

# Лекція 13. Інтегрування тригонометричних та ірраціональних функцій

---

***13.1. Інтеграли типу 1.***

***13.2. Інтеграли типу 2.***

***13.3. Інтеграли типу 3.***

***13.4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок.***

***13.5. Інтегрування ірраціональних функцій.***

***13.6. Інтеграли типу 4.***

***13.7. Інтеграли типу 5. Підстановки Ейлера.***

## *13.1. Інтеграли типу 1*

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

---

Раціоналізація вказаного в заголовку інтеграла досягається за допомогою підстановки

$$u = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi)$$

# 13.1. Інтеграли типу 1

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

Приклад 1.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} &= \left. \begin{array}{l} u = \operatorname{tg} x, \\ x = \operatorname{arctg} u, \\ dx = \frac{du}{1 + u^2}, \\ \sin^2 x = \frac{u^2}{1 + u^2} \end{array} \right| = \int \frac{du}{\left(2 - \frac{u^2}{1 + u^2}\right)(1 + u^2)} = \\ &= \int \frac{du}{2 + u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C. \end{aligned}$$

## 13.2. Інтеграли типу 2

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

Нехай  $m$  і  $n$  – раціональні числа.

Інтеграл  $\int \sin^m x \cos^n x dx$  **з** допомогою підстановок  $u = \cos x$  або  $u = \sin x$  зводиться до інтеграла від диференціального бінома.

## 13.2. Інтеграли типу 2

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

Якщо обидва показники  $m$  і  $n$   
додатні і парні (або один з них нуль),  
то доцільно застосувати формули

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

## 13.2. Інтеграли типу 2

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

Приклад 2

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

## 13.3. Інтеграли типу 3

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

Вказані в заголовку пункту інтеграли безпосередньо обчислюються, якщо в них підінтегральні функції перетворити за формулами

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x]$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x]$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x]$$

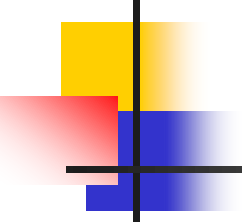
## 13.3. Інтеграли типу 3

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

Приклад 3

$$\int \sin 2x \cos x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 3x + \sin x) dx = -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x + C$$





## *13.4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок*

---

Метод перетворення інтеграла  
до інтеграла типу  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

$$\int R(\sin z, \cos z) dz$$

Які розглянуті в пункті 13.1

## 13.4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок

Перетворення тричлена, який знаходиться під коренем  $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$

Зробимо заміну змінної, поклавши  $x + \frac{b}{2a} = t$ ,  
 $dx = dt$ . Тоді  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{at^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}$ .

## *13.4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок*

Розглянемо всі можливі випадки

**1<sup>0</sup>.** Нехай  $a > 0$  ,  $c - \frac{b^2}{4a} > 0$  . Введемо  
позначення  $a = m^2$  ,  $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$  .

В цьому випадку матимемо  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 + n^2}$  .

**2<sup>0</sup>.** Нехай  $a > 0$  ,  $a = m^2$  , тоді  $c - \frac{b^2}{4a} < 0$  ,  $c - \frac{b^2}{4a} = -n^2$  .

Отже,  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 - n^2}$  .

## 13.4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок

**3<sup>0</sup>.** Нехай  $a < 0$  ,  $c - \frac{b^2}{4a} > 0$  . Тоді  $a = -m^2$  ,  $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$ .

Отже,  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{n^2 - t^2 m^2}$  .

**4<sup>0</sup>.** Нехай  $a < 0$  ,  $c - \frac{b^2}{4a} < 0$  . В цьому випадку

$\sqrt{ax^2 + bx + c}$  є комплексним числом при будь-якому значенні  $x$ .

### *13.4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок*

Таким чином інтеграл  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$   
перетвориться до одного з наступних  
типів інтегралів.

$$\int R(t, \sqrt{m^2 t^2 + n^2}) dt$$

$$\int R(t, \sqrt{m^2 t^2 - n^2}) dt$$

$$\int R(t, \sqrt{n^2 - m^2 t^2}) dt$$



## 13.5. Інтегрування іраціональних функцій

---

$$R(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{P(u_1, \dots, u_n)}{Q(u_1, \dots, u_n)}$$

де  $P$  і  $Q$  – многочлени від змінних  $u_1, \dots, u_n$ , а змінні  $u_i = \varphi_i(x)$  є функціями змінної  $x$ : називається **раціональною функцією** від функцій.



