

## ТЕРТЯ В МЕХАНІЗМАХ

### 14.1 Види тертя

Питання природи сил тертя до цього часу вивчене недостатньо.

Експериментальні дослідження свідчать, що тертя являє собою складний комплекс механічних, фізичних та хімічних явищ, до того ж ті чи інші явища переважають залежно від умов, за яких відбувається процес тертя.

Розглянемо елементарні відомості з теорії тертя, необхідні для розв'язання найпростіших задач ТММ.

Розрізняють два основних види тертя: сухе і рідинне.

Якщо виступаючі нерівності поверхонь  $A$  і  $B$  (рис. 8.1) безпосередньо стикаються одне з одним, то такий вид тертя називається сухим.

Іноколи розрізняють ще два проміжних види тертя: напівсухе і напіврідинне.

Розглянемо схематично ці явища.

Якщо розглянути під великим збільшенням поверхні, що труться, виявляємо, що ці поверхні не є гладкі, а є шорсткі і вкриті значною кількістю нерівностей.

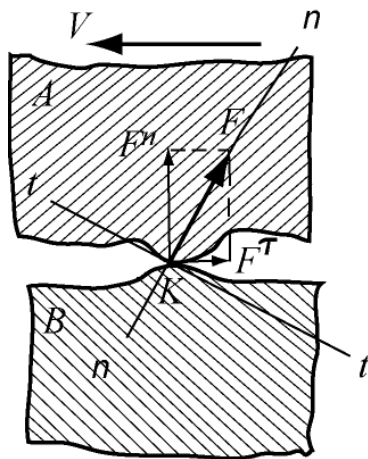


Рисунок 8.1- Схема сухого Тертя

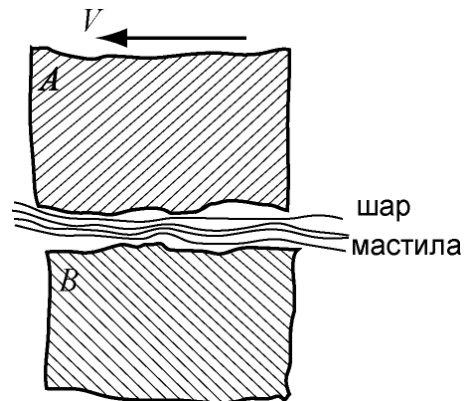


Рисунок 8.2 - Схема рідинного тертя

Якщо в точці дотику  $K$  (рис. 8.1) прикласти опорні реакції  $F$ , спрямовані по нормалі до елементарних площинок дотику, і розкласти їх на складові  $F^n$  - нормальні і  $F^\tau$  - тангенціальні, то нормальні складові будуть урівноважуватись заданими нормальними навантаженнями, а тангенціальні

складові  $F^{\tau}$  в сумі складуть деяку силу опору відносному переміщенню поверхонь  $A$  і  $B$ . Це і буде сила тертя.

За умови рідинного тертя (рис. 8.2) силами тертя будуть сили опору зсуву окремих шарів мастила.

Напівсухим тертям називається вид тертя, за якого найбільш виступаючі шорсткості не розділяються шаром мастила і безпосередньо контактують.

Різниця між напівсухим і напіврідинним тертям головним чином полягає в тому, який з основних видів тертя переважає.

Явища сухого і рідинного тертя за своєю природою зовсім різні, тому різними є і методи урахування сил тертя в механізмах. У фрикційних, пасових та інших передачах спостерігається сухе тертя; у змащених підшипниках, підп'ятниках тощо – рідинне тертя, яке інколи переходить в напівсухе чи навіть сухе (на час пуску машини). Внаслідок цього необхідно вивчати обидва види тертя.

За відносним рухом розрізняють тертя ковзання та тертя кочення.

Тертя ковзання має місце при відносному русі двох тіл, швидкості яких у точці контакту різні. Воно обумовлене двома факторами:

- шорсткістю поверхонь,
- силами міжмолекулярної взаємодії між двома тілами.

Тертя кочення виникає у вищих кінематичних парах, швидкості яких у точка дотику однакові за величиною та напрямком. Воно обумовлене:

- деформацією реальних тіл,
- явищем переміщень на поверхні тіл,
- явищем міжмолекулярної взаємодії,
- наявністю відносного ковзання.

## **14.2 Основні закони тертя ковзання незмащених тіл**

### **14.2.1 Тертя спокою**

Розглянемо основні закономірності, що характеризують явище тертя ковзання незмащених тіл.

Нехай тіло, вага якого  $G$ , знаходиться в спокої на похилій площині, яка має кут  $\alpha$  до горизонту (рис.8.3).

Розкладаємо силу  $G$  на нормальну і тангенціальну складові:  $G \cos \alpha$  і  $G \sin \alpha$ ;  $F^n$  - нормальна реакція похилої площини;  $F_{m_{cn}}$  - сила, яка виникає внаслідок тертя, спрямована паралельно площині.

Для рівноваги тіла (впливом перекидного моменту нехтуємо) необхідно, щоб виконувались такі умови:

$$F_{m_{cn}} = G \sin \alpha ; F^n = G \cos \alpha \quad (8.1)$$

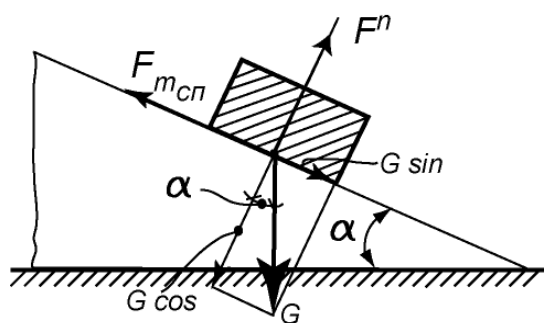


Рисунок 8.3 - Тертя на похилій площині

із чого випливає:

$$\frac{F_{m_{cn}}}{F^n} = \frac{G \sin \alpha}{G \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{або} \quad F_{m_{cn}} = F^n \operatorname{tg} \alpha$$

Спостереження показують, що рівновага можлива, поки кут  $\alpha$  не перебільшує деякого граничного значення  $\varphi_{cn}$ , де  $\varphi_{cn}$  - кут тертя спокою.

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \varphi_{cn}.$$

Позначимо:

$$\operatorname{tg} \varphi_{cn} = f_{cn},$$

де  $f_{cn}$  - коефіцієнт тертя спокою.

Тоді:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f_{cn}$$

Сила тертя спокою:

$$F_{m_{cn}} \leq f_{cn} F^n$$

Тертя, яке відбувається за умови відносного спокою тіл, що стикаються, називається тертям спокою або статичним тертям.

### 14.2.2 Тертя руху

Якщо тіла, що стикаються, знаходяться у відносному русі, то маємо не тертя спокою, а тертя руху або кінетичне тертя.

На відміну від сили тертя спокою, сила тертя руху виконує певну роботу.

Наприкінці XVIII століття французький вчений Кулон опублікував наукову працю, в якій він на основі власних спостережень та досліджень інших вчених (зокрема Амонтон) склав такі положення:

- сила тертя ковзання пропорційна нормальному тиску;
- тертя залежить від матеріалів та стану поверхонь, що труться;
- тертя майже не залежить від величини відносної швидкості тіл, що труться;
- тертя не залежить від величини поверхонь дотику тіл, що труться;
- тертя спокою більш за тертя руху;

- тертя збільшується із збільшенням часу попереднього контакту поверхонь, що стикаються.

На основі подальших досліджень виявлено, що ці положення Кулона справедливі лише відносно певних матеріалів і в деяких межах зміни швидкостей та навантажень.

