МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В. В. САЛМИН, О. Л. СТАРИНОВА, К. В. ПЕТРУХИНА

МЕТОДЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

ЭЛЕКТРОННЫЙ КУРС ЛЕКЦИЙ

С А М А Р А
2010

УДК 629.7.017.1 (075)

Авторы: Салмин Вадим Викторович, Старинова Ольга Леонардовна, Петрухина Ксения Вячеславовна.

В учебном пособии изложены методы оптимизации, применяемые в различных задачах управления динамическими системами. Даются классификация и основные постановки задач оптимизации. Изложены современные методы решения задач оптимального управления: принцип максимума Понтрягина, динамическое программирование, достаточные условия оптимальности.

Учебное пособие предназначено для студентов специальности 160400.68 «Ракетные комплексы и космонавтика» направления подготовки по магистерской программе «Проектирование и конструирование космических мониторинговых и транспортных систем».

Разработано на кафедре летательных аппаратов СГАУ.

© Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева

Содержание

ВВЕДЕНИЕ 6
1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ, ОСНОВАННЫХ НА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ 7
1.1. Техническая задача оптимального управления и ее математическая модель 7
1.2. Классификация методов теории оптимальных процессов 8
1.3. Необходимые условия оптимальности управления, достаточные условия оптимальности управления и проблема существования оптимального управления 9
1.4. Общая характеристика результатов, которые могут быть получены методами теории оптимального управления 11
1.5. Условия рационального применения методов оптимизации 11
2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ 12
2.1. Математические модели 12
2.2. Переменные состояния (фазовые координаты) управляемого процесса 13
2.3. Управление 14
2.4. Эволюция состояния системы. Дифференциальные уравнения движения 15
2.5. Функционал. Критерий качества управления 16
2.6. Автономные системы 16
2.7. Допустимое программное управление 16
2.8. Допустимый закон управления 18
2.9. Допустимые траектории и процессы 18
2.10. Граничные условия. Краевая задача 18
3. ПОСТАНОВКА ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ 20
3.1. Основная задача оптимального программного управления 20
3.2. Основная задача оптимального координатного управления 21
3.3. Оптимальные траектории 21
3.4. Геометрическая интерпретация основной задачи оптимального управления 22
4. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОСНОВНОИ ЗАДАЧИ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ПРИНЦИП МАКСИМУМА 24
4.1. Краткая формулировка задачи 24
4.2. Некоторые вспомогательные построения и терминология 24
4.3. Принцип максимума Л. С. Понтрягина 25
4.4. Некоторые следствия принципа максимума 28
5. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 32
5.1. Задача синтеза оптимального закона управления 32
5.2. Принцип оптимальности динамического программирования 32
5.3. Ослабленное необходимое условие 36
6. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБОГО УПРАВЛЕНИЯ 45
6.1. Краткая формулировка задачи 45
6.2. Процедура нахождения особого управления 47
6.3. Необходимое условие оптимальности особого управления 48
6.4. Необходимые условия в точках сопряжения особого и регулярного управлений 48

7. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ТОЛЬКО ФАЗОВЫЕ КООРДИНАТЫ X 49
7.1 Краткая формулировка задачи 50
7.2. Необходимые условия оптимальности 50

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

a_σ - управляющий параметр.

а - вектор управляющих параметров.

H, H - функция Гамильтона (гамильтониан задачи оптимизации).

L - функция Лагранжа.

J- критерий качества.

m - число управляющих переменных u_j (j = 1 ,2, …, m).

n - число переменных состояния (фазовых координат) x_i (i = 1,2, … , n).

r - число управляющих параметров a_σ (σ = 1, 2,.., r).

t - независимое переменное (аргумент), время.

R^n - n-мерное пространство с вещественными компонентами.

U^m - m-мерная допустимая область изменения значений управляющих переменных.

u_j - управляющая координата.

u - управляющий вектор (управление).

X^n - n-мерная допустимая область изменения значений переменных состояния **x.**

x_i - переменная состояния (фазовая координата).

x - вектор состояния (фазовый вектор).

λ_i - сопряженная переменная (множитель Лагранжа).

λ - вектор сопряженных переменных (вектор множителей Лагранжа).

Индексы

«0» - начало процесса (начальные условия).

«1» - конец процесса (конечные условия).

«т» - индекс транспонирования вектора или матрицы.

Символы

arg max H(**u**) - значение вектора **u**, доставляющее максимум функции H

u Є U^m на множестве U^m .

arg min H(**u**) - значение вектора **u**, доставляющее минимум функции H

u Є U^m на множестве U^m.

max H(**u**) - максимум функции H по переменным **u,** принадлежащим

u Є U^m множеству U^m.

min H(**u**) - минимум функции H по переменным **u**, принадлежащим

u Є U^m множеству U^m.

δ - символ вариации.

Є - символ принадлежности элемента некоторому множеству (например, **u** Є U^m означает, что **u** является элементом множества U^m или принадлежит множеству U^m).

⊂ - символ включения (например, $X^n \subset R^n$ означает, что множество X^n содержится во множестве R^n или множество X^n включено во множество R^n).

ВВЕДЕНИЕ

В общем процессе проектирования ЛА можно выделить проблемы двух типов.

1. Проектирование схемы летной операции, направленной на достижение поставленной задачи (формирование траекторий, режимов и профилей полета и выбор методов управления, реализующих эти траектории, и т. д.). Этот круг задач можно назвать проектированием движений ЛА.

2. Проектирование аэродинамических, конструктивных и прочностных схем ЛА (выбор геометрических, аэродинамических, конструктивных и т. д. параметров), обеспечивающих выполнение общих летно-тактических характеристик и конкретных летных операций. Этот круг задач проектирования связан с выбором ресурсов, необходимых для реализации поставленных задач.

Проектирование движений ЛА тесно связано с группой проблем второго типа, так как полученная при проектировании движений информация является исходной (и во многом определяющей) для этих проблем. Но и в тех случаях, когда имеется уже готовый ЛА (т. е. располагаемые ресурсы определены), в процессе его модификации могут быть осуществлены оптимизирующие изменения.

Как традиционные оптимальные задачи механики полета (расчет максимальных скоростей полета, наивыгоднейших режимов набора высоты, максимальной дальности, продолжительности, оптимального виража и т. д.), так и новые задачи, возникшие в связи с развитием ракетно-космической техники (выведение на орбиту, перелет с орбиты на орбиту, вход в атмосферу, ориентация и стабилизация в космическом пространстве и т. д.), решаются в настоящий момент наиболее эффективно и строго на основе общих методов математической теории оптимальных процессов управления.

Значение математической теории оптимальных процессов управления заключается в том, что она дает единую методологию решения весьма широкого круга задач оптимального проектирования и управления, устраняет эмпиризм и недостаточную общность прежних частных методов и способствует обмену ценными результатами и методами, полученными в смежных областях.

Теория оптимальных процессов позволяет решать широкий круг практических задач механики полета в достаточно общей постановке с учетом большинства ограничений технического характера, накладываемых на осуществимость полета ЛА. Роль методов теории оптимальных процессов особенно возросла в последние в связи с широким внедрением в процесс проектирования универсальных быстродействующих вычислительных машин, а также в связи с использованием бортовых и наземных быстродействующих управляющих устройств.

В данной главе приводятся основные положения математической теории оптимальных процессов, дается математическая постановка задач оптимизации различных типов и приводятся общие методы их решения, основанные на применении принципа максимума, динамического программирования и классического вариационного исчисления. Приводятся также примеры приме нения этих принципов к некоторым задачам механики полета и управления полетом.

Следует заметить, что задачи оптимизации движения управляемых ЛА, с точки зрения их математического описания, можно разделить на детерминированные, стохастические и игровые (конфликтные). Далее, в основном, рассматриваются детерминированные задачи.

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ, ОСНОВАННЫХ НА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Техническая задача оптимального управления и ее математическая модель

Исходная информация для решения задач оптимального управления содержится в постановке технической задачи. Техническая задача управления ЛА может формулироваться в содержательных (неформальных) терминах, которые часто носят несколько расплывчатый характер. Для применения математических методов необходима четкая и строгая формулировка задачи, которая бы устраняла возможные неопределенности и двусмысленности и одновременно делала бы задачу математически корректной. С этой целью для технической задачи необходима адекватная ей математическая формулировка, называемая *математической моделью* технической задачи оптимизации.

М а т е м а т и ч е с к а я м о д е л ь - достаточно полное математическое описание физической системы и процесса управления в рамках выбранной степени приближения и детализации.

Математическая модель отображает исходную техническую задачу в некоторую математическую схему, в конечном итоге - в некоторую систему чисел. В ней, с одной стороны, явно указываются (перечисляются) все те сведения, без которых невозможно приступить к аналитическому или численному исследованию задачи, а с другой стороны, - те дополнительные сведения, которые вытекают из технической сущности задачи и которые отражают определенные требования к ее характеристикам.

Полная математическая модель технической задачи оптимизации управления состоит из ряда частных математических моделей, например математической модели процесса управляемого движения ЛА и действующих на него сил, математической мо дели располагаемых ресурсов и технических ограничений, математической модели показателя качества процесса управления (критерия качества), математической модели управляющих воздействий и т. д.

Таким образом, математическая модель технической задачи управления характеризуется совокупностью определенных математических соотношений между ее элементами (дифференциальных уравнений, ограничений типа равенств и неравенств, функции качества, начальных и граничных условий и т. д.). В теории оптимальных процессов устанавливаются общие условии, которым должны удовлетворять элементы математической модели, для того чтобы соответствующая математическая задача оптимизации была бы, во-первых, четко определена, а во-вторых, имела бы смысл, т. е. не содержала условий, приводящих к отсутствию решения. Эти условия содержатся частично в разд. 2 и 3.

Следует отметить, что техническая формулировка задачи и ее математическая модель в процессе исследования не остаются неизменными, а находятся во взаимодействии друг с другом (рис. 1). Обычно первоначальная техническая формулировка и ее математическая модель претерпевают значительные изменения в конце исследования. Таким образом, построение адекватной математической модели напоминает итерационный процесс в ходе которого уточняется как постановка самой технической задачи, так и формулировка математической модели. Важно подчеркнуть, что для одной и той же технической задачи математическая мо-

дель может быть не единственной (например, одну и ту же задачу можно формулировать в различных системах координат и т. п.). Поэтому необходим поиск такого варианта математической модели, для которой решение и анализ задачи были бы наиболее просты.

Важным шагом в постановке и решении технической задачи управления является выбор критерия оптимальности. Этот выбор является неформальным актом, он не может быть предписан какой-либо теорией, а целиком определяется содержанием за дачи. В некоторых случаях формальное выражение технического понимания оптимальности системы допускает несколько эквивалентных (или почти эквивалентных) формулировок. В таких случаях успех и простота получаемого решения во многом определяется выбранной формой критерия оптимальности (при условии, что во всех случаях он достаточно полно отражает требования технической задачи к системе). После построения математической модели процесса управления дальнейшее ее исследование и оптимизация проводятся математическими методами.

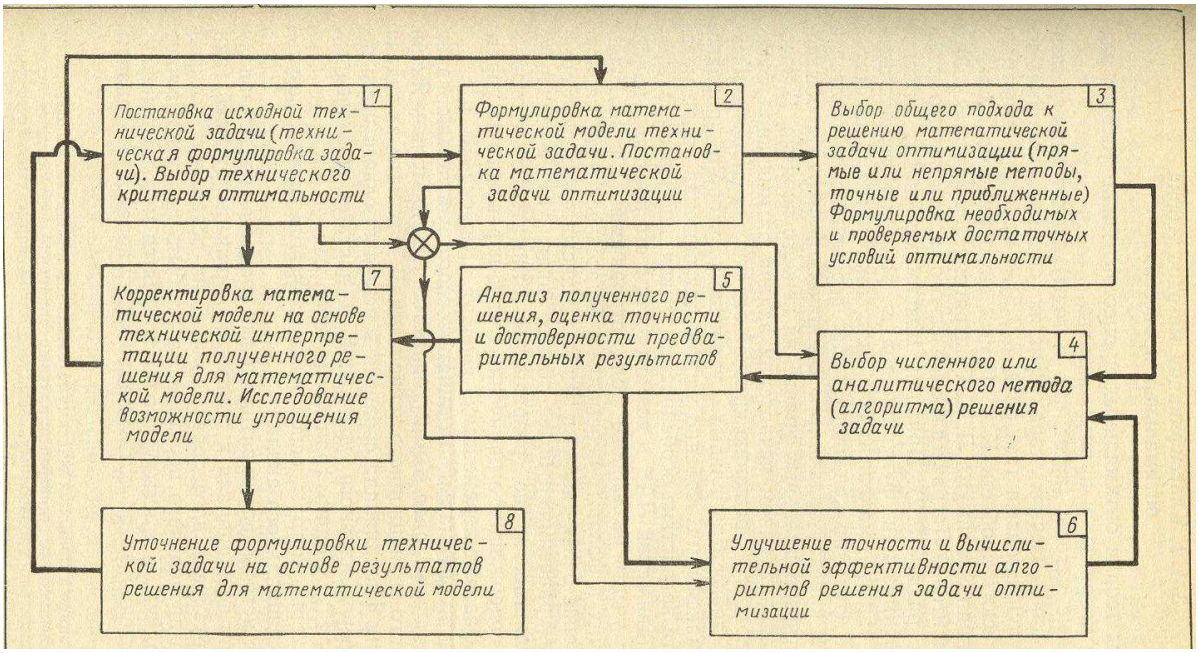

Рис. 1 Схема взаимосвязи постановки технической задачи оптимизации с соответствующей математической моделью и результатами решения задачи оптимизации для математической модели

1.2. Классификация методов теории оптимальных процессов

Методы теории оптимальных процессов можно условно раз делить на непрямые и прямые методы.

Непрямые методы (косвенные методы) сводят задачу оптимизации динамических характеристик системы, которые являются функционалами (см. разд. 2. 5), к решению известных математических проблем. К непрямым методам относятся:

1) принцип максимума Л. С. Понтрягина (см. разд. 4. 3) и метод множителей Лагранжа классического вариационного исчисления . Принцип максимума сводит решение задачи оптимизации функционалов к решению теоретически известных задач - максимизации (или минимизации) некоторой специальной функции конечного числа переменных в сочетании с ре-

шением краевой задачи для канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В классическом вариационном исчислении задача оптимизации функционала сводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Принцип максимума особенно удобен для решения задач механики полета вследствие особенностей записи дифференциальных уравнений движения ЛА * и возможности с его помощью наиболее просто учесть различного рода ограничения на величины управляющих и фазовых переменных. Классическое вариационное исчисление более удобно в задачах, описываемых дифференциальными уравнениями более общего вида, чем в механике полета (в частности, не разрешенных относительно производных), и не содержащих ограничений в виде неравенств на управляющие и фазовые переменные;

2) принцип оптимальности динамического программирования Р. Беллмана (см. разд. 5.2) и метод Гамильтона-Якоби классического вариационного исчисления. В этих методах задача оптимизации функционала сводится к решению одного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с одним граничным условием;

3) некоторые методы, основанные на использовании результатов функционального анализа.

Прямые методы теории оптимальных процессов сводят задачу оптимизации функционала к построению минимизирующей (или максимизирующей) последовательности, на основании которой с помощью предельного перехода может быть получено точное решение задачи. К прямым методам относятся методы, основанные на сведении задач оптимизации функционалов к задачам на условный экстремум функций конечного числа переменных, различные варианты градиентных методов, методы типа Ритца - Галеркина и др.

Как в случае применения непрямых методов, так и в случае использования прямых методов окончательное решение задачи оптимизации может отыскиваться либо в аналитической (замкнутой) форме, либо в числовой форме.

Аналитические решения (за исключением редких случаев, таких, например, как линейные стационарные системы с квадратичным критерием качества) могут быть найдены лишь для задач в упрощенной постановке. С их помощью можно исследовать качественные особенности оптимального управления рассматриваемого ЛА. Если аналитическое решение не слишком громоздко, из него можно получить необходимые технические выводы. Поскольку решения такого рода не зависят от конкретных числовых значений параметров системы и граничных условий, они обладают высокой степенью универсальности. Однако в задачах, постановка которых приближается к реальной технической ситуации, получение решений в замкнутой форме, как правило, либо невозможно, либо приводит к весьма сложным выражениям. В этом случае следует обратиться к численным методам решения.

Численные методы на современном этапе развития вычислительной математики обладают общностью, сравнимой с общностью аналитических методов.

* Формулировка принципа максимума относится к задачам, описываемым системами обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, разрешенных относительно производных. Именно в такой форме чаще всего записываются уравнения движения ЛА.

1.3. Необходимые условия оптимальности управления, достаточные условия оптимальности управления и проблема существования оптимального управления

Приведенные в следующих разделах необходимые условия оптимальности управления для различного типа задач оптимизации получены на основе аналитических непрямых мето-

дов (см. разд. 1.2) оптимизации и образуют совокупность функциональных соотношений, которым обязательно должно удовлетворять экстремальное решение. При выводе их сделано существенное для последующего применения предположение о существовании оптимального управления (оптимального решения). Другими словами, если оптимальное решение существует, то оно обязательно удовлетворяет приведенным (и поэтому необходимым) условиям. Однако этим же необходимым условиям могут удовлетворять и другие решения, не являющиеся оптимальными [подобно тому, как необходимому условию $\partial f(x)/\partial x=0$ для минимума функции одного переменного удовлетворяют также точки максимума и точки перегиба функции $f(x)$]. Поэтому если найденное решение удовлетворяет необходим условиям оптимальности, то это еще не означает, что оно является оптимальным.

Использование одних только необходимых условий дает возможность в принципе найти все решения, им удовлетворяющие, и отобрать затем среди них те, которые действительно являются оптимальными. Однако практически найти все решения, удовлетворяющие необходимым условиям, чаще всего не представляется возможным в силу большой трудоемкости такого процесса. Поэтому после того как найдено какое-либо решение, удовлетворяющее необходимым условиям, целесообразно проверить, является ли оно действительно оптимальным в смысле исходной постановки задачи.

Аналитические условия, выполнимость которых на полученном решении гарантирует его оптимальность, называются *достаточными условиями* оптимальности управления. Формулировка этих условий и особенно их практическая (например, вычислительная) проверка часто оказывается весьма трудоемкой задачей. Некоторые достаточные условия приведены в разд. 4.4.

В общем случае применение необходимых условий оптимальности было бы более обоснованным, если бы для рассматриваемой задачи можно было установить факт существования или существования и единственности оптимального управления. Этот вопрос является математически весьма сложным.

Проблема существования оптимального управления состоит из двух вопросов:

1) существование допустимого управления (т. е. управления, принадлежащего заданному классу функций), удовлетворяющего заданным ограничениям и переводящего систему из заданного начального состояния в заданное конечное состояние (см. разд. 2. 10). Иногда граничные условия задачи выбраны так, что система - в силу ограниченности ее энергетических ресурсов - не в состоянии их удовлетворить, т. е. не может быть указано хотя бы одно допустимое управление. В этом случае не существует решения задачи оптимизации;

2) существование в классе допустимых управлений оптимального управления и его единственность.

Как первый, так и второй вопрос этой проблемы в случае нелинейных систем общего вида не решены еще с достаточной для приложений полнотой. Проблема осложняется также тем обстоятельством, что из единственности оптимального управления не следует единственность управления, удовлетворяющего необходимым условиям. К тому же обычно удовлетворяется какое-либо одно, наиболее важное необходимое условие (чаще всего - принцип максимума).

Проверка дальнейших необходимых условий бывает достаточно громоздкой. Это по важность любой информации о единственности управлений, удовлетворяющих необходим условиям оптимальности, а также о конкретных свойствах таких управлений.

Необходимо предостеречь от заключений о существовании оптимального управления на основании того факта, что решается физическая задача. На самом деле при применении методов теории оптимальных процессов приходится иметь дело с математической моделью. Необходимым условием адекватности описания физического процесса математической моделью как раз и является существование решения для математической модели. Поскольку при формировании математической модели вводятся различного рода упрощения, влияние которых на существование решений трудно предсказать, доказательство существования является отдельной математической проблемой.

