиз, М., 1959.
130. Дэвис Е. — Тр. Американского об-ва инженеров-механиков. Серия Е. 1961, 2.
131. Евстратов В. В. Автореф. канд. дис. ЛПИ им. М. И. Калинина. Л., 1956.
132. Елсупова Т. Ф., Панин В. Н. — Изв. вузов, Физика, 1961, 6.
133. Елсуфьев С. А. Автореф. канд. дис. ЛПИ им. М. И. Калинина, Л., 1960.
134. Елсуфьев С. А. — В кн.: Ученые записки аспирантов и соискателей, ЛПИ им. М. И. Калинина. Л., 1964.
135. Жданов В. А. — Тр. Сибирского физико-технического ин-та, 1953, 32.
136. Желтов Ю. П., Христианович С. А. — Изв. АН СССР, ОТН, 1955, 11.
137. Жуков А. М. — Инженерный сборник, 1954, 20.
138. Жуков А. М. — Изв. АН СССР, ОТН, 1954, 11.
139. Жуков А. М. — Изв. АН СССР, ОТН, 1954, 6.
140. Жуков А. М. — Изв. АН СССР, ОТН, 1954, 12.
141. Жуков А. М. — Изв. АН СССР, ОТН, 1955, 8.
142. Жуков А. М. — Изв. АН СССР, ОТН, 1956, 12.
143. Жуков А. М. — Изв. АН СССР, ОТН, 1957, 9.
144. Жуков А. М. — Инженерный сборник 1960, 29.
145. Жуков А. М. — Инженерный журнал, МТТ, 1961, 1, 1.
146. Жуков А. М. — В кн.: Вопросы теории пластичности. Изд-во АН СССР, М., 1961.
147. Жуков А. М., Работнов Ю. Н. — Инженерный сборник, 1954, 18.
148. Жуков А. М. — В кн.: Расчеты на прочность, 12, «Машиностроение», М., 1966.
149. Жуков А. М., Дубравин Л. Л. — Проблемы прочности, 1971, 6.
150. Заблонский К. И. и др. — В кн.: Детали машин и подъемно-транспортные машины, 2. «Техника», Киев, 1955.
151. Зайков М. А. — В кн.: Тр. Сиб. металлург. ин-та, 1. Металлургиздат, Свердловск, 1954.
152. Захаров К. В. — Пластические массы, 1961, 8.
153. Захаров М. Н., Иващенко И. Н. — ПМТФ, 1971, 6.
154. Зверьков Б. В. — Заводская лаборатория, 1958, 24, 12.
155. Зверьков Б. В. — Энергомашиностроение, 1959, 6.
156. Зилова Т. К. и др. — Заводская лаборатория, 1963, 39, 5.
157. Зиновьев М. В. и др. — Проблемы прочности, 1972, 2.
158. Зиновьев М. В. и др. — Проблемы прочности, 1972, 5.
159. Змиевский В. И. и др. — Проблемы прочности, 1971, 12.
160. Иванова В. С. — Заводская лаборатория, 1955, 21, 2.
161. Ивлев Д. Д. — Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1960, 6.
162. Ивлев Д. Д. — Теория идеальной пластичности. «Наука», М., 1966.
163. Иденбом В. Л., Орлов А. Н. — УФН, 1962, 76, 3.
164. Ильичев В. Я., Савва С. П., Скибина Л. В. — Металловедение и термическая обработка металлов, 1973, 5.

165. И л ь ю ш и н А. А.— В кн.: Вопросы теории пластичности. Изд-во АН СССР, М., 1961.
166. И л ь ю ш и н А. А.— Инженерный журнал, МТТ, 1967, 3.
167. И л ь ю ш и н А. А. Пластичность. Ч. 1. Гостехиздат, М., 1948.
168. И л ь ю ш и н А. А.— ПММ, 1947, 11.
169. И л ь ю ш и н А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. Ч. 1. Изд-во АН СССР, М., 1963.
170. И л ь ю ш и н А. А.— ПММ, 1945, 9.
171. И л ь ю ш и н А. А.— ПММ, 1954, 18, 6.
172. И л ь ю ш и н А. А.— ПММ, 1960, 24, 4.
173. И л ь ю ш и н А. А., Л е н с к и й В. С. Сопротивление материалов. Физматгиз, М., 1959.
174. И о ф ф е А. Ф., Л е в и т с к а я М. А.— Журнал физической химии СССР, 1926, 58.
175. И с т о м и н П. С. Прессование металлов. Metallurgizdat, М., 1944.
176. И ш л и н с к и й А. Ю.— В кн.: Ученые записки МГУ, Механика, 46. М., 1940.
177. Й о к о б о р и Т., О с у к а А., Т а к а х а м и Т.— В кн.: Разрушение твердых тел. (Перевод с англ. яз.). «Металлургия», М., 1967.
178. К а д а ш о в и ч К. И., Н о в о ж и л о в В. В.— ПММ, 1958, 22, 1.
179. К а л ь к о И. К.— Заводская лаборатория, 1972, 38, 8.
180. К а л и н и ч е н к о Г. Л., М и х а й л о в с к и й Э. М., С е д о -  
к о в Л. М.— Проблемы прочности, 1970, 6.
181. К а м е н ц е в В. Н., Т а л ы п о в Г. Б.— В кн.: Исследования по упругости и пластичности, 1. Изд-во ЛГУ, Л., 1961.
182. К а п К. Н., П е р в у ш и н Ю. С.— Механика полимеров, 1966, 4.
183. К а р а с е в А. В.— Заводская лаборатория, 1973, 39, 5.
184. К а р м а н Т.— В кн.: Новые идеи в технике, 1. (Перевод с нем. яз.). «Образование», Петроград, 1915.
185. К а р п и н с к и й В. И. Бетон в предварительно напряженной спиральной обойме. Оргтрансстрой, М., 1961.
186. К а с а т к и н Б. С. Структура и микромеханизм хрупкого разрушения. «Техніка», Киев, 1964.
187. К а у д е р е р Г. Нелинейная механика. ИЛ, М., 1961.
188. К а ч а н о в Л. М.— Изв. АН СССР, МТТ, 1971, 4.
189. К а ч а н о в Л. М.— ПММ, 1961, 26, 6.
190. К а ч а н о в Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
191. К а ц Ш. Н.— Заводская лаборатория, 1958, 24, 7.
192. К а ц Ш. Н.— Энергомашиностроение, 1957, 2.
193. К и с е л е в с к и й В. Н., О с а с ю к В. В.— Прикладная механика, 1967, 3, 3.
194. К и с е л е в с к и й В. Н., Ч у п р и н а А. Ф.— В кн.: Термопрочность материалов и конструктивных элементов, 4. «Наукова думка», Киев, 1967.
195. К о в а л е н к о А. Д.— В кн.: Сб. трудов ЦНИИЧермет. Новые методы испытания металлов, 60. Metallurgizdat, М., 1968.
196. К о в а л ь ч у к Б. И., Л е б е д е в А. А., Н о в и к о в Н. В.— Заводская лаборатория, 1969, 35, 9.
197. К о в а л ь ч у к Б. И., Л е б е д е в А. А., Н о в и к о в Н. В.— Авт. свид. № 274439. Бюл. изобр., 1970, 21.
198. К о ж е в н и к о в Ю. Н., Ш к а н о в И. Н.— В кн.: Тр. КАИ, 105. Казань, 1965.
199. К о з л о в И. А., А х р е м е н к о В. Л.— В кн.: Термопрочность материалов и конструктивных элементов, 4. «Наукова думка», Киев, 1967.