### 14.3 Сучасні положення про сили сухого тертя

Залежність сил тертя від нормального тиску має такий вигляд

$$F_m = A + f_{ков} F^n$$

де  $A$  – стала тертя, яка залежить не від тиску, а від здатності до попереднього зчеплення; вона характеризує “причепливість” поверхонь, що стикаються;

$f_{ков}$  – коефіцієнт тертя ковзання;

$F^n$  – сила нормального тиску.

Розділимо обидві частини рівняння на  $F^n$ :

$$\frac{F_m}{F^n} = \frac{A}{F^n} + f_{ков}$$

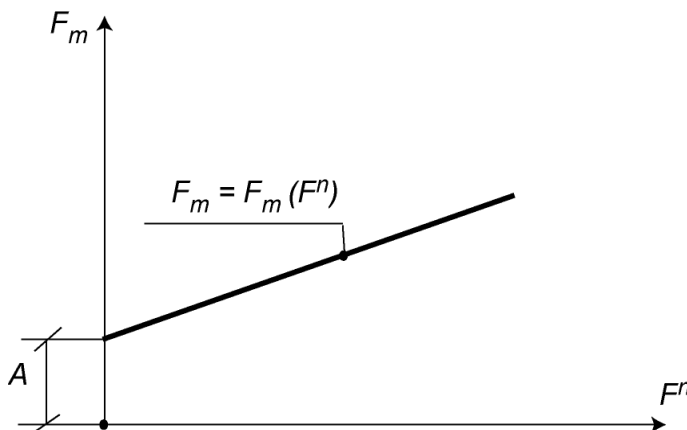


Рисунок 8.4 - Залежність сили тертя від сили нормального тиску

Але якщо  $F_m = f F^n$   $F_m = f F^n$ , то  $\frac{F_m}{F^n} = f$ , тоді  $f = \frac{A}{F^n} + f_{ков}$ .

Графік залежності коефіцієнта тертя від сили нормального тиску наведено на рис.8.5.

На практиці часто “причепливістю” нехтують, користуючись формулою:

$$F_m = f F^n$$

тоді графік залежності  $F_m = F_m(F^n)$  має вигляд, наведений на рис.8.6.

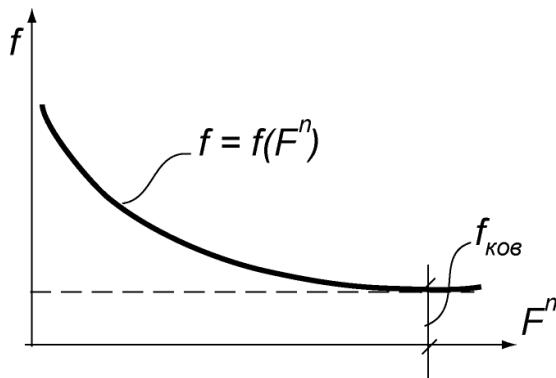


Рисунок 8.5 - Залежність коефіцієнта тертя від сили нормального тиску

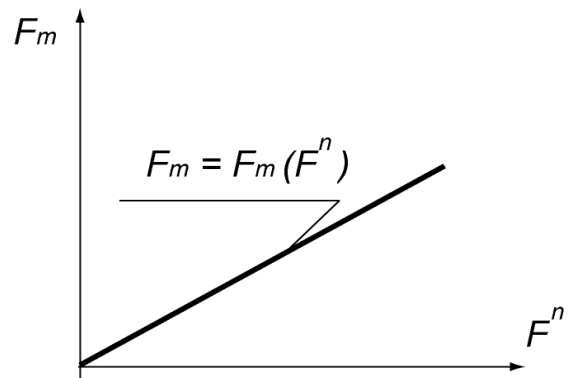


Рисунок 8.6 - Розрахункова залежність сили тертя від сили нормального тиску

Коефіцієнт тертя  $f$  визначається експериментальним шляхом і в розрахунках вважається сталою величиною.

Дослідження показують, що  $f$  для більшості матеріалів зменшується за умови збільшення швидкості ковзання (рис.8.7), за значних швидкостей  $f = const$ .

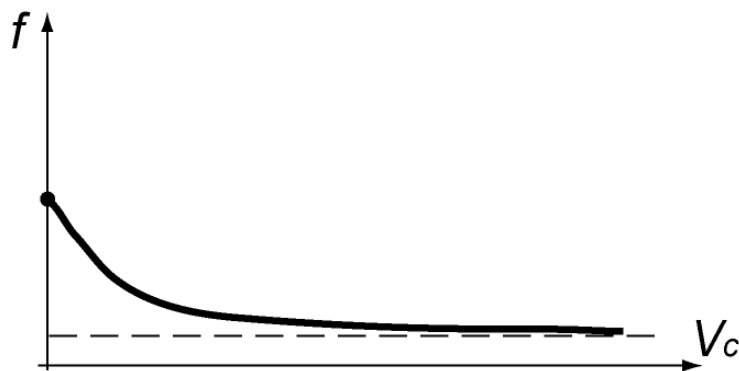


Рисунок 8.7 - Залежність коефіцієнта тертя від швидкості ковзання

Остаточно положення про сили сухого тертя формулюються таким чином:

- коефіцієнт тертя можна вважати сталим, а сили тертя прямо пропорційними нормальним лише у певному діапазоні швидкостей та навантажень;
- сили тертя завжди спрямовані у бік, протилежний відносним швидкостям;
- тертя спокою в початковий момент руху в більшості випадків дещо більше за тертя руху;
- із збільшенням швидкості руху сила тертя в більшості випадків зменшується, наближуючись до деякого сталого значення;
- із підвищенням питомого тиску сила тертя в більшості випадків збільшується;
- із збільшенням часу попереднього контакту сила тертя збільшується.

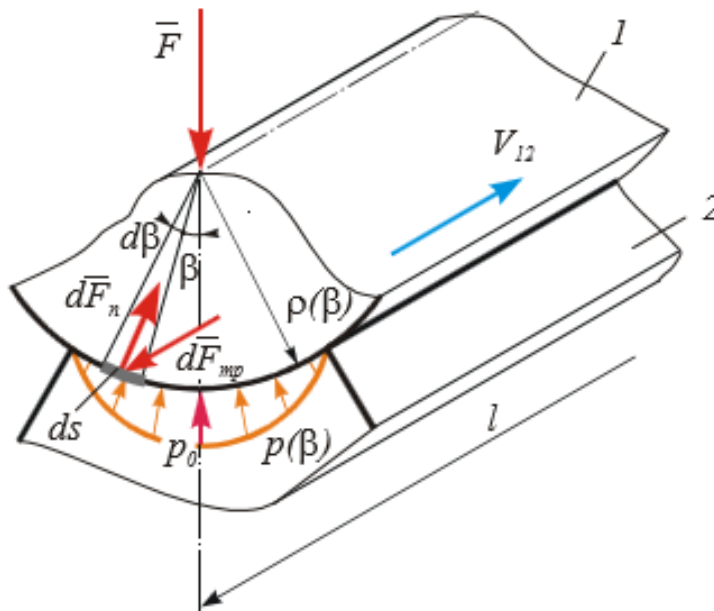
## 14.4 Тертя в кінематичних парах

В уточнених силових розрахунках механізмів виникає потреба врахування сил тертя в кінематичних парах.

Розглянемо, як визначаються сили тертя в нижчих кінематичних парах: поступальній, обертальній та гвинтовій.

### 14.4.1 Тертя в нижчих кінематичних парах

Окрім перелічених факторів, які впливають на величину коефіцієнта тертя, слід відзначити також форму і розташування елементів кінематичної пари. Для різних їх типів визначають *зведені коефіцієнти тертя*. Розглянемо поступальну кінематичну пару, утворену ланками 1 і 2 (рис.8.8), що контактують по поверхні довільної форми.



