

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

**В. С. Асланов, В. В. Юдинцев**

**Динамика систем твёрдых тел переменной структуры**

*Электронное учебное пособие*

Самара

2010

Авторы: Асланов Владимир Степанович,  
Юдинцев Вадим Вячеславович

Рассматриваются методы формирования уравнений движения механических систем ракетно-космической техники в матричной форме, удобной для численного решения на ЭВМ в математических пакетах MATLAB, OCTAVE. Учебное пособие предназначено для студентов старших курсов, обучающихся по направлению 010800 «Механика и математическое моделирование» в Самарском государственном аэрокосмическом университете. Пособие может быть полезно при выполнении курсовых работ, при дипломном проектировании, а также аспирантам и специалистам, занимающимся анализом динамики сложных механических систем.

© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2010



# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Матричные уравнения движения механических систем в декартовых координатах</b>	<b>6</b>
1.1 Координатная запись уравнений движения . . . . .	6
1.2 Уравнения движения свободного тела . . . . .	13
1.3 Уравнения связи «точка-плоскость» . . . . .	15
1.4 Уравнение связи, ограничивающее относительное вращение двух тел . . . . .	24
1.5 Уравнения связи для плоских механических систем . . . . .	25
1.6 Примеры . . . . .	30
1.6.1 Уравнения связи сферического и цилиндрического шар- ниров . . . . .	30
1.6.2 Кривошипно-шатунный механизм . . . . .	34
<b>2 Уравнения движения в обобщенных координатах</b>	<b>40</b>
2.1 Структура системы тел . . . . .	40
2.1.1 Определения теории графов . . . . .	43
2.1.2 Задание графов на ЭВМ . . . . .	46
2.2 Системы тел со структурой дерева, соединенные сферически- ми шарнирами . . . . .	56
2.2.1 Плоские цилиндрические шарниры . . . . .	71

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть



Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

2.2.2	Системы, не связанные с внешним телом . . . . .	80
2.3	Системы с цилиндрическими и универсальными шарнирами .	91
2.3.1	Управляемые переменные . . . . .	97
2.4	Метод отдельных тел . . . . .	99
	<b>Заключение</b>	<b>104</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>105</b>

## Введение

В ракетно-космической технике существует множество задач, связанных с необходимостью анализа динамики подвижных элементов конструкции. Примерами таких систем являются системы отделения отработавших блоков РН, отделения космических аппаратов от последних ступеней РН, раскрытия антенн, раскрытия солнечных батарей. В системах раскрытия панелей солнечных батарей происходит последовательная фиксация смежных створок и следовательно (при жесткой фиксации) изменяется число степеней свободы всей системы. В системе отделения створок головного обтекателя или в системе отделения ступеней РН с течением времени происходит разрыв кинематической связи между разделяющимися объектами.

Особенностью этих систем, которую необходимо учитывать при формировании уравнений движения, является их *переменная структура*: в процессе движения меняется количество степеней свободы и структура соединений тел системы между собой [4]. Динамика этих систем на разных режимах работы описывается разными дифференциальными уравнениями, и в процессе функционирования происходит переход от одного непрерывного режима к другому.

Для построения модели такой системы необходима удобный метод получения уравнений движения, который бы учитывал указанные особенности системы и позволил бы сформировать уравнения, удобные для их дальнейшего машинного представления.

В учебном пособии представлена процедура построения уравнений движения систем связанных твердых тел переменной структуры. Рассмотрены



методы формирования уравнений движения механических систем ракетно-космической техники в матричной форме, удобной для численного решения на ЭВМ в математических пакетах **MATLAB**, **OCTAVE**. Представлены примеры составления уравнений движения для моделирования систем отделения и подвижных элементов конструкции КА и РН.

*Домашняя*



*Назад*

*На весь экран*

*Заккрыть*

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

# 1. Матричные уравнения движения механических систем в декартовых координатах

Уравнения движения механической системы могут быть записаны в обобщённых координатах, для чего необходимо выбрать параметры, однозначно определяющие конфигурацию системы. Полученная впоследствии система уравнений движения будет иметь наименьшую размерность, но во многих случаях сами уравнения будут весьма громоздкими. С другой стороны, в качестве параметров, задающих положение тел системы, можно выбрать «естественные» декартовы координаты и в качестве уравнений движения использовать простые по структуре уравнения Ньютона-Эйлера. Эти уравнения необходимо дополнить уравнениями связи, поскольку координаты тел системы не являются независимыми.

Далее рассматривается подход, при котором для вывода уравнений движения используются декартовы координаты.

## 1.1. Координатная запись уравнений движения

При использовании декартовых координат для вывода уравнений движения пространственной системы получается система из  $6n$  дифференциальных уравнений, где  $n$  – число тел в системе. Уравнения движения необходимо дополнить уравнениями связей. Сами уравнения связей выводятся на основе записи для каждого шарнира независимых ограничений, которые шарни-



Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

ры накладывает на относительное движение смежных тел. Так в уравнения движения вводится столько множителей Лагранжа, сколько имеется ограничений во всех сочленениях.

Запишем уравнения движения системы, состоящей из двух твердых тел, представляющей собой двойной физический маятник. Для получения уравнений движения можно использовать уравнения Лагранжа, для чего необходимо выбрать обобщенные координаты.

Рассматриваемая система имеет две степени свободы, в качестве обобщенных координат можно выбрать углы поворота стержней маятника относительно неподвижной оси. Вывод уравнений движения при помощи уравнений Лагранжа для сложных технических систем приводит к чрезвычайно громоздким преобразованиям. Рассмотрим, например, механическую систему раскрытия створок панелей солнечных батарей, схема которой изображена на рисунке 1.1. Плоская механическая система состоит из четырех тел и имеет всего две степени свободы. Эта система имеет замкнутую структуру, что и определяет сложность вывода уравнений движения с использованием уравнений Лагранжа второго рода.

Уравнение движения рассматриваемого двойного физического маятника можно записать, используя декартовы координаты. Выберем начало системы координат, относительно которой будем рассматривать движение исследуемой системы. Далее разорвем шарниры, (рис. 1.3) и будем рассматривать каждое тело в отдельности. Положение каждого тела будем задавать тремя параметрами: двумя декартовыми координатами и углом, тогда конфигурация всей системы будет определяться шестью координатами. Запишем уравнения движения каждого тела. В правую часть к активным силам следует



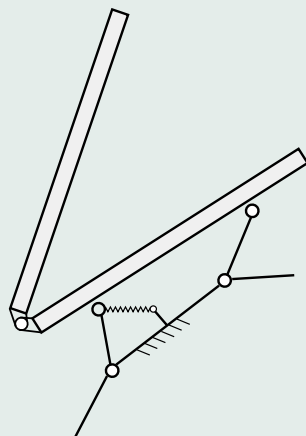


Рис. 1.1. Кинематическая схема солнечной батареи.

добавить силы реакции и моменты реакции. Таким образом, мы получим

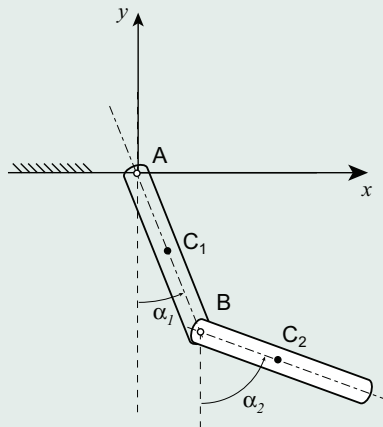


Рис. 1.2. Двойной физический маятник

систему из 6 дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = F_{1x} - R_{10x} + R_{12x}, \\ m_1 \ddot{y}_1 = F_{1y} - R_{10y} + R_{12y}, \\ J_{1z} \ddot{\alpha}_1 = F_{1y} + l_1 (R_{10x} \cos \alpha_1 + \\ \quad + R_{10y} \sin \alpha_1 + R_{12x} \cos \alpha_1 + R_{12y} \sin \alpha_1), \\ m_2 \ddot{x}_2 = F_{2x} - R_{21x}, \\ m_2 \ddot{y}_2 = F_{2y} - R_{21y}, \\ J_{2z} \ddot{\alpha}_2 = F_{1y} - R_{12x} l_2 \sin \alpha_1 - R_{12y} l_2 \sin \alpha_1, \end{cases} \quad (1.1)$$

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

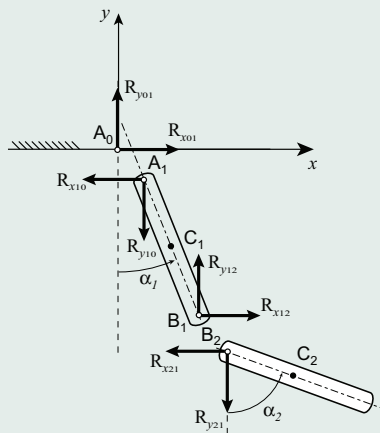


Рис. 1.3. К записи уравнений движения двойного физического маятника

Используя только эти уравнения, невозможно получить решение, так как правые части содержат неизвестные реакции связей. Чтобы система была замкнута, необходимо ее дополнить уравнениями связи. Все пары смежных тел рассматриваемого механизма имеют общую точку - цилиндрический шарнир, относительно которого допустима одна степень свободы двух смежных тел. Очевидно, что координаты шарнирных точек, выраженные через параметры движения двух смежных тел, должны совпадать, т.е. для тел 1 и 2

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

уравнение связи примет вид

$$\begin{cases} x_1 - l_1 \cos(\alpha_1) = 0, \\ y_1 - l_1 \sin(\alpha_1) = 0, \\ x_1 + l_1 \cos(\alpha_1) = x_2 - l_2 \cos(\alpha_2), \\ y_1 + l_1 \sin(\alpha_1) = y_2 - l_2 \sin(\alpha_2). \end{cases} \quad (1.2)$$

Продифференцируем уравнение связи дважды:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - l_1 \dot{\alpha}_1 \sin(\alpha_1) = 0, \\ \dot{y}_1 - l_1 \dot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1) = 0, \\ \dot{x}_1 + l_1 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1) = \dot{x}_2 - l_2 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_2), \\ \dot{y}_1 + l_1 \dot{\alpha}_2 \sin(\alpha_1) = \dot{y}_2 - l_2 \dot{\alpha}_2 \sin(\alpha_2), \\ \ddot{x}_1 - l_1 \ddot{\alpha}_1 \sin(\alpha_1) - l_1 \dot{\alpha}_1^2 \cos(\alpha_1) = 0, \\ \ddot{y}_1 - l_1 \ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1) + l_1 \dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1) = 0, \\ \ddot{x}_1 + l_1 \ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1) - l_1 \dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_1) = \ddot{x}_2 - l_2 \ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_2) + \\ + l_2 \dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_2), \\ \ddot{y}_1 + l_1 \ddot{\alpha}_2 \sin(\alpha_1) + l_1 \dot{\alpha}_2^2 \cos(\alpha_1) = \ddot{y}_2 - l_2 \ddot{\alpha}_2 \sin(\alpha_2) - \\ - l_2 \dot{\alpha}_2^2 \cos(\alpha_2). \end{cases} \quad (1.3)$$

Для каждого плоского шарнира необходимо записать два уравнения связи. Итого рассматриваемая система будет иметь четыре уравнения связи на 2 шарнира. Эти уравнения связи необходимо добавить к шести уравнениям

движения для совместного решения:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{x}_1 = F_{1x} - R_{10x} + R_{12x}, \\ m_1 \ddot{y}_1 = F_{1y} - R_{10y} + R_{12y}, \\ J_{1z} \ddot{\alpha}_1 = F_{1y} + l_1 ((R_{10x} + R_{12x}) \cos \alpha_1 + \\ + (R_{10y} + R_{12y}) \sin \alpha_1), \\ m_2 \ddot{x}_2 = F_{2x} - R_{21x}, \\ m_2 \ddot{y}_2 = F_{2y} - R_{21y}, \\ J_{2z} \ddot{\alpha}_2 = F_{1y} - R_{12x} l_2 \sin \alpha_1 - R_{12y} l_2 \sin \alpha_1, \\ \ddot{x}_1 - l_1 \ddot{\alpha}_1 \sin(\alpha_1) - l_1 \dot{\alpha}_1^2 \cos(\alpha_1) = 0, \\ \ddot{y}_1 - l_1 \ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1) + l_1 \dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1) = 0, \\ \ddot{x}_1 + l_1 (\ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1) - \dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_1)) = x_2 - l_2 (\ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_2) - \\ - \dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_2)), \\ \ddot{y}_1 + l_1 (\ddot{\alpha}_2 \sin(\alpha_1) + \dot{\alpha}_2^2 \cos(\alpha_1)) = y_2 - l_2 (\ddot{\alpha}_2 \sin(\alpha_2) + \\ + \dot{\alpha}_2^2 \cos(\alpha_2)). \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Подобным образом можно получить уравнения движения системы, приведенной на рис. 1.1. Для системы раскрытия створок панелей солнечных батарей необходимо записать 12 уравнений движения и 10 уравнений связи - по два на каждый цилиндрический шарнир. Для вывода уравнений связи необходимо производить дифференцирование уравнений связи, которые уникальны для каждой системы и зависят от вида соединения тел.

Уравнения движения (1.4) представляют собой систему дифференциаль-

ных и алгебраических уравнений, поскольку она содержит как дифференциальные, так и алгебраические уравнения.

## 1.2. Уравнения движения свободного тела

Конфигурация систем твердых тел может задаваться большим числом обобщенных координат. Чтобы избежать громоздких преобразований при построении математической модели систем, целесообразно использовать матричную запись уравнений. Уравнение движения центра масс свободного тела в декартовых запишется в виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}^{(0)} = \mathbf{F}^{(0)}, \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{r}^{(0)} = \{\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}\}^T$  - матрица-столбец ускорения центра масс тела;  $\mathbf{M}$  - диагональная матрица масс:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}; \quad (1.6)$$

$\mathbf{F}^{(0)} = \{F_x, F_y, F_z\}^T$  - координатный столбец главного вектора внешних сил, в системе координат относительно которой рассматривается движение тела. Уравнение движения тела относительно центра масс - динамические уравнения Эйлера, в векторной форме имеют следующий вид (рис. 1.4):

$$\mathbf{J}^{(c)}\dot{\omega}^{(c)} = \mathbf{L}^{(c)} - \tilde{\omega}^{(c)}\mathbf{J}^{(c)}\omega^{(c)}, \quad (1.7)$$

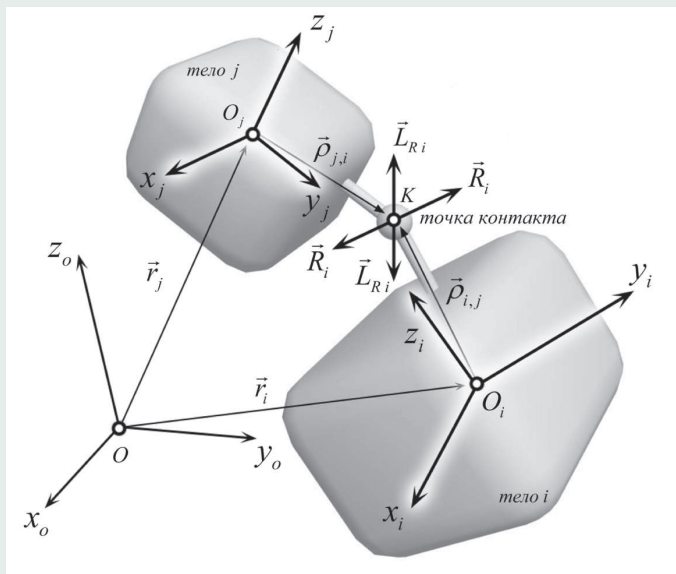


Рис. 1.4. К записи уравнений движения

где  $\mathbf{J}^{(c)}$  – тензор инерции твердого тела в связанном с телом базисе. В главных центральных осях тензор инерции имеет следующий вид:

$$\mathbf{J}^{(c)} = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

$\omega^{(c)} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}^T$  - координатный столбец вектора угловой скорости тела в связанной системе координат;  $\mathbf{L}^{(c)} = \{L_x, L_y, L_z\}^T$  - координатный столбец главного вектора момента внешних сил в проекциях на оси связанной системы координат. Объединяя уравнения (1.5) и (1.7), получим матричные уравнения движения свободного твердого тела:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{J}^{(c)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}^{(0)} \\ \dot{\omega}^{(c)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{(0)} \\ \mathbf{L}^{(c)} \end{pmatrix} - \mathbf{V}. \quad (1.9)$$

где  $\mathbf{V} = (\mathbf{0} \ \tilde{\omega}^{(c)} \mathbf{J}^{(c)} \omega^{(c)})^T$ .

### 1.3. Уравнения связи «точка-плоскость»

Шарнир, соединяющий два смежных тела, может ограничивать их относительно поступательное и вращательное движение. В общем случае в шарнире возникают произвольно направленные векторы реакции и момента.

Определим уравнения элементарной связи «точка-плоскость», которая ограничивает относительно поступательное движение двух тел таким образом, что определенная точка одного тела вынуждена находиться на плоскости, жестко связанной с другим телом. Это уравнение связи приводит к возникновению в точке контакта силы реакции перпендикулярной плоскости, в которой разрешено движение заданной точки тела. Эта связь уменьшает на единицу число степеней свободы системы двух связанных тел. Задав несколько связей «точка-плоскость», возможно определение связи «точка-прямая» (минус 2 степени свободы) и «точка-точка» (минус 3 степени сво-



[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

боды). Данные типы соединений часто встречаются в механических системах РКТ. Связь «точка-точка» описывает сферический шарнир, а связь «точка-прямая» совместно с уравнениями связи, ограничивающими относительное вращение двух тел, может описывать движение одного тела относительно другого по некоторой направляющей.

Широко распространенными типами соединений тел в механических системах ракетно-космической техники и в технике вообще являются соединения типа цилиндрический шарнир, сферический шарнир, также взаимодействие тел может происходить путем скольжения одного тела по поверхности или некоторой направляющей, связанной с другим телом. Во всех этих случаях можно предположить, что взаимодействие тел механической системы будет определяться силой и моментом, приложенными в одной или нескольких точках контакта, что будет ограничивать относительное перемещение и относительное вращение двух тел. Даже если контакт тел происходит по поверхности, можно допустить, что силы реакции, распределенные по поверхности, приводятся к одному вектору силы реакции и вектору реактивного момента. Рассмотрим процедуру получения матричных уравнений движения некоторых типов соединений тел.