200. К о з л о в И. А. и др. Исследование прочности деталей машин при помощи тензодатчиков сопротивления. «Техніка», Киев, 1967.
201. К о з л о в И. А., Л е б е д е в А. А., А х р е м е н к о В. Л.— Прикладная механика, 1967, 3, 12.
202. К о й т е р В. Т. Механика, 2. (Сб. переводов и обзоров иностранной периодической литературы.) ИЛ, М., 1960.
203. К о н о б з е в с к и й С. Т.— Вестник АН СССР, 1955, 7.
204. К о н т о р о в а Т. А., Ф р е н к е л ь Я. Н.— ЖТФ, 1941, 2, 3.
205. К о н т о р о в а Т. А., Ф р е н к е л ь Я. Н.— ЖТФ, 1941, 2, 9.
206. К о н ю ш к о З. М.— В кн.: Сборник МВТУ, 89. Расчеты на прочность в машиностроении. Машгиз, М., 1958.
207. К о р н е т, Г р а с с и.— Тр. Американского об-ва инженеров-механиков. Серия Д, 1961, 183.
208. К о р ф О. Я., С к у д р а А. М.— В кн.: Вопросы динамики и прочности, 11. Изд-во АН Латв ССР, Рига, 1964.
209. К о т р е л л А. Дислокация и пластическое течение в кристаллах. Металлургиздат, М., 1958.
210. К о ш е л е в П. Ф.— Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1965, 5.
211. К о ш е л е в П. Ф., Б е л я е в С. Е. Прочность и пластичность конструкционных материалов при низких температурах. «Машиностроение», М., 1967.
212. К р а с н ы й И. М. Строительные изделия и конструкции из армосиликата. Госстройиздат, М., 1953.
213. К у д р я в ц е в И. В. Внутренние напряжения как резерв прочности в машиностроении. Машгиз, М., 1951.
214. К у д р я в ц е в Б. А., П а р т о н В. З. и др.— Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1970, 5.
215. К у з н е ц о в В. Н.— Теплоэнергетика, 1957, 12.
216. К у з ь м е н к о В. А. Новые схемы деформирования твердых тел. «Наукова думка», Киев, 1973.
217. К у к с е н к о В. С. и др.— Механика полимеров, 1970, 1.
218. К у л и к о в О. О.— В кн.: Вопросы прочности и долговечности машиностроительных материалов и деталей, 61. Изд. ЦНИИТМАШ, М., 1966.
219. К у р к и н С. А.— Сварочное производство, 1964, 4.
220. К у р к и н С. А., М е ш а й к и н Н. С.— Сварочное производство, 1970, 7.
221. К у р к и н С. А., У м а р о в Д. И.— Изв. вузов, Машиностроение, 1968, 2.
222. К у р к и н С. А., У м а р о в Д. И., Х о в о в В. М.— Изв. вузов, Машиностроение, 1973, 1.
223. К у р к и н С. А. и др.— Автоматическая сварка, 1966, 1.
224. Л а в р о в В. В.— ДАН СССР, 1953, 122, 4.
225. Л а п и н В. Г. Автореф. канд. дис. Николаевский кораблестроительный ин-т, Николаев, 1970.
226. Л е б е д е в А. А.— Авт. свид. № 142453. Бюл. изобр., 1961, 21.
227. Л е б е д е в А. А.— Авт. свид. № 207449. Бюл. изобр., 1968, 2.
228. Л е б е д е в А. А.— Авт. свид. № 315084. Бюл. изобр., 1971, 28.
229. Л е б е д е в А. А.— В кн.: Вопросы высокотемпературной прочности в машиностроении. Изд. ИТИ, Киев, 1961.
230. Л е б е д е в А. А.— В кн.: Ползучесть и длительная прочность. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1963.
231. Л е б е д е в А. А.— В кн.: Термопрочность материалов и конструктивных элементов. «Наукова думка», Киев, 1965.
232. Л е б е д е в А. А.— В кн.: Тр. VII Всесоюзной научно-технической конференции по порошковой металлургии. Ереван, 1964.

233. Лебедев А. А.— ДАН УССР, 1967, сер. А, 6.
234. Лебедев А. А. Автореф. канд. дис. Ин-т металлокерамики и специальных сплавов АН УССР, Киев, 1963.
235. Лебедев А. А.— Прикладная механика, 1968, 4, 8.
236. Лебедев А. А.— Порошковая металлургия, 1963, 5 (77).
237. Лебедев А. А.— Порошковая металлургия, 1963, 6 (18).
238. Лебедев А. А.— Порошковая металлургия, 1964, 1 (19).
239. Лебедев А. А.— Проблемы прочности, 1969, 1.
240. Лебедев А. А.— Проблемы прочности, 1970, 2.
241. Лебедев А. А.— Проблемы прочности, 1970, 4.
242. Лебедев А. А. Расчеты на прочность при сложном напряженном состоянии (Теория прочности). Изд. МВССО УССР, Киев, 1968.
243. Лебедев А. А., Гигиняк Ф. Ф.— В кн.: Термопрочность материалов и конструктивных элементов, 5. «Наукова думка», Киев, 1969.
244. Лебедев А. А., Ковальчук Б. И.— Проблемы прочности, 1970, 8.
245. Лебедев А. А., Ковальчук Б. И., Ламашевский В. П.— Проблемы прочности, 1971, 3.
246. Лебедев А. А., Ламашевский В. П.— Авт. свид. № 242465. Бюл. изобр., 1969, 15.
247. Лебедев А. А., Ламашевский В. П.— Авт. свид. № 300806. Бюл. изобр., 1971, 13.
248. Лебедев А. А., Ламашевский В. П.— В кн.: Термопрочность материалов и конструктивных элементов, 4. «Наукова думка», Киев, 1967.
249. Лебедев А. А., Ламашевский В. П.— В кн.: Термопрочность материалов и конструктивных элементов, 5. «Наукова думка», Киев, 1969.
250. Лебедев А. А., Ламашевский В. П., Ковальчук Б. И.— Проблемы прочности, 1972, 6.
251. Лебедев А. А. и др.— В кн.: Космические исследования на Украине, 6. Космическое материаловедение и технология. «Наукова думка», Киев, 1975.
252. Лебедев А. А., Панчин В. В.— В кн.: Термопрочность материалов и конструктивных элементов, 4. «Наукова думка», Киев, 1967.
253. Лебедев А. А., Писаренко Г. С.— В кн.: Вопросы высоко-температурной прочности в машиностроении. «Наукова думка», Киев, 1963.
254. Лебедев А. А., Шканов И. Н., Кожевніков Ю. А.— Проблемы прочности, 1972, 2.
255. Лебедев Т. А. Некоторые вопросы общей теории сплавов. Ленинград, Л., 1951.
256. Ленский В. С.— В кн.: Вопросы теории пластичности. Изд-во АН СССР, М., 1961.
257. Ленский В. С.— Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1960, 5.
258. Ленский В. С.— Изв. АН СССР, ОТН, 1958, 11.
259. Ленский В. С.— Изв. АН СССР, ОТН, 1959, 5.
260. Ленский В. С.— Изв. АН СССР, ОТН, 1960, 6.
261. Леонов М. Я.— Информ. бюл. 1. Научный совет по проблеме «Научные основы прочности и пластичности». М., ВИНТИ АН СССР, 1960.
262. Леонов М. Я., Паняев В. А., Русинко К. П.— Изв. АН СССР, МТТ, 1967, 6.
263. Леонов М. Я., Швойко Н. Ю.— ДАН СССР, 1964, 159, 5.
264. Ленин Г. Ф. и др.— Проблемы прочности, 1969, 3.