1.

Рисунок 8.8 - Поступальна пара з поверхнею контакту довільної форми

Довжина поверховості контакту  $l$ . Радіус кривини поверхні контакту в довільній точці позначимо  $\rho(\beta)$ . Виділимо елементарну площадку контакту  $l \cdot ds$ . Сила тертя на ній

$$dF_{mp} = f dF_n,$$

$$dF_n = p(\beta) l ds = p(\beta) l \rho(\beta) d\beta$$

Тобто

$$dF_n = f p(\beta) l \rho(\beta) d\beta \quad (11.4)$$

Результуюча сила тертя:

$$F_{mp} = fl \int p(\beta) \cdot \rho(\beta) d\beta \quad (11.5)$$

### 14.4.1.1 Тертя в поступальних парах

#### 14.4.1.1.1 Умова руху повзуна

Нехай повзун  $A$  навантажений деякою силою  $F$ , результуючою всіх сил, діючих на повзун. Також відомі коефіцієнти тертя спокою  $f_{cn}$  і ковзання  $f$  (рис. 6.8).

Розглянемо, за яких умов повзун  $A$  почне рухатись по нерухомій напрямній  $B$ , рис.8.9. Для цього перенесемо точку прикладання сили  $F$  в точку  $O$  і розкладемо силу  $F$  на складові  $F'$  та  $F''$ . Кут між напрямом сили  $F$  і нормаллю  $n-n$  позначимо  $\varphi$ .

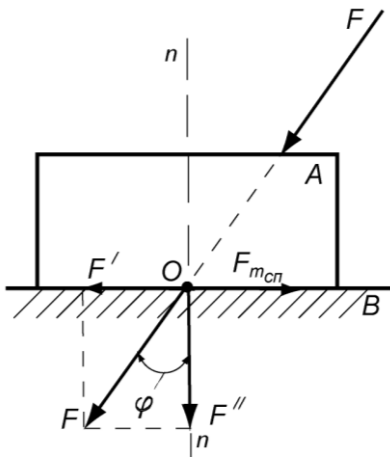


Рисунок 8.9 - До визначення умови руху повзуна

Тоді:

$$F' = F \sin \varphi, \quad F'' = F \cos \varphi$$

Від дії сили  $F''$  поверхні наближуються, а від дії сили  $F'$  повзун намагається зсунутись відносно напрямної.

Сила тертя за Кулоном - Амонтоном:

$$F_{m_{cn}} = F'' f_{cn}$$

Повзун зсунеться з місця в той час, коли  $F' = F_{m_{cn}}$ , де  $F_{m_{cn}}$  - сила тертя спокою.

Підставимо в рівняння для  $F_{m_{cn}}$  значення  $F'$  і  $F''$ :

$$F \sin \varphi = F \cos \varphi f_{cn}$$

Тоді:

$$f_{cn} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi$$

Але  $f_{cn} = \operatorname{tg} \varphi_{cn}$ , отже, повзун виходить зі стану спокою, коли  $\varphi = \varphi_{cn}$ , де  $\varphi_{cn}$  - кут тертя спокою.

Із кулонівських положень відомо, що сила тертя руху менша за силу тертя спокою:  $F_m < F_{m_{cn}}$ , отже, і кут тертя руху менший за кут тертя спокою:  $\varphi < \varphi_{cn}$ .

#### 14.4.1.1.2 Геометрична форма зображення взаємодії сил

Розглянемо умову рівноваги повзуна А, який рухається по напрямній В зі швидкістю  $V = \text{const}$  (рис.8.10).

На повзун діють сили  $F_1$  і  $F_2$ . Сила  $F_1$  прагне змістити повзун вздовж напрямної В, а  $F_2$  притискає повзун до цієї напрямної. У свою чергу, напрямна В діє на повзун нормальною реакцією  $F^n$  і силою тертя  $F_m$ . Відомий кут тертя  $\varphi$ .

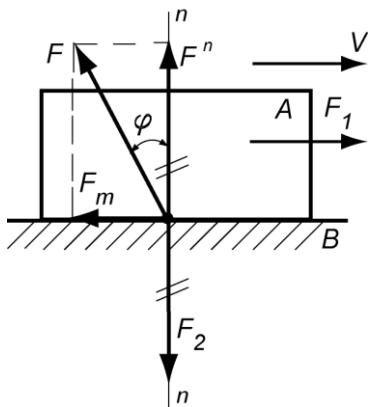


Рисунок 8.10 - До визначення умови рівноваги повзуна

Тоді сила тертя:

$$F_m = F^n f$$

Результуючу силу  $F$  отримуємо складанням сил  $F^n$  і  $F_m$ :

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F^{n^2} + F_m^2} = \sqrt{F^{n^2} + F^{n^2} \cdot f^2} = \sqrt{F^{n^2} + F^{n^2} \cdot \text{tg}^2 \varphi} = \\ &= F^n \sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi} = F^n \frac{1}{\cos \varphi}, \end{aligned}$$

звідки:

$$F \cos \varphi = F^n$$

Отже, з цього випливає, що повна реакція  $F$  відхилена від нормалі  $n-n$  на кут тертя  $\varphi$ .

Висновок: Для урахування сил тертя в поступальній парі необхідно відхилити реакцію  $F$  від напрямку нормалі  $n-n$  на кут тертя  $\varphi$  у бік, протилежний напрямку швидкості  $V$  повзуна відносно напрямної.

Якщо тіло знаходиться в спокої, то реакція  $F$  відхилена від нормалі на кут, менший чи рівний куту тертя спокою  $\varphi_{cn}$  (рис.8.11).



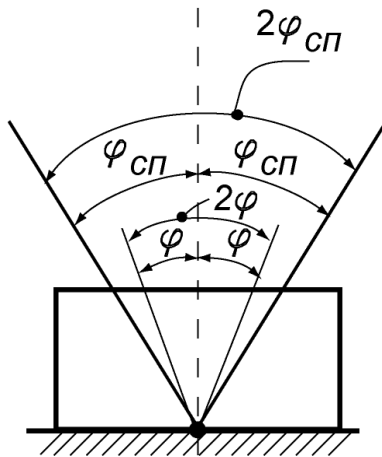


Рисунок 8.11 - Кути тертя спокою  $\varphi_{cn}$

та руху  $\varphi$

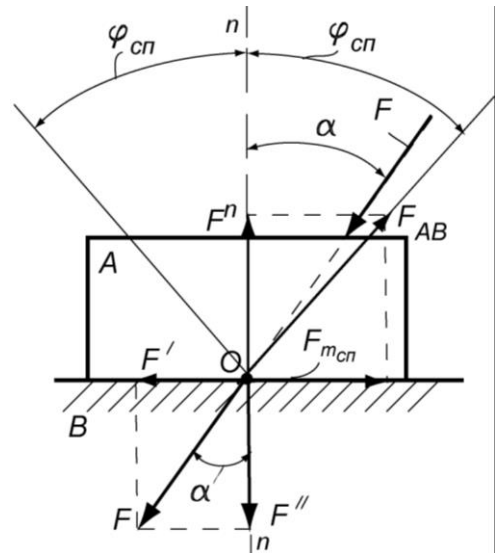


Рисунок 8.12- До визначення умови можливості руху повзуна

#### 14.4.1.1.3 Умови можливості та неможливості руху повзуна

Покажемо тепер, що коли результуюча зовнішня сила  $F$ , яка діє на нерухомий повзун  $A$ , прикладена під кутом  $\alpha$  до нормалі  $n-n$ , який менший від кута тертя спокою  $\varphi_{cn}$ , то повзун  $A$  не може рухатись (рис.8.12).