Предполагаем, что траектория точки контакта или шарнирной точки может быть ограничена плоскостью, линией или точкой, связанной с другим телом. Другими словами, траектория шарнирной точки в системе координат, связанной с одним из тел, будет представлять собой плоскую кривую, прямую или точку. Последнее означает совпадение двух точек взаимодействующих тел. Связи записываются в форме строгого ограничения на проекции относительного линейного и углового ускорения двух тел на заданное

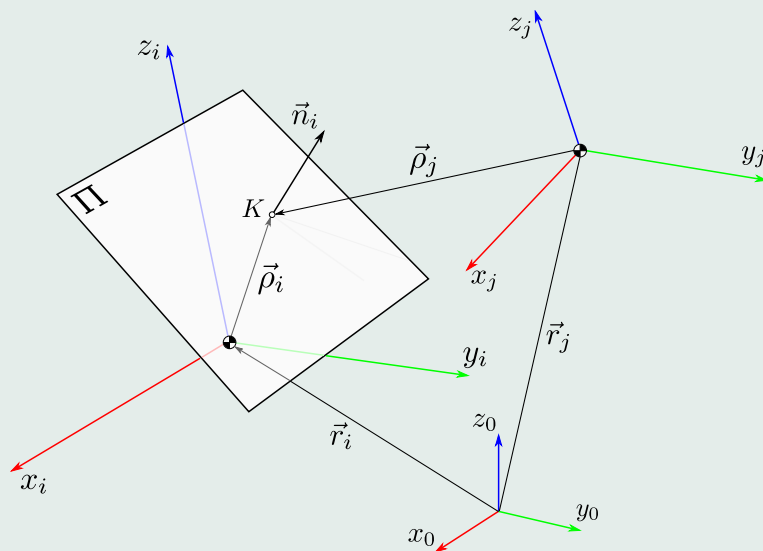


Рис. 1.5. К записи уравнения связи «точка-плоскость»

направление, определяемое вектором  $\vec{n}_{ij}$ , который связан с системой координат одного из двух тел. Уравнения связи на ускорения позволят сразу получить ДАУ индекса 1 для дальнейшего численного интегрирования. Первый тип связи записывается в виде скалярного произведения двух векторов и имеет вид (рис. 1.5):

$$\vec{n}_i \cdot \vec{w}_{ij}^r = 0, \quad (1.10)$$

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Заккрыть

где  $\vec{w}_{ij}^r$  – относительное ускорение точки контакта относительно системы координат, связанной с одним из взаимодействующих тел;  $\vec{n}_i$  – вектор нормали, вдоль которого ограничено движение точки контакта. Приведем уравнения связи к матричной форме. Матричная запись уравнения связи (1.10) будет иметь следующий вид:

$$(\ddot{\rho}_{ij}^{(i)})^T \mathbf{n}_{ij}^{(i)} = 0, \quad (1.11)$$

где  $\ddot{\rho}$  – координатный столбец ускорения точки контакта в связанной системе координат тела  $i$ . Здесь и далее верхний индекс в скобках обозначает индекс системы координат, в которой записывается координатный столбец соответствующего вектора. Выразим производную координатного столбца  $\rho_{ij}^{(i)}$  через кинематические параметры центров масс взаимодействующих тел. Для этого, учитывая правило преобразования координат, выразим  $\rho_{ij}^{(i)}$  через его проекции на оси системы координат  $O_0x_0y_0z_0$ :

$$\rho_{ij}^{(i)} = \mathbf{A}^{iT} \rho_{ij}^{(0)}, \quad (1.12)$$

где  $\mathbf{A}^i$  – матрица преобразования координат из системы  $O_ix_iy_iz_i$  в систему  $O_0x_0y_0z_0$ . Дифференцируя выражение (1.13), получим

$$\dot{\rho}_{ij}^{(i)} = \dot{\mathbf{A}}^{iT} \rho_{ij}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)}. \quad (1.13)$$

Учитывая правило дифференцирования матрицы перехода

$$\dot{\mathbf{A}}_i^{rT} = -\tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^{rT},$$

получим выражение скорости:

$$\dot{\rho}_{ij}^{(i)} = -\tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \rho_{ij}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)}. \quad (1.14)$$

Выражение (1.14) представляет собой матричную запись относительной производной вектора  $\vec{\rho}_{ij}$ , действительно, относительная производная вектора в векторной форме имеет следующий вид:

$$\frac{d\vec{\rho}_{ij}}{dt} = \frac{d\vec{\rho}_{ij}}{dt} - \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_{ij}.$$

Радиус-вектор точки контакта  $\vec{\rho}_{ij}$  выражается через радиусы-векторы центров масс двух взаимодействующих тел и радиус-вектор точки контакта  $\vec{\rho}_{ji}$  из четырехугольника  $O_o O_i K O_j$ , (рис. 1.5):

$$\vec{\rho}_{ij} = \vec{\rho}_{ji} + \vec{r}_j - \vec{r}_i.$$

В координатной форме это уравнение имеет следующий вид:

$$\rho_{ij}^{(0)} = \mathbf{A}^j \rho_{ji}^{(j)} + \mathbf{r}_j^{(0)} - \mathbf{r}_i^{(0)}. \quad (1.15)$$

Учитывая выражение (1.15) и принятое допущение о том, что вектор  $\rho_{ji}^{(j)}$  имеет постоянные координаты в базисе  $O_j x_j y_j z_j$ , скорость точки контакта определяется следующим образом:

$$\dot{\rho}_{ij}^{(0)} = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{A}^j \rho_{ji}^{(j)} + \mathbf{r}_j^{(0)} - \mathbf{r}_i^{(0)} \right) = \mathbf{A}^j \tilde{\omega}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} + \dot{\mathbf{r}}_j^{(0)} - \dot{\mathbf{r}}_i^{(0)}. \quad (1.16)$$

Продифференцируем выражение (1.14) и получим связь между ускорениями точки контакта в разных системах координат:

$$\ddot{\rho}_{ij}^{(i)} = -\dot{\tilde{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \rho_{ij}^{(0)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \dot{\mathbf{A}}^{iT} \rho_{ij}^{(0)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} + \dot{\mathbf{A}}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \ddot{\rho}_{ij}^{(0)}. \quad (1.17)$$

Подставив выражения для производных матриц преобразования координат, получим

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_{ij}^{(i)} = & -\dot{\tilde{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \rho_{ij}^{(0)} + \tilde{\omega}_i^{(i)} \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^{rT} \rho_{ij}^{(0)} - \\ & - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^{rT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \ddot{\rho}_{ij}^{(0)}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где с учетом постоянства положения точки контакта в системе координат  $O_j x_j y_j z_j$ ,  $\dot{\rho}_{ji}^{(j)} = 0$ :

$$\ddot{\rho}_{ij}^{(0)} = \dot{\mathbf{A}}^j \tilde{\omega}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} + \mathbf{A}^j \dot{\tilde{\omega}}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} + \ddot{\mathbf{r}}_j^{(0)} - \ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} = \mathbf{A}^j \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} + \mathbf{A}^j \dot{\tilde{\omega}}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} + \ddot{\mathbf{r}}_j^{(0)} - \ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)}. \quad (1.19)$$

Подставим (1.19) в (1.18):

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_{ij}^{(i)} = & -\dot{\tilde{\omega}}_i^{(i)} \rho_{ij}^{(i)} + \tilde{\omega}_i^{(i)} \tilde{\omega}_i^{(i)} \rho_{ij}^{(i)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} + \\ & + \mathbf{A}^{iT} (\mathbf{A}^j \tilde{\omega}_j^{(j)} \tilde{\omega}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} + \mathbf{A}^j \dot{\tilde{\omega}}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} + \ddot{\mathbf{r}}_j^{(0)} - \ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)}). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Перепишем последнее выражение, выделив матрицы коэффициентов при линейных и угловых ускорениях:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_{ij}^{(i)} = & \tilde{\rho}_{ij}^{(i)} \dot{\omega}_i^{(i)} - \mathbf{A}^{iT} \mathbf{A}^j \tilde{\rho}_{ji}^{(j)} \dot{\omega}_j^{(j)} + \mathbf{A}^{iT} \ddot{\mathbf{r}}_j^{(0)} - \mathbf{A}^{iT} \ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} + \\ & + \tilde{\omega}_i^{(i)} \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \rho_{ij}^{(0)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \mathbf{A}^j \tilde{\omega}_j^{(j)} \tilde{\omega}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Поставив (1.21) в (1.11), получим уравнение связи "точка-плоскость":

$$\mathbf{Q}_i \ddot{\mathbf{X}}_i + \mathbf{Q}_j \ddot{\mathbf{X}}_j = \mathbf{b}_{ij}, \quad (1.22)$$

где  $\mathbf{Q}_i$ ,  $\mathbf{Q}_j$  - блочные матрицы:

$$\mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & \mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \tilde{\rho}_{ij}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & -\mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} \mathbf{A}^j \tilde{\rho}_{ji}^{(j)} \end{pmatrix},$$

$\ddot{\mathbf{X}}_i$ ,  $\ddot{\mathbf{X}}_j$  - матрицы линейных и угловых ускорений тел:

$$\ddot{\mathbf{X}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_i^{(0)} \\ \dot{\omega}_i^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{X}}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_j^{(0)} \\ \dot{\omega}_j^{(j)} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \left( \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \rho_{ij} + \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} - \mathbf{A}^{iT} \mathbf{A}^j \tilde{\omega}_j^{(j)} \tilde{\omega}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} \right).$$

Уравнение (1.22) представляет собой скалярное линейное уравнение, связывающее ускорения двух смежных тел. Это уравнение необходимо добавить к уравнениям движения для совместного решения. В правую часть уравнений движения необходимо добавить силы реакции, определим эти силы. Для идеальной связи «точка-плоскость» сила реакции действует перпендикулярно плоскости, по которой движется точка контакта. Примем за направление действия силы реакции, действующей на тело  $j$ , направление вектора  $\vec{n}_{ij}$ . На тело  $i$  будет действовать сила с противоположным направлением:

$$\mathbf{R}_j = -\mathbf{R}_i = \mathbf{A}^i \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \lambda, \quad (1.23)$$

где  $\lambda$  - неизвестный множитель Лагранжа. Сила реакции создает момент относительно центра масс, который будет определяться следующим образом:

$$\mathbf{L}_{R_j}^{(j)} = \tilde{\rho}_{ji}^{(j)} \mathbf{A}^{jT} \mathbf{A}^i \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \lambda. \quad (1.24)$$

Последнее выражение представляет собой матричную запись векторного произведения  $\rho_{ij} \times R_j$ . Момент определен в проекциях на оси связанной системы координат. Момент от силы реакции, действующий на тело  $i$ , определяется подобным образом:

$$\mathbf{L}_{R_i}^{(i)} = -\tilde{\rho}_{ij}^{(i)} \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \lambda. \quad (1.25)$$

Сравнивая (1.23), (1.24), (1.25) с матрицами коэффициентов  $\mathbf{Q}_i$  и  $\mathbf{Q}_j$ , выражения для сил реакций и моментов можно переписать так:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_j \\ \mathbf{L}_{R_j}^{(j)} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_j^T \lambda, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{R}_i \\ \mathbf{L}_{R_i}^{(i)} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_i^T \lambda. \quad (1.26)$$

Если одно из двух смежных тел совершает заданное движение, что форма уравнений связи не меняется. В частном случае, когда тело  $i$  неподвижно и с этим телом связана неподвижная система координат, матрицы уравнений связи имеют следующий вид (рис. 1.6):

$$\mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_{ij}^{(i)T} & \mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{ij}^{(i)T} & -\mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \mathbf{A}^j \tilde{\rho}_{ji}^{(j)} \end{pmatrix}.$$

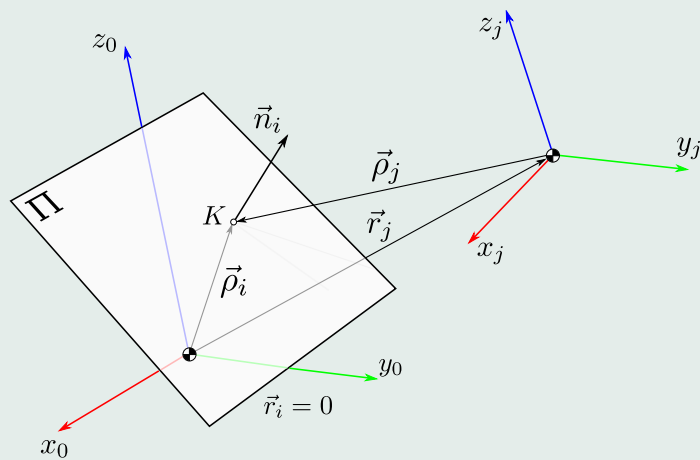


Рис. 1.6. Связь «точка-плоскость» для неподвижного тела



## 1.4. Уравнение связи, ограничивающее относительное вращение двух тел

Перейдем к рассмотрению уравнения связи второго типа, которое ограничивает относительное вращение двух тел так, что угловое ускорение тела  $j$  относительно тела  $i$  в проекции на направление  $\vec{n}_{ij}$  должно быть равно нулю:

$$\left(\varepsilon_{ji}^{(i)}\right)^T \mathbf{n}_{ij}^{(i)} = 0.$$

Относительное ускорение определяется следующим образом:

$$\varepsilon_{ji}^{(i)} = \dot{\omega}_{ij}^{(i)} = \mathbf{A}^i \mathbf{A}^{jT} \omega_j^{(j)} - \omega_i^{(i)}.$$

Подставив последнее выражение в уравнение связи, получим

$$\left(\mathbf{A}^j \mathbf{A}^{iT} \mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \varepsilon_j^{(j)} - \left(\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \varepsilon_i^{(i)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^i \mathbf{A}^{jT} \omega_j^{(j)} \mathbf{n}_{ij}^{(i)} = 0. \quad (1.27)$$

Уравнение (1.27) можно привести к виду

$$\mathbf{Q}_i \ddot{\mathbf{X}}_i + \mathbf{Q}_j \ddot{\mathbf{X}}_j = b_{ij}, \quad (1.28)$$

где матрицы коэффициентов при ускорениях определяются следующим образом:

$$\mathbf{Q}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \left(\mathbf{A}^j \mathbf{A}^{iT} \mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\left(\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \end{pmatrix}, \quad (1.29)$$

скалярный член  $b_{ij}$  определяется так:

$$b_{ij} = \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^i \mathbf{A}^{jT} \omega_j^{(j)} \mathbf{n}_{ij}^{(i)}.$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Заккрыть](#)

При существовании связи, ограничивающей относительное вращение двух тел, на тела действует реактивный момент. На тело  $i$  действует момент

$$\mathbf{L}_i = -\mathbf{n}_{ij}^{(i)} \lambda, \quad (1.30)$$

на тело  $j$

$$\mathbf{L}_j = \mathbf{A}^{jT} \mathbf{A}^i \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \lambda. \quad (1.31)$$

## 1.5. Уравнения связи для плоских механических систем

Запишем полученные уравнения связи для плоских механических систем. Положение тела  $i$  - плоской фигуры, задается тремя параметрами - положением центра масс

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

и углом поворота  $\phi$ , эти параметры можно объединить в координатный столбец:

$$\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ \phi_i \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что связь, ограничивающая относительное вращение тел  $i$  и  $j$ , будет иметь простейший вид:

$$\phi_i - \phi_j = 0. \quad (1.32)$$

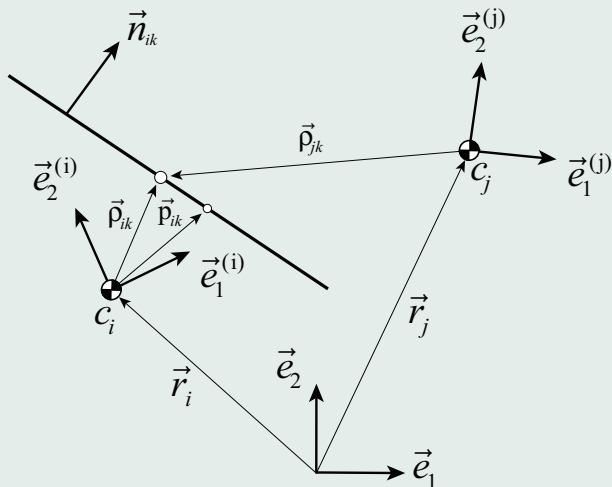


Рис. 1.7. К уравнению связи «точка-линия»

Рассмотрим уравнение «точка-линия», (рис. 1.7). Связь «точка-линия» предписывает некоторой точке, связанной с телом  $j$ , двигаться вдоль прямой, жестко связанной с телом  $i$ . Сама прямая в теле  $i$  задана при помощи нормального вектора  $\vec{n}_{ik}$  и точки на этой прямой, определяемой  $\vec{\rho}_{ik}$ . Положение точки контакта  $\vec{\rho}_{ik}$  в системе координат, связанной с телом  $i$  должно удовлетворять уравнению прямой:

$$(\vec{p}_{ik} - \vec{\rho}_{ik}) \cdot \vec{n}_{ik} = 0. \quad (1.33)$$

В матричной координатной форме уравнение связи будет иметь вид

$$\mathbf{n}_k^{(i)T} (\mathbf{p}_{ik}^{(i)} - \rho_{ik}^{(i)}) = 0. \quad (1.34)$$

Для понижения индекса ДАУ дважды продифференцируем уравнение (1.34), что приведет к следующему матричному уравнению:

$$\mathbf{n}_k^{(i)T} \ddot{\rho}_{ik}^{(i)} = 0. \quad (1.35)$$

Из уравнения (1.35) следует, что ускорение точки контакта относительно системы координат, связанной с телом  $i$ , должно быть направлено вдоль прямой, заданной вектором  $\mathbf{n}_k^{(i)}$ . Как было отмечено ранее, полученное уравнение связи никак не ограничивает положение и скорость точки контакта, поэтому для сохранения принадлежности точки контакта заданной прямой и сохранения направления скорости вдоль этой прямой начальные условия системы дифференциальных уравнений должны удовлетворять дополнительным условиям:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_k^{(i)T} (\mathbf{p}_{ik}^{(i)} - \rho_{ik_0}^{(i)}) = 0, \\ \mathbf{n}_k^{(i)T} \dot{\rho}_{ik_0}^{(i)} = 0, \end{cases} \quad (1.36)$$

где  $\rho_{ik_0}^{(i)}$ ,  $\dot{\rho}_{ik_0}^{(i)}$  - положение и скорость точки контакта в начальный момент времени. Определим скорость  $\dot{\rho}_{ik}^{(i)}$  и ускорение точки контакта  $\ddot{\rho}_{ik}^{(i)}$ :

$$\dot{\rho}_{ik}^{(i)} = \dot{\mathbf{A}}^{iT} \rho_{ik}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ik}^{(0)}. \quad (1.37)$$

Матрицы преобразования координат для плоских систем имеют простой вид:

$$\mathbf{A}^i = \begin{pmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i \end{pmatrix},$$

поэтому производная матрицы преобразования координат записывается следующим образом:

$$\dot{\mathbf{A}}^i = \begin{pmatrix} -\sin \phi_i & -\cos \phi_i \\ \cos \phi_i & -\sin \phi_i \end{pmatrix} \dot{\phi}_i = \dot{\phi}_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A}^i = \dot{\phi}_i \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^i.$$

Производная обратной матрицы:

$$\dot{\mathbf{A}}^{iT} = \dot{\phi}_i (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^i)^T = \dot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T.$$

Запишем скорость точки контакта:

$$\dot{\rho}_{ik}^{(i)} = \dot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T \rho_{ik}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ik}^{(0)}, \quad (1.38)$$

где скорость точки контакта в проекциях на оси инерциальной системы координат

$$\dot{\rho}_{ik} = -\dot{\mathbf{r}}_i^{(0)} + \dot{\mathbf{r}}_j^{(0)} + \dot{\phi}_j \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)}. \quad (1.39)$$

Далее определим ускорение точки контакта:

$$\ddot{\rho}_{ik}^{(i)} = \ddot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T \rho_{ik}^{(0)} + \dot{\phi}_i \dot{\mathbf{A}}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T \rho_{ik}^{(0)} + \dot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T \dot{\rho}_{ik}^{(0)} + \dot{\mathbf{A}}^{iT} \dot{\rho}_{ik}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \ddot{\rho}_{ik}^{(0)}.$$

Ускорение точки контакта в проекциях на оси инерциальной системы координат определим, продифференцировав (1.39):

$$\ddot{\rho}_{ik}^{(0)} = -\ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} + \ddot{\mathbf{r}}_j^{(0)} + \ddot{\phi}_j \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)} + \dot{\phi}_j \boldsymbol{\Omega} \dot{\mathbf{A}}^j \rho_{jk}^{(j)} + \dot{\phi}_j \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^j \dot{\rho}_{jk}^{(j)}. \quad (1.40)$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

Подставив в последнее выражение значение производных матрицы  $\mathbf{A}^j$  и с учетом того, что  $\rho_{jk}^{(j)} = \text{const}$ , получим

$$\ddot{\rho}_{ik}^{(0)} = -\ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} + \ddot{\mathbf{r}}_j^{(0)} + \ddot{\phi}_j \mathbf{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)} + \dot{\phi}_j \mathbf{\Omega} \dot{\phi}_j \mathbf{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)}. \quad (1.41)$$