Таким образом:

1) из существования оптимального управления вытекает существование, по крайней мере, одного управления, удовлетворяющего необходимым условиям оптимальности. Из существования управления, удовлетворяющего необходимым условиям оптимальности, не вытекает существование оптимального управления;

2) из существования оптимального управления и единственности управления, удовлетворяющего необходимым условиям, вытекает единственность оптимального управления. Из существования единственности оптимального управления не следует единственность управления, удовлетворяющего необходимым условиям оптимальности.

1.4. Общая характеристика результатов, которые могут быть получены методами теории оптимального управления

Теория оптимальных процессов является основой единой методологии проектирования оптимальных движений ЛА. В результате применения методов теории оптимальных процессов к задачам механики полета могут быть получены:

1. Оптимальные по тому или иному критерию временные программы изменения управляющих воздействий и оптимальные значения постоянных управляющих (проектных, настроечных) параметров с учетом различного рода ограничений на их значения.

2. Оптимальные траектории, режимы и профили полета ЛА с учетом ограничений на область их расположения в пространстве.

3. Оптимальные законы управления в форме обратной связи, определяющие структуру контура системы управления (решение задачи синтеза управления).

4. Предельные значения летных характеристик или иных критериев качества, которые затем можно использовать как эталон для сравнения с другими системами.

5. Решения краевых задач попадания из одной точки фазового пространства в другую; в частности, задача выведения на неуправляемый объект.

6. Оптимальные стратегии наведения при преследовании управляемого объекта.

1.5. Условия рационального применения методов оптимизации

Методы оптимизации управления рационально применять:

1. В сложных комплексных системах, где отыскание приемлемых решений на основе опыта затруднительно. Опыт показывает, что оптимизация малых подсистем может приводить к большим потерям в критерии качества объединенной системы. Лучше приближенно

решить задачу оптимизации системы в целом (пусть в упрощенной постановке), чем точно для отдельной подсистемы.

2. В новых задачах, в которых отсутствует опыт формирования удовлетворительных характеристик процесса управления. В таких случаях формулировка оптимальной задачи часто позволяет установить качественный характер управления.

3. На возможно ранней стадии проектирования, когда имеется большая свобода выбора. После определения большого количества проектных решений система становится недостаточно гибкой и последующая оптимизация может не дать существенного выигрыша.

4. При необходимости определить направления изменения управления и параметров, дающих наибольшее изменение критерия качества (определение градиента качества).

Следует отметить, что для хорошо изученных и долго эксплуатируемых систем методы оптимизации могут давать небольшой выигрыш, так как найденные из опыта практические решения обычно приближаются к оптимальным. Так, в традиционных задачах механики полета (оптимальный набор высоты, по лет на максимальную дальность) в случае свободных граничных условий для большей части переменных оптимальные управления дают обычно выигрыш в 5 - 12 % по сравнению с ранее известными управлениями. В случае закрепленных граничных условий выигрыш может достигать 20 - 50 %.

В некоторых практических задачах механики полета наблюдается определенная «грубость» оптимальных управлений и параметров, т. е. большим локальным изменениям управлений и параметров отвечают малые изменения критериев качества. Это дает иногда повод к утверждению, что оптимумы на практике всегда пологие и строгие методы оптимизации не нужны.

На самом деле «грубость» управления наблюдается лишь в случае, когда оптимальное управление соответствует стационарной точке критерия качества. В этом случае изменение управления на величину ε приводит к отклонению критерия качества на величину порядка ε^2.

В случае управлений, лежащих на границе допустимой области, указанная грубость может и не иметь места. Это свойство должно исследоваться для каждой задачи специально. Кроме того, в некоторых задачах даже небольшие улучшения критерия качества, достигаемые за счет оптимизации, могут иметь существенное значение (например, в механике космического полета увеличение полезной нагрузки или конечной скорости на 0,5 % может давать значительную экономию стоимости системы).

Сложные задачи оптимизации управления часто предъявляют чрезмерные требования к характеристикам используемых при решении вычислительных машин. Поэтому целесообразно использовать рациональные упрощающие предположения в ходе постановки задачи с тем, чтобы объем вычислений был не слишком велик для современных ЦВМ и не приводил к слишком затянутым срокам получения решения.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Математические модели

Теория оптимальных процессов управления имеет дело с математическими моделями технических задач оптимизации процесса управления физическими системами. Математическая модель есть достаточно полная сводка функциональных соотношений, описывающих основные свойства физических объектов, процессов их функционирования и управления в

рамках выбранной степени приближения и детализации и отражающая все существенные требования к конкретным техническим характеристикам системы.

Математическая модель технической задачи оптимизации процесса управления ЛА состоит из ряда частных математических моделей, включая математическую модель управляемого процесса (например, уравнений движения ЛА и его рулевых приводов), математическую модель технических ограничений на величины управляющих воздействий и на возможное расположение ЛА на траектории математического описания показателя эффективности (критерия качества) процесса управления и т. д.

2.2. Переменные состояния (фазовые координаты) управляемого процесса

В основе математической модели технической задачи оптимизации процесса управления лежит математическая модель управляемого процесса. Эта модель в свою очередь основывается на понятии переменных состояния (фазовых координат), которые вводятся в задачу следующим образом.

Пусть физическая управляемая система ***S*** (ЛА, приводы его управляющих органов и т. д.) может быть идеализирована настолько, что в каждый фиксированный момент времени наблюдения $t = t'$ на интервале наблюдения $T = \{t, t_0 \leq t \leq t_1\}$, $t' \in T$ ее свойства могут быть описаны конечным множеством действительных чисел $x_1(t'), x_2(t'),.., x_n(t')$, которые рассматриваются как компоненты некоторого вектора $\mathbf{x}(t') = (x_1(t'), x_2(t'),.., x_n(t'))^{\mathrm{T}}$.

При изменении момента времени наблюдения, вообще говоря, изменяется и вектор **x**. Это изменение может быть вызвано приложенными к объекту воздействиями. Если и при $t > t'$ (t' - произвольный момент на интервале наблюдения T) свойства системы по-прежнему полностью описываются вектором

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t),.., x_n(t))^{\mathrm{T}} \qquad (1)$$

и если число n - наименьшее количество величин $x_i(t')$, с помощью которых оказывается возможным предсказывать значения $\mathbf{x}(t)$ при всех $t > t'$ по известным значениям $\mathbf{x}(t')$ и известным на T значениям приложенных воздействий, то вектор $\mathbf{x}(t)$ называется *вектором состояния* (детерминированной) системы ***S*** в момент t(или вектором фазовых координат).

Величины x_i называются *компонентами состояния*, или *фазовыми координатами*.

Поскольку x_i изменяются с течением времени, то иногда величины $x_i(t)$ называют *переменными состояния* (фазовыми переменными).

Множество всех возможных состояний $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t),.., x_n(t))^{\mathrm{T}}$ в различные моменты времени $t \in T$ образуют n-мерное пространство состояний $X^n \subset R^n$ (*n-мерное фазовое пространство*). Точка $\mathbf{x} \in X^n$ является *изображающей точкой* этого пространства. Вектор $\mathbf{z} = (x, t)^{\mathrm{T}}$, т. е. состояние в момент t, называется *событием (фазой).*

Множество всех возможных событий **z** образует пространство $Z^{n+1} \subset R^{n+1}$ событий. Точка $\mathbf{z} \in Z^{n+1}$ является изображающей точкой пространства событий.

П р и м е ч а н и я. 1. В механике полета переменными состояния обычно являются пространственные и угловые координаты ЛА, линейные и угловые скорости, масса и т. д. Выбор переменных со часто определяется выбором системы координат, в которой рассматривается движение ЛА. Отсюда ясно, что для описания одной и той же задачи могут быть использованы различные фазовые координаты, т, е. их выбор не является единственным, однако все мыслимые наборы фановых координат эквивалентны друг другу в смысле описания состояния системы.

2. Фазовое пространство теории оптимального управления не всегда совпадает с фазовым пространством конфигураций и импульсов механики, так как может содержать координаты немеханических систем (например, электрических, гидравлических и т. п.)

2.3. Управление

Система ***S*** называется *управляемой на интервале* $[t_0, t_1]$, если ее поведение при $t > t_0$ зависит только от начального состояния ($t = t_0$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$) некоторого переменного вектора **u** (входа системы):

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2,.., u_m)^{\mathrm{T}},\ m \geq 1, \qquad (2)$$

называемого *управляющим вектором* (или просто управлением), и постоянного вектора **a**:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2,.., a_r)^{\mathrm{T}},\ r \geq 0, \qquad (3)$$

называемого *вектором управляющих* (проектных) *параметров*.

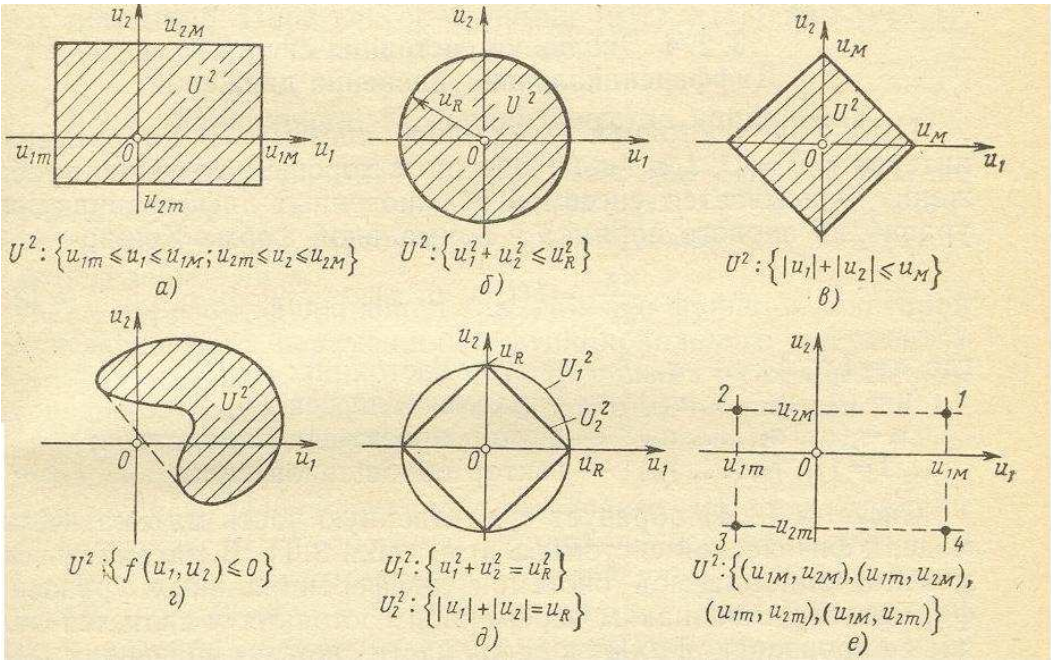

Рис. 2. Виды множеств U^2 допустимых значений управлений:

а, б, в-замкнутые ограниченные выпуклые области, содержащие начало координат; *г* - невыпуклая область, не содержащая начало координат; *д* - невыпуклые одномерные области U_1^2 и U_2^2; *е* - дискретное множество допустимых значений (*1, 2, 3, 4* -изолированные точки)

Вектор **u** принимает значения из некоторого множества U^m *m*-мерного пространства R^m с координатами $u_1, u_2,.., u_m$. Это множество может быть всем пространством R^m или его частью $U^m \subset R^m$. В механике полета чаще всего U^m - замкнутая область пространства R^m.

Множество U^m называется *множеством допустимых значений управления*. Некоторые виды множеств U^m приведены на рис. 2.

Постоянный вектор **a** управляющих параметров в механике полета обычно принадлежит некоторому замкнутому множеству $A^r \subset R^r$ (R^r - пространство с координатами $a_1, a_2,.., a_r$).

П р и м е ч а н и е. В механике полета управляющими переменными u_j обычно являются координаты отклонения рулевых поверхностей, вектора тяги и т. п., а в качестве управляющих параметров a_σ выступают конструктивные, весовые и геометрические характеристики ЛА (его проектные параметры). Замкнутость и ограниченность множеств U^m и A^r означает, что в реальных конструкциях положения рулей и конструктивные параметры не могут быть произвольно большими. В каждой конкретной задаче управляющие переменные не обязательно совпадают с координатами отклонения физических «рулей» и органов управления, а определяются степенью детализации задачи и совершенством математической модели объекта, В некоторых усеченных задачах, т. е. задачах, не дающих достаточно полного описания реального объекта, в качестве управляющих переменных могут выступать координаты углового положения ЛА, компоненты скорости и ее направления и т. д.

2.4. Эволюция состояния системы. Дифференциальные уравнения движения

Изменение состояния (эволюция) системы ***S*** на временном интервале $T = \{t, t_0 \le t \le t_1\}$обычно с хорошей степенью приближения описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме Коши:

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = \mathrm{f}(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}, \mathrm{a}), \qquad (4)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2,.., x_n)^{\mathrm{T}}$ - вектор состояния;

$\mathbf{u} = (u_1, u_2,.., u_m)^{\mathrm{T}}$- управляющий вектор;

$\mathbf{a} = (a_1, a_2,.., \mathrm{a}_r)^{\mathrm{T}}$ - вектор проектных параметров;

$\mathbf{f} = (f_1, f_2,.., f_n)^{\mathrm{T}}$ - вектор обобщенной силы.

Система (4) образует существенную часть математической модели физической системы ***S***. В математической модели, описываемой системой дифференциальных уравнений, формальным признаком переменной состояния **x** является наличие ее производной d**x**/dt в левой части системы уравнений (4). Управляющая переменная **u** входит только в правую часть системы (4) и не встречается под знаком производной (это - формальный признак управляющей переменной).

Предполагается, что вектор-функция **f**(t, **x, u, a**) определена для любых значений $\mathbf{x} \in {}^n$, $\mathbf{u} \in U^m$, $\mathbf{a} \in A^r$, $t \in T$непрерывна по совокупности переменных t, **x, u, a** и непрерывно дифференцируема по t, **x, a**. Так как поведение вектора **u** может быть произвольным (за исключением условия $\mathbf{u} \in U^m$) и, кроме того, можно произвольно выбрать постоянный вектор $\mathbf{a} \in A^r$, то система уравнений (4) определяет управляемый процесс. Ход управляемого процесса будет определен на некотором интервале $t_0 \le t \le t_1$, если на этом интервале вектор **u** задан в одной из двух форм:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t),.., u_m(t))^{\mathrm{T}}; \qquad (5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t),.., v_m(\mathbf{x}, t))^{\mathrm{T}}. \qquad (6)$$

Вектор-функцию $\mathbf{u}(t)$ называют *программным (временным) управлением* (или просто управлением), а вектор-функцию $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ - *координатным управлением*, или *законом управления* (в некоторых задачах механики полета - *законом наведения*).

Закон управления (6) физически выражает известный принцип обратной связи, согласно которому величина управляющего воздействия определяется на основании измерения текущего состояния системы **x** и, быть может, момента времени *t*.

Каждому выбору векторов управляющих параметров **a** и управления **u** [в виде (5) или (6)] и каждому начальному состоянию (при $t = t_0$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$) соответствует по (4) временная

последовательность состояний $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$, которая называется *фазовой траекторией* (поведением, эволюцией, движением) системы $\boldsymbol{S}$. Пара вектор-функции $\{\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t)\}$ или $\{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}(t)\}$ называется *процессом управления*.

2.5. Функционал. Критерий качества управления

Величина $J[\mathbf{u}(t)]$ называется *функционалом функции* $\mathbf{u}(t)$ на отрезке $t_0 \le t \le t_1$, если каждой функции $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, принадлежащей некоторому классу функций, поставлено в соответствие определенное число.

Таким образом, функционал $J[\mathbf{u}(t)]$ - это функция, в которой роль независимого переменного (функционального аргумента) играет функция $\mathbf{u}(t)$. При этом $J[\mathbf{u}(t)]$ зависит от совокупности всех значений, принимаемых функцией $\mathbf{u}(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$, и может рассматриваться как функция бесконечного числа независимых переменных.

Для каждого фиксированного конечного момента времени $t_1 = t_1'$ состояние $\mathbf{x}(t_1')$ системы $\boldsymbol{S}$, движущейся из начального состояния $(t_0, \mathbf{x}_0)$ в соответствии с уравнением (4), является одновременно векторным функционалом (т. е. вектором, компонентами которого являются функционалы) от управления $\mathbf{u}(t)$ и вектор-функцией от вектора $\mathbf{a}$ и вектора начальных условий $\mathbf{x}_0(t_0)$. Критерии качества процессов управления являются функционалами.

Достаточно общая форма критерия качества в теории оптимальных процессов имеет вид

$$J[\mathbf{u}(t); \mathbf{a}] = \Phi(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}) + f_0(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{a})\, dt, \qquad (7)$$

где $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет системе (4); $\mathbf{u}(t)$ - некоторое выбранное управление; $\mathbf{a}$ - управляющий параметр.

В частности, каждую из координат $x_i(t_1)$ системы (4) можно записать в форме (7):

$$x_i(t_1) = f_0(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{a})\, dt + x_i(t_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

2.6. Автономные системы

Если правые части системы (4) и функции f_0 и Φ в (7) от времени явно не зависят, то соответствующая задача называется *автономной*:

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = \mathrm{f}(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}, \mathrm{a}) \qquad (4')$$

$$J[\mathbf{u}(t); \mathbf{a}] = \Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}) + f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a})\, dt \qquad (7')$$

Автономные системы инвариантны относительно сдвига вдоль оси t. Поэтому для автономных систем важна только длительность процесса $t_1 - t_0$ и можно положить $t_0 = 0$.

2.7. Допустимое программное управление

Вектор-функция $\mathbf{u}(t)$ называется *допустимым программным управлением* в основной задаче (см. разд. 3.1), если:

а) $\mathbf{u}(t)$ принадлежит к классу кусочно-непрерывных по t на интервале $[t_0, t_1]$ функций, т. е. может иметь лишь конечное число точек разрыва первого рода;

б) значения $\mathbf{u}(t)$ принадлежат заданному множеству U^m для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Кусочно-непрерывные управления соответствуют предположению о «безынерционности» перекладки рулей, которые в момент разрыва мгновенно «перескакивают» с одного положения в другое.