265. Лещенко В. М., Козлов И. А., Гонтаровский В. П.— Проблемы прочности, 1973, 3.
266. Либерман Л. Я.— Заводская лаборатория, 1955, 21, 2.
267. Лион К. С. Приборы для научных исследований. Машиностроение, М., 1964.
268. Лихарев К. К.— В кн.: Сб. трудов МВТУ, 26. Машгиз, М., 1953.
269. Лихарев К. К.— Изв. ВУЗов, Машиностроение, 1958, 5.
270. Лихарев К. К., Малинин Н. Н.— В кн.: Научные доклады высшей школы. Машиностроение и приборостроение, 1968, 4.
271. Лихнидкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1947.
272. Лукша Л. К.— ДАН БССР, 1963, 7, 5.
273. Ломитзе Г. М., Иващенко И. Н.— Гидротехническое строительство, 1965, 3.
274. Максак В. Н.— В кн.: IV Всесоюзная конференция по прочности и пластичности (1—4 февраля 1967 г.). Тезисы докладов. «Наука», М., 1967.
275. Максак В. И., Дощинский Г. А.— Изв. Томск. политехнического ин-та, 1965, 133.
276. Максак В. И., Дощинский Г. А.— Изв. Томск. политехнического ин-та, 1966, 147.
277. Максимов Л. Ю.— Вестник машиностроения, 1964, 5.
278. Макушин В. М.— Вестник машиностроения, 1955, 9.
279. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. «Машиностроение», М., 1968.
280. Малмейстер А. К.— Механика полимеров, 1965, 4.
281. Малмейстер А. К.— Механика полимеров, 1966, 6.
282. Малмейстер А. К. Упругость и неупругость бетона. Изд-во АН ЛатвССР, Рига, 1957.
283. Мальцев В. А., Пак А. П.— Изв. ВНИИ гидротехники, 1966, 80.
284. Мальцев В. А., Пак А. П.— Изв. ВНИИ гидротехники, 1966, 82.
285. Малышев М. В. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, 7.
286. Марин Дж.— Механика, 4. (Сб. переводов и обзоров иностранной периодической литературы.) ИЛ, М., 1963.
287. Маркович Р.— В кн.: Алюминиевые сплавы при низких температурах. «Металлургия», М., 1967.
288. Мартынов Е. Д. и др.— В кн.: Механизм пластической деформации металлов. «Наукова думка», Киев, 1965.
289. Мартынова Т. И.— Вестник МГУ. Серия физико-математических и естественных наук, 1955, 12.
290. Маттави.— Тр. Американского об-ва инженеров-механиков. Серия Е, 1969, 1.
291. Мачихин Ю. А.— Изв. ВУЗов, Пищевая промышленность, 1958, 6.
292. Мельников И. С.— В кн.: Тр. ВНИИ железнодорожного транспорта, 195. Трансжелдориздат, М., 1960.
293. Мельников И. С.— Заводская лаборатория, 1960, 26, 8.
294. Механические свойства материалов под высоким давлением, 1. Под ред. Х. Л. Пью, «Мир», М., 1973.
295. Мехед Г. Н.— В кн.: Процессы формоизменения металлов и сплавов. «Наука», М., 1971.
296. Микляев П. Г., Фридман Я. Б. Анизотропия механических свойств материалов. «Металлургия», М., 1969.
297. Миркин И. Л. Атомное строение и свойства металлов. Машгиз, М., 1949.
298. Мпролюбов И. Н.— Тр. Ленинградск. технолог. ин-та, 1953, 25.
299. Митрохин Н. М. Автореф. канд. дис. ЛПИ им. М. И. Калинина. Л., 1960.

300. М и т р о х и н Н. М., Я г н Ю. И.— ДАН СССР, 1960, 135, 4.
301. М и х а й л о в с к и й Э. М. Автореф. канд. дис. Томск. политехнический ин-т, 1970.
302. М и х а н ь к о в В. И. и др.— Приборы и техника эксперимента, 1968, 4.
303. М о г у ч и й Л. Н.— В кн.: Процессы формоизменения металлов и сплавов. «Наука», М., 1971.
304. М о р о з Л. С., Ш у р а к о в С. С. Проблема прочности цементированной стали. Изд. ЦНИИ Минтрансаш, Л., 1974.
305. М о с к в и т и н В. В.— Механика полимеров, 1972, 2.
306. М о с к в и т и н В. В. Пластичность при переменных нагрузках. Изд-во МГУ, М., 1965.
307. М о с с а к о в с к и й В. И., Р ы б к а М. Т.— ПММ, 1965, 29, 2.
308. М у л л е р Р. А.— ЖТФ, 1952, 22, 3.
309. Н а д а и А. Пластичность и разрушение твердых тел. ИЛ, М., 1954.
310. Н а м е с т н и к о в В. С.— В кн.: Ползучесть и длительная прочность. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1963.
311. Н а м е с т н и к о в В. С.— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1960, 6.
312. Н а м е с т н и к о в В. С.— Изв. АН СССР, ОТН, 1957, 10.
313. Н о в и к о в Н. В., Л е б е д е в А. А., Г и г и п я к Ф. Ф. Устройства для механических испытаний конструкционных материалов при низких температурах. «Наукова думка», Киев, 1968.
314. Н о в и к о в Н. В., Л е б е д е в А. А., К о в а л ь ч у к Б. И. Механические испытания конструкционных материалов при низких температурах. «Наукова думка», Киев, 1974.
315. Н о в и к о в Н. В., Л и х а ц к и й С. И., Б о г а й ч у к Б. И.— Проблемы прочности, 1969, 5.
316. Н о в и к о в Н. В., Ч е ч и н Э. В.— Проблемы прочности, 1973, 4.
317. Н о в о ж и л о в В. В.— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1961, 3.
318. Н о в о ж и л о в В. В.— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1962, 1.
319. Н о в о ж и л о в В. В.— ПММ, 1952, 17, 5.
320. Н о в о ж и л о в В. В.— ПММ, 1964, 28, 3.
321. Н о в о ж и л о в В. В. Теория упругости. Судпромгиз, Л., 1958.
322. Новые методы оценки сопротивления металлов хрупкому разрушению. Под. ред. Ю. Н. Работнова. (Перевод с англ. яз.). «Мир», М., 1972.
323. О г и б а л о в П. М., К и й к о И. А.— Инженерный журнал, 1961, 1, 1.
324. О г и б а л о в П. М., К и й к о И. А. Очерки по механике высоких параметров. Изд-во МГУ, М., 1966.
325. О д и н г И. А.— В кн.: Исследования по металловедению. Госмашметиздат, М.— Л., 1932.
326. О д и н г И. А. Допускаемые напряжения в машиностроении и циклическая прочность металлов. Машгиз, М., 1962.
327. О д и н г И. А.— Заводская лаборатория, 1937, 6, 4.
328. О д и н г И. А. и др. Теория ползучести и длительной прочности металлов. Металлургиздат, М., 1959.
329. О д и н г И. А., И в а н о в а В. С.— В кн.: Исследования по жаропрочным сплавам. Т. 1. Изд-во АН СССР, М., 1956.
330. О д и н г И. А., Т у л ь к о в Г. А.— В кн.: Структура и свойства жаропрочных сплавов, 93. Машгиз, М., 1959.
331. О д и н г И. А., Ф р и д м а н З. Г.— Заводская лаборатория, 1959, 25, 3.
332. О с а с ю к В. В.— Заводская лаборатория, 1966, 32, 9.

