

# **Лінійні неперервні функціонали**

**Означення 9.1.1.** Нехай  $X$  – лінійні нормовані простори. *Функціоналом* називається довільне відображення  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Означення 9.1.2.** Функціонал  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  називається *лінійним функціоналом*, якщо  $\forall x, y \in X$  та  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  виконується умова  $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ . Прикладами лінійних функціоналів є наступні відображення:

$$f: l_2 \rightarrow \mathbb{R}, x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots), f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2.$$

$$f: C[a; b] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_a^b x(t) dt; f(x) = x(a).$$

**Означення 9.1.3.** Функціонал  $f$  називається *неперервним в точці*  $x_0 \in X$ , якщо він є неперервним відображенням, тобто якщо

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X: x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow f(x_0).$$

Як і для операторів, з неперервності лінійного функціонала в одній точці випливає його неперервність на всьому просторі. Якщо функціонал неперервний на всьому просторі, будемо називати його просто *неперервним*.

Зрозуміло, що для неперервних функціоналів також виконується умова

$$f\left(\lim_n x_n\right) = \lim_n f(x_n).$$

**Означення 9.1.4.** Лінійний функціонал  $f$  називається *обмеженим*, якщо  $\exists c > 0$   
 $\forall x \in X \quad |f(x)| \leq c\|x\|$ .

Зауважимо, що оскільки норма в просторі  $\mathbb{R}$  задається як модуль, це означення є частковим випадком означення 7.1.4. норми лінійного неперервного оператора.

**Теорема 9.1.5.** Лінійний функціонал є неперервним тоді та тільки тоді, коли він обмежений.

**Означення 9.1.6.** *Нормою лінійного неперервного функціонала  $f$  називається число*

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}. \quad (9.1)$$

З цього означення випливає, що  $\forall x \in X \quad |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$ . (9.2)

Більше того,  $\|f\|$  – це інфімум констант  $c$ , для яких нерівність  $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$  виконується при всіх  $x \in X$ . Таким чином, можна дати інше означення норми лінійного неперервного функціонала.

**Означення 9.1.7.** *Нормою лінійного неперервного функціонала  $f$  називається число*

$$\|f\| = \inf\{c > 0: \forall x \in X \quad |f(x)| \leq c \cdot \|x\|\}.$$

**Приклад 9.1.8.** Перевірити лінійність, неперервність функціонала  $f$  та знайти його норму.

а)  $X = l_1, x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots), f(x) = x_1 + x_2.$

Перевіримо лінійність цього функціонала за означенням: нехай  $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) \in l_2, y = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots) \in l_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$   
тоді  $f(\alpha x + \beta y) = \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \beta y_1 + \beta y_2 =$   
$$= \alpha f(x) + \beta f(y),$$

тобто функціонал  $f$  – лінійний, отже, замість неперервності можна перевіряти його обмеженість.

Нехай  $x \in l_1$ , тоді

$$|f(x)| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \|x\|,$$

тобто  $|f(x)| \leq \|x\|$ , що означає обмеженість функціонала та дає оцінку для його норми :  $\|f\| \leq 1$ .

З нерівності (9.2) випливає що для лінійного обмеженого функціонала  $f$  вірна нерівність

$$\forall x \in l_2 \quad |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|.$$

Виберемо  $x_0 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$ . Для нього також

$$|f(x_0)| \leq \|f\| \cdot \|x_0\|.$$

Але  $\|x_0\| = 1$ ,  $f(x_0) = 1$  тобто  $|f(x_0)| = 1$ , значить,  $1 \leq \|f\| \cdot 1$ .

Таким чином, одночасно виконуються дві нерівності:  $1 \leq \|f\|$  та  $\|f\| \leq 1$ ,

б) Розглянемо тепер той же самий функціонал, але в просторі  $X = l_2$ .

Нехай  $x \in l_2$ , тоді, користуючись нерівністю Коші-Буняковського  $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |x_1 + x_2| = ((1, 1, 0, 0, \dots), (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)) \leq \\ &\leq \|(1, 1, 0, 0, \dots)\| \|(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)\| = \sqrt{2} \|x\|, \end{aligned}$$

тобто  $|f(x)| \leq \sqrt{2} \|x\|$ , що означає обмеженість функціонала та дає оцінку для його норми :  $\|f\| \leq \sqrt{2}$ .

В нерівності  $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$  виберемо  $x_0 = (1, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ . Для нього також

$$|f(x_0)| \leq \|f\| \cdot \|x_0\|.$$

Але  $\|x_0\| = \sqrt{2}$ ,  $f(x_0) = 1 + 1 = 2$  тобто  $2 \leq \|f\| \cdot \sqrt{2}$ .