Если желательно учесть «инерцию» рулей, то следует искать управление в классе непрерывных кусочно-гладких функций $\mathbf{u}(t)$. Такой класс допустимых управлений иногда сводится к предыдущему путем введения нового безынерционного управления, связанного со «старым» $\mathbf{u}(t)$ управлением соотношением

$$\frac{d\mathrm{u}}{\mathrm{dt}} = \bar{\mathrm{u}}\,;\ \bar{\mathrm{u}} \in \bar{U}^{m}\,, \qquad (8)$$

где

$$\mathrm{u} = (u_1, u_2, ..., u_m)^{\mathrm{T}};$$

$$\bar{\mathrm{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m)^{\mathrm{T}}.$$

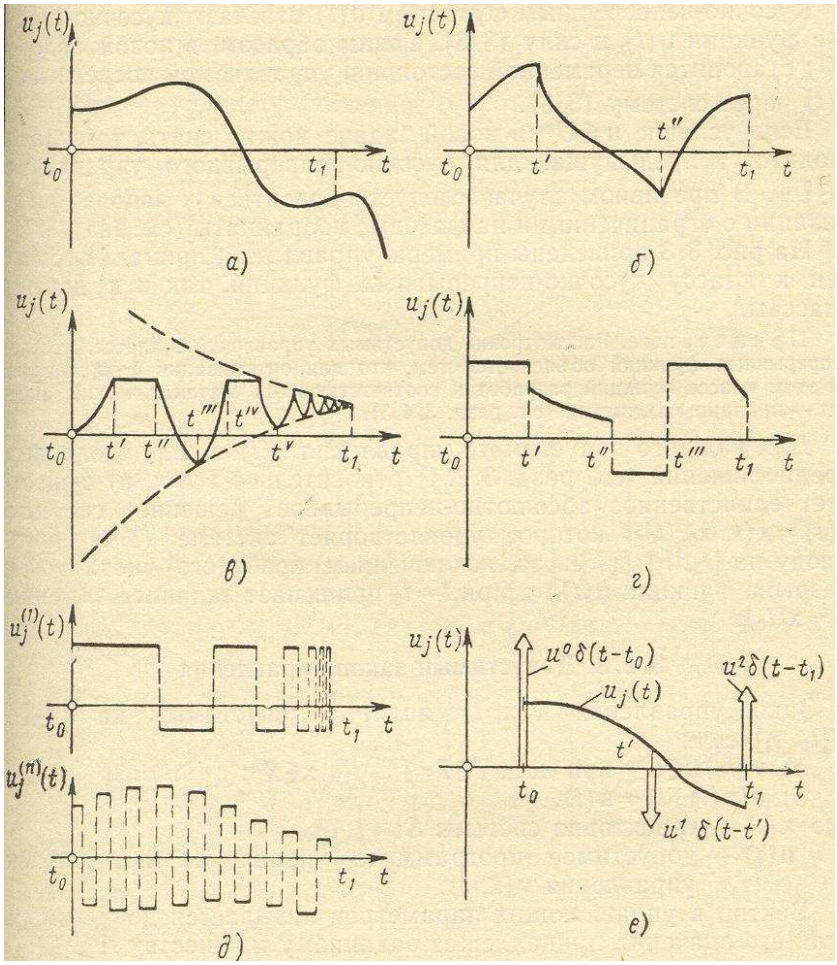

Рис. 3. Примеры управлений $u_j(t)$, принадлежащих различным классам функций:

а - гладкое управление; *б*-кусочно-гладкое непрерывное управление; *в* - непрерывное управление (в окрестности точки t_1 функция $u_j(t)$ недифференцируема); *г* - кусочно непрерывное управление; *д*-управления, не являющиеся кусочно-непрерывными ($u_j^{(1)}(t)$, содержат бесконечное число переключений в окрестности точки t_1; $u_j^{(n)}(t)$ - элемент последовательности, сходящейся к функции, разрывной в каждой точке отрезка $[t_0, t_1]$; *е*-управление, содержащее δ-функции Дирака; u^0, u^1, u^2 - константы.

Если $\overline{U}^m$ - замкнутая и ограниченная область, то это означает, что введены ограничения на значения первых производных от вектор-функции **u**(t).

Кусочно-непрерывным функциям отвечают кусочно-гладкие функции **u**(t) в силу (8). Таким образом, в новой задаче **u**(t) становится переменной состояния, управляемой посредством через систему (8).

Если условие **u** Є U^m в новой задаче можно снять, то задача сводится к предыдущей для кусочно-непрерывного управления Є ^{m}. В противном случае следует обратиться к задаче оптимизации с ограничениями на фазовые координаты (см. разд. 7).

На рис. 3 приведены примеры управлений, принадлежащих как к классу кусочно-непрерывных функций, так и к другим классам.

П р и м е ч а н и е. Рассмотрение допустимых управлений в классе кусочно -непрерывных функций объясняется тем, что для оптимизации функционалов на этом классе функций разработан соответствующий математический аппарат - принцип максимума (см. разд. 4. 3).

Для каждого допустимого управления **u**(t) в силу сделанных предположений (см. разд. 2.4) относительно **f**(t, **x, u**) существует единственное абсолютно-непрерывное решение системы **x**(t) = **x**(t, t_0, $\mathbf{x}_0$), которое удовлетворяет системе (3.4) почти всюду на [t_0, t_1] (т. е. за исключением конечного числа точек разрыва функции **u**(t)) и при $t = t_0$ принимает заданное значение $\mathbf{x}_0$ = **x** (t_0).

2.8. Допустимый закон управления

Закон управления **v**(**x,** t) является допустимым на **x** Є ^{n} , t Є [t_0, t_1], если

а) **v**(**x,** t) Є U^m при всех t Є T = [t_0, t_1], **x** Є ^{n} ;

б) **v**(**x**(t)**,** t) = **u**(t),

где **x**(t) - траектория системы ***S***;

u(t) - допустимое программное управление при законе управления **v**(**x,** t).

Вектор **a** управляющих параметров называется допустимым, если его значения принадлежат заданному множеству $A^r \subset R^r$.

2.9. Допустимые траектории и процессы

Фазовая траектория **x**(t) системы ***S*** называется допустимой, если:

а) она получена из решения системы дифференциальных уравнений при допустимом управлении **u**(t) или при допустимом законе управления **v**(**x,** t);

б) значения **x**(t) принадлежат заданной области ^{n} пространства состояний X^n.

Управляемый процесс (**x**, **u**) называется допустимым, если в нем под действием допустимого управления **u**(t) или допустимого закона **v**(**x,** t) реализуется допустимая траектория **x**(t).

2.10. Граничные условия. Краевая задача

Цель управляемого процесса (**x**, **u**) состоит в переводе системы ***S*** из некоторого заданного при $t = t_0$ начального состояния $\mathbf{x}_0$ = **x** (t_0) в заданное конечное состояние

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}\,(t_1)$ за время $T = t_1 - t_0$.

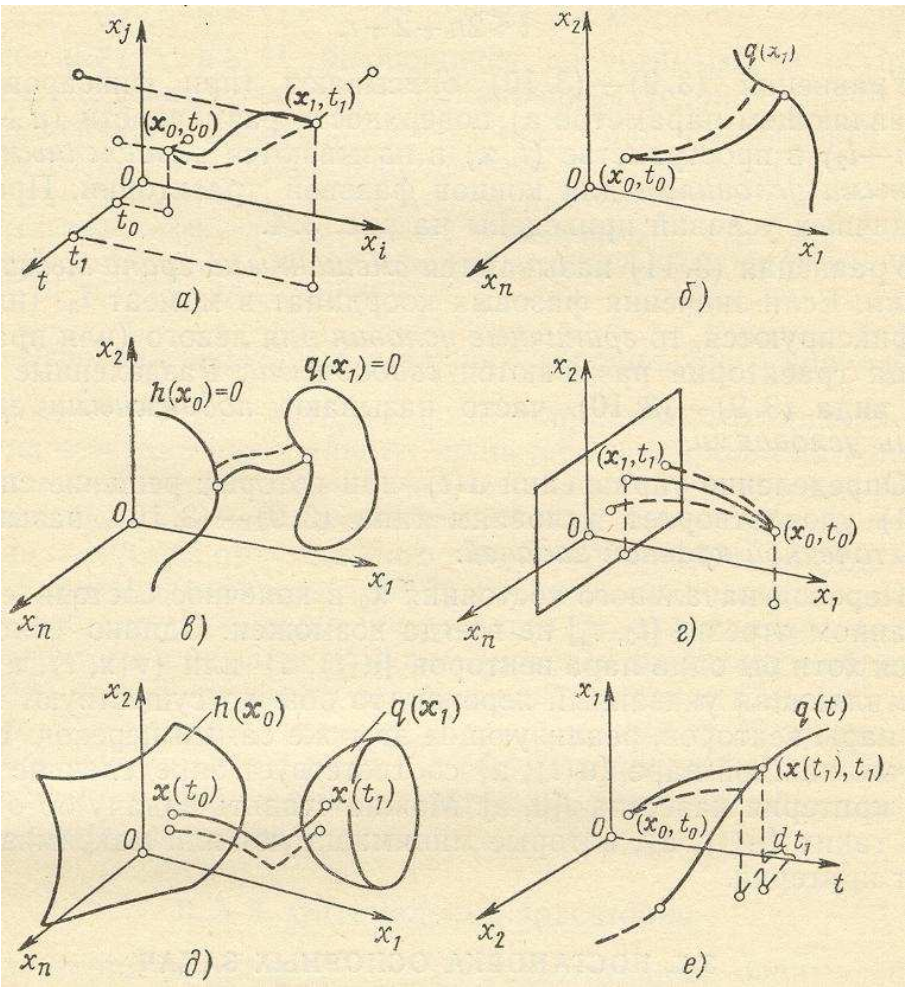

Рис. 4. Примеры граничных условий:

а - левый и правый концы фазовой траектории закреплены; *б* - левый конец закреплен, правый - свободен; *в* - левый и правый концы - подвижные; *г* - левый конец закреплен, правый - свободен, за исключением координаты $\mathbf{x}_1$; *д* - общий случай подвижных граничных условий; *е* - граничные условия в задаче встречи движений (перехвата)

_____ оптимальная траектории; - - - произвольная траектория

При этом не все компоненты векторов $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_1$ и моменты времени t_0, t_1 обязательно должны быть фиксированными; некоторые могут оставаться не заданными (свободными). В общем случае система ***S*** в начальный и конечный моменты времени может находиться в состояниях, описываемых уравнениями вида

$$\mathbf{h}\,(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{a}) = (h_1, h_2, \ldots,)^{\mathrm{T}} = 0; \qquad (9)$$

$$\mathbf{q}\,(t_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}) = (q_1, q_2, \ldots,)^{\mathrm{T}} = 0 \qquad (10)$$

или более общими уравнениями вида

$$\boldsymbol{g}(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}) = (g_1, g_2, \ldots, g_l)^{\mathrm{T}} = 0\,, \qquad (11)$$

где $\qquad l_1 + l_2 \le 2n + 2 + r; \quad l \le 2n + 2 + r.$

Уравнения (9)-(10) описывают (при фиксированном управляющем параметре **a**) поверхности размерности (n + 1 - l_1) и (n - l_2) в пространстве (t, **x**) и называются *разделенными граничными условиями* для концов фазовой траектории. Примеры граничных условий приведены на рис. 4.

Уравнения (11) называются *смешанными граничными условиями*. Если значения фазовых координат в момент t_0 (или t_1) не фиксируются, то *граничные условия* для левого (или правого) конца траектории называются свободными. Разделенные условия вида (9) - (10) часто называют *подвижными граничными условиями*.

Определение управлений по **u**(t), при которых решение системы (4) удовлетворяет условиям типа (9)-(10), называется *двухточечной краевой задачей*.

Перевод начального состояния $\mathbf{x}_0$ в конечное состояние $\mathbf{x}_1$, на заданном отрезке $[t_0, t_1]$ не всегда возможен. Однако если найдется хотя бы одна пара векторов {**u**(t), **a**} или {**v**(**x**, t), **a**}, осуществляющая указанный переход, то обычно существуют и другие пары векторов, реализующие этот же самый переход. В этом случае каждой паре {**u**(t), **a**} соответствует определенное значение критерия качества J [**u**(t)]. Можно ставить задачу об отыскании таких {**u**(t), **a**}, которые минимизируют или максимизируют этот критерий.

3. ПОСТАНОВКА ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Основная задача оптимального программного управления

Основная задача оптимального программного управления в форме временной программы (5) для системы (4) с критерием качества (7) и краевыми условиями (11) формулируется следующим образом.

Среди всех допустимых на отрезке $[t_0, t_1]$ *программных управлений* $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \in U^m$ *и управляющих параметров* $\mathbf{a} \in A^r$, *переводящих точку* (t_0, $\mathbf{x}_0$) *в точку* (t_1, $\mathbf{x}_1$), *найти такие, для которых функционал* (7) *на решениях системы* (4) *принимает наименьшее (наибольшее) возможное значение с выполнением условий* (11).

Управление **u**(t), решающее эту задачу, называется *оптимальным (программным) управлением*, а вектор **a** - *вектором оптимальных параметров*.

Если пара {**u** *(t), **a***} доставляет абсолютный минимум функционалу J [**u**(t)]на решениях системы (4), то выполняется соотношение

$$J_{min} = J^* = J\,[\mathbf{u}^*(t)\,,\ \mathbf{a}^*] \le J\,[\mathbf{u}(t), \mathbf{a}] \qquad (12)$$

для всех $\mathbf{u} \in U^m$, $\mathbf{a} \in A^r$, являющихся допустимыми и осуществляющих заданный переход с выполнением условия (11).

Аналогичное определение имеет место для абсолютного максимума (с заменой знака неравенства $\le$ знаком $\ge$).

П р и м е ч ан и е. Из определения абсолютного минимума (12) следует, что абсолютное минимальное значение функционала $J^* = J\,[\mathbf{u}^*, \mathbf{a}^*]$ является единственным, чего нельзя утверждать, вообще говоря, об оптимальном управлении **u** *(t) и оптимальном параметре **a***.

3.2. Основная задача оптимального координатного управления

Основная задача оптимального координатного управления известна в теории оптимальных процессов как *проблема синтеза оптимального закона управления*, а в некоторых задачах механики полета - как *задача об оптимальном законе наведения*.

Задача синтеза оптимального закона управления для системы (4) с критерием качества (7) и краевыми условиями (9), (10), где для упрощения предполагается, что функции f_0, **f, h, q, Ф** от вектора **a** не зависят, формулируется следующим образом.

Среди всех допустимых законов управления $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ *найти такой, что для любых начальных условий* $(t_0, \mathbf{x}_0)$ *из* (9) *при подстановке этого закона в* (4) *и в* (7) *осуществляется заданный переход в* (10) *и критерий качества* $J[\mathbf{u}]$ *принимает наименьшее (наибольшее) значение.*

3.3. Оптимальные траектории

Траектория системы (4), соответствующая оптимальному управлению $\mathbf{u}^*(t)$ или оптимальному закону $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$, называется *оптимальной траекторией*. Совокупность оптимальной траектории $\mathbf{x}^*(t)$ и оптимального управления $\mathbf{u}^*(t)$ образует оптимальный управляемый процесс $\{\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)\}$.

Установлено, что при отсутствии вектора **a** управляющих параметров в f_0, **f, h, q, Ф** задачи программного и координатного управления эквивалентны.

Так как закон оптимального управления $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$ имеет форму закона управления с обратной связью, то он остается оптимальным для любых значений начальных условий $(\mathbf{x}_0, t_0)$ и любых координат **x**. В отличие от закона $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$ программное оптимальное управление $\mathbf{u}^*(t)$ является оптимальным лишь для тех начальных условий, для которых оно было вычислено. При изменении начальных условий будет меняться и функция $\mathbf{u}^*(t)$. В этом состоит важное с точки зрения практической реализации системы управления отличие закона оптимального управления $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$ от программного оптимального управления $\mathbf{u}^*(t)$, поскольку выбор начальных условий на практике никогда не может быть сделан абсолютно точно.

Свойства оптимальных управлений
и оптимальных траекторий

1. Всякая часть оптимальной траектории (оптимального управления) также является в свою очередь оптимальной траекторией (оптимальным управлением). Это свойство математически формулируется следующим образом.

Пусть $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ - оптимальное управление для выбранного функционала $J[\mathbf{u}]$, соответствующее переходу из состояния $(t_0, \mathbf{x}_0)$ в состояние $(t_1, \mathbf{x}_1)$ по оптимальной траектории $\mathbf{x}^*(t)$. Числа t_0, $\mathbf{x}_0$ и вектор $\mathbf{x}_0$ - фиксированные, а вектор $\mathbf{x}_1$, вообще говоря, свободен.

На оптимальной траектории $\mathbf{x}^*(t)$ выбираются точки $\mathbf{x}^*(\tau_0)$ и $\mathbf{x}^*(\tau_1)$, соответствующие моментам времени $t = \tau_0$ и $t = \tau_1$, где $t_0 \le \tau_0 \le \tau_1 \le t_1$.

Тогда управление $\mathbf{u}^*(t)$ на отрезке $[\tau_0, \tau_1]$является оптимальным, соответствующим переходу из состояния $\mathbf{x}^*(\tau_0)$ в состояние $\mathbf{x}^*(\tau_1)$, а отрезок $[\mathbf{x}^*(\tau_0), \mathbf{x}^*(\tau_1)]$ является оптимальной траекторией (рис. 5).

Таким образом, если начальное состояние системы есть $\mathbf{x}^*(\tau_0)$ и начальный момент времени $t = \tau_0$, то независимо от того, каким образом пришла система к этому состоянию, ее оптимальным последующим движением будет отрезок траектории $\mathbf{x}^*(t)$, $\tau_0 \le t \le t_1$, являю-

щийся частью оптимальной траектории между точками (t_0, **x**0) и (t_1, $\mathbf{x}_1$). Это условие является необходимым свойством оптимальности процесса и служит основой динамического программирования (см. разд. 5.2).

П р и м е ч а н и е. Приведенная краткая формулировка основного свойства оптимальных траекторий не должна толковаться слишком широко. Требование, чтобы начальная и конечная точки траекторий сравнения лежали на оптимальной траектории в те же моменты времени τ_0, τ_1, что и точки оптимальной траектории, или чтобы свободный правый конец $\mathbf{x}_1$ траектории сравнения оканчивался в тот же момент t_1, что и конец оптимальной траектории, являются существенными. Без их выполнения это свойство, вообще говоря, не имеет места. Так, если заданы только начальная точка $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ и моменты времени t_0 и τ_0, а $\mathbf{x}(\tau_0)$ свободен, то отрезок траектории $\mathbf{x}^*(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ может и не быть оптимальным. В этом случае оптимальным может быть, вообще говоря, другой отрезок $\mathbf{x}'(t)$ (см. рис. 5).

2. Автономные системы (см. разд. 2.6) инвариантны относительно сдвига вдоль оси t. Это означает, что если $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ совершает переход $\mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}_1$ и сообщает функционалу $J[\mathbf{u}]$ значение J^*, то при любом действительном τ управление $\mathbf{u}^*(t+\tau)$, $t_0 - \tau \le t \le t_1 - \tau$ также совершает переход $\mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}_1$ и придает функционалу $J[\mathbf{u}]$ значение J^*.

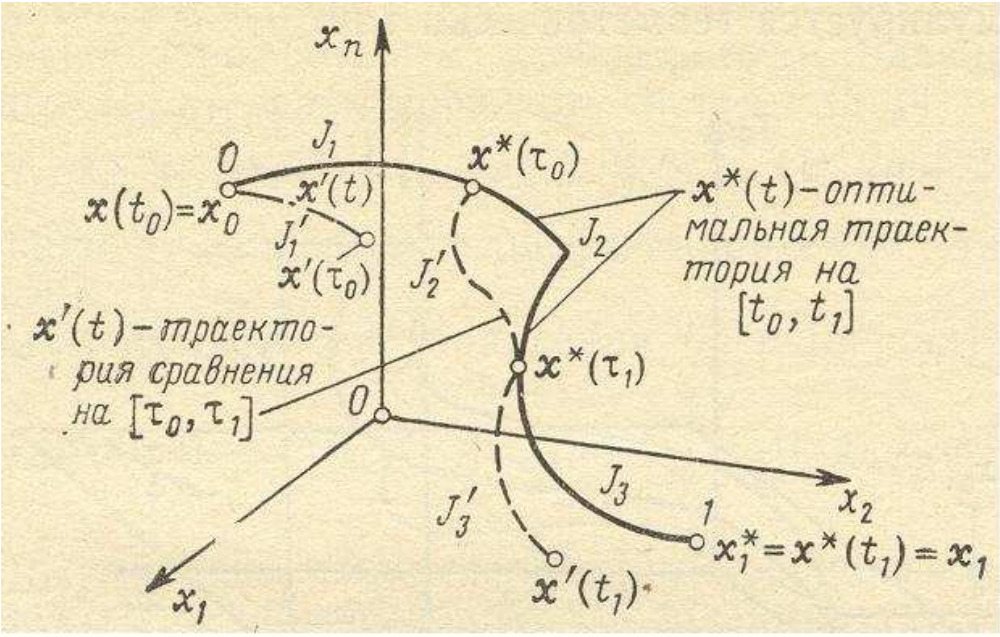

Рис. 5 Основное свойство оптимальных траекторий:

$J'_2 > J_2$; $J'_{i\ (i=1,2,3)}$ - значения функционала на участках оптимальной траектории и на траекториях сравнения, соответственно

3.4. Геометрическая интерпретация основной задачи оптимального управления

Основным задачам оптимального управления при закрепленных концах можно дать следующую эквивалентную геометрическую формулировку.

Пусть при $t = t_0$ задано начальное состояние $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$, а при $t = t_1$ - конечное состояние $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$, где t_0, t_1, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$ - фиксированные значения. Тогда в функционале $J[\mathbf{u}]$ (7) слагаемое $\Phi(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$ является известным числом Φ_0.