333. О с а с ю к В. В., К и с е л е в с к и й В. Н.— В кн.: Термопрочность материалов и конструктивных элементов, 4. «Наукова думка», Киев, 1967.
334. О с и п о в В. Г.— Заводская лаборатория, 1949, 15, 4.
335. О с и п о в В. Г.— Заводская лаборатория, 1957, 23, 9.
336. О с и п о в В. Г.— В кн.: Проблемы металлургии. Изд-во АН СССР, М., 1953.
337. П а в л о в В. А.— ДАН СССР, 1953, 91, 2.
338. П а в л о в П. А., П а р о м е н с к и й А. А.— Авт. свид. № 142070. Бюл. изобр., 1961, 20.
339. П а в л о в П. А., П а р о м е н с к и й А. А., Л и ф ш и ц И. П.— Заводская лаборатория, 1960, 26, 6.
340. П а в л о в В. А., Я к у т о в и ч М. В.— ДАН СССР, 1951, 78, 1.
341. П а л л е й И. З.— В кн.: Тр. Рижск. ин-та инженеров гражданского флота, 17. Рига, 1962.
342. П а н а с ю к В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. «Наукова думка», Киев, 1968.
343. П а н о в Б. В.— Тезисы докладов на IV Всесоюзной конференции по прочности и пластичности. «Наука», М., 1967.
344. П а н я е в В. А. Автореф. канд. дис. Ин-т физики и математики АН КиргССР, Фрунзе, 1970.
345. П а р ш и н А. и др.— ФММ, 1962, 14, 27.
346. П а ш к о в П. О.— ФММ, 1956, 3, 3.
347. П е в з н е р Л. М., Я к и м о в а А. М.— Заводская лаборатория, 1953, 19, 5.
348. П е л е п е л и н В. М., Г о р б М. Л.— Прикладная механика, 1965, 1.
349. П е т р у с е в и ч А. И.— Вестник машиностроения, 1944, 9—10.
350. П и я ч е н и н В. К. Опытные исследования коэффициента Пуассона чугуна. «Печатня С. П. Яковлева», Томск, 1908.
351. П и с а р е н к о Г. С.— В кн.: Тр. ин-та строительной механики АН УССР 1961, 15.
352. П и с а р е н к о Г. С., К о в а л ь ч у к Б. И., Л е б е д е в А. А.— Проблемы прочности, 1972, 1.
353. П и с а р е н к о Г. С., Л е б е д е в А. А.— ДАН УССР, 1964, 1.
354. П и с а р е н к о Г. С., Л е б е д е в А. А.— Прикладная механика, 1968, 4, 3.
355. П и с а р е н к о Г. С., Л е б е д е в А. А. Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряженном состоянии. «Наукова думка», Киев, 1969.
356. П и с а р е н к о Г. С., Л е б е д е в А. А., Л а м а ш е в с к и й В. П.— Проблемы прочности, 1969, 5.
357. П и с а р е н к о Г. С., Л е б е д е в А. А., Л а м а ш е в с к и й В. П.— Проблемы прочности, 1970, 1.
358. П и с а р е н к о Г. С., Н о в и к о в Н. В.— Проблемы прочности, 1970, 8.
359. П и с а р е н к о Г. С., Т р о щ е н к о В. Т. Статистичні теорії міцності та їх застосування до металокерамічних матеріалів. Вид-во АН УРСР Київ, 1961.
360. П и с а р е н к о Г. С., Т р о щ е н к о В. Т., К р а с о в с к и й А. Я.— Порошковая металлургия, 1965, 7 (31).
361. П и с а р е н к о Г. С. и др.— Прочность материалов при высоких температурах. «Наукова думка», Киев, 1966.
362. П и с а р е н к о Г. С. и др. Прочность металлокерамических материалов и сплавов при нормальных и высоких температурах. Изд-во АН УССР, Киев, 1962.
363. Пластичность и хрупкость. Сб. статей «ИЛИМ», Фрунзе, 1967.
364. П л е х а н о в а Н. Г., Р а т н е р С. И.— ЖТФ, 1954, 24, 3.

365. Погожева Н. В., Дошинский Г. А.— В кн.: Материалы научной конференции молодых ученых вузов г. Томска. Изд-во ТГУ, Томск, 1968.
366. Полиновский Л. А., Томилов Ф. Х.— Заводская лаборатория, 1971, 37, 5.
367. Полосаткин Г. Д.— Заводская лаборатория, 1957, 23, 7.
368. Пономарев С. Д.— Вестник инженеров и техников, 1953, 1.
369. Пономарев С. Д. и др. Расчет на прочность в машиностроении. Машгиз, М., 1958.
370. Попов К. В., Савицкий В. Г. Низкотемпературная хрупкость стали и деталей машин. «Машиностроение», М., 1969.
371. Потак Я. М., Сачков В. В., Бушманова Е. Л.— ЖТФ, 1951, 21.
372. Прагер В., Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. ИЛ, М., 1956.
373. Протодьяков М. М., Ильницкая Е. И., Карпов В. И.— В кн.: Механические свойства горных пород. М., Изд-во АН СССР, 1963.
374. Протасов В. Д., Копнов В. А.— Механика полимеров, 1955, 5.
375. Прищепионок Л. А.— ПМТФ, 1965, 6.
376. Прищепионок Л. А., Данилов Н. С.— Заводская лаборатория, 1965, 31, 9.
377. Пустовалов В. В. Методы изучения пластичности и прочности твердых тел при низких температурах. «Наукова думка», Киев, 1971.
378. Пустовалов В. В. и др. — Приборы и техника эксперимента, 1967, 2.
379. Пэдлог Д., Раттингер И.— В кн.: Усталость и выносливость металлов. ИЛ, М., 1963.
380. Работнов Ю. Н.— Вестник МГУ, 1948, 10.
381. Работнов Ю. Н.— Изв. АН СССР, ОТН, 1948, 6.
382. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. «Наука», М., 1966.
383. Работнов Ю. Н.— ПМТФ, 1965, 1.
384. Работнов Ю. Н., Соколов Б. П.— Заводская лаборатория, 1960, 26, 3.
385. Ратнер С. И.— Вестник инженеров и техников, 1947, 6.
386. Ратнер С. И.— В кн.: Повышение долговечности машин. Машгиз, М., 1956.
387. Ратнер С. И. Прочность и пластичность металлов. Оборонгиз, М., 1949.
388. Ребиндер П. А.— В кн.: Юбилейный сборник, посвященный тридцатилетию Великой Октябрьской социалистической революции. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1947.
389. Рейнер М. Деформации и течения. Введение в реологию. (Перевод с англ. яз.). Гостоптехиздат, М., 1963.
390. Рид В. Т. Дислокация в кристаллах. (Перевод с англ. яз.). Металлургиздат, М., 1958.
391. Ривов О. А. Сопротивление материалов. Изд. Центрального заочн. механико-машиностр. ин-та, М., 1933.
392. Родионов К. П. — Физика металлов и металловедение, 1964, 17, 6.
393. Ройтман И. М., Фридман Я. Б.— Заводская лаборатория, 1950, 16, 5.
394. Романов О. Н.— В кн.: Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем. Изд-во АН УССР, Киев, 1963.
395. Рош М., Эйхингер А.— В кн.: Вопросы усталостного разрушения