Таким чином, одночасно виконуються дві нерівності:  $\sqrt{2} \leq \|f\|$  та  $\|f\| \leq \sqrt{2}$ , тобто  $\|f\| = \sqrt{2}$ .

$$\text{в) } X = C[0,1], f(x) = \int_0^1 (t+1)x(t)dt.$$

Перевіримо його лінійність: нехай  $x(t), y(t) \in C[0,1]$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , тоді

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \int_0^1 (t+1)(\alpha x(t) + \beta y(t))dt = \alpha \int_0^1 (t+1)x(t)dt + \\ &+ \beta \int_0^1 (t+1)y(t)ds = \alpha f(x) + \beta f(y), \end{aligned}$$

тобто функціонал  $f$  – лінійний.



Замість доведення неперервності функціонала  $f$  доведемо його обмеженість: нехай  $x(t) \in C[0,1]$ , тоді


$$|f(x)| = \left| \int_0^1 (t+1)x(t)dt \right| \leq \int_0^1 (t+1)|x(t)|dt \leq \int_0^1 (t+1) \max_{s \in [0,1]} |x(s)|dt = \|x\| \int_0^1 (t+1)dt = \frac{3}{2} \|x\|, \text{ тобто функціонал } f \text{ обмежений, та } \|f\| \leq \frac{3}{2}.$$

Для функціонала  $f$  виконується нерівність  $\forall x \in C[0,1] \quad |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$ . Виберемо  $x_0(t) \equiv 1 \in C[0,1]$ , тоді  $|f(x_0)| \leq \|f\| \cdot \|x_0(t)\|$ .

Але  $\|x_0(t)\| = \max_{t \in [0,1]} |x_0(t)| = 1$ ,  $f(x_0) = \int_0^1 (t+1)dt = \frac{3}{2}$ . Отже,  $\frac{3}{2} \leq \|f\| \cdot 1$ .

З цієї нерівності та з того, що  $\|f\| \leq \frac{3}{2}$ , випливає що  $\|f\| = \frac{3}{2}$ .

Нагадаємо, що символом  $\mathcal{L}(X, Y)$  ми позначаємо сукупність лінійних неперервних (обмежених) операторів, що діють між просторами  $X, Y$ . У випадку  $Y = \mathbb{R}$  простір  $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$  позначається  $X^*$  та називається простором, спряженим до  $X$ .

 **Означення 9.2.1.** *Спряженим* до простору  $X$  називається простір лінійних неперервних функціоналів, заданих на  $X$ .

Оскільки спряжений простір  $X^*$  є частковим випадком простору  $\mathcal{L}(X, Y)$ , він також є нормованим простором з нормою, що задається формулою (9.1). Більше того, оскільки простір дійсних чисел  $\mathbb{R}$  є банаховим, з теореми 7.2.2. випливає наступний результат.

**Теорема 9.2.2.** Спряжений простір  $X^*$  до нормованого простору  $X$  є банаховим простором.

**Теорема 9.2.7.** (Ріса). Нехай  $H$  — гільбертів простір. Тоді для будь-якого функціонала  $f \in H^*$  існує єдиний елемент  $u \in H$  такий, що  $\forall x \in H$

$$f(x) = (x, u). \quad (9.5)$$

При цьому  $\|f\| = \|u\|$ . Зворотно, для будь-якого  $u \in H$  формула (9.5) визначає функціонал  $f$  з нормою  $\|f\| = \|u\|$ .

**Приклад 9.2.8.** Перевірити лінійність, неперервність функціонала  $f$  та знайти його норму, якщо  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in l_2$ ,  $f(x) = x_1 + 3x_2 - x_4$ . Оскільки  $l_2$  — гільбертів простір, застосуємо теорему Рісса, тобто подамо заданий функціонал у вигляді скалярного добутку  $f(x) = 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + (-1) \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + \dots = (x, u)$ , де  $u = (1, 3, 0, -1, 0, 0, \dots)$ . Зрозуміло, що  $u \in l_2$ . Отже, функціонал є лінійним та неперервним, а його норму знаходиться за формулою  $\|f\| = \|u\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$ .

**Приклад 9.2.9.** Перевірити лінійність, неперервність функціонала  $f$  та знайти його норму, якщо  $x(t) \in L_2[0,1]$ ,  $f(x) = \int_{[0, \frac{1}{2}]} x(t)(t+1)d\mu$ . Знову застосуємо теорему Рісса та подамо функціонал у вигляді скалярного добутку

$$f(x) = (x, u), \text{ де } u(t) = \begin{cases} t+1, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & t \notin [0, \frac{1}{2}] \end{cases}. \text{ Оскільки функція } u(t) \text{ майже скрізь}$$

неперервна, вона належить просторові  $L_2[0,1]$ , тобто заданий функціонал є лінійним та неперервним. А його норма дорівнює  $\|f\| = \|u\| =$

$$\sqrt{\int_{[0, \frac{1}{2}]} (t+1)^2 d\mu} = \sqrt{\int_0^{\frac{1}{2}} (t+1)^2 dt} = \sqrt{\frac{19}{24}}.$$