Введем новую переменную x_0, закон изменения которой имеет вид

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0\ (t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{a}) \qquad (13)$$

с начальным условием

$$x_0\,(t_0) = x_{00} = \Phi_0.$$

Присоединим эту переменную к системе (4). Тогда при $t = t_0$ система находится в точке $(x_0(t_0), x_1(t_0),.., x_n(t_0))^{\mathrm{T}}$, а при $t = t_1$ - в точке $(x_0(t_1), x_1(t_1),.., x_n(t_1))^{\mathrm{T}}$,

где

$$x_0(t_1) = \Phi_0 + \ f_0\,(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}\ , \mathbf{a})\ dt\ =\ J\,[\mathbf{u}]$$

Таким образом, если в (n+1)-мерном пространстве точек (x_0, **x**) провести через точку (O,$\mathbf{x}_1$) прямую Π (рис. 6) параллельно оси Ox_0, то решение системы (4), (13) проходит при $t = t_1$ через точку на прямой Π с координатой $x_0(t_1) = J$.

Теперь основная задача оптимального программного управления формулируется геометрически так.

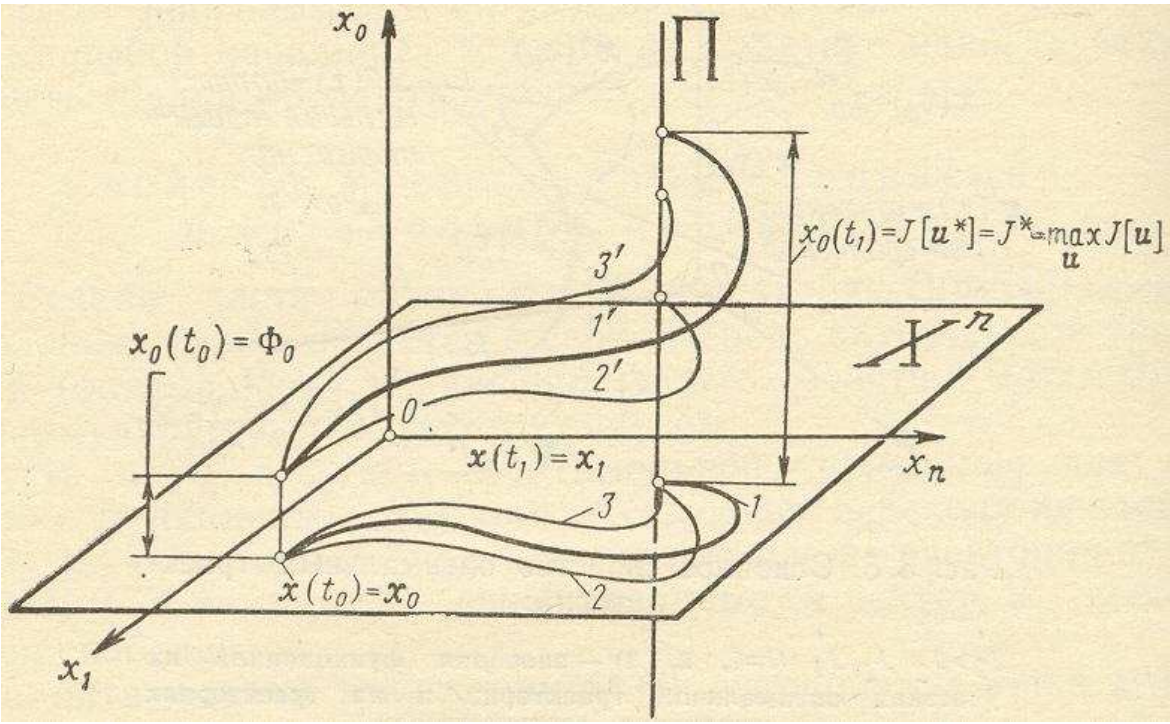

Рис. 6. Геометрическая формулировка основной задачи оптимального управления:

1 - оптимальная траектория; 1′ - изменение критерия качества J вдоль оптимальной траектории; 2, 3 - неоптимальные траектории, проходящие через точки (x_0, t_0), (x_1, t_1); 2′, 3′ - изменение критерия качества J вдоль неоптимальных траекторий

В (n+1)-мерном фазовом пространстве $(x_0, x_1,.., x_n)^{\mathrm{T}}$ даны:

1) при $t = t_0$ точка (Φ_0, $\mathbf{x}_0$);

2) прямая Π, параллельная оси Ox_0 и проходящая через точку (O, $\mathbf{x}_1$).

Среди всех допустимых программных управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, обладающих тем свойством, что соответствующее решение ($x_0\,(t)$, $\mathbf{x}(t)$) системы (4), (13) с начальным условием

$(\Phi_0,\ x_1(t_0),.., x_n(t_0))^{\mathrm{T}}$ пересекает при $t = t_1$ прямую Π, найти такое, для которого точка пересечения с прямой Π имеет наименьшую (наибольшую) координату $x_0(t_1) = J$.

4. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ПРИНЦИП МАКСИМУМА

4.1. Краткая формулировка задачи

Пусть даны: 1. Система дифференциальных уравнений движения

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = \mathbf{f}\,(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}\,, \mathbf{a}) \qquad (14)$$

где $\mathbf{f}\,(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}\,, \mathbf{a})$определены для всех $\mathbf{x} = (x_1, x_2,.., x_n)^{\mathrm{T}} \in X^n \subset R^n$, $t_0 \le t \le t_1$, $\mathbf{u} \in U^m$, $\mathbf{a} \in A^r$, непрерывны по совокупности переменных $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}\,, \mathbf{a})$ и непрерывно дифференцируемы по $(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})$.

2. Соотношения, которым удовлетворяют начальные и конечные $(t_0\,, \mathbf{x}_0)$ и конечные $(t_1\,, \mathbf{x}_1)$ фазы движения системы (14):

$$g_j(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, l < 2n + 2 + r), \qquad (15)$$

где функции g_j непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам.

3. Критерий качества управления (функционал)

$$J\,[\mathbf{u}(t); \mathbf{a}] = \Phi\,(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}\,) + f_0\,(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}\,(t)\,, \mathbf{a})\,dt, \qquad (16)$$

где Φ и f_0 обладают всеми необходимыми производными.

Множество U^m представляет собой замкнутую и ограниченную область эвклидова m-мерного пространства R^m. Функция $\mathbf{u}(t)$ считается допустимой, если она кусочно-непрерывна и ее значения принадлежат множеству U^m: $\mathbf{u}\,(t) \in U^m$.

4.2. Некоторые вспомогательные построения и терминология

Вводятся: 1. Зависящий от времени вектор сопряженных координат (вектор-функция множителей Лагранжа)

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t),.., \lambda_n(t))^{\mathrm{T}}\,. \qquad (17)$$

2. Постоянный вектор $\boldsymbol{\mu}$:

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2,.., \mu_l)^{\mathrm{T}}\,. \qquad (18)$$

3. Вспомогательные функции (гамильтониан задачи оптимизации и функция Лагранжа)

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}\,, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}\,, \mathbf{a}) + \lambda_0 f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}\,, \mathbf{a}) \qquad (19)$$

и

$$L(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{j=1}^{l} \mu_j\, g_j(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}) + \lambda_0\, \Phi(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}). \qquad (20)$$

4. Система дифференциальных уравнений, сопряженная * к (14), (16) и определяющая изменение вектора $\boldsymbol{\lambda}(t)$:

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{\partial f_k(t, \mathrm{x,u,a})}{\partial x_i} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{21}$$

С помощью функции H исходная система уравнений (4) записывается в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = f_i(t, \mathrm{x,u,a}) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

Индексу $i = 0$ соответствует новая переменная $x_0(t)$, определяемая скалярным уравнением

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} = f_0(t, \mathrm{x, u, a}) \tag{23}$$

с начальным условием

$$x_0(t_0) = x_{00} = \Phi(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}). \tag{24}$$

Система уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathrm{x}}} &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^{\mathrm{T}} = \tilde{\mathrm{f}}; \\ \dot{\lambda} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial \tilde{\mathrm{x}}}\right)^{\mathrm{T}} = -\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \tilde{\mathrm{x}}}\right)^{T} \lambda, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

где $H = \lambda^{\mathrm{T}} \tilde{\mathrm{f}}; \partial \tilde{\mathrm{f}} / \partial \mathrm{x}$ - матрица Якоби, $\tilde{\mathrm{x}} = (x_0, x_1, .., x_n)$, $\tilde{\mathrm{f}} = (f_0, f_1, .., f_n)$, $\mathbf{x} \in X^{n+1}$ - называется *канонической системой* дифференциальных уравнений, связанной с основной задачей.

* Система линейных дифференциальных $\dot{\mathrm{y}} = B(t)\mathrm{y}$ уравнений называется сопряженной для системы $\dot{\mathrm{x}} = A(t)\mathrm{x} + \mathrm{f}(t)$, если $B(t) = -A^{\mathrm{T}}(t)$ и размерность векторов **x** и **y** (а также матриц $B(t)$ и $A(t)$ одинаковы. Таким образом, система (21) является фактически сопряженной к линеаризованной системе (14), (23):

$$\delta\dot{\mathrm{x}} = \left.\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}\right|_{\hat{\mathrm{x}}(t), \hat{\mathrm{u}}(t)} \delta\mathrm{x} + \left.\frac{\partial f}{\partial \mathrm{u}}\right|_{\hat{\mathrm{x}}(t), \hat{\mathrm{u}}(t)} \delta u(t),$$

где $\hat{\mathrm{x}}(t), \hat{\mathrm{u}}(t)$ - некоторая опорная траектория и опорное управление, соответственно.

4.3. Принцип максимума Л. С. Понтрягина

Пусть $\mathbf{u}^*(t) = (u^*_1(t), u^*_2(t), .., u^*_m(t))^{\mathrm{T}}$, $t \in [t_0, t_1]$ - такое допустимое управление, а $\mathbf{a}^* = (a^*_1, a^*_2, .., a^*_r)^{\mathrm{T}}$ такоё допустимое значение вектора параметров, что соответствующая им траектория $\mathbf{x}^*(t)$ системы (14) удовлетворяет условиям (15) для концов.

Для оптимальности (в смысле минимума*) критерия качества (16) управления, $\mathbf{u}^*(t)$, траектории $\mathbf{x}^*(t)$ и вектора управляющих параметров $\mathbf{a}^*$ необходимо существование такого

ненулевого переменного вектора $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t),.., \lambda_n(t))^T$, $\lambda_0(t) = \text{const} \geq 0$** и такого постоянного вектора $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2,.., \mu_l)^T$, что выполняются следующие условия.

*) Случай максимума функционала J [**u, a**] сводится к задаче в данной постановке путем рассмотрения функционала J_1 [**u, a**] = - J [**u, a**].

** Обычно можно принимать $\lambda_0 = 1$, см. разд. 4.4, следствие 2.

1. Вектор-функции $\mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{u}^*(t)$, $\boldsymbol{\lambda}(t)$ и вектор $\mathbf{a}^*$ удовлетворяют системе

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i^*}{dt} &= \frac{\partial H(t, \mathrm{x}^*(t), \mathrm{u}^*(t), \lambda^*(t), \mathrm{a})}{\partial \lambda_i}, \\ \frac{d\lambda_i}{dt} &= -\frac{\partial H(t, \mathrm{x}^*(t), \mathrm{u}^*(t), \lambda(t), \mathrm{a}^*)}{\partial x_i}, \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

$$(i = 0,1,2,.., n).$$

2. Функция $H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*)$ переменного $\mathbf{u} \in U^m$ при каждом $t \in [t_0, t_1]$, т.е. при фиксированных $\mathbf{x}^*$ и $\boldsymbol{\lambda}$ и при фиксированном векторе $\mathbf{a}^*$ достигает при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$ минимума*):

$$H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*) = H^*(t, \mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*) = \min_{\mathrm{u} \in U^m} H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*). \qquad (27)$$

Таким образом, оптимальное управление определяется как

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*) = \operatorname*{argmin}_{\mathrm{u} \in U^m} H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*). \qquad (28)$$

Принцип максимума, следовательно, утверждает, что оптимальное управление $\mathbf{u}^*(t)$ в каждый момент времени t минимизирует проекцию фазовой скорости $\tilde{\mathrm{x}} = \tilde{\mathrm{f}}(t, \mathrm{x}, \mathrm{u})$ управляемого процесса (т. е. проекцию скорости изображающей точки $\tilde{\mathrm{x}} \in \tilde{X}^{n+1}$) на направление, задаваемое вектором $\boldsymbol{\lambda}(t)$.

*) В отличие от классической формулировки принципа максимума Л. С. Понтрягина в данном случае операция max в (27) заменена на min. В соответствии с такой заменой необходимое условие (27) можно было бы назвать принципом минимума. Следует обратить внимание, что в данном случае $\lambda_0 \geq 0$, тогда как в классической формулировке $\lambda_0 \leq 0$.

Напомним, что

$$H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = \lambda^{\mathrm{T}} \tilde{\dot{\mathrm{x}}} = \lambda^{\mathrm{T}} \tilde{\mathrm{f}}(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}, \mathrm{a})$$

- скалярное произведение векторов $\boldsymbol{\lambda}(t)$ и $\tilde{\dot{\mathrm{x}}}$.

3. Сопряженные переменные $\lambda_i(t)$ и функция $H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*)$ непрерывны вдоль оптимальной траектории (аналог условия Эрдмана-Вейерштрасса классического вариационного исчисления).

4. Условия трансверсальности. Для концевых точек (t_0, $\mathbf{x}_0$), (t_1, $\mathbf{x}_1$) и вектора параметров **a*** при *произвольных* вариациях концевых точек и параметров выполняются обобщенные условия трансверсальности

$$\left[H\delta t - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \delta x_i \right] \Bigg|_{t_0}^{t_1} + \; d\boldsymbol{L} \; + \; \sum_{\sigma=1}^{r} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H}{\partial a_\sigma} \delta a_\sigma dt = 0 \qquad (29)$$

Здесь $d\boldsymbol{L}$ - полная вариация функции $\boldsymbol{L}(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{a})$, определяемой уравнением (20):

$$d\boldsymbol{L} = \frac{\partial L}{\partial t_0}\delta t_0 + \frac{\partial L}{\partial t_1}\delta t_1 + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i(t_0)}\delta x_i(t_0) + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i(t_1)}\delta x_i(t_1) + \sum_{\sigma=1}^{r} \frac{\partial L}{\partial a_\sigma}\delta a_\sigma, \qquad (30)$$

где δt_0, δt_1, $\delta x_i(t_0)$, $\delta x_i(t_1)$, δa_σ - произвольные вариации концевых точек и параметров.

Обобщенные условия трансверсальности (29) с учетом выражения (30) приводят в силу независимости вариаций δt_0, δt_1, $\delta x_i(t_0)$, $\delta x_i(t_1)$, δa_σ к следующим $2n + 2 + r$ соотношениям:

$$\left(-H + \frac{\partial L}{\partial t_0} \right) \Bigg|_{t_0} \delta t_0 = 0; \qquad (31)$$

$$\left(H + \frac{\partial L}{\partial t_1} \right) \Bigg|_{t_1} \delta t_1 = 0; \qquad (32)$$

$$\left(\lambda_i + \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \Bigg|_{t_0} \delta x_i(t_0) = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \qquad (33)$$

$$\left(-\lambda_i + \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \Bigg|_{t_1} \delta x_i(t_1) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \qquad (34)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial a_\sigma} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H}{\partial a_\sigma} dt \right) \delta a_\sigma = 0 \;\; (i = 1, 2, \ldots, r). \qquad (35)$$

Если какое-либо конечное условие $x_i(t_0)$, $x_i(t_1)$ или параметр a_σ закреплены (не варьируются), то соответствующая вариация равна нулю: $\delta z = 0$ ($z = t_0, t_1, x_i(t_0), x_i(t_1), a_\sigma$). Если какое-либо конечное условие $x_i(t_0)$, $x_i(t_1)$ или управляющий параметр a_σ свободны, то равен нулю коэффициент при свободной вариации δz в (33)-(35).

Таким образом, совокупность условий, выражающих принцип максимума (26), (28), условий трансверсальности (29), дают необходимые условия оптимальности программного управления.

Условия принципа максимума позволяют среди множества всех траекторий и управлений, переводящих систему из $(t_0, \mathbf{x}_0)$ в $(t_1, \mathbf{x}_1)$, выделить те отдельные, вообще говоря, изолированные траектории и управления, которые могут быть оптимальными.

В формулировке принципа максимума участвует $2n + 2 + m$ неизвестных функций $x_0(t), x_1(t),.., x_n(t); \lambda_0(t), \lambda_1(t),.., \lambda_n(t); u_1(t), u_2(t),.., u_m(t)$, для определения которых имеется $(n + 1)$ дифференциальных уравнений физической системы (14), (23), $(n + 1)$ дифференциальных уравнений сопряженной системы (21) и m конечных соотношений для u_j вытекающих из (27).

Следовательно, для $2n + 2$ неизвестных функций имеется $2n + 2 + m$ соотношений. Если известны все начальные условия

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) &= (\Phi_0, x_1(t_0),.., x_n(t_0))^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\lambda}_0 = \boldsymbol{\lambda}(t_0) &= (\lambda_0(t_0), \lambda_1(t_0),.., \lambda_n(t_0))^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

и фиксированное значение управляющего параметра $\mathbf{a}$, то система (26) может быть проинтегрирована. Однако начальный и конечный моменты времени t_0, t_1, начальное и конечное значения вектора фазовых координат $\mathbf{x}_0 = (x_{10},.., x_{n0})$; $\mathbf{x}_1 = (x_{11},.., x_{n1})$, начальное и конечное значения вектора сопряженных переменных $\boldsymbol{\lambda}_0 = (1, \lambda_{10},.., \lambda_{n0})$, $\boldsymbol{\lambda}_1 = (1, \lambda_{11},.., \lambda_{n1})$, постоянный вектор $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2,.., \mu_l)$ и вектор управляющих параметров $\mathbf{a} = (a_1, a_2,.., a_r)$для оптимального решения заранее неизвестны. Они могут быть определены из условий трансверсальности (31)-(35) и граничных условий (15). В самом деле, для определения $(2 + 4n + l + r)$ неизвестных t_0, t_1, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, $\boldsymbol{\lambda}_1$, $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{a}$ имеется 2 условия (31), (32), $2n$ условий (33), (34), r условий (35) и l условий (15); кроме того, $2n$ соотношений вида $\mathbf{x}(t_1) = \boldsymbol{\varphi}_1(t_0, t_1, \boldsymbol{\lambda}_0, \mathbf{x}_0)$, $\boldsymbol{\lambda}(t_1) = \boldsymbol{\varphi}_2(t_0, t_1, \boldsymbol{\lambda}_0, \mathbf{x}_0)$ будут получены в результате интегрирования системы (26). Таким образом, для полученной краевой задачи имеется достаточное число соотношений, позволяющих считать ее, по крайней мере теоретически, разрешимой.

4.4. Некоторые следствия принципа максимума

1. Непосредственным следствием системы (26) и условия (27) является выполнение между точками разрыва функции $\mathbf{u}(t)$ соотношения

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (37)$$

Это условие для автономных систем (т. е. систем, не зависящих явно от t) приводит к первому интегралу: $H = \mathrm{const}$ вдоль всей оптимальной траектории.

2. В большинстве практических случаев $\boldsymbol{\lambda}_0 > 0$ (так называемый нормальный случай) и поэтому без нарушения общности в силу однородности функции H по переменным $\boldsymbol{\lambda}_i$ можно принять $\boldsymbol{\lambda}_0 = 1$.

П р и м е ч а н и е. Из-за однородности H по $\boldsymbol{\lambda}_i$ управление $\mathbf{u}$ из (28) определяется не самими величинами $\boldsymbol{\lambda}_i$, а их отношениями к одной из них, например, к $\boldsymbol{\lambda}_0$. Это эквивалентно принятию $\boldsymbol{\lambda}_0 = 1$. Случай $\boldsymbol{\lambda}_0 = 0$ является особым (анормальныи) и здесь не рассматривается.

3. Условия (27), (28) принципа максимума позволяют найти оптимальные значения всех m компонент вектора $\mathbf{u}$.