- статей. (Сб. переводных статей под ред. С. В. Серенсена). Машгиз, М., 1957.
396. Рубинин М. В.— Инженерный сборник, 1951, 10.
  397. Руппейт К. В. Механические свойства горных пород. Углетехиздат, М., 1956.
  398. Русинко К. Н., Блинов Э. И.— Прикладная механика, 1971, 7, 2.
  399. Русинков П. Р.— Заводская лаборатория, 1956, 22, 10.
  400. Рыбалко Ф. П., Феофанов В. К.— ДАН СССР, 1953, 93, 4.
  401. Рябинин Ю. Н., Лифшиц Л. Д., Вережгин Л. Ф.— ЖТФ, 1957, 27, 10.
  402. Сайуэр, Вурхис.— Тр. Американского об-ва инженеров-механиков. Сер. Д, 1962.
  403. Сандлер, Ходулин Л. К.— Заводская лаборатория, 1951, 17, 12.
  404. Сахновский К. В. Железобетонные конструкции. Госстройиздат, М., 1959.
  405. Свешников В. А.— Изв. АН СССР, ОТН, 1956, 1.
  406. Свириденко В. П., Узиловская В. Л.— ДАН БССР, 1965, 9, 8.
  407. Сдобырев В. П.— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1959, 6.
  408. Сдобырев В. П.— Изв. АН СССР, ОТН, 1958, 4.
  409. Седоков Л. М.— Сопротивление материалов большим пластическим деформациям. Изд-во ТГУ, Томск, 1966.
  410. Серенсен С. В.— Изв. АН СССР, ОТН, 1938, 8—9.
  411. Серенсен С. В.— Инженерный сборник, 1941, 1, 1.
  412. Серенсен С. В.— Прочность металла и расчет деталей машин. ОНТИ М., 1937.
  413. Серенсен С. В., Гарф М. Э., Козлов Л. А. Машины для испытания на усталость. Машгиз, М., 1957.
  414. Смирнов-Аляев Г. А. Сопротивление материалов пластическому деформированию. Машгиз, М.—Л., 1961.
  415. Снитко Н. И.— ЖТФ, 1948, 18, 6.
  416. Соколов Н. Д. Автореф. докт. дис. МИФИ, М., 1967.
  417. Соколов Н. Д.— ДАН СССР, 1962, 147, 2.
  418. Созонов Ю. А.— В кн.: Тр. ЛПИ им. М. И. Калинина, 287. «Машиностроение», Л., 1967.
  419. Сорокин Е. С.— В кн.: Исследования по динамике сооружений. Стройиздат, М.—Л., 1951.
  420. Соколовский В. В.— Изв. АН СССР, ОТИ, 1948, 19.
  421. Соколовский В. В.— ПММ, 1960, 24, 4.
  422. Соколовский В. В.— Статика сыпучей среды. Физматгиз, М., 1960.
  423. Соколовский В. В. Теория пластичности. ГИТЛ, М.—Л., 1950.
  424. Ставрогин А. Н.— В кн.: Тр. Всесоюзного научно-исследовательского маркшейдерского ин-та, 59, ВНИМИ, М., 1965.
  425. Стаси Ф.— Проблемы прочности, 1973, 5.
  426. Степанов А. В.— Изв. АН СССР, серия физическая, 1953, 17, 3.
  427. Строганов А. С.— В кн.: Горное давление и крепь вертикальных стволов. Госгортехиздат, М., 1963.
  428. Сурикова Е. Е. Автореф. канд. дис. УПИ им. С. М. Кирова, Свердловск, 1955.
  429. Сурикова Е. Е.— Тр. Уральского электромеханического ин-та инженеров железнодорожного транспорта, 1960, 9.
  430. Сурикова Е. Е. и Савицкий Ф. С.— Заводская лаборатория, 1955, 21, 12.
  431. Сэйуэрт — В кн.: Механика, 2. (Сб. переводов и обзоров иностранной периодической литературы.) ИЛ, М., 1962.

432. Тавадзе Ф. Н. и др.— Проблемы прочности, 1972, 1.
433. Талыпов Г. Б.— Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, 6.
434. Талыпов Г. Б. Пластичность и прочность стали при сложном нагружении. Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1968.
435. Тарасенко И. И.— В кн.: Сб. ЛИСИ, 23. Госстройиздат, М.—Л., 1956.
436. Тарасенко И. И.— В кн.: Сб. ЛИСИ, 26. Госстройиздат, М.—Л., 1957.
437. Тарнопольский Ю. И., Скудра А. М. Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков. «Зинатне», Рига, 1966.
438. Теория пластичности. (Сб. статей под ред. Ю. Н. Работнова.) ИЛ, М., 1948.
439. Томленов А. Д.— Вестник машиностроения, 1958, 10.
440. Трофимов В. И.— В кн.: Исследование прочности, пластичности и ползучести строительных материалов. Госстройиздат, М., 1955.
441. Троицкий Г. Н. Свойства чугуна. Гостехиздат, М., 1941.
442. Трощенко В. Т., Руденко В. Н. Прочность металлокерамических материалов и методы ее определения. «Техніка», Киев, 1965.
443. Трощенко В. Т.— В кн.: Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем. «Наукова думка», Киев, 1966.
444. Трощенко В. Т.— Заводская лаборатория, 1967, 33, 9.
445. Трощенко В. Т. Усталость и неупругость металлов. «Наукова думка», Киев, 1971.
446. Троянкина Л. В., Ценке И. В.— Заводская лаборатория, 1966, 32, 1.
447. Трунин И. И.— ПМТФ, 1963, 1.
448. Трунин И. И.— Прикладная механика, 1965, 1, 7.
449. Тюрин В. Ф.— В кн.: Тезисы докладов на IV Всесоюзной конференции по прочности и пластичности. «Наука», М., 1967.
450. Ужик Г. В. Прочность и пластичность металлов при низких температурах. Изд-во АН СССР, М., 1957.
451. Ужик Г. В. Сопротивление отрыву и прочность металлов. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1950.
452. Улинич Ф. Р.— В кн.: Разрушения углей и пород. Углетехиздат, М., 1958.
453. Уманский Э. С., Веремчук С. С.— Проблемы прочности, 1971, 1.
454. Умаров Д. И. Автореф. канд. дис. МВТУ, М., 1969.
455. Униксов Е. П. Пластические деформации при ковке и штамповке. Машгиз, М., 1938.
456. Феппль А., Феппль Л.— В кн.: Сила и деформация, 1. ОНТИ, М.—Л., 1936.
457. Филиппс Э.— В кн.: Механика, 4. (Сб. переводов и обзоров иностранной периодической литературы.) ИЛ, М., 1961.
458. Филиппс С., Хейвуд Р.— В кн.: Вопросы усталостного разрушения. Машгиз, М., 1957.
459. Филоненко-Бородич М. М.— Инженерный сборник, 1954, 19.
460. Филоненко-Бородич М. М.— Инженерный сборник, 1961, 31.
461. Филоненко-Бородич М. М. Механические теории прочности. Изд-во МГУ, М., 1961.
462. Финдли и др.— Тр. Американского об-ва инженеров-механиков. Серия Д, 1961, 1.
463. Фрадис Э. Д. Автореф. канд. дис. НИИ оснований и подземных сооружений, М., 1969.
464. Френкель Я. И. Введение в теорию металлов. ГИФМЛ, М., 1958.
465. Фридман Я. Б. Единая теория прочности материалов. Оборонгиз, М., 1943.