Подставим (1.41) в выражение для  $\ddot{\rho}_{ik}^{(i)}$ , получим

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_{ik}^{(i)} = & \ddot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \mathbf{\Omega}^T \rho_{ik}^{(0)} + \dot{\phi}_i^2 \mathbf{A}^{iT} \mathbf{\Omega}^T \mathbf{\Omega}^T \rho_{ik}^{(0)} + 2\dot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \mathbf{\Omega}^T \dot{\rho}_{ik}^{(0)} + \\ & + \mathbf{A}^{iT} (-\ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} + \ddot{\mathbf{r}}_j^{(0)} + \ddot{\phi}_j \mathbf{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)} + \dot{\phi}_j^2 \mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)}). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Квадрат матрицы  $\mathbf{\Omega}$  равен единичной матрице со знаком минус. С учетом этого уравнение связи «точка-линия» будет иметь вид

$$\mathbf{Q}_i \ddot{\mathbf{X}}_i + \mathbf{Q}_j \ddot{\mathbf{X}}_j = b_{ij}, \quad (1.43)$$

где матрицы коэффициентов при ускорениях и скаляр  $b_{ij}$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i = & \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & \mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} \mathbf{\Omega}^T \rho_{ik} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Q}_j = & \begin{pmatrix} \mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & \mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} \mathbf{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)} \end{pmatrix}, \\ b_{ij} = & \mathbf{n}_k^{(i)T} \left( \dot{\phi}_i^2 \mathbf{A}^{iT} \rho_{ik}^{(0)} - 2\dot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \mathbf{\Omega}^T \dot{\rho}_{ik}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \dot{\phi}_j^2 \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)} \right). \end{aligned}$$

## 1.6. Примеры

### 1.6.1. Уравнения связи сферического и цилиндрического шарниров

Запишем уравнения связи сферического шарнира. Два тела, соединенные сферическим шарниром, имеют общую точку - центр сферического шарнира, на угловую скорость двух смежных тел не накладывается никаких ограничений. Два свободных тела, соединенные сферическим шарниром, будут иметь 9 степеней свободы, следовательно для сферического шарнира необходимо записать три уравнения связи. Общая точка смежных тел - точка контакта, которая является центром шарнира, определяется пересечением трех непараллельных плоскостей, поэтому сферический шарнир можно описать тремя уравнениями "точка-плоскость" вида (1.22). Три уравнения связи друг от друга будут отличаться только векторами нормали к плоскости контакта:

$$\mathbf{Q}_{ik}\ddot{\mathbf{X}}_i + \mathbf{Q}_{jk}\ddot{\mathbf{X}}_j = \mathbf{b}_k, \quad k = 1, \dots, 3, \quad (1.44)$$

где матрицы коэффициентов при ускорениях определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{ik} &= \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & \mathbf{n}_k^{(i)T} \tilde{\rho}_{ij}^{(i)} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Q}_{jk} &= \begin{pmatrix} \mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & -\mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} \mathbf{A}^{jT} \tilde{\rho}_{ji}^{(j)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad k = 1, \dots, 3,$$

где  $\mathbf{n}_k^{(i)T}$ ,  $k = 1, \dots, 3$  - координатные столбцы векторов нормали жестко связанные с системой координат  $O_i x_i y_i z_i$ . Матрицы  $\mathbf{b}_k$  в каждом из уравнений

также отличаются только векторами нормали:

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{n}_k^{(i)T} \left( 2\tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(i)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^{rT} \rho_{ij}^{(0)} - \mathbf{A}^{iT} \mathbf{A}^j \tilde{\omega}_j^{(j)} \tilde{\omega}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} \right), \quad k = 1, \dots, 3.$$

Таким образом, уравнения движения двух тел, соединенных сферическим шарниром, будут иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_i & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} \\ \dot{\omega}_i^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i^{(0)} \\ \mathbf{L}_i^{(i)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{J}_i \omega_i^{(i)} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^3 \mathbf{Q}_{ik}^T \lambda_k, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{M}_j & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_j^{(0)} \\ \dot{\omega}_j^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_j^{(0)} \\ \mathbf{L}_j^{(j)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_j^{(j)} \mathbf{J}_j \omega_j^{(j)} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^3 \mathbf{Q}_{jk}^T \lambda_k, \\ \mathbf{Q}_{i1} + \mathbf{Q}_{j1} = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{Q}_{i2} + \mathbf{Q}_{j2} = \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{Q}_{i3} + \mathbf{Q}_{j3} = \mathbf{b}_3. \end{array} \right. \quad (1.45)$$

Запишем уравнение связи для цилиндрического шарнира. Два тела, соединенные цилиндрическим шарниром, имеют относительно друг друга одну степень свободы: одно может вращаться вокруг неподвижной оси другого тела (рис. 1.8). Очевидно, что уравнений связи должно быть ровно пять, поскольку два свободных тела имеют двенадцать степеней свободы, а после соединения их цилиндрическим шарниром степеней свободы должно остаться семь: шесть степеней свободы твердого тела и одна степень свободы - относительное вращение двух тел. Цилиндрический шарнир можно построить



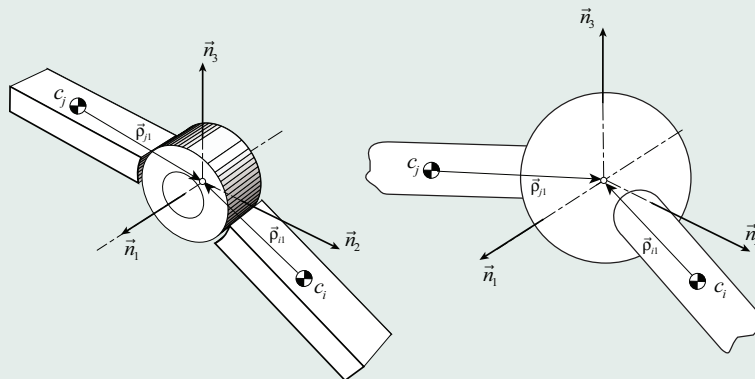


Рис. 1.8. Цилиндрический и сферический шарниры

из сферического шарнира, если к силам реакции добавить два дополнительных момента реакции, запрещающих вращение вокруг двух осей, перпендикулярных оси вращения шарнира. В соответствии с рис. 1.8 дополнительные векторы моментов реакции должны быть направлены вдоль осей  $\vec{n}_3^{(i)}$  и  $\vec{n}_2^{(i)}$ , которые ортогональны оси шарнира, определяемой вектором  $\vec{n}_1^{(i)}$ . Следовательно, цилиндрический шарнир определяется при помощи трех уравнений связи "точка-плоскость" (три плоскости задаются тремя векторами  $\vec{n}_1^{(i)}$ ,  $\vec{n}_2^{(i)}$ ,  $\vec{n}_3^{(i)}$ ) и двух уравнений связи, ограничивающих относительное вращение двух тел вокруг осей, определяемых векторами  $\vec{n}_3^{(i)}$  и  $\vec{n}_2^{(i)}$ . К системе уравнений (1.45) необходимо добавить два дополнительных уравнения связи, а в пра-

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

вую часть уравнений движения необходимо добавить дополнительные моменты реакции, после чего система уравнений движения примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_i & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} \\ \dot{\omega}_i^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i^{(0)} \\ \mathbf{L}_i^{(i)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{J}_i \omega_i^{(i)} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^5 \mathbf{Q}_{ik}^T \lambda_k, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{M}_j & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_j^{(0)} \\ \dot{\omega}_j^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_j^{(0)} \\ \mathbf{L}_j^{(j)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_j^{(j)} \mathbf{J}_j \omega_j^{(j)} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^5 \mathbf{Q}_{jk}^T \lambda_k, \\ \mathbf{Q}_{i1} + \mathbf{Q}_{j1} = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{Q}_{i2} + \mathbf{Q}_{j2} = \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{Q}_{i3} + \mathbf{Q}_{j3} = \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{Q}_{i4} + \mathbf{Q}_{j4} = \mathbf{b}_4, \\ \mathbf{Q}_{i5} + \mathbf{Q}_{j5} = \mathbf{b}_5, \end{array} \right. \quad (1.46)$$

где матрицы коэффициентов  $\mathbf{Q}_{i4}$ ,  $\mathbf{Q}_{j4}$ ,  $\mathbf{Q}_{i5}$ ,  $\mathbf{Q}_{j5}$  определяются следующим образом:

$$\mathbf{Q}_{ik} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \left( \mathbf{A}^j \mathbf{A}^{iT} \mathbf{n}_k^{(i)} \right)^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{jk} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\left( \mathbf{n}_k^{(i)} \right)^T \end{pmatrix},$$

$$b_k = \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^i \mathbf{A}^{jT} \omega_j^{(j)} \mathbf{n}_k^{(i)},$$

где  $k$  принимает значения 4 и 5.

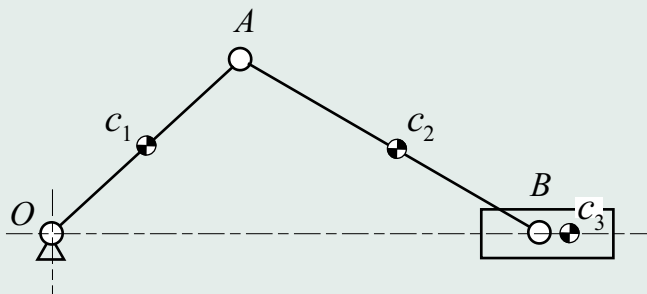


Рис. 1.9. Кривошипно-ползунный механизм

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

### 1.6.2. Кривошипно-шатунный механизм

Запишем уравнения движения кривошипно-ползунного механизма представленного на рис. 1.9. Плоская механическая система состоит из трех тел. На рис. 1.10 изображены тела рассматриваемой системы отдельно: указаны системы координат и единичные векторы нормалей, необходимые для записи уравнений связи.

Динамические уравнения движения механической системы представляют собой систему 9 скалярных уравнений:

$$\begin{cases} M_1 \ddot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{12} + \mathbf{R}_{13} + \mathbf{R}_{14}, \\ M_2 \ddot{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_{23} + \mathbf{R}_{24} + \mathbf{R}_{25} + \mathbf{R}_{26}, \\ M_3 \ddot{\mathbf{X}}_3 = \mathbf{F}_3 + \mathbf{R}_{35} + \mathbf{R}_{36} - \mathbf{R}_{37}, \end{cases} \quad (1.47)$$

Закреть

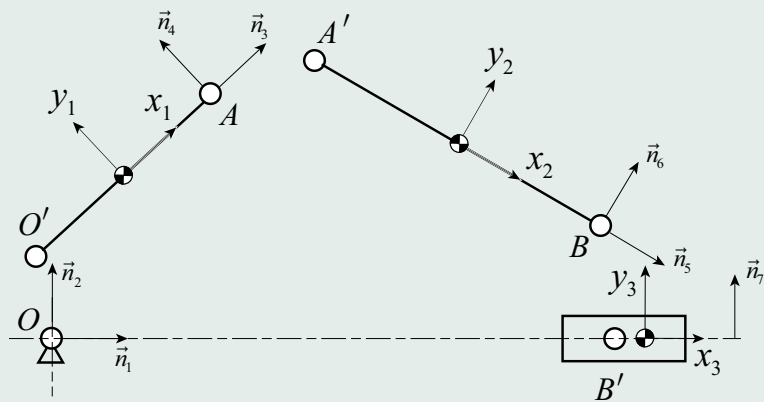


Рис. 1.10. Звенья кривошипно-ползунного механизма

где  $\ddot{\mathbf{X}}_i = (\ddot{x}_i \quad \ddot{y}_i \quad \ddot{\phi}_i)^T$  - координатный столбец ускорений тела  $i$ ;  $\mathbf{M}_i$  - диагональная матрица масс,

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & J_i \end{pmatrix};$$

$\mathbf{F}_i = (F_{ix} \quad F_{iy} \quad L_{iz})^T$  - координатный столбец активных сил и моментов, действующих на тело  $i$ ;  $R_{il}$ ,  $l = 1, \dots, 7$  - координатные столбцы сил и моментов реакции, действующих на тело  $i$  -  $\mathbf{R}_{il} = (R_{ilx} \quad R_{ily} \quad L_{Rilz})^T$ . Для рассматриваемой системы необходимо записать 7 уравнений связи вида (1.43): по два на каждый из трех цилиндрических шарниров и одно уравнение связи на поступательный шарнир между телом 3 и телом 0. Для того чтобы тело три двигалось только поступательно, необходимо добавить восьмое уравнение связи, ограничивающее вращение тела 3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q}_{11} \ddot{\mathbf{X}}_1 = b_1, \\ \mathbf{Q}_{21} \ddot{\mathbf{X}}_1 = b_2, \\ \mathbf{Q}_{31} \ddot{\mathbf{X}}_1 + \mathbf{Q}_{32} \ddot{\mathbf{X}}_2 = b_3, \\ \mathbf{Q}_{41} \ddot{\mathbf{X}}_1 + \mathbf{Q}_{42} \ddot{\mathbf{X}}_2 = b_4, \\ \mathbf{Q}_{52} \ddot{\mathbf{X}}_2 + \mathbf{Q}_{53} \ddot{\mathbf{X}}_3 = b_5, \\ \mathbf{Q}_{62} \ddot{\mathbf{X}}_2 + \mathbf{Q}_{63} \ddot{\mathbf{X}}_3 = b_6, \\ \mathbf{Q}_{73} \ddot{\mathbf{X}}_3 = b_7, \mathbf{Q}_{83} \ddot{\mathbf{X}}_3 = b_8, \end{array} \right. \quad (1.48)$$

где матрицы коэффициентов при ускорениях и скаляр  $b_k$  определяются для первых двух уравнений связи:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{k1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{n}_k^{(0)T} & \mathbf{n}_k^{(0)T} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^1 \rho_{1k}^{(1)} \end{pmatrix}, \\ b_k &= \mathbf{n}_k^{(0)T} \dot{\phi}_1^2 \mathbf{A}^1 \rho_{1k}^{(1)}, k = 1, 2, \end{aligned}$$

$k = 1, 2$ . Для последующих четырех уравнений связи

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{ki} &= \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & \mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T \rho_{ik} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Q}_{kj} &= \begin{pmatrix} \mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & \mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)} \end{pmatrix}, \\ b_k &= \mathbf{n}_k^{(i)T} \left( \dot{\phi}_i^2 \mathbf{A}^{iT} \rho_{ik}^{(0)} - 2 \dot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T \dot{\rho}_{ik}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \dot{\phi}_j^2 \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)} \right), \end{aligned}$$

где  $k = 3, 4$  для  $i = 1$  и  $j = 2$ , и  $k = 5, 6$  для  $i = 2$  и  $j = 3$ . Для седьмого уравнения связи

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{73} &= \begin{pmatrix} \mathbf{n}_7^{(0)T} & \mathbf{n}_7^{(0)T} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^3 \rho_{37}^{(1)} \end{pmatrix}, \\ b_7 &= \mathbf{n}_7^{(0)T} \dot{\phi}_3^2 \mathbf{A}^3 \rho_{37}^{(3)}. \end{aligned}$$

Для последнего уравнения связи

$$\mathbf{Q}_{83} = (0 \quad 0 \quad 1)^T, \quad b_7 = 0.$$



Силы и моменты реакции  $\mathbf{R}_k$  определяются следующим образом:

$$\mathbf{R}_{11} = \mathbf{Q}_{11}^T \lambda_1,$$

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{Q}_{21}^T \lambda_2,$$

$$\mathbf{R}_{13} = \mathbf{Q}_{31}^T \lambda_3,$$

$$\mathbf{R}_{14} = \mathbf{Q}_{41}^T \lambda_4,$$

$$\mathbf{R}_{23} = \mathbf{Q}_{32}^T \lambda_3,$$

$$\mathbf{R}_{24} = \mathbf{Q}_{42}^T \lambda_4,$$

$$\mathbf{R}_{25} = \mathbf{Q}_{52}^T \lambda_5,$$

$$\mathbf{R}_{26} = \mathbf{Q}_{62}^T \lambda_6,$$

$$\mathbf{R}_{35} = \mathbf{Q}_{53}^T \lambda_5,$$

$$\mathbf{R}_{36} = \mathbf{Q}_{63}^T \lambda_6,$$

$$\mathbf{R}_{37} = \mathbf{Q}_{73}^T \lambda_7,$$

$$\mathbf{R}_{38} = \mathbf{Q}_{83}^T \lambda_8.$$

Таким образом, матричная форма уравнений движения системы будет иметь вид

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Заккрыть](#)



Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

с матрицей коэффициентов:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 & 0 & \mathbf{Q}_{11}^T & \mathbf{Q}_{21}^T & \mathbf{Q}_{31}^T & \mathbf{Q}_{41}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Q}_{32}^T & \mathbf{Q}_{42}^T & \mathbf{Q}_{52}^T & \mathbf{Q}_{62}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Q}_{53}^T & \mathbf{Q}_{63}^T & \mathbf{Q}_{73}^T & \mathbf{Q}_{83}^T \\ \mathbf{Q}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Q}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Q}_{31} & \mathbf{Q}_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Q}_{41} & \mathbf{Q}_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_{52} & \mathbf{Q}_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_{62} & \mathbf{Q}_{63} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}_{83} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

столбцом неизвестных:

$$\mathbf{X} = (\ddot{\mathbf{X}}_1 \quad \ddot{\mathbf{X}}_2 \quad \ddot{\mathbf{X}}_3 \quad \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4 \quad \lambda_5 \quad \lambda_6 \quad \lambda_7 \quad \lambda_8)^T$$

и матрицей правых частей

$$\mathbf{B} = (\mathbf{F}_1 \quad \mathbf{F}_2 \quad \mathbf{F}_3 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad b_6 \quad b_7 \quad b_8)^T.$$



[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

## 2. Уравнения движения в обобщенных координатах

### 2.1. Структура системы тел

Для полного описания системы многих тел требуется большое число параметров, характеризующих геометрию системы, распределение масс, природу внешних и внутренних сил. Параметры, описывающие структуру и распределение масс систем, можно разделить на следующие группы [2]:

- число тел;
- параметры, характеризующие структуру взаимосвязей тел;
- параметры, характеризующие кинематические связи;
- параметры, характеризующие расположение шарниров на телах;
- массы и моменты инерции тел.