Если минимум H по $\mathbf{u}$ достигается во внутренней точке множества U^m и функции f_i дифференцируемы по $\mathbf{u}$, то и определяются из условия

$$\left.\frac{\partial H}{\partial u_j}\right|_{u=u^*} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \qquad (38)$$

Это условие совместно с (26) образует условие Эйлера - Лагранжа классического вариационного исчисления для задачи (14), (15), (16).

П р и м е ч а н и е. Минимум H по **u** далеко не всегда достигается во внутренней точке множества U^m, а в тех случаях, когда он достигается во внутренней точке, последняя не обязательно является стационарной (рис. 7). Типы минимизирующих точек довольно разнообразны (см. рис.7). Из них особо следует отметить случаи нестрогого минимума, так как принцип максимума но позволяет для них однозначно определить **u*.** Этот случай в теории оптимального управления является особым (см. разд. 6).

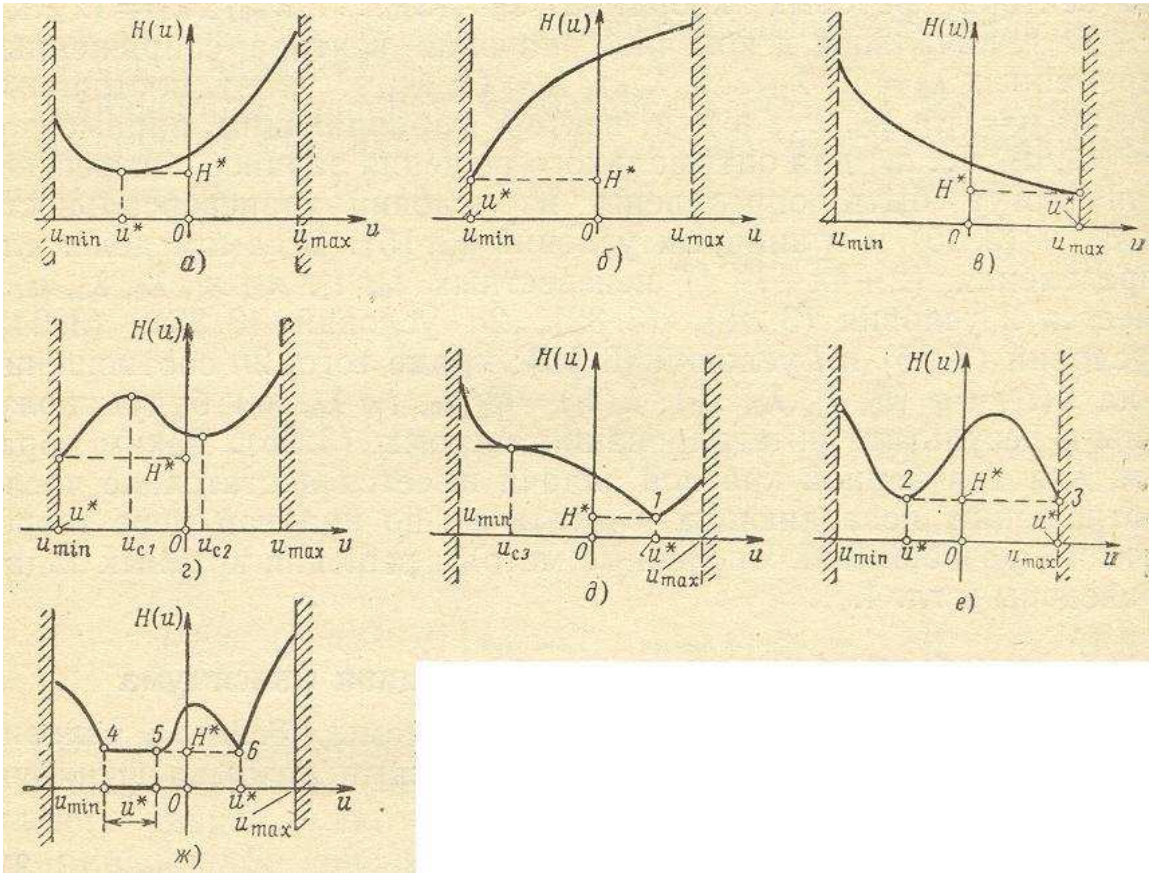

Рис. 7. Примеры зависимостей гамильтониана H от управления **u** и типы минимизирующих точек **u*** на множестве U: $u_{min} \le u \le u_{max}$

а - внутренний min H(u) в стационарной точке; *б*, *в* - граничный min H(u); *г* - граничный min H(u); u_{c1}, u_{c2} точки локальных max и min; *д*- внутренний min H(u) в угловой точке; u_{c3} - точка перегиба; *е*-две изолированные минимизирующие точки 2 и 3; *ж* -нестрогий min H(u) на отрезке 4-5 изолированный min H(u) в точке 6

Если функция H достигает минимального значения в точке на границе Γ_{U^m} области

U^m, то условие (38) не является более необходимым в этой точке. При этом возможны три случая:

а) множество U^m описывается системой связей в виде равенств

$$\chi_s(u_1, u_2,.., u_m) = 0 \ (s = 1, 2, \ldots, \nu < m); \qquad (39)$$

тогда минимум H при условиях (39) находится методом неопределенных множителей Лагранжа;

б) множество U^m задано системой неравенств

$$\chi_s(u_1, u_2,.., u_m) \le 0 \quad (s = 1, 2, 3,..). \qquad (40)$$

Тогда задача сводится на каждом шаге интегрирования к проблеме нелинейного программирования;

в) множество U^m является ограниченной областью, не имеющей границ (например, замкнутой двумерной поверхностью типа сферы или эллипсоида в трехмерном пространстве). Для всякой непрерывной функции $H(\mathbf{u})$, имеющей непрерывные частные производные, заданной на замкнутой поверхности и выраженной через параметрические координаты этой поверхности, точка максимума H по этим параметрическим координатам принадлежит к числу решений (38), где роль u_j играют параметрические координаты поверхности.

Пример. Пусть $H(u_1, u_2, u_3)$ задана на сфере. Тогда замена $u_1 = r \sin\theta \cos\varphi$, $u_2 = r \sin\theta \sin\varphi$, $u_3 = r \cos\theta$ приводит к $H(u_1, u_2, u_3) = \tilde{H}(\theta, \varphi, r)$- периодической функции с периодом 2π по θ и φ в точке минимума $\tilde{H} = H$ имеют место равенства

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varphi}$$

4. Условия (38) определяют лишь стационарную точку функции H. Если $\mathbf{u}=\mathbf{u}^*$ удовлетворяет системе (38) и доставляет минимум функции $H(\mathbf{u})$, то должны быть выполнены необходимые условия второго порядка:

матрица частных производных второго порядка функции $H(\mathbf{u})$

$$H_{uu} = \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \right\} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m) \qquad (41)$$

должна быть неотрицательно-определенной в точке $\mathbf{u}^*$ минимума функции $H(\mathbf{u})$.

Положительная определенность матрицы H_{uu} при выполнении условий (38) в точке $\mathbf{u}^*$ является достаточным условием для относительного (но не абсолютного!) минимума $H(\mathbf{u})$ в этой точке. Условие (41) неотрицательной определенности матрицы H_{uu} представляет собой условия Лежандра - Клебша классического вариационного исчисления.

Проверка положительной определенности матрицы H_{uu} может проводиться по критерию Сильвестра:

для положительной определенности матрицы H_{uu} необходимо и достаточно, чтобы ее угловые миноры были положительными.

В частности, для положительно определенной матрицы H_{uu} выполняется условие

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \right\} \Bigg|_{u^*} > 0 , \qquad (42)$$

являющееся аналогом условия Гильберта неособенности (невырожденности) вариационной задачи.

5. Приведенная формулировка принципа максимума остается справедливой и для случая, когда область U^m зависит явным образом от времени t:

$$U^m = U^m(t).$$

З а м е ч а н и е. Принцип максимума является, вообще говоря, лишь необходимым условием. Любое допустимое оптимальное управление, если оно существует, удовлетворяет принципу максимума. Однако не всякое допустимое управление, удовлетворяющее принципу максимума, является оптимальным. Поэтому после определения управления на основе необходимых условий следует убедиться в его оптимальности. Для этого служат достаточные условия оптимальности.

В некоторых случаях принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности управления $\mathbf{u}(t)$. Пусть, например, найдено допустимое управление $\mathbf{u}^*(t)$, которое переводит заданное начальное состояние $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ линейной относительно фазовых координат системы

$$\dot{\mathrm{x}} = A(t)\mathrm{x} + \mathrm{h}(\mathrm{u}, t), \mathrm{u} \in U^m, \tag{43}$$

(где U^m - замкнутое ограниченное множество; $A(t)$, $\mathbf{h}(\mathbf{u}\ t)$ - непрерывные функции t, $\mathbf{u}$; $\mathbf{x} = (x_1, x_2,.., x_n)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2,.., u_m)$ в заданное конечное состояние $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$. Введем такую систему начальных значений сопряженных переменных

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0) = (\lambda_{00}, \lambda_{10},.., \lambda_{n0})^{\mathrm{T}}, \lambda_{00} > 0,$$

что $\mathbf{u}^*(t)$ минимизирует в каждый момент t функцию

$$H = \lambda_{00} h_0(\mathbf{u}, t) + \lambda^{\mathrm{T}}(t)\, \mathbf{h}(\mathbf{u}, t)$$

по всем $\mathbf{u} \in U^m$,где

$$\dot{\lambda} = -A^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t) - \lambda_{00}\frac{\partial f_0^{\mathrm{T}}(\mathrm{x}^*(t), t)}{\partial \mathrm{x}}.$$

Тогда управление $\mathbf{u}^*(t)$ минимизирует на траекториях $\mathbf{x}^*(t)$ системы (3.43), проходящих через $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$ критерий качества

$$J[\mathbf{u}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} [f_0(\mathrm{x}, t) + h_0(\mathrm{u}, t)]dt,$$

если только $f_0(\mathbf{x}, t)$ является однозначной выпуклой вниз*) функцией $\mathbf{x}$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

*) Функция $f_0(\mathbf{x}, t)$ называется выпуклой вниз по $\mathbf{x}$ при $t \in [t_0, t_1]$, если для всех $\mathbf{x} \in R^n$, $\bar{\mathrm{x}} \in R^n$

$$\frac{\partial f_0(\mathrm{x}, t)}{\partial \mathrm{x}}(\bar{\mathrm{x}} - \mathrm{x}) + f_0(\mathrm{x}, t) \le f_0(\bar{\mathrm{x}}, t).$$

5. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

5.1. Задача синтеза оптимального закона управления

Для синтеза оптимального закона управления систем с обратной связью, оптимальных замкнутых контуров управления, оптимальных законов наведения и т. д. (см. разд. 3.2) более естественен другой подход, чем использованный при решении задач, описанных в разд. 3.4.

В отличие от уравнений Эйлера - Лагранжа и принципа максимума Понтрягина, использующих временное представление оптимального управления [в форме $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}(t)$] для единичного объекта управления, этот подход рассматривает оптимальное управление в форме закона $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$ (координатное управление, управление в форме обратной связи) для множества однородных одинаковых объектов, отличающихся различными начальными состояниями.

С точки зрения механики этот подход соответствует рассмотрению распространения «волн возбуждения» от некоторого источника в неоднородной среде. Общность обоих подходов устанавливает проективная геометрия, с точки зрения которой траектория точки в фазовом пространстве может рассматриваться и как последовательность точек и как огибающая своих касательных.

Последовательное применение описываемого подхода к за дачам оптимального управления приводит для непрерывных процессов к дифференциальному уравнению (нелинейному) в частных производных первого порядка типа уравнения Гамильтона -Якоби.

Один из возможных способов получения этого уравнения со стоит в использовании принципа оптимальности динамического программирования. динамическое программирование является довольно общим методом, разработанным для решения общих задач многоэтапного выбора (т. е. задач, в которых результаты предыдущих операций можно использовать для управления ходом будущих операций).

5.2. Принцип оптимальности динамического программирования

П р и н ц и п о п т и м а л ь н о с т и. В основе динамического программирования лежит сформулированный Р. Беллманом принцип оптимальности. Основное свойство оптимальной траектории (оптимального управления), указанное в разд. 3.3, можно сформулировать в виде следующего принципа оптимальности.

Оптимальное управление не зависит от того, каким образом пришла система к данному состоянию при $t = t'$ (т. е. не зависит от «предыстории» движения и для будущих моментов времени полностью определяется лишь состоянием системы в рассматриваемый момент времени.

Как частный случай в динамическом программировании рассматриваются задачи управления непрерывными процессами (типа сформулированной в разд. 3.2 основной задачи оптимального координатного управления).

К р а т к а я ф о р м у л и р о в к а з а д а ч и. Пусть дана система уравнений движения:

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt}$$

$$= \mathbf{f}\,(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \qquad (44)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2,.., u_m)^{\mathrm{T}} \in U^m$;

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2,.., x_n)^{\mathrm{T}} \in X^n;$$

$\mathbf{f} = (f_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), f_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}),.., f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}))^{\mathrm{T}}$ - вектор обобщенной силы;

и граничные условия

$$\mathbf{x}\,(t_0) = \mathbf{x};\ \ \mathbf{x}\,(t_1) = \mathbf{x}_1\,. \qquad (45)$$

Требуется синтезировать закон оптимального управления $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$, минимизирующий значение функционала

$$J\,[t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}] = f_0\,(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\,dt \qquad (46)$$

Н е о б х о д и м ы е у с л о в и я. Пусть в $(n+1)$-мерном пространстве (X^n, T) имеется некоторая область $G(\mathbf{x}, t)$ начальных значений $\mathbf{x}_0$, t_0 $((\mathbf{x}_0, t_0) \in G(\mathbf{x}, t))$, для каждой точки которой существует оптимальное (в смысле минимума $J[t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}]$) управление $\mathbf{u}^*(t)$, переводящее эти начальные точки в некоторую фиксированную точку $(\mathbf{x}\,(t_1) = \mathbf{x}_1, t_1)$; $\mathbf{x}_1$, t_1 заданы. На таких оптимальных управлениях минимальное значение критерия качества (46) будет зависеть лишь от начальных значений $\mathbf{x}_0$, t_0. Таким образом,

$$J_{min} = J^* = V(t_0, \mathbf{x}_0),$$

где $V(t_0, \mathbf{x}_0)$ - некоторая функция $(n+1)$ переменного $t_0, x_{10},.., x_{n0}$.

Имея в виду произвольную точку области $G(\mathbf{x}, t)$, в дальнейшем, в целях упрощения записи, нижний индекс «0» будем опускать.

Таким образом, функция $V(t, \mathbf{x})$ минимальное значение критерия качества (46) на оптимальных траекториях системы (44), начинающихся в точке $(t, \mathbf{x})$ и заканчивающихся в фиксированной точке $(t_1, \mathbf{x}_1)$:

$$V(t, \mathbf{x}) = \min_{\mathrm{u} \in U^m} f_0\,(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\,dt \qquad (47)$$

на траекториях (44) из $(t, \mathbf{x})$ в $(t_1, \mathbf{x}_1)$.

П р и м е ч а н и е. Функция $V(t, \mathbf{x})$ является аналогом «действия» в аналитической механике и «экстремального интеграла» в классическом вариационном исчислении.

Если функция $V(t, \mathbf{x})$ существует и является непрерывно дифференцируемой по $(t, \mathbf{x})$, то она удовлетворяет основному уравнению динамического программирования - дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка (уравнению Гамильтона - Беллмана):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{\mathrm{u} \in U^m} H\,(t, x, \frac{\partial V}{\partial \mathrm{x}}, \mathrm{u}) = 0, \qquad (48)$$

с граничным условием

$$V(t_1, \mathbf{x}_1) = 0; \qquad (49)$$

здесь

$$H(t, \mathbf{x}, V_{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + V_{\mathbf{x}}\mathbf{f}\,(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \qquad (50)$$

где

$$V_{\mathrm{x}} = \frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{(см. табл.1).}$$

П р и м е ч а н и е. Уравнение (48) аналогично уравнению Гамильтона - Якоби классического вариационного исчисления:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathrm{H}(t, \mathrm{x}, \frac{\partial V}{\partial \mathrm{x}}) = 0, \qquad (51)$$

где функция Н получена в результате подстановки в функцию $H(t, \mathbf{x}, V_{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$ управления $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}, V_{\mathbf{x}})$, найденного из условия стационарности этой функции:

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, m) \qquad (52)$$

Из (48) можно определить оптимальный закон управления:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t) = \underset{\mathrm{u} \in U^m}{\operatorname{argmin}}\, H\,(t, \mathbf{x}, \frac{\partial V}{\partial t}, \mathbf{u}) = \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, \frac{\partial V}{\partial t}). \qquad (53)$$

Геометрический смысл условия (53) пояснен на рис.8. Если функция $V(t, \mathbf{x})$ найдена путем решения уравнения (48) с условием (49), то проблема синтеза решена, так как для известной функции $V(t, \mathbf{x})$ имеем

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^* = (t, \mathbf{x}, \frac{\partial V(t, \mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}}) = \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t). \qquad (54)$$

Подобно тому, как принцип максимума Понтрягина придает удобную форму и уточняет условие Вейерштрасса для основной задачи оптимального программного управления в случае замкнутой области значений управления U^m, так и уравнение Гамильтона - Беллмана является уточнением и обобщением уравнения Гамильтона - Якоби. Уточнение состоит в том, что вместо у стационарности $\partial H / \partial \mathrm{u} = 0$ там, где оно не отвечает существу дела, в (48) используется условие

$$\min_{\mathrm{u} \in U^m} H\,(t, \mathbf{x}, \frac{\partial V}{\partial t}, \mathbf{u}).$$

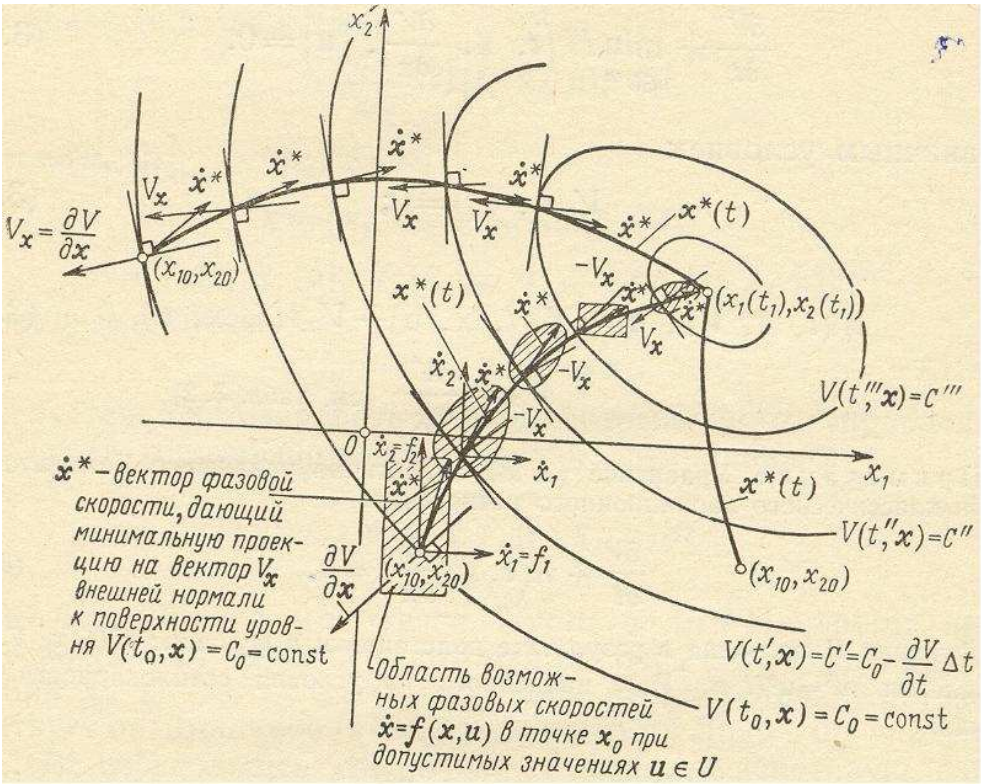

Рис. 8. Геометрический смысл условия $\min\limits_{u \in U^m} H(t, \mathbf{x}, V_x, \mathbf{u}) = \min\limits_{u \in U^m}[V_x \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})]$:

$$V(t, \mathbf{x}) = \min_{u \in U^m} J[\mathbf{u}(t)], \quad V_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \; n = m = 2, \; f_0 = 0,$$

$\dot{x}^*$ - оптимальная фазовая скорость:

$$\dot{x}^* = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*);$$

$\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x})$ - оптимальное управление:

$$\mathbf{u}^* = \arg\min_{u \in U^m} H(t, \mathbf{x}, V_x, \mathbf{u});$$

$\mathbf{x}^*$ - оптимальная траектория

В приведенном условии (48) требование непрерывной дифференцируемости (гладкости) функции $V(t, \mathbf{x})$ является существенным. Но в отличие от принципа максимума, где утверждается существование необходимой для него вектор-функции $\boldsymbol{\lambda}(t)$, существование гладкого потенциала $V(t, \mathbf{x})$ в методе динамического программирования не доказывается. Это

снижает ценность необходимого условия (48), так как для негладкой функции $V(t, \mathbf{x})$ трудно сохранить необходимость его в полном объеме.