466. Фридман Я. Б., Зилова Т. К., Демина Н. И. Измерение пластической деформации и разрушения методом накатанных сеток. Оборонгиз, М., 1962.
467. Фридман Я. Б., Зилова Т. К., Жукова Н. И.— ФММ, 1955, 1, 1.
468. Фукс.— Тр. Американского об-ва инженеров-механиков. Серия Д, 1965, 2.
469. Хант.— Тр. Американского об-ва инженеров-механиков. Серия Д, 1965, 2.
470. Хейвуд Р. Б. Проектирование с учетом усталости. «Машиностроение», М., 1969.
471. Хилл Р. Математическая теория пластичности. ИЛ, М., 1956.
472. Хосфорд В. Ф.— Тр. Американского об-ва инженеров-механиков. Серия Е, 1972, 2.
473. Хспло.— В кн.: Разрушение твердых полимеров. «Химия», М., 1971.
474. Ху Л. В., Марин Дж.— В кн.: Механика, 2. (Сб. переводов и обзоров иностр. периодич. литературы.) ИЛ, М., 1956.
475. Цибульский И. П.— В кн.: Исследование по теории пластин и оболочек, 2. Изд-во Казанск. ун-та, 1964.
476. Цибульский И. П.— В кн.: Нелинейная теория пластин и оболочек. Изд. Казанск. ун-та, 1962.
477. Циклис Д. С. Техника эксперимента при высоких давлениях. Гостехиздат, М., 1958.
478. Цобкало С. О.— Изв. АН СССР, ОТН, 1951, 6.
479. Чаплинский И. А. Автореф. докт. дис. ЛПИ, Л., 1967.
480. Чаплинский И. А. Сопротивление материалов пластическому деформированию. Книжное изд-во, Новосибирск, 1962.
481. Чеканов А. Н.— В кн.: Расчеты на прочность, пластичность и ползучесть элементов машиностроительных конструкций, 26. Машиз, М., 1953.
482. Черепанов Г. П.— ПММ, 1967, 31, 4.
483. Черняк Н. И. Механические свойства стали в области малых пластических деформаций. Изд-во АН УССР, Киев, 1962.
484. Черняк Н. И., Полевой В. А.— В кн.: Сб. трудов КИИГА, 1. Надежность и долговечность авиационных газотурбинных двигателей, Киев, 1971.
485. Чечулин Б. Б.— ЖТФ, 1955, 25, 1.
486. Швецов Я. Н.— В кн.: Тр. Ленинградск. технологического ин-та цел.-бум. промышленности, 17. «Лесная промышленность», М., 1964.
487. Швецов Я. Н.— В кн.: Тр. Ленинградск. технологического ин-та цел.-бум. промышленности, 18. «Лесная промышленность», М., 1965.
488. Шевандин Е. М., Маневич Ш. С.— ЖТФ, 1946, 16, 11.
489. Шевандин Е. М., Разов И. А., Серпенинов Б. Н.— Заводская лаборатория, 1956, 22, 11.
490. Шестериков С. А.— ПММ, 1960, 24, 3.
491. Шимилевич И. А.— В кн.: Металловедение. Судпромгиз, М.—Л., 1957.
492. Шиммарев О. А.— Инженерный журнал, 1963, 3, 4.
493. Шканов И. Н.— Автореф. канд. дис. ЦНИИТМАШ, М., 1965.
494. Шканов И. Н.— В кн.: Тр. КАИ, 88. Казань, 1965.
495. Шканов И. Н.— В кн.: Тр. КАИ 81. Казань, 1963.
496. Шканов И. Н., Лебедев А. А., Кожевников Ю. Л.— Тр. КАИ, 136. Казань, 1971.
497. Шканов И. Н., Маминов А. С., Кожевников Ю. Л.— Тр. КАИ, 120. Казань, 1970.
498. Шкарбелис К. К.— В кн.: Исследования по бетону и железобетону, 3. Изд-во ЛатвССР, Рига, 1958.

499. Шнейдерович Р. М. Прочность при статическом и повторно-статическом нагружении. «Машиностроение», М., 1968.
500. Шрейнер Л. А. и др. Деформационные свойства горных пород при высоких давлениях и температурах. «Недра», М., 1968.
501. Шур Д. М.— Машиноведение, 1971, 1.
502. Щапов Н. П.— Заводская лаборатория, 1960, 26, 3.
503. Щеглов Н. Н.— В кн.: Тр. Таллинск. политехнического ин-та, 113. Таллин, 1957.
504. Щепкин Г. В.— Заводская лаборатория, 1966, 32, 1.
505. Эрдоган Ф., Си Г.— Тр. Американского об-ва инженеров-механиков. Серия Д, 1963, 4.
506. Ягн Ю. И.— Вестник инженеров и техников, 1931, 6.
507. Ягн Ю. И., Виноградов И. Н.— ДАН СССР, 1954, 96, 3.
508. Ягн Ю. И., Мякинин Л. В., Ковалев К. Ф.— Заводская лаборатория, 1961, 27, 11.
509. Ягн Ю. И., Смотрин И. Т.— ЖТФ, 1951, 21, 12.
510. Ягн Ю. И., Субботницкий В. В.— Заводская лаборатория, 1966, 32, 6.
511. Ягн Ю. И., Чаплинский И. А.— ДАН СССР, 1953, 90, 6.
512. Ягн Ю. И., Шишмарев О. А.— Заводская лаборатория, 1958, 24, 10.
513. Яковлев В. В.— В кн.: Сборник МИФИ, 3. Атомиздат, М., 1969.
514. Ясинский Ф. С. Собрание сочинений. Т. 3. С.-Петербург, 1904.
515. Abo Ata M. M., Finnie I.— Creep in Structures, 1970, Symp. Gotenhburg 1970, Berlin, 1972.
516. Aida H., Sakae I., Sunamoto D.— Proc. 2-th Japan Congr. Test. Mater. Kyoto, 1959.
517. Armstrong R. et al.— Phil. Mag., 1962, 7, 73.
518. Ayres D. I.— Engineering Fracture Mechanics, 1970, 2, 2.
519. Bailey R.— Proc. Inst. Mech., Engin., 1951, 164, 4.
520. Batdorf J., Budiauskys B.— Appl. Mech., 1954, 21, 4.
521. Blakey F., Beresford F.— Civil Engin. and Public Works Rev., 1955, 50, 596.
522. Bonzel J.— Beton und Stahlbetonbau, 1959, 54, 9—10.
523. Bresler B., Pister K.— Proc. ASCE, 1955, 81, 674.
524. Brice M. L. P.— Annales des Ponts et Chaussées, 1956, 126, 4—5.
525. Bursynski W.— Schweizerische Bauzeitung, 1929, 94, 21.
526. Burton P.— Trans. ASME, Ser. E, 1961, 28, 2.
527. Caneva C.— Inst. di Chimica Appl. ed Industr. Tecnologie Generali dill Università di Roma, giugno, 1965.
528. Cerper M. I., Mony L. E., Stiefel M. B. and Holley S. F.— J. of Research of the Nat. Bureau of Standards, 1958, 61, 3.
529. Chamberlain D.— Adv. Cry. Eng., Plenum Press, 1965, 10, 4.
530. Ciovanini M.— Rend. Ist. Lombardo Sci. Lettere. Sci. mat., fis., chim. e geob., 1964, 98, 1.
531. Coffin L. F.— Trans. ASME, 1954, 76, 6.
532. Compbell I. E.— Mater. Res. a Stand., 1964, 4, 10.
533. Cornet I., Crassi R. C.— Trans. ASME, Ser. D, 1961, 83, 1.
534. Cornet I., Crassi R. C.— Trans. ASME, Ser. D, 1954, 76, 6.
535. Cornet I., Crassi R. C.— Trans. ASME, Ser. D, 1963, 83, 1.
536. Corrigan D. A. et al.— Weld. J., 1962, 41, 3.
537. Cox H., Owen N.— Aeronaut. Quart., 1961, 12, 1.
538. Cridland L., Wood W.— Intern. J. of Fracture Mechanics, 1968, 4, 3.
539. Crossland B.— Proc. Inst. Mech. Engin., 1954, 168, 40.
540. Cunningham D., Thomson E., Dorn I.— Proc. ASTM, 1947, 47.

