

Завдання для самостійної роботи

1. Наведіть означення похідної функції.
2. Охарактеризуйте фізичний та геометричний зміст похідної.
3. Знайдіть похідну функції $y = \frac{1}{x}$, користуючись означенням похідної.
4. Запишіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = 3x^2 + 3x - 5$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.
5. Надайте означення правої та лівої похідної у точці.
6. Надайте означення функції, диференційовної у точці.
7. Як знаходять похідну складеної функції?
8. Наведіть означення диференціала функції.
9. Як визначається диференціал функції через її похідну?
10. Знайдіть похідні наступних функцій:
 - 1) $y = \frac{x^3 - 4x^2 - 1}{x^4 + x + 1}$; 2) $y = \frac{\sin^2 x}{x}$; 3) $y = (2x^3 - 2x)\cos 4x$; 4) $y = \ln(\sin \sqrt{x})$;
 - 5) $y = x \cdot \arcsin \ln x$; 6) $y = x^{2x-1}$; 7) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)$; 8) $y = e^{2\sin x - 3\cos 2x}$;
 - 9) $y = \frac{\operatorname{arctg} 4x}{16x^2 + 1}$; 10) $y = \log_4(3\arccos x)$.
11. Знайдіть диференціал функції $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$.
12. Наведіть означення похідної n -го порядку.
13. Знайдіть похідні другого порядку наступних функцій:
 - 1) $y = \arcsin 2x$; 2) $y = \ln(1 + x^2)$; 3) $y = \frac{2x - 1}{3x + 2}$; 4) $y = (x^3 - 1)\ln x$;
 - 5) $y = \operatorname{tg}(3x - 2)$.
14. Знайдіть $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $x = 5\cos t$, $y = 3\sin t$.
15. Знайдіть $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $x^2y - y^3 + 2x - 1 = 0$.
16. Точка рухається прямолінійно за законом $s = 2t^3 - 4t^2 + 6t - 2$. Знайдіть її швидкість та прискорення у момент часу 3 секунди після початку руху.
17. Точка рухається прямолінійно за законом $s = 2\sin\left(3t - \frac{\pi}{3}\right)$. Знайдіть її прискорення у момент першої зупинки після початку руху.
18. Наведіть формулу Лейбніца та знайдіть десяту похідну функції $y = (2x^2 + 3x + 1)e^{2x}$.
19. Покажіть, що функція $y = e^x + 2e^{2x}$ задовольняє рівняння $y'' - 6y' + 11y - 6y = 0$.
20. Надайте означення функції двох змінних.
21. Наведіть означення області визначення функції однієї змінної.

22.Надайте означення відкритої та замкнутої областей.

23.Побудуйте лінії рівня наступних функцій: 1) $z = 4x^2 + 9y^2$; 2) $z = x^2 - y^2$

24.Надайте означення функції n змінних.

25.Знайдіть область визначення функції $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + 2\ln(4 - x^2 - y^2)$.

26.Надайте означення частинної похідної функції двох змінних.

27.Надайте означення повного диференціала функції двох змінних.

28.Знайдіть частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ наступних функцій:

1) $z = x^2 + 7y^2 - xy$; 2) $z = \frac{2x+3y}{5x-y}$; 3) $z = \sin(2x+3y) - \arctg(x^2y)$;

4) $z = \arcsin \frac{x}{y}$.

29.Знайдіть частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = \frac{x}{y} + x^2y^3$ у точці $M(2,1)$

30.Доведіть, що функція $z = \ln(x^2 + y^2 + xy)$ задовольняє рівняння
$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

31.Знайти всі частинні похідні другого порядку функції $z = x^2y^3 + 2x - y - \frac{x}{y}$

32.Запишіть диференціал другого порядку функції $z = \frac{x^3}{y^5}$.

33.Запишіть рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні
 $z = 4x^2 + 6y^2$, проведених у точці $M(1,0,4)$.

34.Надайте означення градієнта.

35.Обчисліть градієнт функції $z = \frac{x+y}{x+4y+1}$ у точці $M(-1,2)$.

36.Вкажіть напрям найбільшого зростання функції $z = \frac{y}{x}$ у точці $A(2,1)$.

37.Обчисліть похідну функції $z = x^3 + 2y^2 - 4x + 5y$ у напрямі \overrightarrow{AB} , де
 $A(-1,2)$, $B(0,1)$.

38.Знайдіть похідну функції $z = \ln(x^2 + y^2)$ за напрямом градієнта цієї
функції у точці $A(1,2)$.

39.Сформулюйте достатню умову локального екстремуму функції двох
змінних.

40.Знайдіть екстремуми функції $z = x^3y^2(1-x-y)$.