Рассмотрим способы задания структуры тел механической системы. Два тела будем называть *смежными* тогда и только тогда, когда они непосредственно оказывают силовое воздействие друг на друга. Соединение между смежными телами называется *шарниром*. Это определение придает слову шарнир более широкий смысл. Здесь и далее оно используется для любого рода соединений, допускающих относительные вращательное и поступательное движения смежных тел, поэтому контакт двух тел в точке тоже

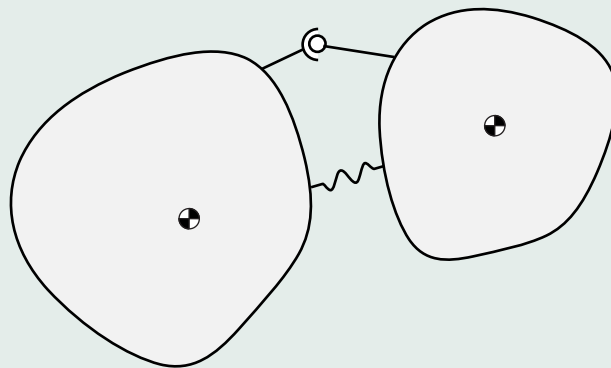


Рис. 2.1. Шарнир с пружиной

считается шарниром, кроме того, шарнир может не быть материальным, например в случае передачи взаимодействия через силовые поля. В шарнире объединены все силы взаимодействия между двумя смежными телами, так что каждая пара смежных тел имеет только один шарнир. Например, на рис. ?? шарнир между телами 1 и 2 включает как шаровое шарнирное соединение, так и пружину. Кроме того, для каждого шарнира существует только одна пара смежных тел. Это означает, что если, например, три тела соединены, как кажется на первый взгляд, одним шарниром, то этот шарнир будет считаться состоящим из двух отдельных шарниров, каждый из которых соединяет два тела. Система из трех тел, изображенная на рис. ??, иллюстрирует подобную ситуацию. Описание структуры взаимосвязей системы дает полную информацию о том, какие тела системы соединены

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

Домашняя



Назад

На весь экран

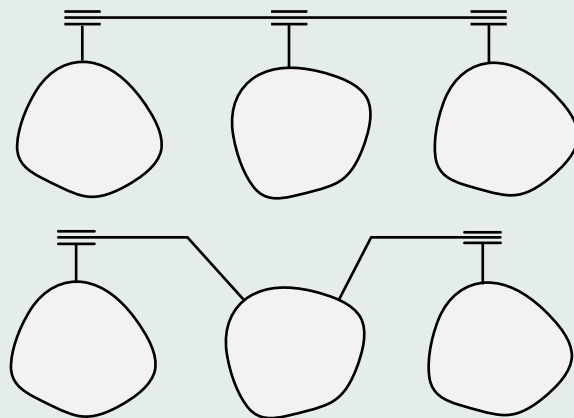


Рис. 2.2. Система трех тел

Закреть

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

шарнирами. Физические свойства шарниров в это описание не включаются. Кинематические связи, реализуемые в шарнирах, могут быть любого вида: стационарными, нестационарными, голономными или неголономными.

Кинематические связи вводятся не только индивидуальными шарнирами, но также структурой взаимосвязей системы, так, например, в плоском кривошипно-ползунном механизме тела системы соединены тремя цилиндрическими шарнирами и одним скользящим соединением; основание считается неподвижным в инерциальном пространстве; общее число степеней свободы системы не изменится, если мы заменим один цилиндрический шарнир на сферический. С другой стороны, это число станет равным нулю, если оси трех шарниров смонтировать не параллельно одна другой.

На практике системы многих тел функционируют в различных ситуациях. В большинстве систем одно или несколько тел связаны шарнирами с внешним телом, положение которого в инерциальном пространстве является заданной функцией времени. Очевидно, что размеры и инерциальные свойства внешнего тела несущественны, поскольку его движение задано. По этой причине внешнее тело не будет считаться телом системы, а будет представлено подвижным базисом, неизменно связанным с ним.

### 2.1.1. Определения теории графов

Рассмотрим систему, состоящую из  $n + 1$  тел, связанных между собой  $m$  шарнирами. Телам и шарнирам присвоим номера от 0 до  $n$  и от 1 до  $m$  соответственно. Обычно одно из тел системы имеет предварительно заданное известное движение. Это тело получает индекс 0. Отобразим графически

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

структуру соединений тел друг с другом, обозначив тела точками или кругами, а соединения между двумя телами изобразим линией, соединяющей два тела. Удобно для описания структуры соединения тел механической системы использовать теорию графов [5].

Графом  $G(S, U)$  называется совокупность двух множеств - не пустого множества  $S$  (множества вершин) и множества  $U$  неупорядоченных пар различных элементов множества  $S$  ( $U$  - множество ребер). Число вершин графа  $G$  обозначим  $p$ , число ребер -  $q$ . Обычно граф изображают диаграммой: вершины точками или кружками, ребра - линиями. Рассматриваемой системе сопоставим граф с  $n + 1$  вершинами, которые соответствуют телам системы. Таким образом, структура системы описывается соответствующим ей графом. Рассмотрим некоторые понятия теории графов, необходимые в дальнейшем.

Пусть  $s_1, s_2$  - вершины,  $u = (s_1, s_2)$  - соединяющее их ребро. Тогда вершина  $s_1$  и ребро  $u$  *инцидентные*, вершина  $s_2$  и ребро  $u$  также инцидентные. Два ребра, инцидентные одной вершине, называются *смежными*; две вершины, инцидентные одному ребру, также называются смежными. Если в графе ориентировать все ребра, то получается орграф.

*Маршрутом* в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, в которой любые два соседних элемента инцидентные. Если все ребра маршрута различны, то маршрут называется *цепью*. Если все вершины (а значит, и ребра) различны, то маршрут называется *простой цепью*. Говорят, что две вершины в графе *связаны*, если существует соединяющая их (простая) цепь.

Граф, в котором все вершины связаны, называется *связанным*. Очевид-

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

но, что если структура механической системы описывается несвязанным графом, то эту систему можно рассматривать как две независимые системы, поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только связанные графы.

Замкнутая цепь называется *циклом*. Замкнутая простая цепь называется *простым циклом*. Граф без циклов называется *ациклическим*. Для орграфов цепь называется путем, а цикл – контуром.

Связанный ациклический граф называется *деревом*. Для орграфа, число дуг исходящих из вершины, называется *полустепенью исхода*, а число входящих дуг – *полустепенью захода*. Ориентированным деревом называется граф со следующими свойствами: существует единственный узел, полустепень захода которого равна 0, он называется корнем дерева; полустепень захода всех остальных узлов равна 1; каждый узел достижим из корня.

Дуга, предшествующая вершине  $s_k$  ( $k \neq 0$ ), представляет собой дугу, которая принадлежит пути между  $s_0$  и  $s_k$  и которая, кроме того, инцидентна  $s_k$ . Вершина, предшествующая вершине  $s_k$  ( $k \neq 0$ ), есть вершина, которая связана с  $s_k$  дугой, предшествующей  $s_k$ . Следует отметить, что механические системы тел в большинстве своем имеют циклическую структуру.

*Взвешенный* граф – это граф, дугам которого поставлено в соответствие некоторое число, называемое *весом*. В механических системах твердых тел весом будет число степеней свободы в сочленении.

*Ориентированный* граф задаёт выбор *базисного тела*; сложное движение всей системы твердых тел раскладывают на базисные движения, допускающие сравнительно простое описание и исследование с последующим объединением этих движений. Базисные движения – это относительные движения в шарнирах. Простота описания относительного движения зависит от

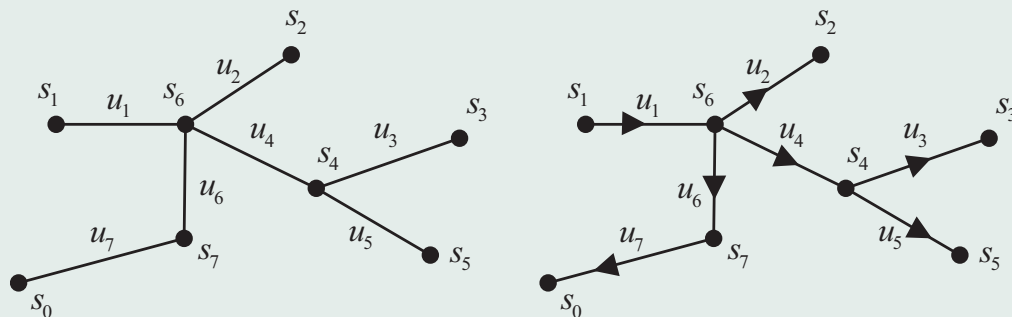


Рис. 2.3. Граф, ориентированный граф.

выбора базисного тела, тела, относительно которого будет задаваться движение его смежной пары. Классический пример, иллюстрирующий неравноценность такого выбора, представлен на рис. 2.4. Движение тела 2 относительно тела 1 задается сравнительно просто: точка, принадлежащая телу 2, движется по некоторой кривой, связанной и неизменной в теле 1. Тело 2 также может вращаться вокруг касательной к кривой тела 1 в точке контакта, следовательно, тело 2 относительно тела 1 имеет две степени свободы. Очевидно, что задать движение тела 1 относительно тела 2 много сложнее.

### 2.1.2. Задание графов на ЭВМ

Рассмотрим некоторые способы представления графов на ЭВМ.

*Матрица смежности.* Граф представляется с помощью квадратной бу-

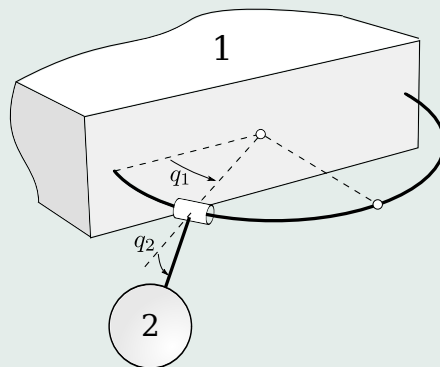


Рис. 2.4. Система двух тел

левской матрицы  $M_{p \times p}$ :

$$M(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ смежна с вершиной } v_j; \\ 0, & \text{если вершины } v_i, v_j \text{ не смежны.} \end{cases}$$

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Заккрыть



Матрица смежности для графа, изображенного на рис. 2.3:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ориентированный граф можно описать при помощи двух целочисленных функций, определенных для каждой вершины  $a$ :  $i^+(a)$ ,  $i^-(a)$ , которые устанавливают соотношения между индексами дуг и вершин. Первая функция определяет номер вершины, из которой дуга  $u_a$  выходит, вторая соответствует индексу вершины, в которую дуга  $u_a$  входит. Для ориентированного графа, изображенного на рис. 2.3, эти функции принимают значения, указанные в табл. 2.1:

Таблица 2.1 — Функции  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$  для ориентированного графа на рис. 2.3

Дуги	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$
$i^+(a)$	1	6	4	6	4	6	7
$i^-(a)$	6	2	3	4	5	7	0

Если для ориентированного графа со структурой дерева заданы пары функций  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$ , то по ним можно восстановить сам граф, то есть су-

Домашняя



Назад

На весь экран

Заккрыть

существует взаимно однозначное соответствие между ориентированным графом и функциями  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$ . Однако это не означает, что для любой произвольно выбранной пары функций существует ориентированный граф со структурой дерева. Та же самая информация, которая содержится в паре функций  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$ , содержится и в *матрице инцидентности*. Как следует из определения, матрица инцидентностей  $S$  отражает инцидентность вершин и ребер. Размерность матрицы инцидентностей  $p \times q$ . Для неориентированного графа элементы матрицы определяются следующим образом:

$$S(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для ориентированного графа элементы матрицы могут принимать три разных значения:

$$S(i, j) = \begin{cases} -1, & v_i \text{ инцидентна ребру } e_j \text{ и } e_j \text{ входит в эту вершину;} \\ 0, & v_i \text{ и ребро } e_j \text{ неинцидентны;} \\ 1, & v_i \text{ инцидентна ребру } e_j \text{ и } e_j \text{ исходит из этой вершины.} \end{cases}$$

Для графа представленного на рис. 2.3, матрица инцидентности будет

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

иметь следующий вид:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & +1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы инцидентности можно выразить через функции  $i^+(j)$  и  $i^-(j)$  следующим образом:

$$S(i, a) = \begin{cases} 1, i = i^+(a), \\ -1, i = i^-(a), \\ 0, \text{ в других случаях.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Для графа со структурой дерева каждый столбец матрицы инцидентности содержит только один не нулевой элемент равный  $+1$  и один элемент равный  $-1$ . Матрицу  $\mathbf{S}$  можно разделить на две части: матрицу строку  $\mathbf{S}_0$  и квадратную матрицу  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S}_0 = (S_{01} \ S_{02} \ \dots \ S_{0n}), \quad (2.2)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ \vdots & & & \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

По ориентированному графу можно построить и другую матрицу с элементами  $+1$  и  $-1$ , а именно матрицу  $T$ . В отличие от матрицы  $S$ , строки матрицы  $T$  соответствуют дугам, а столбцы вершинам.

$$T(a, i) = \begin{cases} 1, & u_a \text{ принадлежит пути от } s_0 \text{ к } s_i \text{ и направлена к } s_0, \\ -1, & u_a \text{ принадлежит пути от } s_0 \text{ к } s_i \text{ и направлена к } s_i, \\ 0, & u_a \text{ не принадлежит пути от } s_0 \text{ к } s_i. \end{cases}$$

Для матриц  $T$  и  $S$  выполняются следующие соотношения:

$$\mathbf{T}^T \mathbf{S}_0^T = -\mathbf{1}_n, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{TS} = \mathbf{ST} = \mathbf{E}. \quad (2.5)$$

Действительно в матрице  $S_0$  отличен от нуля только первый элемент  $S_{01}$ , но согласно определению матрицы  $T$  все элементы ее первой строки равны  $-S_{01}$ .

Рассмотрим выражение (2.5), это выражение представляет собой  $(n \times n)$  матрицу с элементами  $(\mathbf{TS})_{ab} = \sum_{i=1}^n T_{ai} S_{ib}$  ( $a, b = 1, \dots, n$ ). Согласно (2.1)  $S_{ib}$  равно  $+1$  для  $i = i^+(b)$ ,  $-1$  для  $i = i^-(b)$  и  $0$  во всех других случаях. Таким образом  $(\mathbf{TS})_{ab} = T_{ai^+(b)} - T_{ai^-(b)}$ .

Рассмотрим случай, когда  $a = b$ . Дуга  $u_a = u_b$  либо направлена к  $s_0$ , либо выходит из  $s_0$ . В первом случае  $T_{ai^+(b)} = 1$ , а  $T_{ai^-(b)} = 0$ . Во втором случае  $T_{ai^+(b)} = 0$ , а  $T_{ai^-(b)} = -1$ . Очевидно, что в любом случае  $(\mathbf{TS})_{aa} = 1$ .

Рассмотрим случай различных  $a$  и  $b$ , а именно два пути: между  $s_0$  и  $s_{i^+(b)}$  и между  $s_0$  и  $s_{i^-(b)}$ . Дуга  $u_a$  принадлежит каждому из путей, либо не

принадлежит ни одному из них. В любом случае  $T_{ai^+(b)} = T_{ai^-(b)}$  и, следовательно,  $(\mathbf{TS})_{ab} = 0$ . Из определения  $T_{ai}$  следует, что в столбец  $j$  матрицы  $\mathbf{T}$  множество индексов строк всех ненулевых элементов совпадает с множеством индексов всех дуг, принадлежащих пути между  $s_0$  и  $s_j$ . Например, столбец 7 матрицы  $\mathbf{T}$  для графа, изображенного на рисунке 2.3, даёт множество дуг  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$ . Как показывает этот пример, порядок расположения дуг вдоль пути из  $s_0$  в  $s_j$  нельзя определить только из столбца  $j$  матрицы  $\mathbf{T}$ . Однако его можно найти, рассматривая всю матрицу  $\mathbf{T}$ . Это следует из того, что  $\mathbf{S}$  определяется по  $\mathbf{T}$ . Функции  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$  находятся по  $\mathbf{S}$ , а по указанным функциям можно построить ориентированный граф.

Имеется простой способ определения порядка дуг вдоль пути между  $s_0$  и  $s_j$ , использующий обе матрицы  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{S}$ . На каждом шаге для некоторой вершины  $s_k$  определяются предшествующая ей дуга  $u_a$  и вершина  $s_j$ . На первом шаге вершиной  $s_k$  является вершина  $s_j$ . На каждом последующем шаге в качестве  $s_k$  берется предшествующая вершина  $s_i$ , определенная на предыдущем шаге. Процедура заканчивается, когда  $s_i$  совпадает с  $s_0$ . Упорядоченная последовательность предшествующих дуг, определенная таким образом, представляет собой последовательность, в которой дуги расположены в определенном порядке вдоль пути из  $s_j$  в  $s_0$ .

Остается показать, как можно найти предшествующие  $s_k$  ( $k \neq 0$ ) дугу  $u_a$  и вершину  $s_i$  по матрицам  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{S}$ . Обе величины  $S_{ka}$  и  $T_{ak}$  отличны от нуля только для дуги  $u_a$ . Отсюда следует, что  $a$  является пересечением двух множеств индексов, а именно множества индексов  $b$  всех столбцов, для которых  $S_{kb} \neq 0$ , и множества индексов  $c$  всех строк, для которых  $T_{ck} \neq 0$ . Вершиной, предшествующей  $s_i$ , служит одна из двух вершин  $s_{i^+(a)}$  и  $s_{i^-(a)}$  именно та,

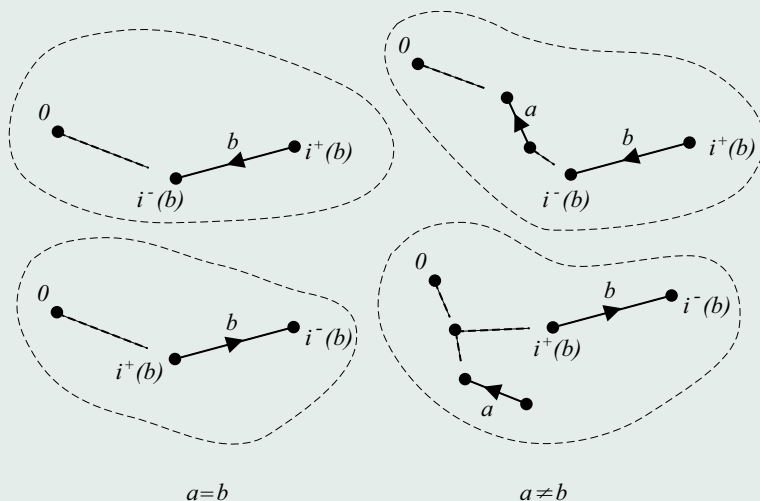


Рис. 2.5. К доказательству соотношения  $\mathbf{TS} = \mathbf{E}$

которая не совпадает с  $s_k$ . Итак,  $s_i$  находится по столбцу  $a$  матрицы  $\mathbf{S}$ .

В произвольном графе со структурой дерева вершины и дуги можно пронумеровать таким образом, что будут выполнены следующие условия. Для всех вершин  $s_k$  ( $k \neq 0$ ) номер дуги, предшествующей  $s_k$ , равен  $k$ , а номер вершины, предшествующей  $s_k$ , меньше  $k$ . Вообще говоря, способ, при помощи которого можно присвоить номера, удовлетворяющие этим условиям, не является единственным. Любая такая нумерация называется правильной.

Для произвольно заданного графа с данной вершиной  $s_0$  правильную ну-

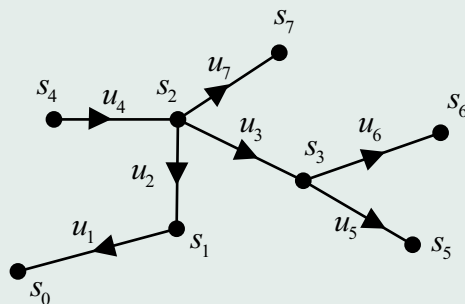


Рис. 2.6. Граф с правильной нумерацией

мерацию можно получить следующим образом. Граф содержит по меньшей мере одну *границную вершину*. Граничными вершинами являются все вершины, за исключением  $s_0$ , с которыми инцидентна только одна дуга. Этим граничным вершинам присваиваются наибольшие номера  $n$ ,  $n - 1$ ,  $n - 2$  и т.д. Такие же номера даются соответствующим предшествующим дугам. Затем все вершины и дуги, которые уже помечены (кроме  $s_0$ ), отсекаются от графа. В результате получается меньший граф с новыми граничными вершинами, которым, в свою очередь, присваиваются наибольшие из имеющихся еще в наличии номеров. Эта рекурсивная процедура продолжается до тех пор, пока не окажутся помеченными все вершины и дуги. Поступая таким образом, мы обозначим вершину, смежную с  $s_0$ , и дугу, связывающую эти две вершины, соответственно через  $s_1$  и  $u_1$ .