541. Dauphine T., McDonald, Pearson W.—*Rev. Sci. Inst.*, 1958, 30, 11.
542. Davin M.—*Annales des Pontes et Chaussées*, 1953, 123, 6.
543. Davis E. I.—*J. of Appl. Mech.*, 1945, 12, 1.
544. Davis P. W., Finniear T. C., Wilshire B.—*J. Inst. Metals*, 1962, 90.
545. De Sisto T.—*ASTM Special Tech. Publ.*, 1956, 176.
546. Dritte Intern. Tagung über den Bruch. München, April, 1973. Verein Deutscher Eisenhüttenleute, Düsseldorf, 1973.
547. Drucker D., Prager W.—*Quart. Appl. Math.*, 1952, 10.
548. Drucker D. C., Srockton F. D.—*Stress Analysis*, 1953, 10, 2.
549. Fehlbach D. R., Orowan E. O.—*Welding J. Res. Suppl.*, 1955, 34, 11, 570—575.
550. Fenn R. W.—*Proc. ASTM*, 1960, 60.
551. Féret R.—*Congrès International des Matériaux de Construction*. Paris, 1900.
552. Findley W. N., Gyselsvik J. C.—*Proc. ASTM*, 1962, 62.
553. Fisher T., Hollamon T.—*Metals Technology*, 1947, 14, 5.
554. Frankel S. I.—*J. Appl. Mech.*, 1948, 15, 3.
555. Freudenthal A.—*Proc. First USA National Congress Appl. Mech.* Chicago, 1951.
556. Glaren S., Foreman C.—*Adv. Cry. Eng.*, 11. Plenum Press. New York, 1966.
557. Grashof F. *Theorie der Elastizität und Festigkeit*. Berlin, 1878.
558. Griffis L. V., Moricava G. R., Frankel S. I.—*Weld Res. Suppl.*, 1948, 27.
559. Griffith A. A.—*Proc. Royal Soc.*, 1921, 221.
560. Hayhurst D. R.—*J. Strain Anal.*, 1973, 8, 2.
561. Heinrich P.—*Heute Hütte*, 1962, 7, 8.
562. Hon-Yimko, Scott R. F.—*J. of the Soil. Mech. and Foundations Division Proc. of the ASCE*, 1968, July.
563. Hu L. W., Bratt I. F.—*Appl. Mech.*, 1958, 25, 3.
564. Hu L. W., Pae K. D.—*J. Franklin Inst.*, 1963, 275, 6.
565. Inglis C. E.—*Trans. Inst. Naval Architects*, 1913, 55.
566. Irwin G. R.—*Proc. 9-th Intern. Congr. Appl. Mech.* Brussels, 1957.
567. Janiche W., Puzicha W.—*Arch. Eisenhüttenwesen*, 1954, 25, 11—12.
568. Jaoul B. *Etude de la plasticité et application aux métaux*. Dunod, Paris, 1965.
569. Jonnson A. E.—*Proc. Inst. Mech. Engin.*, 1951, 164.
570. Kanter J. J.—*Amer. Soc. Metals*, 1936, 24.
571. Kerner M. I., Mory L. E. and Holley S. F.—*J. of Research of the Nat. Bureau of Standards*, 1958, 61, 3.
572. Kieck F.—*Zeitschrift des Vereines deutscher Ingen.*, 1892, 26, 10.
573. Klebowski Z.—*Księga Jubil.*, Hubera M. T. Gdańsk, 1950.
574. Klebowski Z.—*Przegl. Techn.*, 1934, 11.
575. Rooistra L. F., Blaser R. U., Tucker G. T.—*Trans. ASME*, 1952, 7.
576. Kirsch A.—*Arch. Eisenhüttenwesen*, 1960, 31, 2.
577. Kirsch A.—*Arch. Eisenhüttenwesen*, 1967, 38, 4.
578. Kirsch A.—*Arch. Eisenhüttenwesen*, 1947, 45, 1.
579. Kugnel R.—*Proc. ASTM*, 1961, 61.
580. Langer B. F.—*Welding J.*, 1958, 37, 9.
581. Larson F. R., Miller I.—*Trans. ASME*, 1952, 74, 5.
582. Lebedyev A. A., Novikov N. V.—*Mechan. Behaviour of Mater.*, 1. Kyoto, Japan, 1972.
583. Lebedyev A. A., Novikov N. V. *Papers contributed to the In-*

- tern. Symp. on Foundations of Plasticity, August—September, 1972. Noordhoff Intern. Publishing, Leyden, Netherlands, 1973.
584. Levy N. et al.—Intern. J. of Fract Mech., 1971, 7, 2.
585. Ludwik R.—Elemente der technologischen Mechanik. Berlin, 1909.
586. Majer I.—Feste Stoffe. Öster. Ing.—Archiv, 1950, 2, 4.
587. Marin I.—Appl. Mech., 1937, 4, 2.
588. Marin I.—J. Franklin Inst., 1949, 248, 3.
589. Marin I. Mechanical Properties of Materials and Design. McGraw—Hill Book Company, Inc. New York and London, 1942.
590. Marin I.—Proc. Internat. Conf. Fatigue Metals. London—New York, 1956.
591. Marin I., Hu L.—Trans. ASME, 1953, 75, 6.
592. Marin I., Hu L.—Trans. ASME, 1956, 78, 3.
593. Marin I., Hu L., Hamburg I.—Trans. ASM, 1953, 45.
594. Marin I., Sauer I.—J. Franklin Inst., 1953, 256, 2.
595. Marin I., Wiseman H.—Metals, Sec. 2, 1953, 5, 9.
596. Massonet C.—Proc. ASTM, 1956, 56.
597. Matsuura M.—Proc. 9-th Japan Nat. Congr. Appl. Mech. Tokyo, 1960.
598. Miner M. A.—Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1945, 12, 3.
599. Mises R.—Z. angew. Math. und Mech., 1928, 8, 5.
600. Mohr O.—Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, 2. Aufl., Berlin, 1914.
601. Mohr O.—Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes. Civil Ingenieur, 1882.
602. Mönch E., Golster D.—J. Appl. Phys., 1963, 14, 11.
603. Nadai A.—Appl. Phys., 1937, 2.
604. Naghdi P. M., Essenburg F., Koff W.—Appl. Mech., 1958, 25, 2.
605. Naghdi P. M., Rowley I. C.—Mech. and Phys. Solids, 1954, 3.
606. Navier M. H., Duguet C.—Limite d'Elasticité et Resistance à la Rupture, Paris, 1885.
607. Novikov N. V. et al. Drie Intern. Tagung über den Bruch. München, April, 1973. Verein Deutscher Eisenhüttenleute, Düsseldorf, 1973.
608. Ohnami Masateru, Yamakage Tetsuro. — J. Soc. Mater. Sci. Jap., 1972, 21, 222.
609. Orwan E. O.—Fatigue and Fracture Metals, Wiley, 1950, 4.
610. Osgood, Washington.—Appl. Mech., 1947, 14, 2.
611. Palmgren B. F.—Z. VDI, 1924, 68, 14.
612. Parker I.—Trans. ASME, Ser. E, 1964, 4.
613. Pełczyński.—Arch. Bud. Maszyn, 1954, 1.
614. Pełczyński.—Przegl. Mech., 1951, 10.
615. Petch N. J.—J. Iron and Steel Inst., 1953, 174, 25.
616. Phillips A., Tang Luh—Ling.—Inst. J. Solids and Struct., 1972, 8, 4.
617. Prandtl L.—Z. angew. Math. und Mech., 1928, 8, 885—1006.
618. Rendulic L.—Bauingenieur, 1938, 19, 159—164.
619. Resal I. Résistance des Matériaux. Paris, 1898.
620. Richard E.—J. of the Amer. Ceramic Society. Ceramic Abstracts, 1965, 48, 10.
621. Rinebolt I. A., Harris W. I.—Trans. of ASM, 1951, 43.
622. Rossm., Eihinger A.—Verhandl. d. II. Intern. Kongr. f. tech. Mech., Zürich, 1926.
623. Sachs G.—Z. Vereines deutsch. Ingr., 1928, 72.
624. Sachs G.—War Metallurgy (NDRC) Report, 1945, Ser. M487.
625. Saint-Venant B.—Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1871, 73.
626. Sawert V.—Z. VDI., 1943, 87.