Розкладаємо силу  $F$  на дві складові:

$$F' = F \sin \alpha$$

$$F'' = F \cos \alpha$$

Сила тертя спокою:

$$F_{m_{cn}} = F'' f_{cn} = F \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi_{cn}$$

Підставимо у цю формулу значення для  $F$  через  $F'$ :

$$F = \frac{F'}{\sin \alpha}$$

Отже:

$$F_{m_{cn}} = \frac{F' \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi_{cn}}{\sin \alpha} = F' \frac{\operatorname{tg} \varphi_{cn}}{\operatorname{tg} \alpha}$$

За умовою  $\varphi_{cn} > \alpha$ , отже,  $\frac{\operatorname{tg} \varphi_{cn}}{\operatorname{tg} \alpha} > 1$ , звідки  $F' < F_{m_{cn}}$ , тобто сила, яка прагне зсунути повзун  $A$  по напрямній В менша за силу тертя спокою.

Якщо  $\varphi_{cn} < \alpha$ , то нерухомий повзун залишається в спокої незалежно від значення сили  $F$ .

Повзун починає переміщуватись, коли  $\alpha \geq \varphi_{cn}$ .

Відкладаємо кут  $\varphi_{cn}$  праворуч та ліворуч від нормалі  $n-n$  (рис.8.13). Тоді кут  $2\varphi_{cn}$  буде обмежувати деяку область рівноваги тіла.

Будь-яка сила, що прикладена в цій області під кутом  $\alpha < \varphi_{cn}$ , не може вивести повзун зі стану спокою.

Якщо надавати силі  $F$  різні напрями в просторі, область рівноваги буде обмежена конусом тертя спокою (рис.8.13) який може бути утворений обертанням кута тертя навколо нормалі  $n-n$  до поверхонь, що дотикаються.

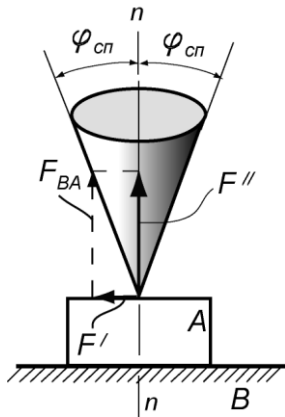


Рисунок 8.13- Конус тертя спокою

Аналогічно, якщо тіло рухається, то напрям сили  $F$  повинен бути по зовні конуса під кутом  $2\varphi_{cn}$ .

#### 14.4.1.2 Тертя руху клинчастого повзуна

На силу тертя в поступальній парі впливає також форма напрямних. В техніці для забезпечення точності поступального руху часто застосовують клинчасті напрямні - в поперечному перерізі мають вигляд симетричного двограневого кута чи жолоба (вони зручні, оскільки автоматично усуваються бічні зазори в поступальній парі). Такий повзун називається клинчастим.

До повзуна  $A$  (рис.8.14) прикладена рушійна сила  $F$ , паралельна вісі жолоба; сила  $F_{AB}$ , перпендикулярна до цієї осі; нормальні реакції  $F_1^n$  і  $F_2^n$ , перпендикулярні до граней жолоба, і дві рівні сили тертя  $F_{m_1}$  і  $F_{m_2}$ , які в сумі являють собою силу тертя  $F_m$ .

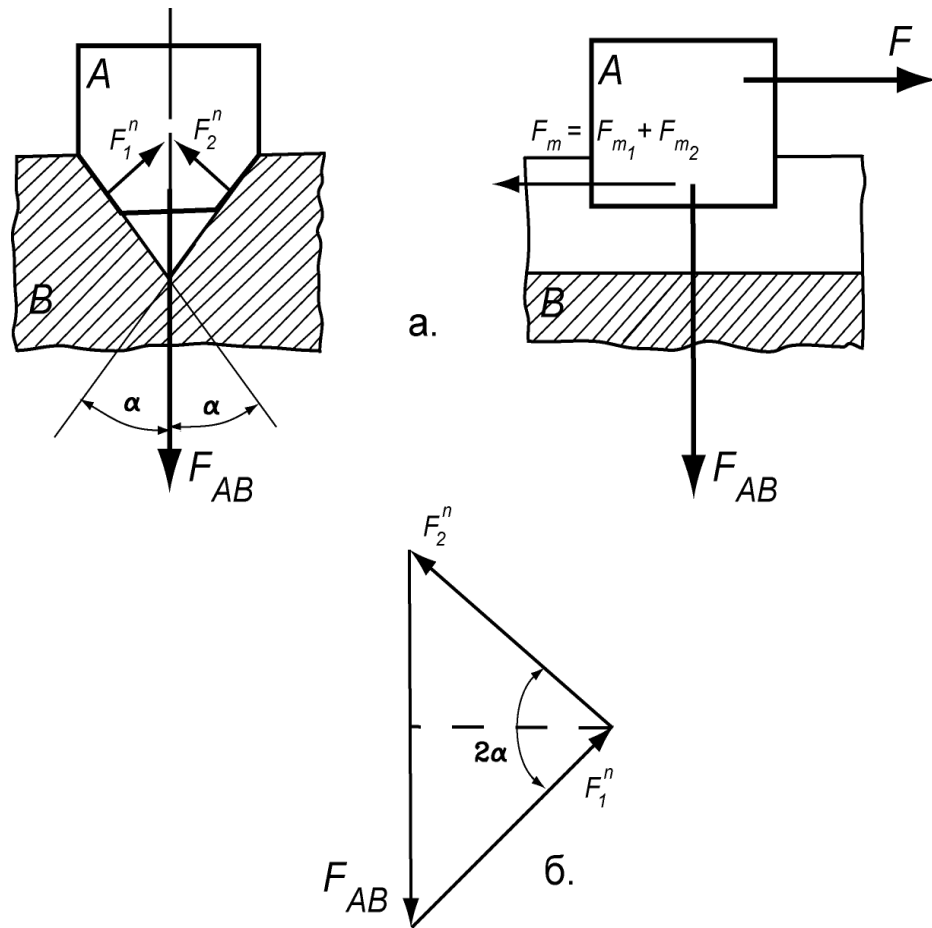


Рисунок 8.14 - Схема сил за умови руху клинчастого повзуна (а) та план сил (б)

$$F_m = (F_1^n + F_2^n) f = 2F_1^n f$$

за умови, що  $F_1^n = F_2^n$ .

Векторне рівняння рівноваги всіх сил у площині:

$$\overline{F_1^n} + \overline{F_2^n} + \overline{F_{AB}} = 0$$

Будуємо план (трикутник) сил за цим рівнянням (рис. 6.13, б).

Із трикутника:

$$2F_1^n = \frac{F_{AB}}{\sin \alpha}$$

тоді:

$$F_m = F_{AB} \frac{f}{\sin \alpha}$$

Або

$$F_m = F_{AB} f'$$

де  $f'$  - коефіцієнт тертя клинчастого повзуна,  $f' = \frac{f}{\sin \alpha}$ .

Отже, коефіцієнт тертя клинчастого повзуна більший за коефіцієнт тертя плоского повзуна в напрямних.

Як видно, в значній мірі можна впливати на величину сили тертя зміною кута між площинами напрямних ( $\alpha$  – половина кута клину). При зменшенні кута  $\alpha$  збільшується сила тертя на бічних поверхнях клину при одній й тій же результуючій нормальній реакції. При застосуванні малих (близьких до нуля) кутів сила тертя збільшується до дуже великих величин (при наближенні клина до нуля сила тертя прямує до нескінченості). Саме це явище призвело до появи терміну «заклинювання».

#### 14.4.1.3 Тертя в гвинтовій кінематичній парі

Розглянемо різьбу, представлену на рис.8.15.