5.3. Ослабленное необходимое условие

Уточненное необходимое условие для основной задачи оптимального координатного управления на основе принципа оптимальности, частично свободное от требования непрерывной дифференцируемости функции $V(t, \mathbf{x})$, формулируется следующим образом.

Ф о р м у л и р о в к а з а д а ч и. Пусть краевые условия имеют вид

$$\mathbf{x}\,(t_0) = \mathbf{x}_0\,;\ \mathbf{q}(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0. \qquad (55)$$

Минимизируемый функционал имеет вид

$$J[t_0, \mathrm{x}_0, \mathrm{u}] = \Phi(t_1, \mathrm{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathrm{x}, \mathrm{u})dt \qquad (56)$$

и определен на траекториях системы (44) с управлением $\mathbf{u}(t) \in U^m(t, \mathbf{x})$.

Закон управления $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ считается допустимым, если $\mathbf{u}(t) = (t, \mathbf{x}(t))$, $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t)) \in U^m$ и является кусочно-непрерывным.

Если управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ доставляет минимум функционалу J, то ему соответствует оптимальная траектория $\mathbf{x}^*(t)$.

Пусть

$$V(t_0, \mathrm{x}_0) = \min_{\mathrm{u} \in U^m}\left\{\Phi(t_1, \mathrm{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathrm{x}(t), \mathrm{u}(t))dt\right\} = \Phi(t_1, \mathrm{x}^*(t^*_1)) + \int_{t_0}^{t^*_1} f_0(t, \mathrm{x}^*(t), \mathrm{u}^*(t))dt. \quad (57)$$

Тогда

$$V(t_0, \mathrm{x}_0) \le \Phi(t_1, \mathrm{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathrm{x}(t), \mathrm{u}(t))dt,$$

где $\mathbf{u}(t)$произвольно.

Н е о б х о д и м ы е у с л о в и я. Предполагается, что искомое оптимальное управление $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$ существует. Тогда можно установить необходимые условия для основной задачи оптимального координатного управления.

Пусть в области G пространства состояний X^n выполняются следующие условия.

1. для $\mathbf{x} \in G$ в момент t функция

$$H(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}, \frac{\partial V}{\partial x}, \mathrm{u}) = f_0(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, \mathrm{x}, \mathrm{u})$$

имеет абсолютный минимум по $\mathbf{u}$, т. е. $\min_u H = H^*(t, \mathrm{x}, V_x)$

при $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, V_X)$ по всем допустимым $\mathbf{u}(t) \in U^m(t, \mathbf{x})$, где $V_X = \partial V/\partial \mathbf{x}$ – градиент $V(t, \mathbf{x})$.

2. Решение $\mathbf{x}(t)$ системы (44) существует и является непрерывной функцией для всех допустимых $\mathbf{u}(t) \in U^m(t, \mathbf{x})$.

3. Функция $f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ непрерывна по t.

4. Функция $V_t = \partial V/\partial t$ непрерывна по t и $\mathbf{x}$; вектор-функции V_X и $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ либо непрерывны по t и $\mathbf{x}$, либо имеют равные левый и правый пределы для скалярного произведения $V_X \cdot \mathbf{f}$ их вдоль любой траектории $\mathbf{x}(t)$ системы (44):

$$\lim_{t \to t_0 + 0} \left[V_x(t, x_0) f(t, x(t), u(t)) \right] = \lim_{t \to t_0 - 0} \left[V_x(t, x_0 f(t, x(t), u(t)) \right].$$

5. Существует оптимальное движение для каждого начального $\mathbf{x} \in G$ в некоторое состояние, удовлетворяющее условию $\mathbf{q}(t_1, \mathbf{x}_1) = 0$ и притом такое, что траектория не выходит из G.

6. Каждая точка в G, не удовлетворяющая условию $\mathbf{q}(t, \mathbf{x}) = 0$, имеет окрестность, целиком лежащую в G.

Тогда функция $V(t, \mathbf{x})$ в области G удовлетворяет уравнению Гамильтона - Беллмана

$$\min_{u \in U^m} \left\{ \left[\frac{dv}{dt} \right]_u + f_0(t, x(t), u(t)) \right\} = 0, \tag{58}$$

или

$$\min_{u \in U^m} \left\{ \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + V_x(t, x) f(t, x, u) + f_0(t, x, u) \right\} = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \min_{u \in U^m} H(t, x, V_x(t, x), u) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + H^*(t, x, V_x(t, x)) = 0 \tag{58´}$$

с граничным условием

$$V(t, \mathbf{x}) = \Phi(t, \mathbf{x}) \tag{58´´}$$

на гиперповерхности $\mathbf{q}(t, \mathbf{x}) = 0$.

Здесь обозначено:

$$H^*(t, x, V_x(t, x)) = \min_{u \in U^m} H(t, x, V_x, (t, x), u),$$

$\left[\frac{dV}{dt} \right]_u$ - полная производная вдоль траектории, реализуемой под действием управления $\mathbf{u}$.

Так как при известной функции $V(t, \mathbf{x})$

$$\mathbf{u}^* = \arg\min_{u \in U^m} H = \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, V_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})) = \mathbf{v}^*(t, \mathbf{x}),$$

то найденное решение $V(t, \mathbf{x})$ уравнения (58) одновременно дает решение проблемы синтеза оптимального закона управления.

З а м е ч а н и я. 1. Требование 4 влечет за собой непрерывность функций $\left[\dfrac{dV}{dt}\right]_u$ и $V(t, \mathbf{x})$ по времени t.

2. Когда V_t, V_X и f_i непрерывны по t и $\mathbf{x}$, уравнение (58) представляет собой уравнение Гамильтона-Якоби.

Общая последовательность действий, которой целесообразно придерживаться при решении задачи синтеза оптимального за кона управления методом динамического программирования, представлена в табл.1.

Таблица 1 - Сводка общих процедур метода динамического программирования для вычисления оптимального закона управления u* = v*(t, x)

Шаг 1	Образуется функция H, в которой сопряженные переменные λ_i заменяются на компоненты вектора $\dfrac{\partial V}{\partial \mathrm{x}} = grad_x V(t,\mathrm{x}) = V_x = \left(\dfrac{\partial V(t,\mathrm{x})}{\partial x_1}, \dfrac{\partial V(t,\mathrm{x})}{\partial x_2}, \dfrac{\partial V(t,\mathrm{x})}{\partial x_n}\right)$, т.е. $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, V_\mathrm{x}) = V_\mathrm{x}\,\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$
Шаг 2	Минимизируется $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, V_\mathrm{x})$ по $\mathbf{u} \in U^m$ и находится явная зависимость управления $\mathbf{u}^*$ от компонент вектора V_x. $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, V_\mathrm{x}, t) = \arg\min\limits_{\mathrm{u} \in U^m} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, V_\mathrm{x})$
Шаг 3	Находится минимальное значение H^* путем подстановки в H значения $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, V_\mathrm{x})$: $H^*(t, \mathbf{x}, V_\mathrm{x}) = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, V_\mathrm{x}), V_\mathrm{x})$
Шаг 4	Решается дифференциальное уравнение в частных производных Гамильтона - Беллмана $H^*(t,\mathrm{x},V_\mathrm{x}) + \dfrac{\partial V}{\partial t} = 0$ с соответствующим граничным условием для функции $V(t, \mathbf{x})$: $V(t, \mathbf{x}) = \Phi(t, \mathbf{x})$ на гиперповерхности $\mathbf{q}(t, \mathbf{x}) = 0$
Шаг 5	Подставляя результаты шага 4 в выражение для $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, V_\mathrm{x})$, получаем закон управления с обратной связью $\mathrm{u}^* = \mathrm{v}^*(t,\mathrm{x}) = \mathrm{u}^*\left(t, \mathrm{x}, \dfrac{\partial V(t,\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}}\right)$

Пример 2. Синтез оптимального закона управления для линейной системы с квадратичным критерием качества. Проблема аналитического конструирования оптимальных автопилотов.

Пусть нестационарная линейная система описывается векторным линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathrm{x}} = A(t)\mathrm{x} + B(t)\mathrm{u} + C\mathrm{f}(t) \qquad \text{(I)}$$

с начальным условием

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad t_0 \le t \le t_1 \qquad \text{(II)}$$

где - t_1 фиксировано, а t_0, $\mathbf{x}_0$ - известные величины (которые, однако, специально не выбираются), и пусть критерий качества имеет вид

$$\frac{\partial V(t,\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}} = V_{\mathrm{x}}(t,\mathrm{x}) \qquad \text{(III)}$$

Здесь

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2,.., x_n)^{\mathrm{T}} \in X^n; \ \mathbf{f} = (f_1, f_2,.., f_n)^{\mathrm{T}}, \ C, A(t) \text{ - матрицы размерности}$$

$$n \times n; \ \mathbf{u} = (u_1, u_2,.., u_m)^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1);$$

$B(t)$, $N(t)$ – матрицы размерности $n \times m$; R_1, $Q(t)$ – положительно полуопределенные* симметричные матрицы размерности $n \times n$; $P(t)$ - положительно определенная симметричная матрица размерности $m \times m$; $\mathbf{f}(t)$ - известная функция времени; $\mathbf{l}_1(t)$, $\mathbf{l}_2(t)$ - n-мерные векторы, $\mathbf{l}_3(t)$ - m-мерный вектор.

* Симметричная матрица Q называется положительно полуопределенной, если все ее собственные значения неотрицательны или если соответствующая ей квадратичная форма неотрицательна, т. е. $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}Q\mathbf{x} \ge 0$ для всех $\mathbf{x} = (x_1, x_2,.., x_n)^{\mathrm{T}}$. Для того чтобы матрица Q была положительно полуопределенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные (а не только угловые!) миноры были неотрицательны:

$$Q\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & . & . & . & i_p \\ i_1 & i_2 & . & . & . & i_p \end{pmatrix} \ge 0 \qquad (1 \le i_1 < i_2 ... < i_p \le n; \ p = 1, 2, ..., n).$$

Предполагается, что на значения управляющего вектора $\mathbf{u}$ не накладывается каких-либо ограничений, а матрицы $Q(t)$, $N(t)$, $P(t)$ таковы, что выполняется условие

$$Q(t) - N(t)\, P^{-1}(t)\, N^{\mathrm{T}}(t) \ge 0$$

[это условие гарантирует отсутствие сопряженных точек в данной задаче].

Необходимо найти закон управления с обратной связью

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(t, \mathbf{x}),$$

минимизирующий критерий $J[\mathbf{u}]$. Заметим, что значения вектора фазовых координат $\mathbf{x}$ при $t = t_1$ не заданы (т. е. рассматриваемая задача относится к числу задач оптимального управления со свободным правым концом).

Пусть $V(t, \mathbf{x})$ - минимальное значение критерия качества $J[\mathbf{u}]$ при движении системы (I) из произвольной начальной точки $(t, \mathbf{x})$ (нижний индекс «0» опущен) на отрезке времени $[t, t_1]$, $t \le t_1$:

$$J^* = J_{min} = V(t, \mathbf{x}) = \min_{\mathrm{u}} J[\mathbf{u}].$$

При решении задачи методом динамического программирования целесообразно руководствоваться последовательностью действий, изложенной в сводке общих процедур (см. табл. 1). В соответствии с табл. 1, составляем функцию $H(t, \mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u})$ (гамильтониан) для данной задачи

$$H(t,\mathrm{x},\lambda,\mathrm{u}) = f_0(t,\mathrm{x},\mathrm{u}) + \lambda^{\mathrm{T}} f(t,\mathrm{x},\mathrm{u}) = \mathrm{l}_2^{\mathrm{T}}\mathrm{x} + \mathrm{l}_3^{\mathrm{T}}\mathrm{u} + \frac{1}{2}(\mathrm{x}^{\mathrm{T}}Q\mathrm{x} + \mathrm{x}^{\mathrm{T}}N\mathrm{u} + \mathrm{u}^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}\mathrm{x} + \mathrm{u}^{\mathrm{T}}P\mathrm{u}) + \lambda^{\mathrm{T}}(A\mathrm{x} + B\mathrm{u} + C\mathrm{f})$$

и заменяем сопряженный вектор $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}$ на градиент *) $V_{\mathrm{x}}(t, \mathbf{x})$ функции $V(t, \mathbf{x})$ по $\mathbf{x}$:

$$H(t,\mathrm{x},V_{\mathrm{x}},\mathrm{u}) = \mathrm{l}_2^{\mathrm{T}}\mathrm{x} + \mathrm{l}_3^{\mathrm{T}}\mathrm{u} + \frac{1}{2}(\mathrm{x}^{\mathrm{T}}Q\mathrm{x} + 2\mathrm{x}^{\mathrm{T}}N\mathrm{u} + \mathrm{u}^{\mathrm{T}}P\mathrm{u}) + V_x(A\mathrm{x} + B\mathrm{u} + C\mathrm{f}).$$

*) Градиент $\dfrac{\partial V(t,\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}} = V_{\mathrm{x}}(t,\mathrm{x})$ функции $V(t, \mathbf{x})$ считается вектором-строкой. (IV)

Дифференциальное уравнение Гамильтона-Беллмана (48) в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\min\{\mathrm{l}_2{}^{\mathrm{T}}\mathrm{x}+\mathrm{l}_3{}^{\mathrm{T}}\mathrm{u}+\frac{1}{2}(\mathrm{x}^{\mathrm{T}}Q\mathrm{x}+2\mathrm{x}^{\mathrm{T}}N\mathrm{u}+\mathrm{u}^{\mathrm{T}}P\mathrm{u})+V_x(A\mathrm{x}+B\mathrm{u}+C\mathrm{f})\}=0,$$

где функция $V(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет граничному условию (58´´):

$$V(t_1,\mathrm{x})=\mathrm{l}_1{}^{\mathrm{T}}\mathrm{x}+\frac{1}{2}\mathrm{x}^{\mathrm{T}}R_1\mathrm{x}. \qquad \text{(V)}$$

Поскольку, по предположению, $P(t)$ - положительно определенная матрица, то минимум $H(t, \mathbf{x}, V_{\mathrm{x}}, \mathbf{u})$ по $\mathbf{u}$ достигается в стационарной точке, т. е. в точке, где

$$\frac{\partial H}{\partial \mathrm{u}}=0.$$

Отсюда

$$\mathrm{u}^*=\arg\min_{\mathrm{u}} H(t,\mathrm{x},V_{\mathrm{x}},\mathrm{u})=-P^{-1}\left[\mathrm{l}_3+N^{\mathrm{T}}\mathrm{x}+B^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{x}}\right]. \qquad \text{(VI)}$$

Подставляя теперь полученное выражение для $\mathbf{u}$ в (IV) находим окончательный вид основного дифференциального уравнения динамического программирования (в данном случае это будет дифференциальное уравнение Гамильтона-Якоби, так как $\mathbf{u}^*$ найдено из условия стационарности H):

$$\frac{\partial V}{\partial t}+V_{\mathrm{x}}Ax-\frac{1}{2}V_{\mathrm{x}}BP^{-1}\mathrm{l}_3-V_{\mathrm{x}}BP^{-1}N^{\mathrm{T}}\mathrm{x}-\frac{1}{2}V_{\mathrm{x}}BP^{-1}B^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{x}}+V_{\mathrm{x}}C\mathrm{f}+\mathrm{l}_2{}^{\mathrm{T}}\mathrm{x}-\frac{1}{2}\mathrm{l}_3{}^{\mathrm{T}}P^{-1}\mathrm{l}_3-\mathrm{l}_3{}^{\mathrm{T}}P^{-1}N^{\mathrm{T}}x-$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{l}_3P^{-1}B^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{x}}+\frac{1}{2}\mathrm{x}^{\mathrm{T}}Q\mathrm{x}-\frac{1}{2}\mathrm{x}^{\mathrm{T}}NP^{-1}N^{\mathrm{T}}\mathrm{x}=0. \qquad \text{(VII)}$$

Доказано, что в линейных системах с квадратичным критерием качества при сделанных предположениях относительно матриц $Q(t)$, $N(t)$, $P(t)$, $R(t)$ решение уравнения (VII) с краевым условием (V) существует и его можно искать в виде

$$V(t,\mathrm{x})=\frac{1}{2}\mathrm{x}^{\mathrm{T}}R(t)\mathrm{x}+\mathrm{q}^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{x}+r(t), \qquad \text{(VIII)}$$

где $R(t)$ - симметричная матрица размерности $n \times n$; $\mathbf{q}(t)$- n-мерный вектор; $r(t)$ - скаляр.