- 
627. Schleicher F.— Z. angew. Math. und Mech., 1925, 5, 6.  
628. Siegfried W.— Trans. ASME, 1943, 65.  
629. Sleswyn A. W.— Blue Brittle Ingot Iron. Acta Metallurgica, 1960, 8.  
630. Smith, Warthington.— Phil. Mag., 1964, 9, 98, 211.  
631. Soderberg C. R.— Trans. ASME, 1933, 55.  
632. Sondal — Festigkeitsbedingungen. Leipzig, 1925.  
633. Stroh A. N.— Advances in Physics, 1957, 6, 24.  
634. Stulen F., Gummings H., Schulte W.— Machine Design, 1961, 33, 14.  
635. Sully A. H.— Metal Industry, 1949, 75, 24.  
636. Thomas T. V.— Intern. J. of Eng. Sci., 1967, 5, 8.  
637. Torre C.— Schweiz. Arch. angew. Wiss. und Techn., 1949, 15, 4—5.  
638. Walter G.— Welding, J. November, 1948, 1.  
639. Weibull W.— Proc. Royal Swed. Inst. Eng. Research, 1939, 151.  
640. Weigler H., Becker C.— Bauingenieur, 1961, 36, 10.  
641. Zakrzewski.— Prace Wrocł. Tow. Nauk., Wrocław, 1958.  
642. Życzkowski M.— Rozprawy inżynierskie, 1960, 8, 4.  
643. Yerkovich L. A., Guarnier G. J.— Proc. ASTM, 1955, 55.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
<i>Раздел первый</i>	
<b>Механика твердых деформируемых тел и прочность материалов при сложном напряженном состоянии</b>	
<i>Глава I.</i>	Основные положения теории напряжений и деформаций . . . . . 11
§ 1.	Гипотезы и принципы механики твердых деформируемых тел . . . . . 11
§ 2.	Напряженное состояние в точке. Тензор напряжений. . . . . 13
§ 3.	Деформированное состояние в окрестности точки. Тензор деформаций . . . . . 22
§ 4.	Октаэдрические напряжения и деформации . . . . . 27
§ 5.	Геометрическая интерпретация напряженного и деформированного состояний . . . . . 31
<i>Глава II.</i>	Соотношения между напряжениями и деформациями при сложном напряженном состоянии . . . . . 39
§ 1.	Линейно-упругое тело . . . . . 39
§ 2.	Напряжения и деформации в нелинейно-упругом и неупругом телах . . . . . 44
§ 3.	Влияние времени и скорости деформирования . . . . . 51
§ 4.	Упругая энергия и работа пластической деформации . . . . . 58
<i>Глава III.</i>	Механические теории предельного состояния . . . . . 61
§ 1.	Пластическая деформация и разрушение . . . . . 61
§ 2.	Условия прочности. Предельные поверхности . . . . . 65
§ 3.	Теории прочности, интерпретирующиеся многогранниками . . . . . 68
§ 4.	Теории прочности, интерпретирующиеся поверхностями вращения . . . . . 75
§ 5.	Объединенные теории прочности . . . . . 85
§ 6.	Сравнительный анализ теорий прочности . . . . . 87
<i>Глава IV.</i>	Обобщение условий пластичности и хрупкого разрушения . . . . . 94
§ 1.	Параметры напряженного состояния, определяющие общие свойства предельных поверхностей . . . . . 94
§ 2.	Форма предельной поверхности в девиаторной плоскости . . . . . 97



	§ 3. Форма предельной кривой в плоскости $\mu_\sigma = \text{const}$	102
	§ 4. Обобщенные критерии прочности	108
	§ 5. Достоверность обобщенных критериев	121
<b>Глава V.</b>	<b>Критерий прочности структурно-неоднородных материалов</b>	127
	§ 1. Феноменологические модели механизма разрушения	127
	§ 2. О двойственной природе прочности структурно-неоднородных материалов	134
	§ 3. Статистический подход к оценке прочности структурно-неоднородных материалов. Критерий предельного состояния	137
	§ 4. Анализ критерия и его геометрическая интерпретация	140
	§ 5. Сопоставление теоретических и экспериментальных данных	150
<b>Глава VI.</b>	<b>Факторы, влияющие на предельное состояние материала</b>	155
	§ 1. Анизотропия материала. Критерии прочности анизотропных тел	155
	§ 2. Температурно-временные факторы. Критерии ползучести и длительной прочности при сложном напряженном состоянии	165
	§ 3. Режим нагружения. Критерии усталостной прочности при сложном напряженном состоянии	180
	§ 4. Градиент напряжений и масштабный фактор	198
<b>Р а з д е л в т о р о й</b>		
	<b>Экспериментальные исследования прочности материалов при сложном напряженном состоянии</b>	207
<b>Глава VII.</b>	<b>Методы механических испытаний материалов при сложном напряженном состоянии</b>	209
	§ 1. Испытания материалов в обоймах и камерах высокого давления	209
	§ 2. Испытания образцов с плоскими гранями	215
	§ 3. Испытания материалов на трубчатых образцах	219
	§ 4. Испытания плоских образцов и элементов сосудов при двухосном растяжении	234
	§ 5. Другие методы статических испытаний материалов при сложном напряженном состоянии	241
	§ 6. Методы испытания материалов на усталость	244
	§ 7. Вопросы тензометрирования	247
<b>Глава VIII.</b>	<b>Механические испытания материалов при сложном напряженном состоянии в условиях высоких и низких температур</b>	255
	§ 1. Особенности методики испытаний при высоких температурах	255
	§ 2. Особенности методики испытаний при низких температурах	258
	§ 3. Установки типа СНТ для механических испытаний материалов в широком диапазоне температур	266

<i>Глава IX.</i>	Направления экспериментальных исследований прочности материалов при сложном напряженном состоянии и основные результаты . . . . .	275
§ 1.	Предварительные замечания . . . . .	275
§ 2.	Проверка гипотез теорий пластичности . . . . .	279
§ 3.	Проверка теоретических соотношений между напряжениями и деформациями. Влияние истории нагружения . . . . .	289
§ 4.	Исследование условий предельных состояний материалов . . . . .	295
<i>Глава X.</i>	Закономерности деформирования материалов при сложном напряженном состоянии в условиях низких и высоких температур . . . . .	302
§ 1.	Исследуемые материалы . . . . .	302
§ 2.	Анализ экспериментальных кривых деформирования . . . . .	305
§ 3.	О коэффициенте поперечной деформации материалов . . . . .	314
§ 4.	Пропорциональность девиаторов напряжений и деформаций при низких температурах . . . . .	323
§ 5.	Обобщенные кривые деформирования . . . . .	328
§ 6.	Закономерности низкотемпературного деформирования металла при сложном нагружении . . . . .	336
<i>Глава XI.</i>	Результаты исследования предельных состояний материалов при низких и высоких температурах . . . . .	346
§ 1.	Критерии пластичности и предельного сопротивления углеродистых сталей в условиях низких температур . . . . .	346
§ 2.	Влияние низких температур на прочность серого чугуна при сложном напряженном состоянии . . . . .	351
§ 3.	Текучесть и разрушение алюминиевых сплавов и хромоникелевых сталей при низких температурах в условиях сложного напряженного состояния . . . . .	357
§ 4.	Характер разрушения трубчатых образцов при нормальной и низких температурах . . . . .	363
§ 5.	Результаты испытаний материалов при высоких температурах . . . . .	366
§ 6.	Длительная прочность материалов при сложном напряженном состоянии . . . . .	373
§ 7.	Влияние вида напряженного состояния на ресурс пластичности конструкционных материалов при низких температурах . . . . .	381
§ 8.	Анизотропия механических свойств материалов при низких температурах . . . . .	386
Литература . . . . .		394

*Георгий Степанович Писаренко*

*Анатолий Алексеевич Лебедев*

ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ПРОЧНОСТЬ  
МАТЕРИАЛОВ  
ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ  
СОСТОЯНИИ

Печатается по постановлению ученого совета  
Института проблем прочности АН УССР

Редактор *Л. Е. Зборовская*

Художественный редактор *В. М. Тепляков*

Оформление художника *Г. М. Балюна*

Технический редактор *Б. М. Кричевская*

Корректоры *Э. Я. Белокопытова, Р. С. Коган*

Слано в набор 18.II 1976 г. Подписано к печати 7.IX 1976 г. БФ 08019. Иад. № 311. Тираж 2450. Бумага № 1, 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Условн. печ. листов 26. Учетно-изд. листов 27,54. Цена 2 руб. 97 коп. Зак. 6—501.

Издательство «Наукова думка», Киев, Решина, 3.

Главное предприятие республиканского производственного объединения «Полиграфкинига» Госкомиздата УССР, г. Киев, ул. Довженко, 3.