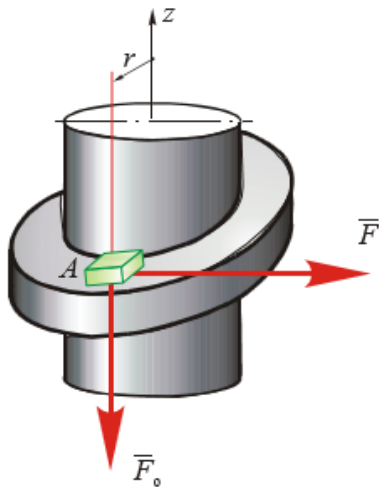
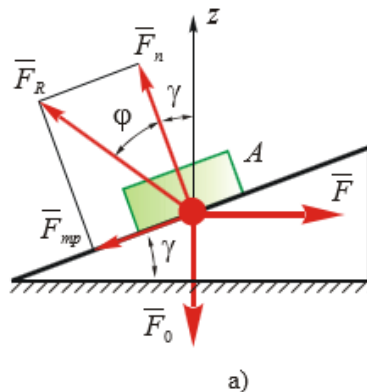


Рисунок 8.15- Гвинтова пара

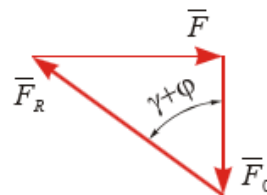
На гайку, представлену елементом  $A$ , діє деяка сила  $F_0$  і момент в площині, перпендикулярній до осі  $z$ . Цей момент представлений силою  $F$ :

$$M = F \cdot r.$$

Щоб гайка була у рівновазі або в стані рівномірного руху вздовж різьби, має виконуватись умова рівноваги сил, що діють на гайку. Розглянемо розгортку різьби (рис. 8.16,а).



а)



б)

Рисунок 8.16 - Гвинтова пара: а – розгортка витка різьби; б – план сил

Умову рівноваги елемента  $A$ , навантаженого системою сил, що сходяться в одній точці, запишемо у вигляді:

$$\vec{F} + \vec{F}_0 + \vec{F}_R = 0 \quad (11.16)$$

Із плану сил (рис.8.16,б)

$$F = F_0 \operatorname{tg}(\varphi + \gamma) \quad (11.17)$$

Тут  $\gamma$  – кут підйому гвинтової лінії.

Отже момент, прикладений до гайки

$$M = F_0 r \operatorname{tg}(\varphi + \gamma). \quad (11.18)$$

Умова (11.17) отримана для випадку, коли гайка рухається проти напрямку сили  $F_0$  (затяжка різьби або підйом вантажу домкратом).

Якщо гайка рухається у напрямку сили  $F_0$  (рис. 11.14), отримаємо

$$F = F_0 \operatorname{tg}(\varphi - \gamma). \quad (11.19)$$

Якщо  $\gamma = \varphi \Rightarrow F = 0$  тобто гайка рухається рівномірно під дією сили  $F_0$  (моменту до гайки прикладати не потрібно).

Якщо  $\gamma > \varphi$  – маємо прискорений рух під дією  $F_0$ .

Якщо  $\gamma < \varphi$  – маємо умову самогальмування. За цієї умови без дії моменту  $M = F \cdot r$  рух гайки неможливий.

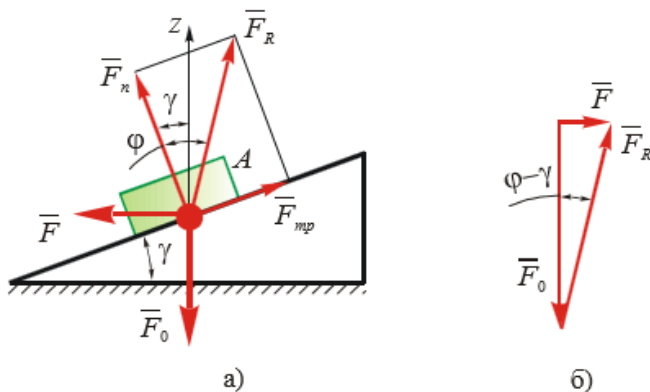


Рисунок 8.17- Гвинтова пара: а – розгортка витка різьби; б – план сил

Прикладами означених вище випадків можуть слугувати дитяча гірка (рис. 8.17, а), сковзало для транспортування вантажу з поверху на поверх (рис.8.17,б) і т.п.

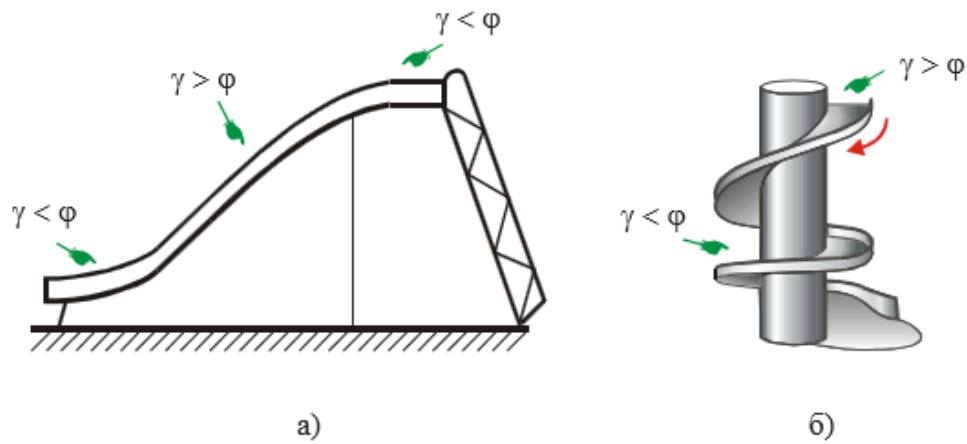


Рисунок 8.18 - Приклади використання на практиці умов самогальмування: а – дитяча гірка; б – скомвало

Визначимо силу тертя в різьбі. Згідно з рис. 11.13:

$$F_{mp} = F_R \cdot \sin \varphi. \quad (11.20)$$

Із плану сил

$$F_R = \frac{F}{\sin(\varphi + \gamma)}.$$

Тоді

$$F_{mp} = F \frac{\sin \varphi}{\sin(\varphi + \gamma)}. \quad (11.21)$$

Після тригонометричних перетворень:

$$F_{mp} = F \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \lambda + \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma} = F \cdot \frac{f}{\sin \gamma + f \cos \gamma}. \quad (11.22)$$

Рівняння (11.22) можна використовувати для прямокутної різьби. Цим же рівнянням можна скористатися для визначення сили тертя в трикутній різьбі, якщо замість коефіцієнта тертя  $f$  підставляти зведений коефіцієнт тертя  $f'$  для клинчастого повзуна з кутом  $2\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right)$  при вершині (рис.8.19):

$$f' = \frac{f}{\sin\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{f}{\cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (11.23)$$

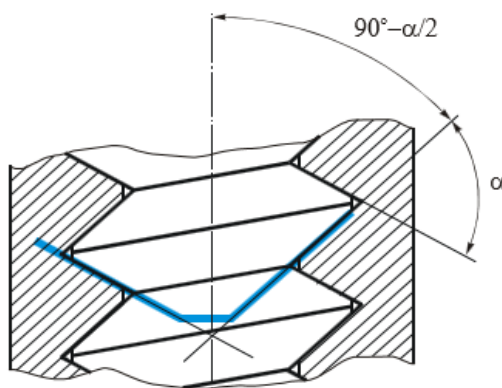


Рисунок 8.19 - Трикутна різьба

Тоді

$$F_{mp} = F \cdot \frac{f'}{\sin \gamma + f' \cos \gamma} \quad (11.24)$$

Тут зведений коефіцієнт тертя  $f'$  визначається за формулою (11.23).