Матрицы **S** и **T** для ориентированного графа со структурой дерева, име-

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

ющего правильную нумерацию, обладают некоторыми важными свойствами. Так, один из номеров  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$ , которые поставлены в соответствие двум вершинам, соединенным дугой  $u_a$  ( $a = 1, \dots, n$ ), совпадает с  $a$ , а другой меньше  $a$ . Как следствие, получаем, что все диагональные элементы матрицы  $\mathbf{S}$  отличны от нуля и все другие ненулевые элементы расположены выше главной диагонали. Кроме того, для  $a = 1, \dots, n$  дуга  $u_a$  принадлежит пути между  $s_0$  и  $s_a$ . Следовательно, все элементы главной диагонали матрицы  $\mathbf{T}$  также не равны нулю. Наконец, дуга  $u_a$  ( $a = 1, \dots, n$ ) может только принадлежать пути между  $s_0$  и такой вершиной  $s_k$ , для которой  $k \geq a$ . Отсюда следует, что в матрице  $\mathbf{T}$ , так же, как и в  $\mathbf{S}$ , ниже главной диагонали нет ненулевых элементов. Выше главной диагонали матрицы  $\mathbf{T}$  ненулевые элементы находятся только в первых  $n - n'$  строках, где  $n'$  – номер граничной вершины в графе. Например, на рис. 2.6 изображен граф, ранее представленный на 2.3, с новой правильной нумерацией. Направление дуг не изменилось, матрицы  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{T}$  теперь имеют вид

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

В этом частном случае  $n'$  равно 3. Если в графе с правильной нумерацией все дуги направлены к  $s_0$ , то все ненулевые элементы  $\mathbf{T}$  и все элементы на главной диагонали  $\mathbf{T}$  равны +1. Если, с другой стороны, все дуги направлены от  $s_0$ , то в этих матрицах все элементы, о которых только что говорилось, равны -1. Рассмотрим снова задачу определения порядка, в котором располагаются дуги вдоль пути от  $s_0$  к  $s_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Общий метод, базирующийся на использовании матриц  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{T}$  был описан ранее. В графе с правильной нумерацией индексы дуг монотонно возрастают вдоль этого пути. Следовательно, порядок можно установить непосредственно по столбцу  $j$  матрицы  $\mathbf{T}$ .

## 2.2. Системы тел со структурой дерева, соединенные сферическими шарнирами

Рассмотрим механическую систему, тела которой соединены только сферическими шарнирами и граф структуры которой ациклический. На рис. 2.7 изображено одно из тел системы. Все силы, приложенные к телу  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), и моменты внешних сил объединяются в главный вектор внешних

Домашняя

◀◀

▶▶

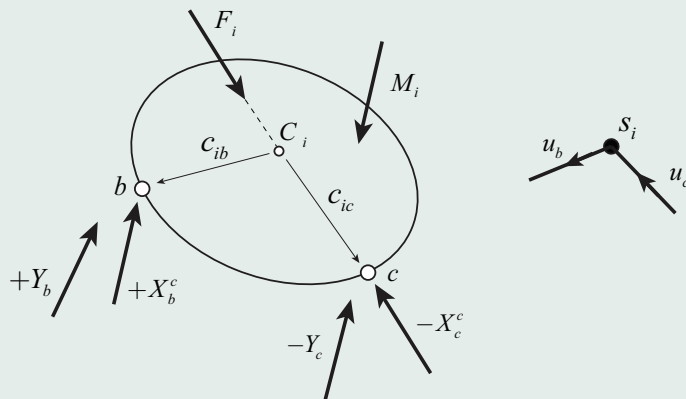
◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть



Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Рис. 2.7. Тело механической системы со сферическими шарнирами и соответствующая ему вершина графа

сил  $F_i$ , линия действия которого проходит через центр масс тела  $C_i$ , и главный момент внешних сил  $M_i$ . Силы и моменты, действующие в каждом шарнире  $a$  ( $a = 1, \dots, n$ ), объединяются в главный вектор шарнирных сил  $X_a^c$ , линия действия которого проходит через шарнирную точку  $a$ , и главный момент шарнирных сил  $Y_a$ . На тело  $i^+(a)$  действует сила  $+X_a^c$  и моменты сил  $+Y_a$ , на смежное тело  $i^-(a)$  действует сила  $-X_a^c$  и момент  $-Y_a$ .

Шарнирные силы, действующие на тело, можно записать при помощи матрицы  $S$ : в шарнире  $b$  сила  $S_{ib}X_b^c$ , в шарнире  $c$  сила  $S_{ic}X_c^c$ . Поскольку элемент матрицы  $S_{ia}$  равен нулю, если  $a$  есть индекс шарнира, который не расположен на теле  $i$ , то главный вектор всех шарнирных сил, действующих

Закреть

на тело, можно представить в виде суммы  $\sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{X}_a^c$ . Уравнение движения центра масс тела  $i$  примет следующий вид:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{X}_a^c, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.6)$$

где  $m_i$  - масса тела,  $\mathbf{r}_i$  - радиус-вектор центра масс  $C_i$  относительно инерциальной системы координат. Запишем уравнения движения тела вокруг своего центра масс. Главный момент сил и моментов реакции относительно  $C_i$ :  $(c_{ib} \times X_b^c + Y_b) - (c_{ic} \times X_c^c + Y_c)$  при помощи матрицы  $S$  можно переписать в виде

$$\dot{L}_i = M_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} (c_{ia} \times X_a^c + Y_a), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.7)$$

где вектора  $c_{ib}$  и  $c_{ic}$  задают положение шарнирных точек относительно точки  $C_i$  (рис. 2.7);  $\mathbf{L}_i$  - момент количества движения абсолютного движения тела  $i$  относительно  $\mathbf{C}_i$ ; Уравнения (2.6) и (2.7) можно записать в матричном виде

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{S} \mathbf{X}^c, \quad (2.8)$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} + \mathbf{C} \times \mathbf{X}^c + \mathbf{S} \mathbf{Y}, \quad (2.9)$$

где  $\mathbf{m}$  - диагональная матрица масс;  $\mathbf{C}$  -  $(n \times n)$  матрица с элементами:

$$C_{ia} = S_{ia} c_{ia}, \quad i, a = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Умножив уравнение (2.8) слева на  $\mathbf{T}$ , получим явное выражение для сил реакции:

$$\mathbf{X}^c = \mathbf{T}(\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}). \quad (2.11)$$

Подставив это выражение в (2.7), получим

$$\dot{\mathbf{L}} - \mathbf{CT} \times (\mathbf{m}\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}) = \mathbf{M} + \mathbf{SY}. \quad (2.12)$$

Радиус-вектор тела  $r_i$  можно представить в виде суммы  $r_0$  и суммы векторов, каждый из которых фиксирован в одном из тел. Ускорение  $\ddot{\mathbf{r}}_i(t)$  тела  $i$  будет функцией  $\ddot{\mathbf{r}}_0(t)$  некоторых фиксированных векторов, зависящих от расположения шарниров и угловых скоростей и ускорений.

Рассмотрим два смежных тела  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$ . Для любой пары смежных тел можно записать выражение

$$(r_{i^+(a)} + c_{i^+(a)a}) - (r_{i^-(a)} + c_{i^-(a)a}) = 0, \quad a = 1, \dots, n. \quad (2.13)$$

В последнем выражении предполагаем, что  $c_{0a} = 0$  для всех  $a = 1, \dots, n$ . Выражение (2.13) можно переписать в виде

$$\sum_{i=0}^n S_{ia}(r_i + c_{ia}) = 0, \quad a = 1, \dots, n. \quad (2.14)$$

Принимая во внимание выражение (2.10), запишем последнее выражение при помощи элементов матриц:

$$S_{0a}r_0 + \sum_{i=1}^n (S_{ia}r_i + C_{ia}) = 0, \quad a = 1, \dots, n, \quad (2.15)$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

или в матричной форме:

$$\mathbf{r}_0 \mathbf{S}_0^T + \mathbf{S}^T \mathbf{r} + \mathbf{C}^T \mathbf{1}_n = \mathbf{0}. \quad (2.16)$$

Умножив (2.16) слева на  $\mathbf{T}^T$ , получим явное выражение для матрицы  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \mathbf{1}_n - (\mathbf{C}\mathbf{T})^T \mathbf{1}_n. \quad (2.17)$$

Элементы матрицы  $\mathbf{C}\mathbf{T}$  обозначим как  $d_{ij}$ :

$$d_{ij} = (\mathbf{C}\mathbf{T})_{ij} = \sum_{a=1}^n T_{aj} S_{ia} c_{ia}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.18)$$

Из выражения (2.18) следует, что вектора  $d_{ij}$  фиксированы в теле  $i$ , поскольку фиксированы составляющие их вектора  $S_{ia} c_{ia}$ . С учетом новых обозначений радиус-вектор тела  $i$  определяется следующим образом:

$$r_i = r_0 - \sum_{j=1}^n d_{ji}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.19)$$

Для определения физического смысла векторов  $d_{ij}$  запишем выражение (2.18) в следующем виде, переставив индексы  $i$  и  $j$ :

$$\mathbf{d}_{ji} = \sum_{a=1}^n T_{ai} S_{ja} \mathbf{c}_{ja}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.20)$$

Произведения  $T_{ai} S_{ja}$  отличны от нуля только для тех дуг  $u_a$ , которые принадлежат пути между  $s_0$  и  $s_i$  ( $T_{ai} \neq 0$ ) и которые инцидентны  $s_j$  ( $s_{ja} \neq 0$ ). Необходимо различать три случая:

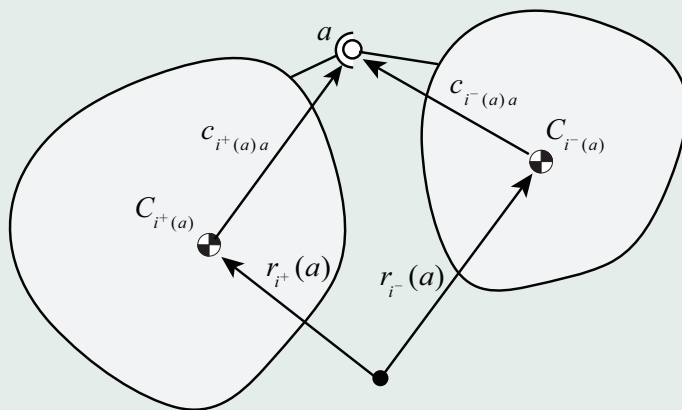


Рис. 2.8. Кинематика смежных тел

- 1)  $s_j$  не лежит на пути от тела 0 к телу  $s_i$  - в этом случае ни одна из дуг не вносит вклад в сумму (2.20) и, следовательно,  $d_{ij} = 0$ ;
- 2)  $s_j$  лежит на пути от тела 0 к телу  $s_i$  - в этом случае вклад в сумму (2.20) вносят две дуги, обозначим их индексами  $b$  и  $c$ , и следовательно  $d_{ij} = c_{jb} - c_{jc}$ , поскольку  $T_{bi}S_{jb} = +1$ ,  $T_iS_j = -1$ , где  $b$  - индекс дуги  $u_b$ , предшествующей вершине  $s_i$ ;
- 3)  $s_j$  и  $s_i$  - одно тело, в этом случае только дуга  $u_b$ , предшествующая  $s_i$ , дает вклад в сумму и, следовательно,  $d_{ij} = c_{ib}$ .

Подставим в уравнение движения (2.12) вторую производную по времени от

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

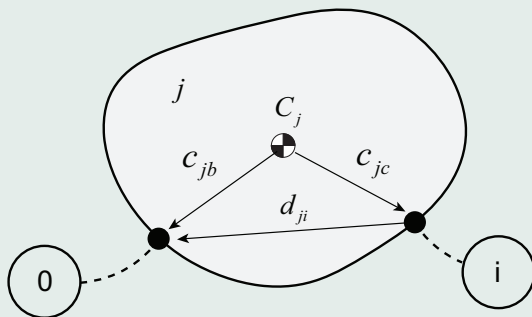


Рис. 2.9. К определению вектора  $d_{ij}$

**r:**

$$\dot{\mathbf{L}} - \mathbf{CT} \times \mathbf{m}(\ddot{\mathbf{CT}})^T \mathbf{1}_n - (\mathbf{CT}) \times (\ddot{\mathbf{r}}_0 \mathbf{m} \mathbf{1}_n - \mathbf{F}) = \mathbf{M} + \mathbf{SY}. \quad (2.21)$$

Рассмотрим матрицу  $(\mathbf{CT}) \times \mathbf{m}(\ddot{\mathbf{CT}})^T$ , с элементами  $g_{ij}$ :

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^n m_k d_{ik} \times \ddot{d}_{jk}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.22)$$

Будем различать случаи:

- 1)  $i = j$ ;
- 2)  $s_i$  лежит на пути от тела  $j$  к телу 0;
- 3)  $s_j$  лежит на пути от тела  $i$  к телу 0;

4) все прочие случаи.

Таким образом, выражение для  $\mathbf{g}_{ij}$  можно переписать в следующем виде:

$$g_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n m_k d_{ik} \times \ddot{d}_{ik}, & s_i = s_j \\ \ddot{d}_{ij} \times \sum_{k=1}^n m_k \ddot{d}_{jk}, & s_i < s_j \\ \sum_{k=1}^n m_k d_{ik} \times \ddot{d}_{ji}, & s_j < s_i \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2.23)$$

Для каждого тела  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) определим понятие дополненного тела следующим образом. К исходному телу  $i$  на концы каждого шарнирного вектора  $s_{ia}$  присоединим точечные массы с массой всех тел (за исключением тела 0), которые связаны с телом  $i$  непосредственно или косвенно через шарнир  $a$ . Центр масс дополненного тела - *барицентр*  $B_i$  не совпадает с центром масс исходного тела  $C_i$  (рис. 2.10). Определенные на дополненном теле векторы  $b_{ij}$  жестко связаны с телом  $i$ . Очевидно, что количество различных векторов меньше числа различных комбинаций индексов  $i$  и  $j$ , поскольку к телу  $i$  косвенно при помощи одного и того же шарнира может быть присоединено несколько тел. Вектора  $b_{ij}$  удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} m_j = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.24)$$

Векторы  $b_{ij}$  и  $d_{ij}$  связаны соотношением

$$d_{ij} = b_{i0} - b_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Заккрыть



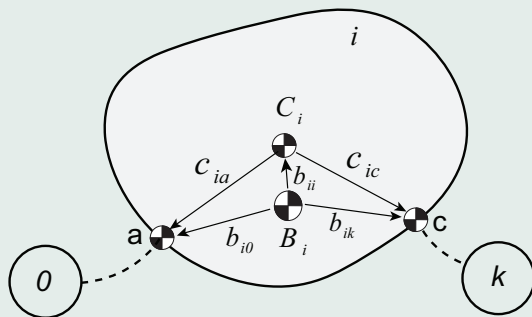


Рис. 2.10. К определению барицентра  $B_i$

Используя полученные соотношения, перепишем выражение для элементов  $g_{ij}$ :

$$g_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n m_k d_{ik} \times \ddot{d}_{ik}, & s_i = s_j \\ M d_{ij} \times \ddot{b}_{j0}, & s_i < s_j \\ M b_{i0} \times \ddot{d}_{ji}, & s_j < s_i \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2.25)$$

Подставив выражения (2.25) в уравнение (2.21), получим следующую систему уравнений:

$$\dot{L}_i + \sum_{j=1}^n g_{ij} - \sum_{j=1}^n d_{ij} \times (m_j \ddot{r}_0 - F_j) = M_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} Y_a, \quad i = 1, \dots, n,$$

или в явной форме

$$\dot{L}_i + \sum_{j=1}^n g_{ij} - \sum_{j=1}^n d_{ij} \times (m_j \ddot{r}_{j0} - F_j) = M_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} Y_a, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.26)$$

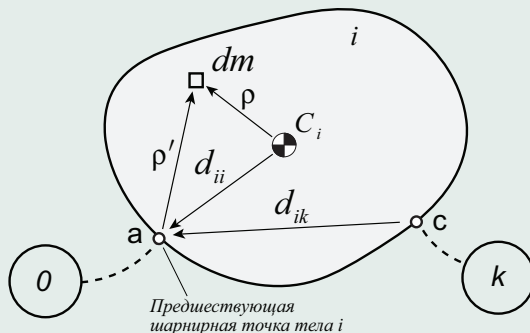


Рис. 2.11. К определению тензора инерции относительно предшествующей шарнирной точки

Рассмотрим момент количества движения тела  $i$  относительно шарнирной точки  $a$ :  $L'_i = \int_m \rho' \times \dot{\rho}' dm$  (рис. 2.11). Производную от  $L'_i$  можно записать в следующем виде:

$$\frac{dL'_i}{dt} = \int_{m_i} (\rho - d_{ii}) \times (\ddot{\rho} - \ddot{d}_{ii}) dm,$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Заккрыть](#)

раскрывая скобки и учитывая, что  $\int_m \rho dm = 0$ , получим

$$\frac{dL'_i}{dt} = \dot{L}_i + m_i d_{ii} \times \ddot{d}_{ii}. \quad (2.27)$$

Если к последнему выражению добавить сумму  $\sum_{k=1}^n m_k d_{ik} \times \ddot{d}_{ik}$ , то получатся два первых члена в уравнении (2.26). Таким образом, первые два члена уравнения (2.26) представляют собой абсолютную производную по времени от момента количества абсолютного движения дополненного тела  $i$  относительно его предшествующей шарнирной точки. Пусть  $K_i$  - тензор инерции дополненного тела  $i$  по отношению к его предшествующей шарнирной точке. Тензор  $\mathbf{K}_i$  связан с центральным тензором инерции исходного тела  $\mathbf{J}_i$  следующим соотношением:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{J}_i + \sum_{k=1}^n m_k (d_{ik}^2 \mathbf{E} - d_{ik} d_{ik}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.28)$$

Два первых члена уравнения (2.26) можно выразить, используя угловую скорость вращения тела  $\omega_i$ :

$$\dot{L}_i + \sum_{k=1}^n m_k d_{ik} \times \ddot{d}_{ik} = \mathbf{K}_i \omega_i + \omega_i \times \mathbf{K}_i \omega_i. \quad (2.29)$$

Рассмотрим следующий член уравнения, содержащий  $\ddot{r}_0$ :

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} m_j \times \ddot{r}_0 = \sum_{j=1}^n (b_{i0} - b_{ij}) m_j \times \ddot{r}_0 = b_{i0} \times M \ddot{r}_0. \quad (2.30)$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

В выражении, содержащем внешние силы  $F_j$ , множитель  $d_{ij}$  отличен от нуля только для тех значений  $j$ , которые удовлетворяют соотношению  $s_i \leq s_j$ . Учитывая это, преобразуем уравнения движения к виду

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times \mathbf{K}_i \omega_i + M \left( \sum_{j:s_i < s_j} \ddot{d}_{ij} \times b_{j0} + b_{i0} \times (-\ddot{r}_0 + \sum_{j:s_j < s_i} \ddot{d}_{ji}) \right) + \\ & + \sum_{j:s_i < s_j} d_{ij} \times F_j = M_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} Y_a, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Вторые производные от  $b_{j0}$  и  $d_{ji}$  заменим выражениями:

$$\ddot{b}_{j0} = \dot{\omega}_j \times b_{j0} + \omega_j \times (\omega_j \times b_{j0}), \quad (2.32)$$

$$\ddot{d}_{ji} = \dot{\omega}_j \times d_{ji} + \omega_j \times (\omega_j \times d_{ji}), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.33)$$

Уравнение движения запишем в виде

$$M(-b_{i0}) \times (\ddot{r}_0 - \sum_{j:s_j < s_i} \ddot{d}_{ji}) + \mathbf{K}_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times \mathbf{K}_i \omega_i = M_i^P, \quad (2.34)$$

где  $M_i^P$  определяется следующим образом:

$$M_i^P = \sum_{a=1}^n S_{ia} Y_a + M_i - d_{ii} \times F_i - \sum_{j:s_i < s_j} d_{ij} \times (M \ddot{b}_{j0} + F_j).$$

Уравнение (2.34) представляет собой уравнение момента количества движения для одного твердого тела, записанного относительно неподвижной в

теле точки. В общем виде уравнение момента количества движения имеет следующий вид:

$$m\mathbf{r}_c \times \ddot{\mathbf{z}}_p + \mathbf{J}^p \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}^p \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}^p,$$

где  $p$  - неподвижный в теле полюс;  $\ddot{\mathbf{z}}_p$  - абсолютное ускорение полюса;  $\mathbf{J}^p$  - тензор инерции относительно  $p$ ;  $\mathbf{M}^p$  - момент внешних сил относительно  $p$ ;  $\mathbf{r}_c$  - вектор, проведенный из точки  $p$  в центр масс. Если рассматривать дополненное тело  $i$ , а в качестве неподвижной точки в дополненном принять предшествующую шарнирную точку, то получим уравнение аналогичное (2.34). В этом случае масса тела равна массе всей системы  $M$ , его центр масс находится в барицентре. Вектор, проведенный из предшествующей шарнирной точки в барицентр равен  $-b_{i0}$ , выражение  $\ddot{\mathbf{r}}_0 - \sum_{j:s_j < s_i} \ddot{\mathbf{d}}_{ji}$  является абсолютным ускорением полюса  $p$ , поскольку радиус-вектор точки  $p$  в инерциальном пространстве есть  $\mathbf{r}_i + \mathbf{d}_{ii}$  или  $\mathbf{r}_0 + \sum_{j=1}^n \mathbf{d}_{ij}$ , что совпадает с  $\mathbf{r}_0 - \sum_{j:s_j < s_i} \mathbf{d}_{ji}$ , поскольку  $\mathbf{d}_{ji} = 0$  для всех  $s_j \not\leq s_i$ . Рассмотрим правую часть уравнения (2.34). Момент силы  $\mathbf{M}_i^p$  содержит главный момент  $\sum_{a=1}^n S_{ia} Y_a$  всех внутренних шарнирных сил, действующих на тело  $i$ , и момент внешних сил  $M_i$ . Линия действия внешней силы по принятому соглашению проходит через центр масс тела, поэтому  $\mathbf{d}_{ii} \times \mathbf{F}_i$  есть момент этой силы относительно предшествующей шарнирной точки.