Частные производные функции $V(t, \mathbf{x})$, записанной в форме (VIII) имеют вид

$$\frac{\partial V(t,\mathrm{x})}{\partial t}=\frac{1}{2}\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\dot{R}(t)\mathrm{x}+\dot{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{x}+\dot{r}(t); \qquad \text{(IX)}$$

$$V_{\mathrm{x}}{}^{\mathrm{T}}(t,\mathrm{x})=\left(\frac{\partial V(t,\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}}\right)^T=R(t)\mathrm{x}+\mathrm{q}(t); \qquad \frac{\partial V(t,\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}}=\mathrm{x}^{\mathrm{T}}R+\mathrm{q}^{\mathrm{T}}\ . \qquad \text{(X)}$$

Подставляя выражения (IX) и (X) в уравнение (VII) и учитывая, что:

1) при одновременном умножении произвольной матрицы M слева и справа на вектор $\mathbf{x}$ имеет место соотношение $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}M\mathbf{x} = ½\ \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(M + M^{\mathrm{T}})\mathbf{x}$ (т. е. происходит выделение симметричной части $½\ (M + M^{\mathrm{T}})$ матрицы M);

2) скалярное произведение обладает свойством транспонируемости

$$\mathrm{y}^{\mathrm{T}}\mathrm{b}=\mathrm{b}^{\mathrm{T}}\mathrm{y},$$

получим

$$\frac{1}{2}\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\left[\dot{R}+R(A-BP^{-1}N^{\mathrm{T}})+(A-BP^{-1}N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}R+Q-NP^{-1}N^{\mathrm{T}}-RBP^{-1}B^{\mathrm{T}}R\right]\mathrm{x}+$$

$$+\left[\dot{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}}+\mathrm{q}^{\mathrm{T}}(A-BP^{-1}N^{\mathrm{T}})-\mathrm{l}_3{}^{\mathrm{T}}P^{-1}B^{\mathrm{T}}R-\mathrm{q}^{\mathrm{T}}BP^{-1}B^{\mathrm{T}}R-\mathrm{l}_3{}^{\mathrm{T}}P^{-1}N^{\mathrm{T}}+\mathrm{l}_2{}^{\mathrm{T}}+(Cf)^{\mathrm{T}}R\right]\mathrm{x}+$$

$$+\dot{r}-\frac{1}{2}\mathrm{q}^{\mathrm{T}}BP^{-1}B^{\mathrm{T}}\mathrm{q}-\mathrm{l}_3{}^{\mathrm{T}}P^{-1}B^{\mathrm{T}}\mathrm{q}+\mathrm{q}^{\mathrm{T}}C\mathrm{f}-\frac{1}{2}\mathrm{l}_3{}^{\mathrm{T}}P^{-1}\mathrm{l}_3=0. \qquad \text{(XI)}$$

Поскольку условие (XI) должно выполняться тождественно для любых значений **x** и поскольку при $t = t_1$ для любых значений **x** должно выполняться тождественно следующее соотношение [см. (V) и (VIII)]:

$$\frac{1}{2}\mathrm{x}^{\mathrm{T}}R(t_1)\mathrm{x}+\mathrm{q}^{\mathrm{T}}(t_1)\mathrm{x}+r(t_1)=\frac{1}{2}\mathrm{x}^{\mathrm{T}}R_1\mathrm{x}+\mathrm{l}_1{}^{\mathrm{T}}\mathrm{x},$$

то для определения матрицы $R(t)$, вектора $\mathbf{q}(t)$ и скаляра $r(t)$ получаем следующие уравнения и граничные условия:

1)
$$\dot{R}+R(A-BP^{-1}N^{\mathrm{T}})+(A-BP^{-1}N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}R-RBP^{-1}B^{\mathrm{T}}R+Q-NP^{-1}N^{\mathrm{T}}=$$
$$=\dot{R}+RA+A^{\mathrm{T}}R-(RB+N)P^{-1}(N^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}R)+Q=0; \qquad \text{(XII)}$$
$$R(t_1)=R_1. \qquad \text{(XII′)}$$

2)
$$\dot{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}}+\mathrm{q}^{\mathrm{T}}(A-BP^{-1}N^{\mathrm{T}})-\mathrm{l}_3{}^{\mathrm{T}}P^{-1}B^{\mathrm{T}}R-\mathrm{q}^{\mathrm{T}}BP^{-1}B^{\mathrm{T}}R-\mathrm{l}_3{}^{\mathrm{T}}P^{-1}N^{\mathrm{T}}+\mathrm{l}_2{}^{\mathrm{T}}+(C\mathrm{f})^{\mathrm{T}}R=0; \qquad \text{(XIII)}$$
$$\mathrm{q}^{\mathrm{T}}(t_1)=\mathrm{l}_1{}^{\mathrm{T}}. \qquad \text{(XIII′)}$$

3)
$$\dot{r}-\frac{1}{2}\mathrm{q}^{\mathrm{T}}BP^{-1}B^{\mathrm{T}}\mathrm{q}-\mathrm{l}_3{}^{\mathrm{T}}P^{-1}B^{\mathrm{T}}\mathrm{q}+q^{\mathrm{T}}C\mathrm{f}-\frac{1}{2}\mathrm{l}_3{}^{\mathrm{T}}P^{-1}\mathrm{l}_3=0; \qquad \text{(XIV)}$$
$$r(t_1)=0. \qquad \text{(XIV′)}$$

Полученные уравнения следует интегрировать в обратном времени от $t = t_1$ к $t = t_0$.

Оптимальный закон управления с обратной связью имеет вид

$$\mathrm{u}^*(\mathrm{x},t)=-P^{-1}(t)\left[(B^{\mathrm{T}}(t)R(t)+N^{\mathrm{T}}(t))\mathrm{x}+B^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{q}(t)+\mathrm{l}_3(t)\right]. \qquad \text{(XV)}$$

Пример 3. Синтез оптимального закона стабилизации крена ЛА с помощью автопилота.

Изолированное движение крена ЛА описывается следующей системой линеаризованных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Delta\omega_{x1}}{dt}=b_{11}\Delta\omega_{x1}+b_{18}\Delta\delta_{э}; \qquad \text{(I)}$$
$$\frac{d\Delta\gamma}{dt}=\Delta\omega_{x1}.$$

Здесь $\Delta\gamma$, $\Delta\omega_{x1}$- угол крена и угловая скорость крена в возмущенном движении, соответственно; $\Delta\delta_э$ - угол отклонения элеронов относительно некоторого программного значения;

$$b_{11}=M^{\omega_{x1}}{}_{x1}/J_{x1}; \qquad b_{18}=M^{\delta_э}{}_{x1}/J_{x1},$$

где J_{x1} - момент инерции ЛА относительно связанной оси O_{x1}; M_{x1}- аэродинамический момент относительно оси $O_{x1,}$

$$M^{\omega x1}{}_{x1} = \frac{\partial M_{x1}}{\partial \omega_{x1}}, \qquad M^{\delta э}{}_{x1} = \frac{\partial M_{x1}}{\partial \delta_э}.$$

Предполагается, что $M^{\omega x1}{}_{x1} < 0$, $M^{\delta э}{}_{x1} > 0$, следовательно, $b_{11} < 0$, $b_{18} > 0$.

Пусть номинальный режим полета выбран так, что коэффициенты b_{11} , b_{18} можно считать постоянными. Необходимо найти такой закон управления отклонениями элеронов (закон стабилизации крена)

$$\Delta\delta_э = \Delta\delta_э(\Delta\omega_{x1}, \Delta\gamma),$$

который минимизирует критерий качества

$$J\left[\Delta\delta_э\right] = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[q_{11}\Delta\omega^2{}_{x1} + q_{22}\Delta\gamma^2 + p_1\Delta\delta^2{}_э\right]dt.$$

Здесь весовые коэффициенты q_{11}, q_{22} – «цены» отклонений угловой скорости крена и угла крена, соответственно, от невозмущенного движения на бесконечном интервале $[t_0, \infty]$ времени стабилизации; $t_0 = 0$, p_1 - «цена» затрат «энергии» на стабилизацию. Предполагается, что q_{11}, q_{22}, p_1 - некоторые положительные - константы. В некоторых случаях в качестве их ориентировочных значении целесообразно выбрать следующие

$$q_{11} = \left[\frac{1}{(\Delta\omega_{x1})_{\max}}\right]^2, \qquad q_{22} = \left[\frac{1}{(\Delta\gamma)_{\max}}\right]^2, \qquad p1 = \left[\frac{1}{(\Delta\delta_э)_{\max}}\right]^2,$$

где $(\Delta\omega_{x1})_{\max}$, $(\Delta\gamma)_{\max}$, $(\Delta\delta_э)_{\max}$ - максимально допустимые значения указанных переменных на интервале стабилизации.

Пусть на значения управляющей переменной $\Delta\delta_э$ не накладывается каких-либо ограничений. Уравнения (I) в вектор ной форме записываются в виде

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\omega}_{x1} \\ \Delta\dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta\omega_{x1} \\ \Delta\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{18} \\ 0 \end{bmatrix}\delta_э,$$

обозначим их

$$A = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{18} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}, \qquad P = p_1.$$

Оптимальный закон стабилизации принимает вид

$$\Delta\delta_э = -P^{-1}B^{\mathrm{T}}R_0\begin{bmatrix} \Delta\omega_{x1} \\ \Delta\gamma \end{bmatrix} = -\frac{1}{p_1}\begin{bmatrix} b_{18} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta\omega_{x1} \\ \Delta\gamma \end{bmatrix} = -(b_{18}r_{11}/p_1)\Delta\omega_{x1} - (b_{18}r_{12}/p_1)\Delta\gamma, \qquad \text{(III)}$$

где матрица

$$R_0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix}$$

- единственное положительно определенное решение квадратичного матричного алгебраического уравнения Риккати:

$$R_0A + A_{\mathrm{T}}R_0 + Q - R_0BP^{-1}B^{\mathrm{T}}R_0 = 0 \qquad \text{(IV)}$$

или

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix} - \frac{1}{p_1}\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{18} \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{18} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} r_{11}b_{11}+r_{12} & 0 \\ r_{12}b_{11}+r_{22} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11}b_{11}+r_{12} & r_{12}b_{11}+r_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix} - \frac{1}{p_1}\begin{bmatrix} b^2{}_{18}r^2{}_{11} & b^2{}_{18}r_{11}r_{12} \\ b^2{}_{18}r_{11}r_{12} & b^2{}_{18}r^2{}_{12} \end{bmatrix} = 0. \qquad \text{(V)}$$

Это матричное уравнение эквивалентно системе трех линейных алгебраических уравнении относительно r_{11}, r_{12}, r_{22}:

$$\left.\begin{aligned} 2(r_{11}b_{11}+r_{12})+q_{11}-\frac{1}{p_1}b^2{}_{18}r^2{}_{11}=0, \\ r_{12}b_{11}+r_{22}-\frac{1}{p_1}b^2{}_{18}r_{11}r_{12}=0, \\ q_{22}-\frac{1}{p_1}b^2{}_{18}r^2{}_{12}=0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI)}$$

Решениями системы (VI) являются:

$$\left.\begin{aligned} r_{12}=\pm\sqrt{p_1q_{22}/b^2{}_{18}}, \\ r_{11}=b_{11}p_1/b^2{}_{18}\pm\sqrt{(b_{11}p_1/b^2{}_{18})^2+2p_1r_{12}/b^2{}_{18}+q_{11}p_1/b^2{}_{18}}, \\ r_{22}=(b^2{}_{18}/p_1)r_{11}r_{12}-b_{11}r_{12}=\pm(b^2{}_{18}/p_1)\sqrt{(b_{11}p_1/b^2{}_{18})^2+2p_1r_{12}/b^2{}_{18}+q_{11}p_1/b^2{}_{18}}\,r_{12}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII)}$$

Поскольку оптимальному решению соответствует лишь положительно определенная матрица R_0, то ее элементы должны удовлетворять критерию Сильвестра (см. разд. 4.4), т. е.

$$r_{11}>0,\ r_{22}>0,\quad r_{12}r_{22}-r^2{}_{12}>0.$$

Так как $b_{11}<0$, то ясно, что во втором уравнении (VII) перед корнем следует выбрать знак «плюс». Кроме того, из третьего уравнения (VII) следует, что $r_{12}>0$. Таким образом, окончательно

$$\left.\begin{aligned} r_{12}=\sqrt{p_1q_{22}/b^2{}_{18}}, \\ r_{11}=b_{11}p_1/b^2{}_{18}+\sqrt{(b_{11}p_1/b^2{}_{18})^2+2(p_1/b^2{}_{18})\sqrt{p_1q_{22}/b^2{}_{18}}+q_{11}p_1/b^2{}_{18}}, \\ r_{22}=(b^2{}_{18}/p_1)\left[(b_{11}p_1/b^2{}_{18})^2+2(p_1/b^2{}_{18})\sqrt{p_1q_{22}/b^2{}_{18}}+q_{11}p_1/b^2{}_{18}\right]^{1/2}\sqrt{p_1q_{22}/b^2{}_{18}}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII)}$$

С учетом (VIII) закон оптимальной стабилизации принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta\delta_э=-(b_{18}/p_1)\{b_{11}p_1/b^2{}_{18}+[(b_{11}p_1/b^2{}_{18})+2(p_1/b^2{}_{18})\times \\ \times\sqrt{p_1q_{22}/b^2{}_{18}}+q_{11}p_1/b^2{}_{18}]^{1/2}\}\Delta\omega_{x1}-(b_{18}/p_1)\times \\ \times\sqrt{p_1q_{22}/b^2{}_{18}}\Delta\gamma=-\{b_{11}/b_{18}=[(b_{11}/b_{18})^2+2\times \\ \times\sqrt{q_{22}/(p_1b^2{}_{18})}+q_{11}/p_1]^{1/2}\}\Delta\omega_{x1}-\sqrt{q_{22}/p_1}\Delta\gamma=-k_\omega\Delta\omega_{x1}-k_\gamma\Delta\gamma, \end{aligned} \qquad \text{(IX)}$$

где

$$k_{\omega} = \left\{ M^{\omega_{x1}}{}_{x1} / M^{\delta_э}{}_{x1} + \left[(M^{\omega_{x1}}{}_{x1} / M^{\delta_э}{}_{x1})^2 + 2\sqrt{(J_{x1} / M^{\delta_э}{}_{x1})^2 q_{22} / p_1} + q_{11} / p_1 \right]^{1/2} \right\},$$

$$k_{\gamma} = \sqrt{q_{22} / p_1} - \qquad \text{(X)}$$

передаточные числа (коэффициенты в цепи обратной связи) автопилота.

Минимальное значение критерия качества определяется выражением

$$J_{\min} = V(\Delta\omega_{x1_0}, \Delta\gamma_0) = \frac{1}{2}\left[\Delta\omega_{x1_0}, \Delta\gamma_0 \right] \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\omega_{x1_0} \\ \Delta\gamma_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[r_{11}\Delta\omega^2{}_{x1_0} + 2r_{12}\Delta\omega_{x1_0}\Delta\gamma_0 + r_{22}\Delta\gamma^2{}_0 \right] =$$

$$= \frac{p_1}{2}\left(J_{x1} / M^{\delta_э}{}_{x1} \right)[k_{\omega}\Delta\omega^2{}_{x1_0} + 2k_{\gamma}\Delta\omega_{x1_0}\Delta\gamma_0 + \qquad \text{(XI)}$$

$$+ k_{\gamma}(J_{x1} / M^{\gamma_э}{}_{x1})(k_{\omega} - M^{\omega_{x1}}{}_{x1} / M^{\delta_э}{}_{x1})\Delta\gamma^2{}_0].$$

6. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБОГО УПРАВЛЕНИЯ

6.1. Краткая формулировка задачи

При решении задач механики полета встречаются случаи, когда управление **u** входит в дифференциальные уравнения математической модели объекта линейно

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = \mathrm{f}(t, \mathrm{x}, \mathrm{u} + \gamma(\mathrm{x}, t) + R(\mathrm{x}, t)\mathrm{u}, \tag{59}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, .., x_n)^{\mathrm{T}} \in X^n$;

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, .., u_m)^{\mathrm{T}} \in U^m$;

$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, .., \gamma_n)^{\mathrm{T}}$;

$R = \{r_{ij}(t, \mathbf{x})\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m)$;

$t \in [t_0, t_1]$,

а критерий качества имеет вид

$$\begin{aligned} J\left[\mathrm{u}, t_0, t_1, \mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1\right] &= \Phi(t_0, t_1, \mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathrm{x}, \mathrm{u})dt = \Phi(t_0, t_1, \mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1) + \\ &\int_{t_0}^{t_1} \left[\gamma_0(\mathrm{x}, t) + \mathrm{u}^{\mathrm{T}}\mathrm{r}_0(\mathrm{x}, t)\right] dt, \end{aligned} \tag{60}$$

где $\mathbf{r}_0 = (r_{01}, r_{02}, .., r_{0m})^{\mathrm{T}}$;

$$\mathrm{u}^{\mathrm{T}}\mathrm{r}_0 = \sum_{j=1}^{m} r_{0j} u_j,$$

Функция Гамильтона H для (59), (60) имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \gamma_i(\mathrm{x}, t) + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \times \\ &\times \sum_{j=1}^{m} r_{ij} u_j = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \gamma_i(\mathrm{x}, t) + \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i r_{ij} \right) u_j. \end{aligned} \tag{61}$$

Если U^m – m-мерный прямоугольник:

$U^m = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, .., u_m)^{\mathrm{T}} \mid a_1 \le u_1 \le b_1,\ a_2 \le u_2 \le b_2, \ldots, a_m \le u_m \le b_m\}$ $a_j < b_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$

(a_j, b_j могут зависеть от t), то в силу принципа максимума (разд. 4.3) для минимизации $J[\mathbf{u}]$ оптимальное управление определяется из условия

$$\mathbf{u} = \arg\min_{\mathrm{u} \in U^m} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \tag{62}$$

или

$$\begin{cases} a_j & \text{при} \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i r_{ij} > 0; \\ b_j & \text{при} \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i r_{ij} > 0. \end{cases} \tag{63}$$

При некоторых значениях **x** и λ функции H в (61) может оказаться независящей явно от какой-либо компоненты u_j на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$, $\tau_2 - \tau_1 > 0$. В этом случае выполняется соотношение (см. также рис. 9).

$$\Phi_j(\lambda, \mathrm{x}, t) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i r_{ij}(\mathrm{x}, t) = 0, \tag{64}$$

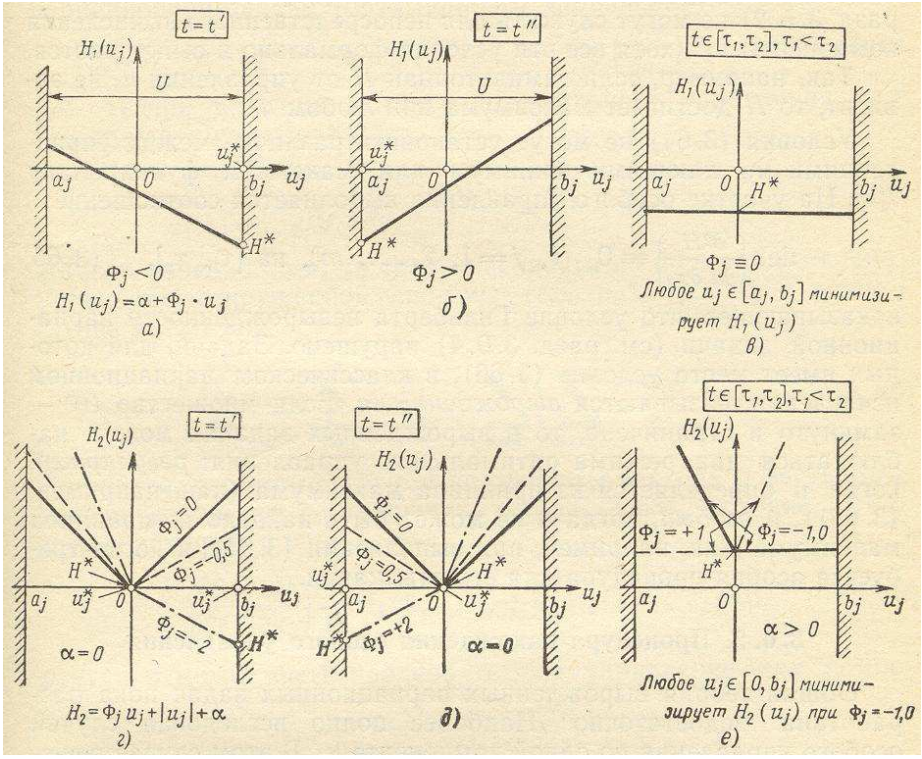

Рис. 9. Поведение гамильтонианов $H_1(u_j) = \alpha + \Phi_j u_j$ и $H_2(u_j) = \Phi_j u_j + |u_j| + \alpha$ в зависимости от Φ_j :

а, б, г, д — строгий минимум (регулярное управление); *в, е*—нестрогий минимум (особое управление)

которое формально совпадает с условием:

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i r_{ij}(\mathrm{x}, t) \equiv 0 \tag{65}$$

— на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$.

Отрезок $[\tau_1, \tau_2]$, на котором имеет место соотношение (64), называется *участком особого управления* для компоненты u_j, а оптимальное управление $u^*_j(t)$ на таком участке (если оно существует) называется особым оптимальным управлением. Такое название объясняется тем, что поскольку гамильтониан H от u_j не зависит, оптимальное управление не может быть найдено непосредственно с помощью принципа максимума. Более того, в случае выполнения условия (64) ни необходимые условия классического вар исчисления, ни необходимые усло-

вия динамического программирования (см. разд. 5. 2) не могут служить для непосредственного вычисления компоненты u^*_j , хотя все эти условия формально и выполняются.

Так, например, если гамильтониан H от управления u_j не зависит, то H достигает максимума при любом u_j.

Условия (64) не могут установить различие между управлениями u_j , дающими минимум или максимум функционалу $J[\mathbf{u}]$. На участке особого управления выполняется соотношение

$$\det\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j}\right\} \equiv 0 \qquad (i, j = 1,\ 2, \ldots,\ m),\ \text{на}\ [\tau_1, \tau_2], \tag{66}$$

показывающее, что условие Гильберта невырожденности вариационной задачи нарушено. Задачи, для которых имеет место условие (66), в классическом вариационном исчислении называются *вырожденными*. Если множество U^m — замкнуто и ограничено, то в вырожденных задачах может наблюдаться два режима оптимального управления: *регулярный*, когда **u** определяется из принципа максимума (как, например, (63)), и *особый*, когда **u** не может быть найдено из принципа максимума [как, например, при выполнении (64)] и, когда требуется особая процедура для его отыскания.