#### 14.4.1.2 Тертя в обертальних кінематичних парах

Обертові пари отримали надзвичайно широке поширення в машинах. Найхарактернішим прикладом такої пари може служити пара, яка утворена цапфами вала та їх опорами - «вал-вальниця».

*Вальницями* (підшипниками) називають опори вала. Опорні ділянки вала (частини валу, які охоплюють опори) називають *цапфами*. Розрізняють 3 види цапф, рис.8.20:

- *шип* - кінцева цапфа, сприймає радіальну силу;
- *шийка* - проміжна цапфа, сприймає радіальну силу;
- *п'ята* - кінцева цапфа, сприймає осьову силу.

Шипи і шийки опираються на вальниці, опірною частиною для п'яти є підп'ятник.

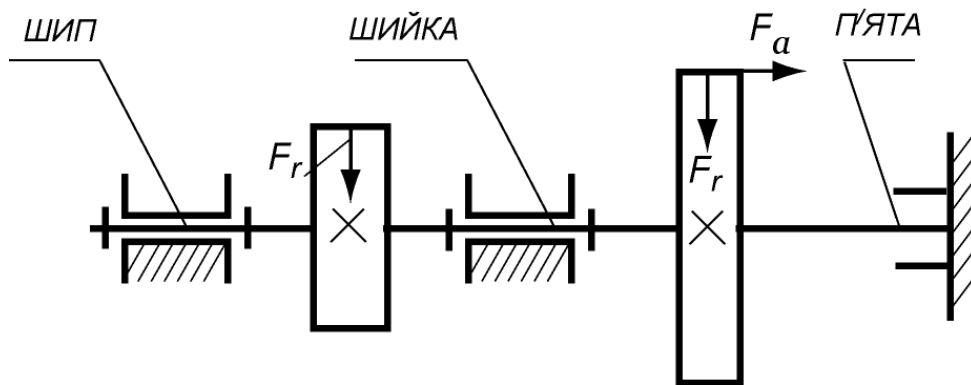


Рисунок 8.20 - До визначення тертя в обертових парах

##### 14.4.1.2.1 Тертя цапф у вальницях

При виведенні розрахункових формул для таких кінематичних пар використовують, як правило, дві гіпотези:

- *Перша гіпотеза*: питомий тиск  $p$  розподіляється рівномірно по опірній поверхні ( $q = \text{const}$ ); справедлива для неприпрацьованих (нових) пар тихохідних валів і погано припрацьованих поверхнях; рис.8.21,а;
- *Друга гіпотеза*: знос у напрямку дії сили однаковий (для припрацьованих (старих) обертових пар); справедлива для швидкохідних валів і добре прироблю вальних поверхнях; рис.8.21,б.

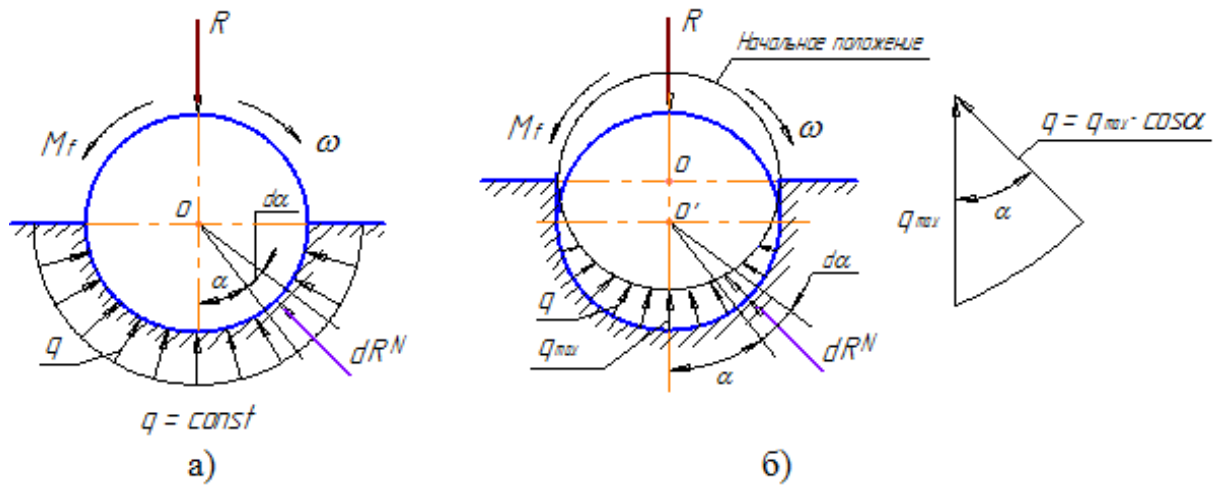


Рисунок 8.21

Між валом 1 і вальницею 2 є радіальний зазор (рис.8.22). Тоді при обертанні вала у напрямку  $\omega$  з урахуванням тертя між валом і вальницею його цапфа буде начебто “вибігати” на вальницю, при цьому дотикання вала і вальниці відбувається в точці А, де і виникає реакція  $F''$  паралельна силі  $F'$ .

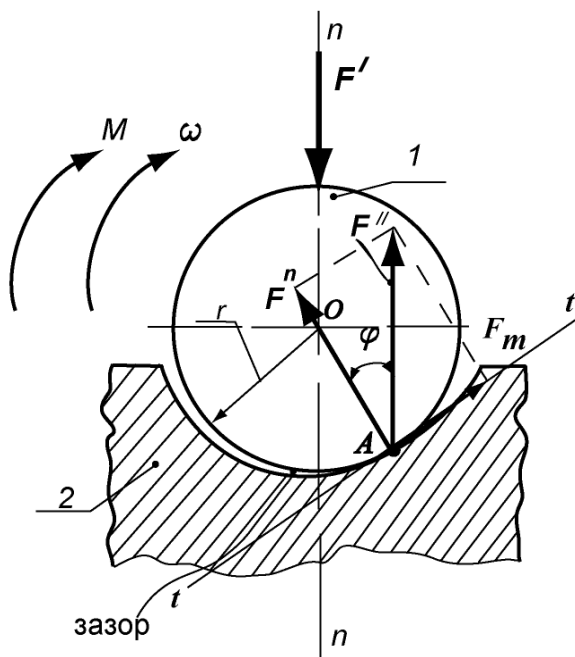


Рисунок 8.21 - До питання про тертя шипа по підшипнику

Із попередніх положень про сили сухого тертя відомо, що сила  $F''$  повинна бути відхилена від нормалі на кут тертя  $\varphi$ , тоді сила тертя:

$$F_m = f F^n = f F'' \cdot \cos \varphi = f F' \cos \varphi$$

т.ц.  $F'' = F'$  з умови рівноваги цапфи.

Момент  $M$ , який прикладений до цапфи, зрівноважується моментом тертя  $M_m$ :



$$M_m = F_m r = \underbrace{f}_{\substack{\sin \varphi \\ \cos \varphi}} F' r \cos \varphi = F' \underbrace{r \sin \varphi}_{\rho} = F' \rho$$

де  $\rho = r \cdot \sin \varphi$ , а  $r$  - радіус шипа.

Якщо з центра вала  $O$  описати коло радіуса  $\rho$ , то повна реакція буде прикладена дотичне до цього кола (рис.8.22).

Коло радіуса  $\rho$  називається колом тертя.