Момент силы  $-\mathbf{d}_{ij} \times (M\ddot{\mathbf{b}}_{j0} + \mathbf{F}_j)$  можно интерпретировать следующим образом. Предположим, что дополненное тело  $j$  отделено от системы и подвешено как маятник в своей предшествующей шарнирной точке. На дополненное тело  $j$  действует внешняя сила  $\mathbf{F}_j$  (рис. 2.12). Если дополненное тело массы  $M$  с центром масс  $B_j$  вращается с угловым ускорением  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_j$  и угловой

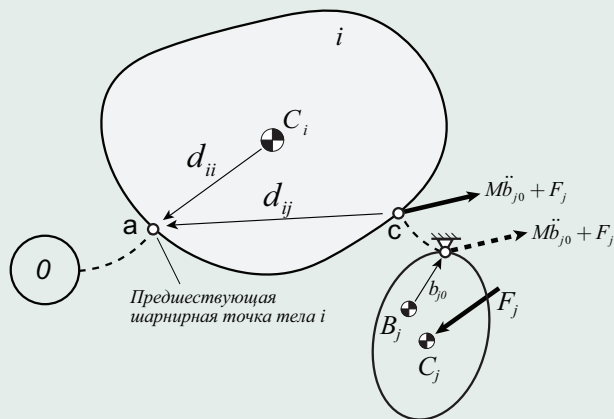


Рис. 2.12. К определению  $M\ddot{b}_{i0} + F_j$

скоростью  $\omega_j$ , то на подвес действует сила  $M\ddot{b}_{j0} + F_j$ . Приведем силу к шарнирной точке на теле  $i$ , ведущей к телу  $j$ . На тело  $i$  относительно точки  $a$  действует момент этой силы  $-d_{ij} \times (M\ddot{b}_{j0} + F_j)$ .

Итак, уравнения движения системы твёрдых тел имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i \dot{\omega}_i + M \left( \sum_{j:s_i < s_j} d_{ij} \times (\dot{\omega}_j \times b_{j0}) + b_{i0} \times \sum_{j:s_j < s_i} \dot{\omega}_j \times d_{ji} \right) = \\ = M'_i + M_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} Y_a, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.35)$$

где

$$\begin{aligned}
 M'_i = & -\omega_i \times K_i \omega_i - M \left( \sum_{j:s_i < s_j} d_{ij} \times (\omega_j \times (\omega_j \times b_{j0})) + \right. \\
 & \left. + b_{i0} \times (-\ddot{r}_0 + \sum_{j:s_j < s_i} \omega_j \times (\omega_j \times d_{ji})) \right) - \\
 & - \sum_{j:s_i \leq s_j} d_{ij} \times F_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

Для численных расчетов двойные векторные произведения выражаются через матричные произведения следующим образом:

$$d_{ij} \times (\dot{\omega}_j \times b_{j0}) = (b_{j0} d_{ij} E - b_{j0} d_{ij}) \dot{\omega}_j.$$

Рассмотрим матрицу:

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} K_i, & i = j, \\ M(b_{j0} \cdot d_{ij} E - b_{j0} d_{ij}), & s_i < s_j, \\ M(d_{ji} \cdot b_{i0} E - d_{ji} b_{i0}), & s_j < s_i, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2.37)$$

При помощи матриц  $\mathbf{K}_{ij}$  уравнение движения можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij} \dot{\omega}_j = M'_i + M_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} Y_a, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.38)$$

Система (2.38) представляет собой матричную запись системы  $3n$  скалярных дифференциальных уравнений первого порядка. Эту систему необходимо дополнить кинематическими уравнениями, которые связывают производные от обобщенных координат с угловыми скоростями тел.

При реализации численного метода следует учесть, что операции скалярного и диадного произведения векторов в выражении (2.37) должны производиться в одной системе координат, например, скалярное произведение  $b_{j0} \cdot d_{ij}$  в координатной форме может выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{b}_{j0}^T \mathbf{A}^{(ji)} \mathbf{d}_{ij},$$

где  $\mathbf{A}^{(ji)}$  - матрица преобразования координат из системы координат  $\mathbf{e}^{(i)}$ , в которой заданы координаты  $\mathbf{d}_{ij}$  в систему  $\mathbf{e}^{(j)}$ , в которой определены координаты  $\mathbf{b}_{j0}$ .

### 2.2.1. Плоские цилиндрические шарниры

Рассмотрим механическую систему связанных твердых тел со структурой дерева, в которой присутствуют только цилиндрические шарниры с взаимно параллельными осями. Любые два смежных тела могут только вращаться относительно друг друга. Такие системы часто встречаются в системах ракетно-космической техники, к которым относится и рассмотренная ранее система раскрытия створок солнечных батарей (рис. 2.13). Для записи уравнений движения можно было использовать и полученные ранее уравнения для систем со сферическими шарнирами, но очевидно, что для плоских систем число необходимых уравнений можно значительно сократить.



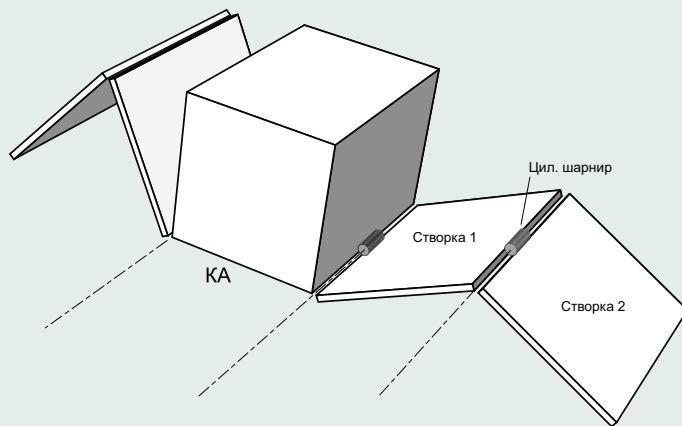


Рис. 2.13. Модель КА со створками солнечных батарей

Уравнения движения механической системы с плоскими цилиндрическими шарнирами можно получить из системы уравнений для сферических шарниров. В правую часть уравнений движения добавим моменты силы реакции, препятствующие вращению тел относительно любой оси перпендикулярной оси цилиндрических шарниров, очевидно, что векторы этих моментов также перпендикулярны осям шарниров. Если полученные уравнения движения умножить на единичный вектор  $n$ , параллельный осям шарниров, то новые моменты будут исключены. Новая система будет представлять собой систему  $n$  скалярных дифференциальных уравнений, где  $n$  - число степеней свободы, равное количеству цилиндрических шарниров в системе. На-

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

оборот, от системы с только цилиндрическими шарнирами можно перейти к исходной системе со сферическими шарнирами, если на осях шарниров выбрать точки, в которые поместить сферические шарниры: полученные для новой системы дифференциальные уравнения не зависят от выбора точек на осях цилиндрических шарниров. Рассмотрим, например, произведение  $p \cdot d_{ij} \times (\omega_j \times (\omega_j \times b_{j0}))$ . Вектора  $p$  и  $\omega_j$  коллинеарны, поэтому можно рассмотреть выражение  $p \cdot d_{ij} \times (p \times (p \times b_{j0}))$ :

$$\begin{aligned} p \cdot d_{ij} \times (p \times (p \times b_{j0})) &= p \cdot d_{ij} \times (p(p \cdot b_{j0}) - b_{j0}(p \cdot p)) = \\ &= d_{ij} \cdot (p(p \cdot b_{j0}) \times p) - p \cdot b_{j0} \times d_{ij} = -p \cdot b_{j0} \times d_{ij} = \\ &= -b_{j0} \cdot d_{ij} \times p = -d_{ij} \cdot p \times b_{j0}, \quad (2.39) \end{aligned}$$

из чего следует, что в рассмотренное выражение не будут входить проекции векторов  $d_{ij}$  и  $b_{j0}$  на направление  $p$ . Аналогичные преобразования можно повторить для других членов, входящих в уравнение (2.38). Далее полагаем, что все компоненты векторов, входящих в уравнения движения, имеют нулевые составляющие вдоль вектора  $n$ . Скалярное умножение уравнения (2.38) на  $n$  осуществляется следующим образом. С каждым телом свяжем базис  $\mathbf{e}^{(i)}$  так, чтобы орт  $e_3^{(i)}$  совпадал с  $n$ . Начало базиса  $\mathbf{e}^{(0)}$  помещается на оси первого шарнира, положение которого есть известная функция  $\mathbf{r}_0(t)$ . Результат скалярного произведения исходного уравнения на вектор  $n$  получается при помощи разложения этого векторного уравнения в базисе  $\mathbf{e}^{(i)}$  и сохранения только уравнения для третьей координаты.

На рис. 2.14 показана механическая система с цилиндрическими шарнирами. В качестве обобщенных координат выбран угол  $\phi_i$  между  $e_1$  и  $e_1^{(i)}$ .

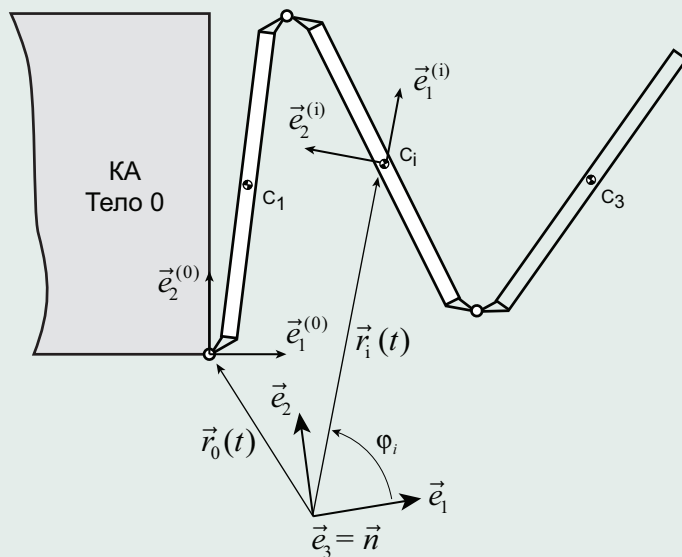


Рис. 2.14. Система с цилиндрическими шарнирами

Преобразование координат задается матрицей  $A^i$ :

$$\mathbf{e}^{(i)} = \mathbf{A}^i \mathbf{e}, \quad i = 1, \dots, n,$$

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

элементы которой определяются следующим образом:

$$\mathbf{A}^i = \begin{pmatrix} \cos \phi_i & \sin \phi_i & 0 \\ -\sin \phi_i & \cos \phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.40)$$

Матрица преобразования координат из системы  $\mathbf{e}^{(j)}$  в систему  $\mathbf{e}^{(i)}$  есть результат двух последовательных преобразований:

$$\mathbf{e}^{(i)} = \mathbf{A}^{ij} \mathbf{e}^{(j)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где

$$\mathbf{A}^{ij} = \mathbf{A}^i \mathbf{A}^{jT} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_i - \phi_j) & \sin(\phi_i - \phi_j) & 0 \\ -\sin(\phi_i - \phi_j) & \cos(\phi_i - \phi_j) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Матрицы координат для  $K_i$ ,  $d_{ij}$ ,  $b_{i0}$ ,  $\dot{\omega}_i$ ,  $M_i$ ,  $Y_a$  ( $i, j, a = 1, \dots, n$ ) в базисе  $e^{(i)}$  записываются в виде

$$\mathbf{K}_i = \begin{pmatrix} K_{i1} & -K_{i12} & -K_{i13} \\ -K_{i12} & K_{i2} & -K_{i23} \\ -K_{i13} & -K_{i23} & K_{i3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_{ij} = \begin{pmatrix} d_{ij} \cos a_{ij} \\ d_{ij} \sin a_{ij} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_{i0} = \begin{pmatrix} b_{i0} \cos \beta_i \\ b_{i0} \sin \beta_i \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_i \end{pmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\phi}_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_a \end{pmatrix}.$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Заккрыть](#)

Скаляры  $d_{ij}$  и  $b_{ij}$  представляют собой абсолютные значения проекций этих векторов на плоскость, перпендикулярную вектору  $n$ , положение этих векторов в плоскости задается углами  $a_{ij}$  и  $\beta_i$ . Уравнения движения системы с цилиндрическими шарнирами, с учетом того, что

$$\omega_j \times (\omega_j \times b_{j0}) = -\omega_j^2 b_{j0}$$

и

$$\omega_j \times (\omega_j \times d_{ji}) = -\omega_j^2 d_{ji},$$

будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij} \dot{\omega}_j = & \mathbf{M}_i - \tilde{\omega}_i \mathbf{K}_i \omega_i + M \left( \sum_{j:s_i < s_j} \dot{\phi}_j^2 \tilde{\mathbf{d}}_{ij} \mathbf{A}^{ij} \mathbf{b}_{j0} + \right. \\ & \left. + \tilde{\mathbf{b}}_{i0} (\ddot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{j:s_j < s_i} \dot{\phi}_j^2 \mathbf{A}^{ij} \mathbf{d}_{ij}) \right) - \\ & - \sum_{j:s_i < s_j} \tilde{\mathbf{d}}_{ij} \mathbf{A}^i \mathbf{F}_j + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{Y}_a, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Подматрицы  $\mathbf{K}_{ij}$  имеют вид

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{K}_i, & i = j, \\ M(\mathbf{b}_{j0}^T \mathbf{A}^{ji} \mathbf{d}_{ij} \mathbf{E} - \mathbf{A}^{ij} \mathbf{b}_{j0} \mathbf{d}_{ij}^T), & s_i < s_j, \\ M(\mathbf{d}_{ji}^T \mathbf{A}^{ji} \mathbf{b}_{i0} \mathbf{E} - \mathbf{A}^{ij} \mathbf{d}_{ji} \mathbf{b}_{i0}^T), & s_j < s_i, \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (2.42)$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Заккрыть](#)

где  $i, j = 1, \dots, n$ . Каждое слагаемое системы (2.41) представляет собой матрицу-столбец из трех элементов. Для интегрирования необходим только третий элемент, описывающий движение системы вокруг оси, задаваемой вектором  $p$ . Рассмотрим процедуру получения для наиболее сложных слагаемых. Рассмотрим произведение  $\mathbf{K}_{ij}\dot{\omega}_j$ . Определим  $K_{ij}$  для случая  $s_i < s_j$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{ji} \mathbf{d}_{ij} &= d_{ij} \begin{bmatrix} \cos(\phi_j - \phi_i) \cos a_{ij} + \sin(\phi_j - \phi_i) \sin a_{ij} \\ -\sin(\phi_j - \phi_i) \cos a_{ij} + \cos(\phi_j - \phi_i) \sin a_{ij} \end{bmatrix} = \\ &= d_{ij} \begin{bmatrix} \cos(\phi_j - \phi_i + a_{ij}) \\ \sin(\phi_j - \phi_i + a_{ij}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Умножая далее, получим элемент  $\mathbf{b}_{j0}^T \mathbf{A}^{ji} \mathbf{d}_{ij} \mathbf{E}$  с индексом (3,3):

$$\begin{aligned} b_{j0} d_{ij} (\cos \beta_j \cos(\phi_i - \phi_j + a_{ij}) + \sin \beta_j \sin(\phi_i - \phi_j + a_{ij})) = \\ = b_{j0} d_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j + a_{ij} - \beta_j). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Элемент (3,3) второго слагаемого  $\mathbf{A}^{ij} \mathbf{b}_{j0} \mathbf{d}_{ij}^T$  обращается в нуль, так как весь третий столбец матрицы  $\mathbf{b}_{j0} \mathbf{d}_{ij}^T$  содержит только нули. Следовательно, для  $s_i < s_j$ :

$$(\mathbf{K}_{ij} \dot{\omega}_j)_{(3,3)} = M b_{j0} d_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j + a_{ij} - \beta_j) \ddot{\phi}_j.$$

Таким образом, выражение для  $\mathbf{K}_{ij} \dot{\omega}_j, i \neq j$  определяется следующим

образом:

$$\mathbf{K}_{ij}\dot{\omega}_j = \begin{cases} \mathbf{K}_i, i = j, \\ Mb_{j0}d_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j + a_{ij} - \beta_j)\ddot{\phi}_j, s_i < s_j, \\ Mb_{i0}d_{ji} \cos(\phi_i - \phi_j - a_{ij} + \beta_j)\ddot{\phi}_j, s_j < s_i, \\ 0, \text{ в других случаях,} \end{cases} \quad (2.45)$$

где  $i, j = 1, \dots, n$ . Раскроем выражение  $\dot{\phi}_j^2 \tilde{d}_{ij} A^{ij} b_{j0}$ :

$$A^{ij} b_{j0} = b_{j0} [\cos(\phi_i - \phi_j - \beta_j) \quad -\sin(\phi_i - \phi_j - \beta_j)],$$

что позволяет определить третий элемент  $\dot{\phi}_j^2 \tilde{d}_{ij} A^{ij} b_{j0}$ :

$$(\dot{\phi}_j^2 \tilde{d}_{ij} A^{ij} b_{j0})_{(3,3)} = -d_{ij} b_{j0} \sin(\phi_i - \phi_j + a_{ij} - \beta_j) \dot{\phi}_j^2.$$

Уравнения движения механической системы примут вид

$$\sum_{j=1}^n (A_{ij} \ddot{\phi}_j + B_{ij} \dot{\phi}_j^2) = R_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} Y_a, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.46)$$

где

$$A_{ij} = \begin{cases} K_{i3}, & i = j, \\ Md_{ij}b_{j0} \cos(\phi_i - \phi_j + \alpha_{ij}\beta_j), & s_i < s_j, \\ Md_{ji}b_{i0} \cos(\phi_i - \phi_j - \alpha_{ji}\beta_i), & s_j < s_i, \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

$$B_{ij} = \begin{cases} Md_{ij}b_{j0} \cos(\phi_i - \phi_j + \alpha_{ij}\beta_j), & s_i < s_j, \\ Md_{ji}b_{i0} \cos(\phi_i - \phi_j - \alpha_{ji}\beta_i), & s_j < s_i, \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

$$R_i = M_i - Mb_{i0}(\ddot{r}_{01} \sin(\phi_i - \beta_i) - \ddot{r}_{02} \cos(\phi_i + \beta_i) + \sum_{j:s_i \leq s_j} d_{ij}(F_{ji} \sin(\phi_i + a_{ij}) - F_{j2} \cos(\phi_i + a_{ij}))).$$

Уравнение можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \dots \\ \ddot{\phi}_{n-1} \\ \ddot{\phi}_n \end{pmatrix} + \mathbf{B} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1^2 \\ \dot{\phi}_2^2 \\ \dots \\ \dot{\phi}_{n-1}^2 \\ \dot{\phi}_n^2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{Y} + \mathbf{R}. \quad (2.47)$$

Матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  симметричны. Этот факт позволит сократить время решения системы линейных уравнений (СЛУ) для определения ускорений, при использовании специальных численных методов решения СЛУ, ориентированных на симметрические матрицы коэффициентов.