6.2. Процедура нахождения особого управления

Общая теория вырожденных вариационных задач пока разработана недостаточно. Наиболее полно исследован случай особого управления по одной компоненте u_j. В этом случае решение можно получить следующим образом.

Условие (65) показывает, что режим особого управления на участке $[\tau_1, \tau_2]$ (участке особого управления) имеет место, если

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} \equiv \sum_{i=0}^{n} \lambda_i r_{ij}(t, \mathrm{x}) \equiv 0.$$

Последовательное дифференцирование этого соотношения по t приводит к соотношениям

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right) \equiv 0 \qquad \text{на}\ [\tau_1, \tau_2] \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots)\ . \tag{67}$$

Можно показать, что первое ненулевое значение величины

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\left[\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)\right]$$

возможно лишь при четном k. Обозначим его $k = k_{\min} = 2p$. Число p называется *порядком вырожденности* (сингулярности) вариационной задачи (оптимального управления).

При $k = 2p$ управление u_j войдет в $\dfrac{d^k}{dt^k}\left(\dfrac{\partial H}{\partial u_j}\right)$ явным образом. Теперь величину особого оптимального управления u_j можно найти из условия

$$\frac{d^{2p}}{dt^{2p}}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right) \equiv 0 \qquad \text{на}\ [\tau_1, \tau_2], \tag{68}$$

которое линейно по u_j (в силу линейности по **u** системы (59)). Уравнения сопряженной системы (см. разд. 4.4) в данном случае имеют вид

$$\frac{d\lambda_s}{dt} = -\sum_{i=0}^{n}\lambda_i \frac{\partial\gamma_i}{\partial x_s} + \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_s}\right)u_j. \qquad (69)$$

Считая, что все остальные компоненты вектора **u** регулярны, т. е. определяются соотношениями типа (63), условие (68) можно записать в виде

$$\frac{d^{2p}}{dt^{2p}}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right) = M_1(\mathrm{x},\lambda,t) + u_j M_2(\mathrm{x},\lambda,t) = 0, \qquad (70)$$

откуда и может быть найдено особое управление для компоненты u_j :

$$u_j = -\frac{M_1(\mathrm{x},\lambda,t)}{M_2(\mathrm{x},\lambda,t)}.$$

6.3. Необходимое условие оптимальности особого управления

Для минимума критерия качества $J[\mathbf{u}]$ на особом управлении u_j* в задаче (59)— (60) должно выполняться следующее необходимое условие

$$(-1)^p \frac{\partial}{\partial u_j}\left[\frac{d^{2p}}{dt^{2p}}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right)\right] \geq 0, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots \qquad (71)$$

При максимизации критерия качества знак в неравенстве (71) следует заменить на обратный.

Отметим, что при $p = 0$, т. е. для невырожденных задач, это условие переходит в условие $\partial^2 H/\partial u_j^{\,2} \geq 0$ (при $m = 1$) и, таким образом, (71) является аналогом условия Лежандра— Клебша для особых (вырожденных) экстремалей (для одномерного управления u_j). При $p = 1$ условие (71) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right)\right] \leq 0. \qquad (71')$$

6.4. Необходимые условия в точках сопряжения особого и регулярного управлений

Результаты разд. 6.2 и 6.3 применимы, если значения оптимального особого управления u_j*(t) являются внутренними точками множества U^m на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$. Необходимые условия для перехода с регулярного оптимального управления на особое оптимальное в случае, когда U^m – m-мерный прямоугольник $a_j(t) \leq u_j(t) \leq b_j(t)$, а τ_1 - момент времени начала перехода, определяются следующими неравенствами:

$$\left[M_1(\mathrm{x},\lambda,t) + b_j(t) M_2(\mathrm{x},\lambda,t)\right]\tau_1 < 0 \qquad (72)$$

(необходимое условие для возможности перехода регулярного управления с верхней границы $u_j(t) = b_j(t)$ на особое оптимальное управление).

$$\left[M_1(\mathrm{x},\lambda,t) + a_j(t)M_2(\mathrm{x},\lambda,t)\right]\tau_1 > 0 \qquad (73)$$

(необходимое условие для возможности перехода регулярного управления с верхней границы $u_j(t) = b_j(t)$ на особое оптимальное управление).

Требование совместного выполнения условий (72) и (73) может быть представлено в виде неравенства

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\left[\frac{d^{2p}}{dt^{2p}}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right)\right]\tau_1 \le 0. \qquad (74)$$

Это условие является необходимым для возможности перехода с обеих границ регулярного управления на особое. Необходимое условие (74) легче проверить, так как оно не связано с вычислением $M_1(\mathbf{x}, \lambda, t)$. Однако следует иметь в виду, что оно является более слабым, чем условия (72) и (73), поскольку последние из него не вытекают.

7. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ТОЛЬКО ФАЗОВЫЕ КООРДИНАТЫ X

В механике полета имеется ряд задач, когда при формировании оптимальной траектории необходимо учитывать ограничения на область допустимых значений фазовых координат. Например, при наборе самолетом высоты или при рассмотрении траекторий спуска часто выдвигается требование ограниченности скоростного напора q:

$$q = \frac{\sigma(h(t))v^2(t)}{2} \le q_{\text{зад}},$$

т. е.

$$q(h(t), v(t), t) - q_{\text{зад}} \le 0.$$

При движении ЛА типичными также являются ограничения на допустимые значения высоты полета h и массы m ЛА:

$$h(t) \ge 0; \quad m(t) \ge m.$$

В общем случае ограничения указанного типа можно записать в виде

$$\psi(t, \mathbf{x}) \ge 0\ , \qquad (75)$$

где

$$\psi = (\psi_1, \psi_2,.., \psi_{\mu 1})^{\mathrm{T}}; \ \ \mathbf{x} = (x_1, x_2,.., x_n)^{\mathrm{T}}\ .$$

7.1 Краткая формулировка задачи

Пусть эволюция рассматриваемой системы ***S*** описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = f(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}), \tag{76}$$

где

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2,.., f_m)^{\mathrm{T}} \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2,.., x_n)^{\mathrm{T}} \in X^n; \qquad \mathbf{u} = (u_1, u_2,.., u_m)^{\mathrm{T}} \in U^m.$$

U^m — некоторая замкнутая и ограниченная область в пространстве R^m.

Заданы: начальное значение

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{77}$$

интервал времени $[t_0, t_1]$,

критерий качества

$$J[\mathrm{u}] = \Phi(t_1, \mathrm{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathrm{x}, \mathrm{u})dt. \tag{78}$$

Необходимо найти такое кусочно-непрерывное управление $\mathrm{u}(t) \in U^m$, которое переводит начальное условие $(t_0, \mathbf{x}_0)$ в некоторую конечную точку $(t_1, \mathbf{x}(t_1))$, удовлетворяю условиям

$$\mathbf{q}(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0, \ \mathbf{q} = (q_1, q_2,.., q_l)^{\mathrm{T}}, \quad l < n + 1 \tag{79}$$

и минимизирует функционал $J[\mathbf{u}]$ на траекториях, удовлетворяющих условиям

$$\psi = (\psi_1, \psi_2,.., \psi_{\mu 1})^{\mathrm{T}}. \tag{3.75´}$$

Здесь значения функции ψ_i не зависят явна от управления **u**. Предполагается, что $\mathbf{f}, f_0, \psi$ обладают непрерывными производными до второго порядка.

7.2. Необходимые условия оптимальности

В постановке разд.7. 1 вся оптимальная траектория полета в общем случае может состоять из двух типов участков: участков, целиком лежащих внутри допустимой области, и участков, лежащих на границе допустимой области (рис. 10). Количество таких участков и их чередование зависит от конкретной задачи и граничных условий. На участках, целиком расположенных внутри допустимой области, условия (75) выполняются в виде строгих неравенств

$$\psi(t, \mathbf{x}) > 0.$$

Для этих участков справедлив принцип максимума, сформулированный в разд. 4.3.

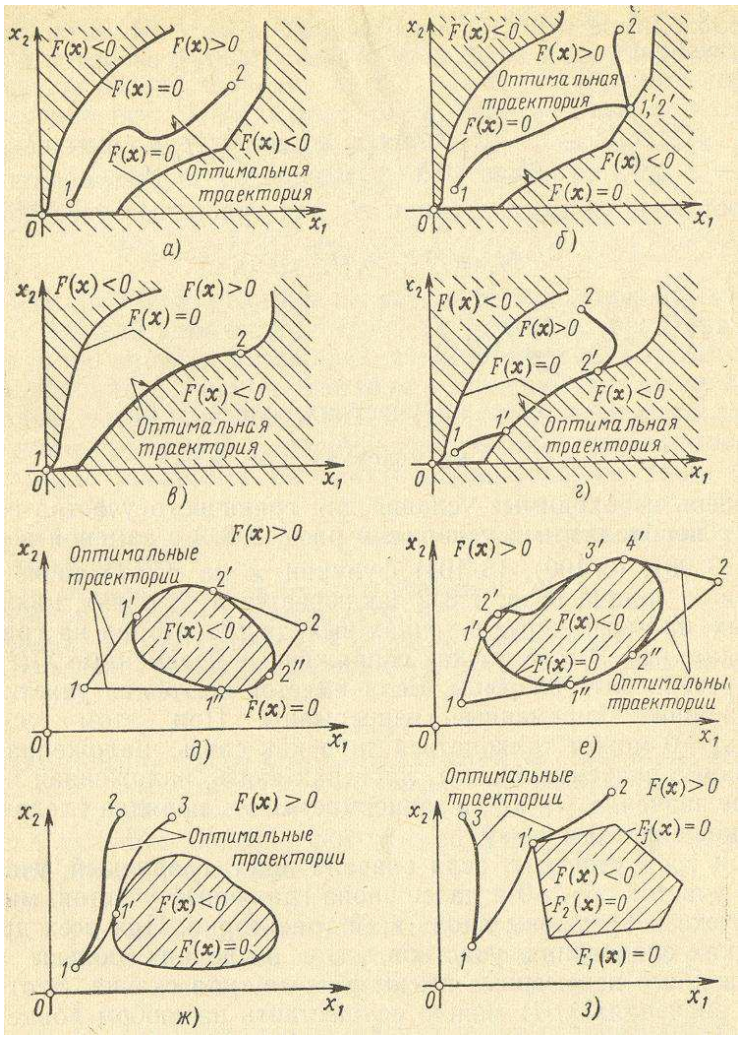

Рис. 10. Типы возможных оптимальных траекторий в задачах с ограничениями на фазовые координаты:

а, б, в, г — случаи, когда допустимые траектории располагаются внутри некоторой области (не обязательно замкнутой);

а — траектория, целиком лежащая внутри допустимой области; *б* — траектория, имеющая с границей области одну общую точку (типа отражения от границы); *в* — траектория целиком лежащая на границе;

г — траектория, частично расположенная на границе;

д, е, ж, з — случаи, когда допустимые траектории располагаются вне некоторой области;

д — случай двух траекторий, доставляющих относительный минимум в задаче о кратчайшем пути на плоскости; *е* — случай невыпуклой запрещенной области; траектории с несколькими участками входа и схода; *ж* - 1 - 2 — траектория, не имеющая общих точек с границей; 1-3 —траектория, имеющая одну общую точку (касание) с границей; *з* — случай негладкой границы допустимой области; 1— начальная точка траектории; 2 — конечная точка траектории, 1´—точка входа на границу, 2´— точка схода с границы

На участках, лежащих на границе допустимой области, одно или несколько условий типа (75) выполняются в виде равенств. Эти участки называются граничными, для них принцип максимума разд.4.3 уже не справедлив. Наличием этих участков данная задача и отличается от задач разд. 4.1.

Известно несколько эквивалентных подходов к получению необходимых условий оптимальности для участков, расположенных на границе $\psi(t, \mathbf{x}) = 0$. Будучи эквивалентными, эти подходы ведут к различным вычислительным процедурам получения решения.

Рассмотрим случай одного скалярного ограничения вида

$$\psi_i(t, \mathbf{x}) \geq 0.$$

Первый тип необходимых условий оптимальности для граничных участков траектории

Для простоты рассматривается случай, когда лишь одно из ограничений типа (75) выполняется в виде равенства (например, ограничение ψ_1). Пусть это ограничение

$$\psi_1(t, \mathbf{x}) = 0 \tag{80}$$

таково, что полная производная по времени

$$\frac{d\psi_1(t,\mathrm{x})}{dt} = \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \frac{\partial\psi_1}{\partial \mathrm{x}}\dot{\mathrm{x}} = \frac{\partial\psi_1}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial \mathrm{x}}\right)\mathrm{f}(t,\mathrm{x},\mathrm{u}) \tag{81}$$

содержит управление **u** явно.

Необходимое и достаточное условие того, что (80) имеет место па некотором ненулевом отрезке $[t'_1, t'_2]$, сводится к уран нению

$$\dot{\psi}_1 = \frac{d\psi_1(t,x)}{dt} = \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial \mathrm{x}}\right)\mathrm{f}(t,\mathrm{x},\mathrm{u}) = \dot{\psi}_1(t,\mathrm{x},\mathrm{u}) = 0. \tag{82}$$

Составляется гамильтониан H_1 для граничных участков

$$H_1 = H + \beta\dot{\psi}_1(t,\mathrm{x},\mathrm{u}), \tag{83}$$

где $\quad H = \lambda_0 f_0 + \sum_{i=1}^{n} f_i\lambda_i;$

$\beta = 0$ на участках, где $\psi_1 > 0$;

$\beta \neq 0$ на участках, где $\psi_1 = 0$.

В этих точках выхода траектории на границу и схода с нее сопряженные переменные $\lambda_i(t)$ могут претерпевать разрывы. Если имеется всего два участка, то сопряженные переменные непрерывны. При этом условие $\psi_1(t, \mathbf{x}) = 0$ может толковаться либо как связь, наложенная на начальные значения $(t_0, \mathbf{x}_0)$, либо как связь, наложенная на конечные значения $(t_1, \mathbf{x}_1)$ в зависимости от порядка следования участков с $\psi_1 > 0$ и $\psi_1 = 0$.

При трех участках, если сначала идет граничный участок, затем участок с $\psi_1 > 0$ и далее снова граничный участок, множители тоже непрерывны вдоль всей траектории. При всех других порядках следования участков, если последних больше трех, сопряженные переменные имеют разрыв типа скачка. Этот скачок в значениях $\lambda_i(t)$ можно осуществить на любом конце граничного участка, при этом на другом конце множители уже могут быть выбраны непрерывными (выбор конца, на котором происходит скачок, не имеет значения). Если этот конец выбран в момент времени t'_2, то условия скачка имеют вид

$$\lambda^{+}(t_2') = \lambda^{-}(t_2') - C\frac{\partial\psi_1(t_2')}{\partial t}; \qquad (84)$$

$$H^{+}(t_2') = H^{-}(t_2') + C\frac{\partial\psi_1(t_2')}{\partial t}; \qquad (85)$$

$$\psi^{-}{}_1(t_2) = 0, \qquad (86)$$

где C — произвольная постоянная; индексы «+» и «—» обозначают пределы справа и слева, соответственно.

Если условия (84) подставить в (85), то коэффициент при C будет и, $\dot{\psi}_1$ таким образом, условие (85) не зависит от C, а содержит только значения $\lambda^{-}(t_2')$.После указанной подстановки уравнение (85) может быть использовано в качестве эквивалентного необходимого условия.

В данной задаче решение $\mathbf{x}(t)$, $\boldsymbol{\lambda}(t)$ зависит от λ_{i0}, C как от параметров:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \lambda_{i0}, C); \qquad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(t, \lambda_{i0}, C).$$

В каждой точке разрыва непрерывности сопряженных переменных должна добавляться новая константа C. Величина C не может быть определена заранее из необходимых условий и является дополнительным параметром, определяющим точку схода. Поскольку число граничных участков заранее неизвестно, задача становится проблемой с переменным числом параметров, что существенно усложняет ее практическое решение даже с по мощью ЦВМ.

Пример 5. Пусть имеются три участка оптимальной траектории, следующие в таком порядке:

1 участок — траектория в открытой области, $\psi_1 > 0$;

2 участок — граничная траектория, $\psi_1 = 0$;

3 участок — снова траектория в открытой области, $\psi_1 > 0$.

Необходимые условия в конечной точке дают (n + 1) уравнение относительно (n + 2) неизвестных λ_{i0}, t_1, C. Условия (85), (86) и

$$\beta(t'_2 + 0) = 0$$

определяют точку t'_2 и дополнительное уравнение относительно неизвестных λ_{i0}, t_1, C. Задача, таким образом, свелась к нахождению решения (n + 2) равнений с (n + 2) неизвестными.

Если участков больше, чем три, задача сводится к много точечной краевой проблеме.

Второй тип необходимых условий для оптимальности управления на граничных участках

Пусть $t_{вх}$ — момент входа траектории па границу допустимой области, $t_{сх}$ — момент схода с этой границы. Гамильтониан H_2 для граничных участков может быть представлен в следующем виде:

$$H_2 = \lambda_0 f_0 + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i + \beta_1\psi_1 + \beta_2\dot{\psi}_1 = H + \beta_1\psi_1 + \beta_2\dot{\psi}_1,$$

где

$$\beta_1 = \beta_2 = 0, \qquad \text{если} \qquad \psi_1 > 0;$$

$$\beta_1 \neq 0, \ \beta_2 \neq 0 \qquad \text{если} \qquad \psi_1 = 0,$$

а $\dot{\psi}_1$ определяется правой частью соотношения (81).

На граничном участке (т. е. при $t_{вх} \leq t \leq t_{сх}$) вдоль оптимальной траектории выполняются условия:

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial H_2}{\partial \lambda}\right)^{T}, \qquad \dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial H_2}{\partial x}\right)^{T}, \qquad \psi_1 = 0, \quad \dot{\psi}_1 = 0. \tag{88}$$

Оптимальное управление на граничном участке определяется из условия минимума H по $\mathbf{u} \in U_1^m(t, \mathbf{x})$, где $U_1^m(t, \mathbf{x})$ — та часть значений $\mathbf{u}$ из области U^m, которая удовлетворяет условию $\psi_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$.

Если минимум H по $\mathbf{u}$ в области $U_1^m(t, \mathbf{x})$ достигается в ее внутренней точке, то

$$\frac{\partial H_2}{\partial u} = \frac{\partial H}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\dot{\psi}(t, x, u)\right) = 0, \quad \psi_1(t, x) = 0, \quad \dot{\psi}_1(t, x, u) = 0.$$

Значения вектора $\boldsymbol{\lambda}$ и гамильтониана H_2 непрерывны в точке входа на границу допустимой области:

$$\boldsymbol{\lambda}(t_{вх} + 0) = \boldsymbol{\lambda}(t_{вх} - 0); \qquad H_2(t_{вх} + 0) = H_2(t_{вх} - 0).$$

Остальные недостающие граничные условия могут быть найдены из общих условий трансверсальности разд. 4.3. В частности, из этих условий следует, что при $t = t_1$

$$\lambda(t_1) = \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^{T}\Bigg|_{t=t_1}; \qquad L = \Phi(t_1, x(t_1)) + \mu^{T} q(t_1, x(t_1));$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_1} + H_2(t_1) = 0 \qquad \text{(если } t_1 \text{ - не задано).}$$

Кроме того, к этим условиям надо добавить заданное граничное условие (79):

$$\mathbf{q}(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман З., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. – М.: Наука, 1965.
2. Брайсон А., Хо-Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. – М.: Мир, 1972.
3. Лебедев А.А. Введение в анализ и синтез систем. – М.: Изд-во МАИ, 2001.
4. Малышев В.В. Методы оптимизации сложных систем. – М.: МАИ, 1981.
5. Моисеев Н.Н., Иванов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978.
6. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975.
7. Черноусько Ф.Л., Боничук. Вариационные задачи механики и управления. – М.: Наука, 1973.