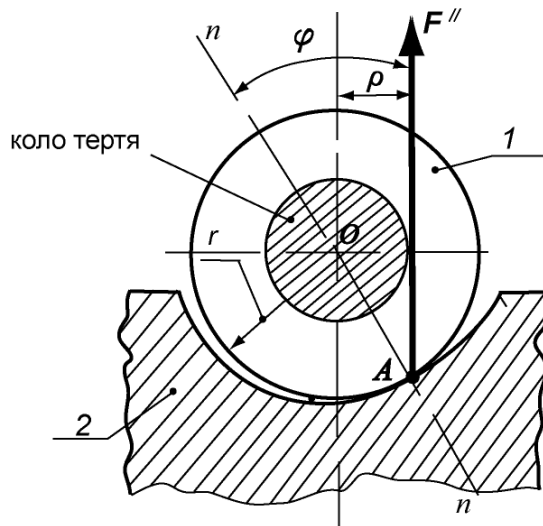


Рисунок 68.22- Коло тертя

Враховуючи, що кути тертя малі,  
можемо вважати, що:  
 $\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi$

Отже:

$$\rho \approx r f$$

Момент тертя:

$$M_m = F' r f'$$

де  $r$  - радіус циліндричного елемента кінематичної пари (вала);

$F'$  - результуюча навантаження на цапфу;

$f'$  - коефіцієнт тертя в обертальній парі.

Коефіцієнт тертя  $f'$  визначається експериментально для різних умов роботи обертальних пар і змінюється в значних межах залежно від матеріалу, стану поверхні, умов роботи тощо.

Для неприпрацьованих цапф

$$f' = \frac{3}{2} f;$$

для припрацьованих –

$$f' = \frac{4}{3} f,$$

де  $f$  - коефіцієнт тертя плоских поверхонь з того самого матеріалу.

#### 14.4.1.2 Тертя п'яти по підп'ятнику

У деяких випадках обертальні пари виготовляють у вигляді п'яти  $A$  і підп'ятника  $B$ , навантажених осовою силою  $F$  (рис.8.23).

У такому випадку на поверхні дотику п'яти і підп'ятника виникає сила тертя вертіння, яка відповідає закону Кулона - Амонтона.

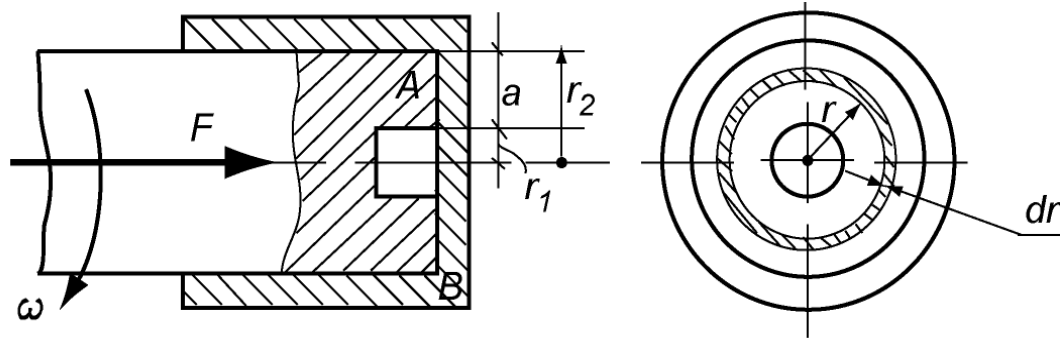


Рисунок 8.23 - Тертя п'яти по підп'ятнику

На рис.8.23 показана кільцева п'ята, яка має як опорну поверхню кільце шириною  $a = r_2 - r_1$ .

Якщо припустити рівномірний розподіл тиску по всій ширині кільця, то питомий тиск на одиниці опорної площини становить:

$$p = \frac{F}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}$$

Відокремимо на п'яті кільце радіуса  $r$ , ширина якого дорівнює нескінченно малій величині  $dr$ .

Елементарний момент тертя:

$$dM_m = dF_m r$$

Елементарна сила тертя:

$$dF_m = f dF^n = f p 2\pi r dr$$

Тоді:

$$dM_m = f p 2\pi r^2 dr$$

Інтегруємо вираз для  $dM_m$  в межах від  $r_1$  до  $r_2$ :

$$M_m = 2\pi f p \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr = \frac{2}{3} \pi f p (r_2^3 - r_1^3)$$

Підставимо у вираз для  $M_m$  вираз для  $p$  та отримаємо:

$$M_m = \frac{2}{3} \pi f \frac{F(r_2^3 - r_1^3)}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} = \frac{2}{3} F f \frac{(r_2^3 - r_1^3)}{(r_2^2 - r_1^2)}$$

Якщо п'ята суцільна, то  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = r$ . Тоді момент тертя:

$$M_m = \frac{2}{3} F \cdot f \cdot r.$$

#### 14.4.2 Тертя в вищих кінематичних парах

В вищій кінематичній парі має місце ковзання і кочення елементів одного по одному. Сила тертя ковзання обчислюється як і в поступальній парі. Опір перекочуванню враховується моментом тертя кочення, який спрямований протилежно кутовій швидкості.

Фізична природа тертя кочення вивчена недостатньо, тому звичайно користуються експериментальними даними.

Тертя в вищих кінематичних парах, швидкості яких в точках контакту однакові по величині і напрямку досить широко застосовуються в машинобудуванні, приладобудуванні та виробках спеціального призначення.

Розглянемо питання по те, як визначається момент тертя кочення  $M_m$ .

Усі дані з цього питання, в основному, експериментального характеру, отримані для конкретних об'єктів: котків, коліс, роликів, шариків у підшипниках тощо.

Досвід підказує, що опір коченню залежить від пружних властивостей матеріалів контактуючих тіл, кривизни поверхонь, що дотикаються, та притискаючої сили. Робота витрачається на деформацію поверхонь дотику.

Розглянемо циліндр, що котиться, та сили, що діють нього (рис. 8.24).

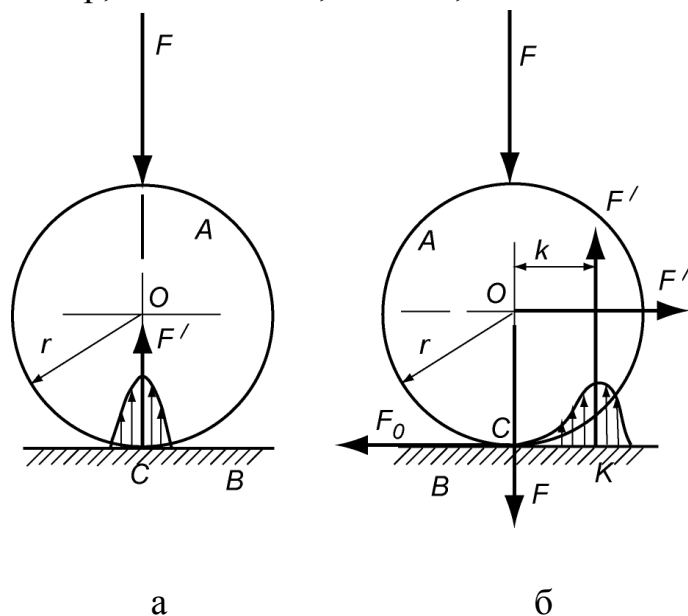


Рисунок 8.24. - Тертя кочення:

а – епюра напружень контактного тиску і опорна реакція за нерухомого циліндра; б – розподіл сил, діючих на циліндр, що котиться

Якщо циліндр, навантажений силою  $F$ , нерухомий (рис.8.24, а), то в зоні дотику циліндра  $A$  і площини  $B$  виникає місцева деформація (її називають “пляма деформації”), і в точці  $C$  виникає опорна реакція  $F'$  (рівнодіюча напружень деформації), яка зрівноважує зовнішню силу  $F$ .

Якщо циліндр перекочується, то “пляма деформації” зсовується в бік руху (рис. 8.24, б).