### 2.2.2. Системы, не связанные с внешним телом

Рассмотрим механические системы, в которых отсутствует тело 0, совершающее заданное движение. Пример такой системы – система раскрытия солнечных батарей, в том случае если учитывается и влияние процесса раскрытия на движение КА. При анализе таких систем необходимо выбрать систему координат  $\mathbf{e}^{(0)}$ , относительно которой будет рассматриваться движение всей системы. Поскольку в системе отсутствует тело 0 и, следовательно, шарнир 1, связанный с телом 0, принимаем, что вектор  $\mathbf{c}_{11}$ , соединяющий центр масс тела 1 с первым шарниром, равен 0:

$$\mathbf{c}_{11} = 0.$$

Таким образом, предполагается, что на теле 1, в его центре масс, располагается фиктивный шарнир. Уравнения движения системы имеют следующий вид:

$$\begin{cases} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{a=0}^n S_{ia} \mathbf{X}_a^c, \\ \dot{\mathbf{L}}_i = \mathbf{M}_i + S_{ia} (\mathbf{c}_{ia} \times \mathbf{X}_a^c + \mathbf{Y}_a), \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.48)$$

Складывая все  $n$  первых уравнений системы (2.48), получим уравнение

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i,$$

которое, с учетом определения центра масс системы, можно переписать в

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

виде

$$\ddot{\mathbf{r}}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i. \quad (2.49)$$

Введем вектор  $\mathbf{R}_i$  как радиус-вектор центра масс тела  $i$  относительно центра масс системы. Первое уравнение системы (2.48) принимает следующий вид:

$$m_i(\ddot{\mathbf{R}}_i + \ddot{\mathbf{r}}_C) = \mathbf{F}_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{X}_a^c,$$

или с учетом выражения для ускорения центра масс:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{R}}_i &= \mathbf{F}_i - m_i/M \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{X}_a^c = \\ &= \sum_{j=1}^n \mu_{ij} \mathbf{F}_j + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{X}_a^c, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где  $\mu_{ij}$  - безразмерные величины,

$$\mu_{ij} = \delta_{ij} - \frac{m_i}{M}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.51)$$

Матрицу  $\mu$ , составленную из элементов  $\mu_{ij}$ , можно представить в виде

$$\mu = \mathbf{E} - \frac{1}{M} (\mathbf{m} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T). \quad (2.52)$$

В матричной форме последнее дифференциальное уравнение имеет следующий вид:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{R}} = \mu\mathbf{F} + \mathbf{S}\mathbf{X}^c. \quad (2.53)$$

Из этого уравнения выразим силы реакции  $\mathbf{X}^c$ , умножив его слева на  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{X}^c = \mathbf{T}(\mathbf{m}\ddot{\mathbf{R}} - \mu\mathbf{F}).$$

Вторую группу уравнений системы (2.48) также перепишем в матричной форме:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} + \mathbf{C} \times \mathbf{X}^c + \mathbf{S}\mathbf{Y}$$

и подставим в него выражение для сил реакции:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} + \mathbf{C} \times \mathbf{T}(\mathbf{m}\ddot{\mathbf{R}} - \mu\mathbf{F}) + \mathbf{S}\mathbf{Y}. \quad (2.54)$$

Полученное матричное уравнение соответствует системе  $3n$  скалярных дифференциальных уравнений, к которым необходимо добавить 3 скалярных дифференциальных уравнения движения центра масс механической системы (2.49). Найдем выражение для  $R$ . С учетом того, что  $\mathbf{c}_{11} = 0$ , запишем следующее соотношение (рис. 2.15):

$$\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_1 = - \sum_{j=1}^n \mathbf{d}_{ji} = - \sum_{j=1}^n (\mathbf{C}\mathbf{T})_{ji}.$$

В матричной форме эти соотношения имеют следующий вид:

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}_1 \mathbf{1}_n = -(\mathbf{C}\mathbf{T})^T \mathbf{1}_n. \quad (2.55)$$

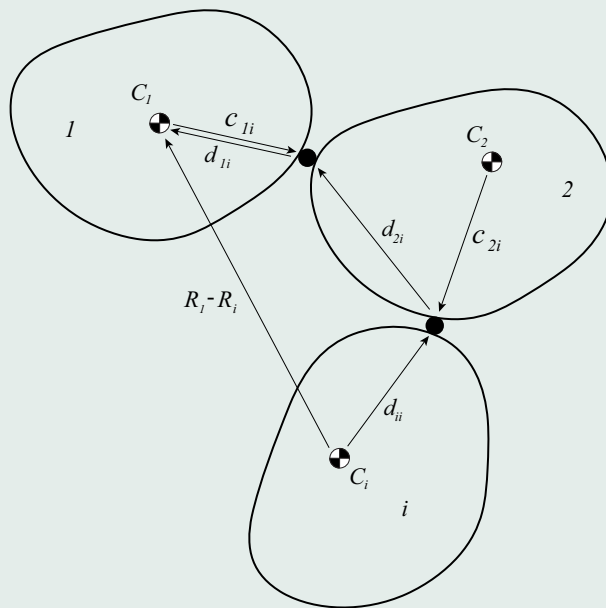


Рис. 2.15. Сумма векторов  $d_{ji}$

Умножим последнее уравнение слева на  $\mu^T$ :

$$\mu^T \mathbf{R} - \mu^T \mathbf{R}_1 \mathbf{1}_n = -\mu^T (\mathbf{C}\mathbf{T})^T \mathbf{1}_n. \quad (2.56)$$

Преобразуем первое слагаемое следующим образом:

$$(\mu^T \mathbf{R})_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ji} \mathbf{R}_j = \sum_{j=1}^n \left( \delta_{ij} - \frac{m_j}{M} \right) \mathbf{R}_j = \mathbf{R}_i - \frac{\sum_{j=1}^n m_j \mathbf{R}_j}{M} = \mathbf{R}_i. \quad (2.57)$$

Рассмотрим произведение  $\mu^T \mathbf{1}_n$  во втором слагаемом. Из (2.52) следует, что результатом этого произведения есть 0, действительно:

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{E} - \frac{1}{M} (\mathbf{m} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T) \right)^T \mathbf{1}_n &= \\ &= \left( \mathbf{E} - \frac{1}{M} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ \vdots & & & \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \end{pmatrix} \right)^T \mathbf{1}_n = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

После преобразований из (2.56) выразим  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R} = -(\mathbf{C}\mathbf{T}\mu)^T \mathbf{1}_n, \quad (2.59)$$

которое подставим в (2.54):

$$\dot{\mathbf{L}} + \mathbf{C} \times \mathbf{Tm}(\ddot{\mathbf{C}}\mathbf{T}\mu)^T \mathbf{1}_n + \mathbf{C}\mathbf{T}\mu \times \mathbf{F} = \mathbf{M} + \mathbf{S}\mathbf{Y}. \quad (2.60)$$

Для дальнейших преобразований необходимо доказать следующее тождество:

$$\mu \mathbf{m} \mu^T \equiv \mathbf{m} \mu^T.$$

Рассмотрим разность  $\mu \mathbf{m} \mu^T - \mathbf{m} \mu^T$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \mu^T - \mu \mathbf{m} \mu^T &= \mathbf{m}(\mathbf{E} - \frac{1}{M} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \mathbf{m}) - (\mathbf{E} - \frac{1}{M} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \mathbf{m}) \mathbf{m} (\mathbf{E} - \frac{1}{M} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \mathbf{m}) = \\ &= \mathbf{m} \mathbf{E} - \mathbf{m} \frac{1}{M} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \mathbf{m} - \mathbf{E} \mathbf{m} + \mathbf{m} \frac{1}{M} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \mathbf{m} + \\ &+ \frac{1}{M} \mathbf{m} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \mathbf{m} - \frac{1}{M} \mathbf{m} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \mathbf{m} \frac{1}{M} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \mathbf{m} = \\ &= \frac{1}{M} \mathbf{m} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \mathbf{m} - \frac{1}{M^2} \mathbf{m} \mathbf{1}_n \underbrace{\mathbf{1}_n^T \mathbf{m} \mathbf{1}_n}_M \mathbf{1}_n^T \mathbf{m} \equiv 0. \quad (2.61) \end{aligned}$$

С учетом доказанного тождества уравнение (2.60) примет вид

$$\dot{\mathbf{L}} + (\mathbf{C} \mathbf{T} \mu) \times \mathbf{m} (\ddot{\mathbf{C}} \mathbf{T} \mu)^T \mathbf{1}_n + \mathbf{C} \mathbf{T} \mu \times \mathbf{F} = \mathbf{M} + \mathbf{S} \mathbf{Y}. \quad (2.62)$$

Рассмотрим элементы матрицы  $(\mathbf{C} \mathbf{T} \mu)_{ij}$ , которые подобны элементам  $\mathbf{d}_{ij}$ :

$$(\mathbf{C} \mathbf{T} \mu)_{kj} = \sum_{k=1}^n \mathbf{d}_{ik} \mu_{ik}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Подставим выражение для  $\mathbf{d}_{ik}$  и  $\mu_{ik}$ :

$$(\mathbf{C} \mathbf{T} \mu)_{ij} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{b}_{i0} - \mathbf{b}_{ik}) \left( \delta_{kj} - \frac{m_k}{M} \right) = -\mathbf{b}_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.63)$$

С учетом последнего выражения радиус-вектор  $\mathbf{R}_i$  (2.59) перепишем следующим образом:

$$\mathbf{R}_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ji}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.64)$$

Далее рассмотрим матрицу  $(\mathbf{CT}\mu) \times \mathbf{m}(\ddot{\mathbf{CT}}\mu)^T$ , элементы которой обозначим как  $\mathbf{g}_{ij}$  (рис. 2.16):

$$\mathbf{g}_{ij} = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{b}_{ik} \times \ddot{\mathbf{b}}_{jk}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.65)$$

Упростим последнее выражение. Для этого разобьем граф механической системы на две части, первая часть содержит вершину  $s_i$  – подграф I, вторая – вершину  $s_j$  – подграф II. Для всех  $k \in I$  справедливо тождество  $\mathbf{b}_{jk} = \mathbf{b}_{ji}$ , а для всех  $k \in II$  справедливо  $\mathbf{b}_{ik} = \mathbf{b}_{ij}$ . Представим  $\mathbf{g}_{ij}$  следующим образом:

$$\mathbf{g}_{ij} = \left( \sum_{k \in I} m_k \mathbf{b}_{ik} \right) \times \ddot{\mathbf{b}}_{ji} + \mathbf{b}_{ij} \times \sum_{k \in II} m_k \ddot{\mathbf{b}}_{jk}, \quad i \neq j.$$

Преобразуем содержимое скобки первого слагаемого:

$$\sum_{k \in I} m_k \mathbf{b}_{ik} = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{b}_{ik} - \sum_{k \in II} m_k \mathbf{b}_{ik},$$

или с учетом тождества  $\sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ij} m_j = 0$  и  $\mathbf{b}_{ik} = \mathbf{b}_{ij}$ :

$$\sum_{k \in I} m_k \mathbf{b}_{ik} = -\mathbf{b}_{ij} \sum_{k \in II} m_k.$$

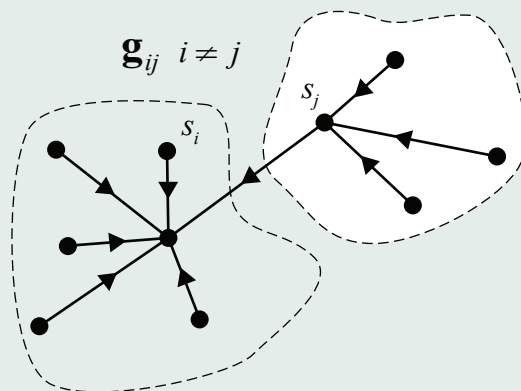


Рис. 2.16. Множества индексов I и II

Аналогично

$$\sum_{k \in II} m_k \ddot{\mathbf{b}}_{jk} = -\ddot{\mathbf{b}}_{ij} \sum_{k \in I} m_k.$$

Полученные результаты позволяют переписать выражение для  $\mathbf{g}_{ij}$  в следующем виде:

$$\mathbf{g}_{ij} = -\left(\sum_{k \in I} m_k + \sum_{k \in II} m_k\right) \mathbf{b}_{ij} \times \ddot{\mathbf{b}}_{ji} = -M \mathbf{b}_{ij} \times \ddot{\mathbf{b}}_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

Раскроем матричное уравнение движения (2.62):

$$\dot{\mathbf{L}}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{g}_{ij} - \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ij} \times \mathbf{F}_j = \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{Y}_a, \quad i = 1, \dots, n,$$

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть



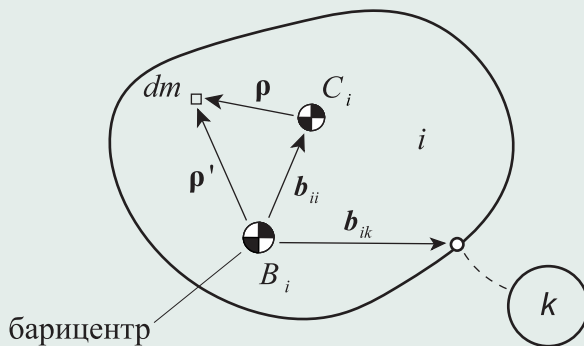


Рис. 2.17. К определению момента импульса относительно барицентра

которое с учетом полученных выражений для  $\mathbf{g}_{ij}$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}_i + \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{b}_{ik} \times \ddot{\mathbf{b}}_{ik} - M \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ij} \times \ddot{\mathbf{b}}_{ji} - \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ij} \times \mathbf{F}_j = \\ = \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{Y}_a, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Рассмотрим следующее выражение (рис. 2.17):

$$\begin{aligned} \int_{m_i} \rho' \times \ddot{\rho}' dm &= \int_{m_i} (\rho + \mathbf{b}_{ii}) \times (\ddot{\rho} + \ddot{\mathbf{b}}_{ii}) dm = \\ &= \int_{m_i} \rho \times \ddot{\rho} dm + m_i \mathbf{b}_{ii} \times \ddot{\mathbf{b}}_{ii} = \dot{\mathbf{L}}_i + m_i \mathbf{b}_{ii} \times \ddot{\mathbf{b}}_{ii}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Последнее выражение отличается от первых двух слагаемых (2.66) на  $\sum_{k=1, k \neq i}^n m_k \mathbf{b}_{ik} \times \ddot{\mathbf{b}}_{ik}$ . Следует отметить, что первые два слагаемых (2.66) представляют собой абсолютную производную по времени от момента количества абсолютного движения дополненного тела  $i$  относительно его барицентра. Сумма  $\sum_{k=1, k \neq i}^n m_k \mathbf{b}_{ik} \times \ddot{\mathbf{b}}_{ik}$  дает вклад точечных масс  $m_k$ . Переписав уравнение движения (2.66) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i^* \cdot \dot{\omega}_i + \omega_i \times \mathbf{K}_i^* \cdot \omega_i - M \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{b}_{ij} \times \ddot{\mathbf{b}}_{ji} - \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ij} \times \mathbf{F}_j = \\ = \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{Y}_a, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.68)$$

где  $\omega_i$  – абсолютная угловая скорость тела  $i$ ;  $\mathbf{K}_i^*$  – тензор инерции дополненного тела  $i$  относительно его барицентра, который определяется следующим образом:

$$\mathbf{K}_i^* = \mathbf{J}_i + \sum_{k=1}^n m_k (\mathbf{b}_{ik}^2 \mathbf{E} - \mathbf{b}_{ik} \mathbf{b}_{ik}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.69)$$

Подставим в (2.69) выражения для векторов  $\ddot{\mathbf{b}}_{ji}$ :

$$\ddot{\mathbf{b}}_{ji} = \dot{\omega}_j \times \mathbf{b}_{ji} + \omega_j \times (\omega_j \times \mathbf{b}_{ji}),$$

[Домашняя](#)
[◀](#)
[▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Назад](#)
[На весь экран](#)
[Закреть](#)

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

получим

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i^* \cdot \dot{\omega}_i - M \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{b}_{ij} \times (\dot{\omega}_j \times \mathbf{b}_{ji}) = \\ = \mathbf{M}'_i + \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{Y}_a, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.70) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_i = -\omega_i \times \mathbf{K}_i^* \cdot \omega_i + M \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{b}_{ij} \times (\omega_j \times (\omega_j \times \mathbf{b}_{ji})) + \\ + \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ij} \times F_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.71) \end{aligned}$$

Двойное векторное произведение в правой части последнего уравнения перепишем в матричной форме:

$$\mathbf{b}_{ij} \times (\dot{\omega}_j \times \mathbf{b}_{ji}) = (\mathbf{b}_{ji} \cdot \mathbf{b}_{ij} \mathbf{E} - \mathbf{b}_{ji} \mathbf{b}_{ij}) \cdot \dot{\omega}_j.$$

Определим матрицу:

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{K}_i^*, & i = j, \\ \mathbf{M}(\mathbf{b}_{ji} \mathbf{b}_{ij} - \mathbf{b}_{ji} \cdot \mathbf{b}_{ij} \mathbf{E}), & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2.72)$$

при помощи которой перепишем уравнение движения в следующей форме:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij} \cdot \dot{\omega}_j = \mathbf{M}'_i + \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{Y}_a, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.73)$$

Получены уравнения движения механических систем твердых тел соединенных сферическими шарнирами. Структура системы не имеет замкнутых циклов. Полученные уравнения движения предназначены для моделирования систем, в которых отсутствуют базовое тело и шарнир движение которого является известной функцией времени. К уравнениям движения (2.73) необходимо добавить три уравнения движения центра масс всей системы (2.49).

### 2.3. Системы с цилиндрическими и универсальными шарнирами

Полученные уравнения для систем со сферическими шарнирами можно использовать для получения уравнений движения систем, содержащих цилиндрические и универсальные шарниры.

Универсальный шарнир (рис. 2.18) состоит из двух цилиндрических шарниров, оси которых пересекаются под прямым углом. Такие типы шарниров широко распространены в технике, в частности в механике роботов.