## 13.5. Інтегрування іраціональних функцій

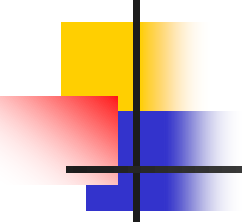
---

Якщо змінні  $u_1, \dots, u_n$  є елементарними тригонометричними функціями, то складна функція, яка отримується, називається **раціональною** відносно елементарних тригонометричних функцій.

Прикладом такої функції є:

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^3 x + \cos x} = R(\sin x, \cos x)$$

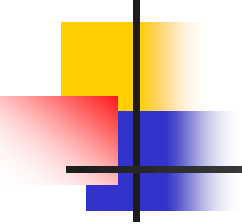
## 13.6. Інтеграли типу 4


$$\int R \left[ x, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_1}, \dots, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_s} \right] dx$$

Сталі  $r_1, \dots, r_s$  раціональні, і  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$   
( $a, b, c, d$  – сталі). Нехай  $m$  – спільний  
знаменник чисел  $r_1, \dots, r_s$ :  $r_i = \frac{p_i}{m}$ ,  $p_i$  –  
ціле,  $i = 1, 2, \dots, s$



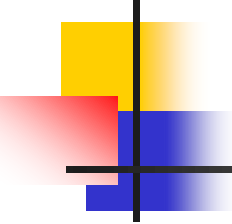
## 13.6. Інтеграли типу 4


$$\int R \left[ x, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_1}, \dots, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_s} \right] dx$$

Приклад 4

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-1)^2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx &= \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} = t^3, x = \frac{t^3+1}{t^3-1} \\ dx = \frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2}, x-1 = \frac{2}{t^3-1} \end{array} \right| = \\ &= \int t \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2} \frac{(t^3-1)^2}{4} dt = -\frac{3}{2} \int t^3 dt = -\frac{3}{8} t^4 + C = \\ &= -\frac{3}{8} \left( \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \right)^4 + C \end{aligned}$$

## 13.6. Інтеграли типу 4


$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx$$

Приклад 5

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = 6 \int \frac{t^5}{t^2 + t^3} dt =$$

$$= 6 \left[ \int (t^2 - t + 1) dt - \int \frac{dt}{t+1} \right] = 2t^3 - 3t^2 + 6t -$$

$$- \ln|1+t| + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C$$

## 13.7. Інтеграли типу 5

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx.$$

### Підстановки Ейлера

Звідси випливає, що в цьому випадку або під коренем стоїть від'ємна при всіх значеннях  $x \neq x_1$  величина, тобто цей корінь приймає тільки чисто уявні вирази (цей випадок має місце при  $a < 0$ ); або при  $a \geq 0$  після вказаного елементарного перетворення одержимо, що змінна  $x$  не входить під знак кореня, тобто під інтегралом стоїть просто раціональна функція від  $x$ .

## 13.7. Інтеграли типу 5

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx.$$

### Підстановки Ейлера

#### Приклад 6

$$\int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2 \sqrt{1 + x + x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1 \\ x = \frac{2t - 1}{1 - t^2}, dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(1 - t^2)^2} dt \\ \sqrt{1 + x + x^2} = \frac{t^2 - t + 1}{1 - t^2} \\ 1 - \sqrt{1 + x + x^2} = -\frac{2t^2 + t}{1 - t^2} \end{array} \right| =$$

## 13.7. Інтеграли типу 5

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx.$$

### Підстановки Ейлера

Продовження до прикладу 6

$$\begin{aligned} &= \int \frac{(-2t^2 + t)^2 (1 - t^2)^2 (1 - t^2) (2t^2 - 2t + 2)}{(1 - t^2)^2 (2t - 1)^2 (t^2 - t + 1) (1 - t^2)^3} dt = \\ &= 2 \int \frac{t^2}{1 - t^2} dt = -2t + \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2} - 1)}{x} + \\ &+ \ln \left| \frac{x + \sqrt{1+x+x^2} - 1}{x - \sqrt{1+x+x^2} + 1} \right| + C \end{aligned}$$