Рівнодіюча  $F'$  напружень зміщується праворуч від точки  $C$  на величину  $k$ .

Величина  $k$  називається плечем сили тертя кочення.

При коченні необхідно переборювати деякий момент  $M_m$ , який називають моментом тертя кочення, і який визначається:

$$M_m = F k$$

Тут коефіцієнтом пропорційності є плече моменту тертя кочення  $k$ , який називається також коефіцієнтом тертя кочення.

Із виразу для моменту  $M_m$  випливає, що коефіцієнт тертя кочення має розмірність довжини (м).

Нехай за дії зовнішньої сили  $F''$ , яка прикладена в точці  $O$ , циліндр  $A$  рівномірно перекочується без ковзання по площині  $B$  (рис.8.24,б).

Рівномірне перекочування циліндра відбувається під дією пари сил  $F''$  і  $F_0$ , де  $F_0$  - сила тертя ковзання, прикладена в точці  $C$  і дорівнює за величиною  $F''$ .

Сила  $F_0$  є силою тертя спокою, яка визначається так:

$$F_0 \leq F f_{cn}$$

де  $f_{cn}$  - коефіцієнт тертя спокою або, як його називають в таких випадках, коефіцієнт зчеплення циліндра з площиною.

Пара сил, під дією якої циліндр  $A$  перекочується по площині, має момент:

$$M = F'' \cdot r$$

де  $r$  - радіус циліндру.

За умови рівномірного кочення циліндра цей момент  $M$  дорівнює за модулем моменту опору кочення, тобто моменту тертя кочення:

$$F'' r = M_m = F k$$

звідки:

$$F'' = k \frac{F}{r}$$

Із цього рівняння маємо, що сила  $F''$  прямо пропорційна коефіцієнту тертя кочення і обернено пропорційна радіусу циліндра. Коефіцієнт тертя кочення зазвичай приймають в міліметрах чи сантиметрах.

Таблиці цих коефіцієнтів наводять в інженерних довідниках.

Розглянемо, за яких умов під дією сили  $F''$  циліндр може перекочуватись, а за яких ковзати, тобто за яких умов спостерігається тертя кочення, а за яких – тертя ковзання.

Нехай циліндр  $A$  переміщується рівномірно по площині  $B$  під дією сили  $F''$ , прикладеної в точці  $O$  і паралельної площині  $B$ . Якщо нормальний тиск в точці  $C$  дорівнює  $F_0$ , то опір тертя ковзання становить:

$$F_0 = f_{cn} F$$

Отже, щоб циліндр рівномірно ковзав по площині, необхідно, щоб сила  $F''$  дорівнювала:

$$F'' = f_{cn} F$$

Умова рівномірного кочення визначається рівністю:

$$F'' \cdot r = k \cdot F$$

Щоб циліндр тільки ковзав по площині, умова (6.61) є необхідною, але не достатньою. Слід виконати ще умови:

$$F'' \cdot r < k \cdot F$$

звідки:

$$F \cdot f_{cn} \cdot r < k \cdot F$$

Або

$$f_{cn} < \frac{k}{r}$$

Отже, щоб було чисте ковзання, необхідно, щоб коефіцієнт зчеплення був меншим за відношення  $\frac{k}{r}$ .

Щоб циліндр лише перекочування по площині, необхідно, щоб крім умови (6.62), яка є необхідною, але не достатньою, задовольнялась ще умова:

$$F'' < f_{cn} F$$

звідки:

$$f_{cn} > \frac{k}{r}$$

Отже, щоб було чисте кочення, необхідно, щоб коефіцієнт зчеплення був більшим за відношення  $\frac{k}{r}$ .

Якщо сила  $F''$  прикладена не в точці  $O$  циліндра (рис.8.24, б), а в якій-небудь іншій точці, наприклад,  $O_1$ , яка знаходиться на заданій відстані  $l$  від площини, необхідно в усіх виведених співвідношеннях величину  $r$  замінити на  $l$ .

#### 14.5 Тертя ковзання змащених тіл

За умови рідинного тертя безпосереднє дотикання між двома поверхнями, які рухаються одна відносно однієї, відсутнє, тому що є проміжний шар рідини (мастила).

За умови відносного руху поверхонь спостерігається зсув окремих шарів рідини один відносно іншого. Отже, тертя в шарі рідини призводить до в'язкого зсуву.

Введемо поняття коефіцієнта рідинного тертя  $f$  який залежить від відносної швидкості  $V$  руху шарів мастила, навантаження  $p$ , а також коефіцієнта в'язкості  $\mu$ , тоді:

$$f = f(V, p, \mu)$$

Коефіцієнт  $\mu$  називається також динамічним коефіцієнтом в'язкості. Має розмірність  $\left[ \frac{H \cdot c}{m^2} \right]$ .

Ньютон дослідним шляхом довів, що за умови плоскопаралельного руху в'язкої рідини, величина сили  $F$ , необхідної для переміщення одного шару рідини паралельно іншим, дорівнює:

$$F = S \cdot \mu \cdot \frac{dV}{dy}$$

де  $S$  - площа поверхні ковзання;  $\frac{dV}{dy}$  - градієнт швидкості (тобто зміна швидкості за висотою шару).

Напруження зсуву (сила в'язкого зсуву на одиницю поверхні) становить:

$$\tau = \frac{F}{S} = \mu \frac{dV}{dy}$$

Засновник теорії тертя змащених тіл М.П.Петров у 1883 р. у науковій праці “Тертя в машинах і вплив на нього мастильної рідини” сформулював

Основні вимоги для рідинного тертя:

- Мастильна рідина, яка заповнює зазор між поверхнями, що труться, повинна утримуватись в зазорі.
- У шарі мастила за умови відносного ковзання змащених поверхонь повинен виникати і підтримуватись внутрішній тиск, який зрівноважить зовнішнє навантаження, притискаючи поверхні, що ковзають, одна до одної.

- Мазильна рідина повинна повністю розділяти поверхні, що ковзають.
- Шар рідини, який знаходиться між поверхнями, що ковзають, повинен мати товщину, не меншу мінімальної межі, яка визначається найбільш виступаючими частинами нерівностей поверхонь, що труться.

Розрахунок кінематичних пар за умови рідинного тертя детально викладається в курсі деталей машин, а також у спеціальних курсах під час викладання питань розрахунку та конструювання підшипників і напрямних.

### **Додаткова література**

- 1 Зайцев А. К. Основы учения о трении, износе и смазке машин. Часть 1. Трение в машинах. Теория, расчет и конструкция подшипников и подпятников скольжения. Машгиз. М.-Л. — 1947. 256 с.
- 2 Фролов, К. В. (ред.) *Современная трибология: Итоги и перспективы*. ЛКИ, 2008.
- 3 ГОСТ 27674. Трение, изнашивание и смазка. Термины и определения. — [Действует от 1988-03-31]. — М.: Изд-во стандартов, 1988. — 20 с.

4

### **Теми для самостійного вивчення**

- 1 Сучасні теорії сухого тертя.
- 2 Тертя в кінематичних парах.

### **Питання для самоконтролю**

- 1 Види тертя.
- 2 Основні закони тертя ковзання незмащених тіл.
- 3 Тертя спокою. Тертя руху.
- 4 Сучасні положення про сили сухого тертя.
- 5 Тертя в поступальній кінематичній парі. Умови руху повзуна.
- 6 Геометрична форма зображення взаємодії сил.
- 7 Тертя в гвинтовій кінематичній парі.
- 8 Тертя в обертальній кінематичній парі. Тертя шипа в вальниці.
- 9 Тертя п'яти о підп'ятник.
- 10 Тертя ковзання змащених тіл. Закони Петрова.
- 11 Тертя кочення.