Сферический шарнир никак не ограничивает относительную угловую скорость двух смежных тел. В цилиндрическом шарнире относительная угловая скорость должна лежать на оси вращения шарнира. В универсальном

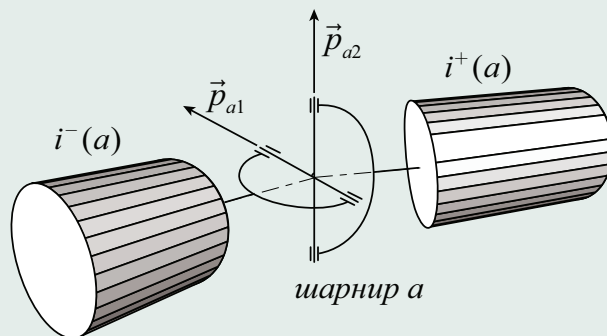


Рис. 2.18. Универсальный шарнир

шарнире эта угловая скорость должна лежать в плоскости, образованной осями цилиндрических шарниров, образующих универсальный шарнир.

Для преобразования сферического шарнира в универсальный к активным моментам необходимо добавить момент реакции, ортогональный плоскости, образованной осями универсального шарнира, то есть добавить одну геометрическую связь. Цилиндрический шарнир требует добавления двух геометрических связей и, следовательно, двух моментов, перпендикулярных оси вращения. Учитывая вышесказанное, для систем с универсальными и цилиндрическими шарнирами уравнение (2.38) нужно записать в виде

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij} \dot{\omega}_j = M'_i + M_i + \sum_{a=1}^n \mathbf{S}_{ia} (\mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_a^c), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.74)$$

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

где  $\mathbf{Y}_a^c$  - дополнительные моменты реакций в цилиндрических и универсальных шарнирах. Уравнение (2.74) имеет следующую матричную форму:

$$\mathbf{K}\dot{\omega} = \mathbf{M}' + \mathbf{M} + \mathbf{S}(\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^c). \quad (2.75)$$

Как было отмечено выше, угловые скорости смежных тел, соединенных цилиндрическими или универсальными шарнирами, уже не будут независимыми, поэтому далее необходимо рассмотреть кинематику движения смежных тел относительно друг друга.

В качестве обобщенных координат будем рассматривать углы поворота тел вокруг осей цилиндрического и универсального шарниров. Для цилиндрического шарнира  $a$  необходим один угол  $\phi_{a1}$ , для универсального шарнира - два угла  $\phi_{a1}$  и  $\phi_{a2}$ , а для сферического шарнира три  $\phi_{a1}$ ,  $\phi_{a2}$ ,  $\phi_{a3}$ . Как и прежде, на каждом теле зафиксирован произвольно ориентированный базис  $\mathbf{e}^{(i)}$ . Обозначим буквой  $\Omega_a$  угловую скорость тела  $i^-(a)$  относительно  $i^+(a)$ . Эту угловую скорость можно выразить через обобщенные скорости следующим образом:

$$\Omega_a = \sum_{i=1}^{n_a} \mathbf{p}_{ai} \dot{\phi}_{ai}, \quad a = 1, \dots, n, \quad (2.76)$$

где  $n_a$  - число степеней свободы в шарнире;  $\mathbf{p}_{ai}$  - единичные векторы, направленные вдоль осей вращения; для цилиндрического шарнира  $n_a = 1$  и существует один вектор  $\mathbf{p}_{ai}$  вокруг которого происходит вращение смежных тел  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$ . Рассмотрим угловое ускорение тела  $i^-(a)$  относительно

$i^+(a)$ , которое обозначим как  $\overset{\circ}{\Omega}_a$ :

$$\overset{\circ}{\Omega}_a = \sum_{i=1}^{n_a} \left( \mathbf{p}_{ai} \ddot{\phi}_{ai} + \sum_{j=1}^{n_a} \frac{\partial \mathbf{p}_{ai}}{\partial \phi_{aj}} \dot{\phi}_{ai} \dot{\phi}_{aj} \right), \quad a = 1, \dots, n. \quad (2.77)$$

Выделив члены со старшими производными, получим

$$\overset{\circ}{\Omega}_a = \sum_{i=1}^{n_a} \mathbf{p}_{ai} \ddot{\phi}_{ai} + \omega_a, \quad a = 1, \dots, n, \quad (2.78)$$

где

$$\omega_a = \sum_{i=1}^{n_a} \sum_{j=1}^{n_a} \frac{\partial \mathbf{p}_{ai}}{\partial \phi_{aj}} \dot{\phi}_{ai} \dot{\phi}_{aj}, \quad a = 1, \dots, n.$$

Для полного описания кинематики относительного движения смежных тел необходимо знать матрицы преобразования координат  $\mathbf{G}_a$  от одного базиса к другому. Эта матрица является известной функцией обобщенных координат:

$$\mathbf{e}^{i^-(a)} = \mathbf{G}_a \mathbf{e}^{i^+(a)}, \quad a = 1, \dots, n. \quad (2.79)$$

Далее рассмотрим кинематику движения тел относительно инерциального пространства. Относительная и абсолютная скорости связаны следующим отношением:

$$\Omega_a = \omega_{i^-(a)} - \omega_{i^+(a)} \quad a = 1, \dots, n. \quad (2.80)$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

Последнее выражение можно переписать с использованием матрицы инцидентности  $\mathbf{S}$ :

$$\Omega_a = - \sum_{i=0}^n S_{ia} \omega_i = -S_{0a} \omega_0 - \sum_{i=1}^n S_{ia} \omega_i \quad a = 1, \dots, n, \quad (2.81)$$

или в матричной форме:

$$\Omega = -\omega_0 \mathbf{S}_0^T - \mathbf{S}^T \omega_0, \quad (2.82)$$

где  $\Omega = [\Omega_1 \dots \Omega_n]^T$  и  $\omega = [\omega_1 \dots \omega_n]^T$  - матрицы-столбцы относительных и абсолютных скоростей. Учитывая тождество (2.5), умножим последнее выражение слева на  $\mathbf{T}^T$ , что позволит выразить матрицу абсолютных угловых скоростей:

$$\omega = -\mathbf{T}^T \Omega + \omega_0 \mathbf{1}_n \quad (2.83)$$

и угловую скорость каждого тела:

$$\omega_i = - \sum_{a=1}^n T_{ai} \Omega_a + \omega_0, \quad a = 1, \dots, n. \quad (2.84)$$

Продифференцировав (2.84), получим абсолютное угловое ускорение:

$$\dot{\omega}_i = - \sum_{a=1}^n T_{ai} (\overset{\circ}{\Omega}_a + \omega_a^*) + \omega_0, \quad a = 1, \dots, n, \quad (2.85)$$

где

$$\omega_a^* = \omega_{i-(a)} \times \Omega_a \quad a = 1, \dots, n. \quad (2.86)$$



Уравнение можно переписать в матричной форме:

$$\dot{\omega} = -\mathbf{T}^T(\overset{\circ}{\Omega} + \omega^*) + \dot{\omega}_0 \mathbf{1}_n. \quad (2.87)$$

Матрица-столбец относительных угловых ускорений определяется следующим образом:

$$\overset{\circ}{\Omega} = \mathbf{p}^T \ddot{\phi} + \omega, \quad (2.88)$$

где  $\ddot{\phi} = [\ddot{\phi}_{11}, \dots, \ddot{\phi}_{1n_1}, \dots, \ddot{\phi}_{n1}, \dots, \ddot{\phi}_{nn_n}]^T$ ;  $\mathbf{p}$  - блочно-диагональная матрица:

$$\mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} p_{11} \dots p_{1n_1} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & p_{21} \dots p_{2n_2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & p_{n1} \dots p_{nn_n} \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

Каждый столбец блочной матрицы  $\mathbf{p}$  соответствует одному шарниру, а количество строк равно суммарному числу степеней свободы во всех шарнирах. Подставив выражение для относительного углового ускорения в (2.3), получим

$$\dot{\omega} = -\mathbf{T}^T(\mathbf{p}^T \ddot{\phi} + \mathbf{f}) + \dot{\omega}_0 \mathbf{1}_n, \quad (2.90)$$

где  $f = \omega + \omega^*$ . Подставим полученные матрицы угловых ускорений и скоростей в (2.75):

$$\mathbf{K} \left( -\mathbf{T}^T(\mathbf{p}^T \ddot{\phi} + \mathbf{f}) + \dot{\omega}_0 \mathbf{1}_n \right) = \mathbf{M}' + \mathbf{M} + \mathbf{S}(\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^c). \quad (2.91)$$

Далее необходимо исключить из (2.91) моменты реакции  $\mathbf{Y}^c$ , для этого умножим уравнение (2.91) слева на  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{Y}_c = \mathbf{T} \left( \mathbf{K} \left( -\mathbf{T}^T (\mathbf{p}^T \ddot{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{f}) + \dot{\omega}_0 \mathbf{1}_n \right) - \mathbf{M}' - \mathbf{M} \right) - \mathbf{Y}. \quad (2.92)$$

Как было отмечено выше, моменты реакции  $\mathbf{Y}_a^c$ , составляющие матрицу  $\mathbf{Y}_c$ , ортогональны соответствующим осям вращения, которые образуют цилиндрический или универсальный шарниры. Умножив выражение (2.92) на матрицу  $\mathbf{p}$ , получим уравнения движения механических систем с цилиндрическими, универсальными и сферическими шарнирами:

$$\mathbf{A} \ddot{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{B}, \quad (2.93)$$

где

$$\mathbf{A} = (\mathbf{pT})\mathbf{K}(\mathbf{pT})^T, \quad (2.94)$$

$$\mathbf{B} = -(\mathbf{pT}) \left( \mathbf{K}(\mathbf{T}^T \mathbf{f} - \dot{\omega}_0 \mathbf{1}_n) + \mathbf{M}' + \mathbf{M} \right) - \mathbf{pY}. \quad (2.95)$$

### 2.3.1. Управляемые переменные

В реальных механических системах часто одна или несколько переменных - углов поворота - управляются, то есть являются известными функциями времени. В робототехнических системах это может обеспечиваться электроприводами. Определим момент привода, обеспечивающий заданный закон изменения управляемой координаты. Для решения этой задачи в первую

очередь необходимо модифицировать уравнение (2.93). Без ограничения общности рассмотрим случай одной управляемой переменной  $\phi_k(t)$ . Уравнение (2.93) будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k} & \dots & A_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & \dots & A_{kk} & \dots & A_{kN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & \dots & A_{Nk} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \dots \\ \ddot{\phi}_k \\ \dots \\ \ddot{\phi}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \dots \\ B_k^* - M_k^m \\ \dots \\ B_N \end{bmatrix}, \quad (2.96)$$

где  $M_k^m$  - управляющий момент двигателя:

$$M_k^m = B_k^* - [A_{k1} \dots A_{kk} \dots A_{kN}] \ddot{\phi}. \quad (2.97)$$

Перепишем матричное уравнение (2.96), сгруппировав известные функции  $\ddot{\phi}_k(t)$ :

$$\mathbf{A}' \ddot{\phi}' = \mathbf{B}' - \eta \ddot{\phi}_k(t), \quad (2.98)$$

где

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1,k-1} & A_{1,k+1} & \dots & A_{1N} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k-1,1} & & & & & \\ A_{k+1,1} & & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & & \dots & \dots & \dots & A_{NN} \end{bmatrix},$$

$$\ddot{\phi}' = \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \dots \\ \ddot{\phi}_{k-1} \\ \ddot{\phi}_{k+1} \\ \dots \\ \ddot{\phi}_N \end{bmatrix}, \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} B_1 \\ \dots \\ B_{k-1} \\ B_{k+1} \\ \dots \\ B_N \end{bmatrix}, \eta = \begin{bmatrix} A_{1k} \\ \dots \\ A_{k-1,k} \\ A_{k+1,k} \\ \dots \\ A_{Nk} \end{bmatrix}.$$

Решив уравнение (2.98) и получив закон изменения неуправляемых переменных при помощи выражения (2.97), получим необходимый управляющий момент привода.

## 2.4. Метод отдельных тел

В 1974 году Верецагиным был предложен метод построения уравнений систем твердых тел с незамкнутой структурой и с шарнирами общего вида, при котором нет необходимости в построении матрицы масс для всей системы [1]. Количество операций и, следовательно, затраты машинного времени

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Заккрыть](#)

предложенного метода линейно зависят от количества тел. Далее метод излагается по работе [3] применительно к системам с незамкнутой структурой.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $n$  последовательно соединенных тел: тело 1 присоединено к телу 0, закон движения которого известен. Запишем уравнения движения последнего тела цепи (рис. ??):

$$\mathbf{M}_n \mathbf{w}_n = \mathbf{Q}_n + \mathbf{R}_n, \quad (2.99)$$

где  $\mathbf{w}_n = \{\mathbf{a}_n, \epsilon_n\}^T$  - столбец линейных и угловых ускорений тела  $n$ ;  $\mathbf{M}_n$  - матрица масс;  $\mathbf{Q}_n$  - обобщенная сила, действующая на тело;  $\mathbf{R}_n$  - сила и момент реакции в шарнире, приведенные к центру масс. Уравнение движения предыдущего тела цепочки имеет вид

$$\mathbf{M}_{n-1} \mathbf{w}_{n-1} = \mathbf{Q}_{n-1} + \mathbf{R}_{n-1} - \mathbf{C}_n^T \mathbf{R}_n \quad (2.100)$$

здесь на тело  $n-1$  кроме обобщенной силы  $\mathbf{Q}_{n-1}$  и реакции  $\mathbf{R}_{n-1}$  действует реакция  $\mathbf{R}_n^*$  со стороны шарнира  $n$ , определяемая следующим образом:

$$\mathbf{R}_n^* = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{\rho}_n & \mathbf{I} \end{bmatrix} (-\mathbf{R}_n) = -\mathbf{C}_n^T \mathbf{R}_n.$$

Между ускорениями тел  $n$  и  $n-1$  существует связь, которая в общем виде выражается так

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{S}_n \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{w}'_n, \quad (2.101)$$

где  $\mathbf{q}$  - столбец обобщенных координат, задающих положение тела  $n$  относительно тела  $n-1$ , размерность столбца  $\mathbf{q}$  определяется числом степеней

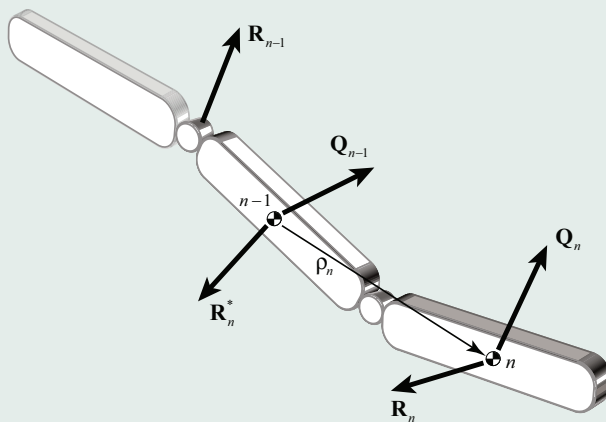


Рис. 2.19. К методу отдельных тел

свободы шарнира между смежными телами. Для идеальных связей выполняется соотношение, следующее из равенства нулю работ на возможном перемещении:

$$\mathbf{S}_n^T \mathbf{R}_n = 0. \quad (2.102)$$

Учитывая (2.102), умножим (2.99) слева на  $\mathbf{S}_n^T$  для исключения реакции:

$$\mathbf{S}_n^T \mathbf{M}_n \mathbf{w}_n = \mathbf{S}_n^T \mathbf{Q}_n^T.$$

В последнее выражение подставим  $\mathbf{w}_n$  из (2.101):

$$\mathbf{S}_n^T \mathbf{M}_n (\mathbf{C}_n \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{S}_n \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{w}'_n) = \mathbf{S}_n^T \mathbf{Q}_n^T.$$

Получим связь между ускорением тела и второй производной от обобщенных координат в шарнире:

$$\ddot{\mathbf{q}}_n = \mathbf{U}_n^{-1} \mathbf{S}_n^T (\mathbf{Q}_n - \mathbf{M}_n (\mathbf{C}_n \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{w}'_n)), \quad (2.103)$$

где

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{S}_n^T \mathbf{M}_n \mathbf{S}_n.$$

Далее подставим  $\ddot{\mathbf{q}}_n$  из (2.103) в кинематические соотношения (2.101), подставим  $\mathbf{w}_n$  в (2.99), выразив, таким образом, реакции  $\mathbf{R}_n$ . Теперь уравнение (2.100) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{M}_{n-1}^* \mathbf{w}_{n-1} = \mathbf{Q}_{n-1}^* + \mathbf{R}_{n-1},$$

которое справедливо для любого  $n = k$ :

$$\mathbf{M}_{k-1}^* \mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}^* + \mathbf{R}_{k-1}, \quad (2.104)$$

где

$$\mathbf{M}_{k-1}^* = \mathbf{M}_{k-1} + \mathbf{C}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{S}_k \mathbf{U}_k^{-1} \mathbf{S}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{C}_k, \quad (2.105)$$

$$\mathbf{Q}_{k-1}^* = \mathbf{Q}_{k-1} + \mathbf{C}_k^T (\mathbf{M}_k (\mathbf{S}_k \mathbf{U}_k^{-1} \mathbf{S}_k^T (\mathbf{Q}_k - \mathbf{M}_k \mathbf{w}'_k) + \mathbf{w}'_k) - \mathbf{Q}_k). \quad (2.106)$$

Уравнение (2.104) можно записать для  $k = n-1, n-2, \dots, 1$ , при этом в выражения для  $\mathbf{M}_{k-1}^*$  и  $\mathbf{Q}_{k-1}^*$  будут входить значения этих матриц на предыдущем шаге построенной рекурсии  $\mathbf{M}_k^*$  и  $\mathbf{Q}_k^*$ . Выполнением этой последовательности операций от тела  $n-1$  до тела 0, ускорение которого известно, реализуется *обратный ход алгоритма*. Далее, зная ускорение тела



Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

0, возможно определить ускорение тела 1 при помощи выражений (2.103) и (2.101), так реализуется *прямой ход алгоритма*. В выражения (2.103) и (2.101) будут входить вычисленные при обратном ходе алгоритма матрицы  $M_k^*$  и  $Q_k^*$ .





## Заключение

Представленные примеры моделирования динамики механических системы ракетно-космической техники основываются на допущении об абсолютной твердости тел системы, поэтому для записи уравнений движения использовался аппарат динамики твердого тела и системы тел.

В некоторых случаях следует учитывать и упругие свойства конструкции. Так например при анализе движения створок солнечных батарей, если необходимо произвести адекватную оценку сил реакций, возникающих в узле крепления батареи к КА, необходимо рассматривать створку как деформируемую систему. Тоже относится и к отделению створок головного обтекателя: при больших габаритах створок следует учитывать влияние упругих свойств конструкции на динамику процесса отделения, что определяет движение створки относительно РН. Как показывают результаты экспериментальной отработки процесса отделения в земных условиях, конструкция створок обтекателя претерпевает существенные деформации, что влияет на зону безопасности полезного груза.

Учет упругих свойств конструкции является сложной задачей, которая выходит далеко за рамки данной работы.

Домашняя



Назад

На весь экран

Заккрыть

## Список литературы

1. *Верещагин, А. Ф.* Компьютерное моделирование динамики сложных механизмов роботов-манипуляторов / А. Ф. Верещагин // Инженерная кибернетика, вып. 6. — 1974. — С. 65–70.
2. *Виттенбург, Й.* Динамика систем твердых тел / Й. Виттенбург. — М.: Мир, 1980.
3. *Дмитроченко, О. Н.* Эффективные методы численного моделирования динамики нелинейных систем абсолютно твердых и деформируемых тел: Дис... канд. физ. мат. наук: 01.02.01. — М., 2003. — 125 с.
4. *Колесников, К. С.* Динамика разделения ступеней летательных аппаратов / К. С. Колесников, В. И. Козлов, В. В. Кокушкин. — Машиностроение, 1977.
5. *Новиков, Ф. А.* Дискретная математика для программистов / Ф. А. Новиков. — Питер, 2001.