Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Л. С. Понтрягин, Теория оптимальных процессов. I. Принцип максимума, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1960, том 24, выпуск 1, 3–42

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 92.113.137.52
26 ноября 2016 г., 00:44:03

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 3—42

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ, Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ, Л. С. ПОНТРЯГИН

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. I
ПРИНЦИП МАКСИМУМА

В работе дается подробное изложение результатов, ранее кратко изложенных авторами в ряде заметок [см. (1)—(5) и (9)].

Многие технические задачи связаны с рассмотрением так называемых *оптимальных процессов*, характеризуемых тем, что процесс управления некоторым техническим объектом должен быть в каком-то определенном смысле наилучшим («оптимальным»), например время или работа, затраченные для достижения определенного состояния, должны быть наименьшими. Мы даем в настоящей работе весьма общие необходимые условия оптимальности, кратко опубликованные ранее в заметках (1), (2), (3). Эти условия изложены здесь в форме принципа максимума [см. (1)] и применимы к рассматриваемому ниже общему случаю системы вида (1). Вопрос о связи принципа максимума с классическими результатами вариационного исчисления обсуждается ниже (п. 8).

В частном случае линейных систем и оптимальности, понимаемой в смысле «быстродействия», имеются некоторые дальнейшие результаты (4), (5): существование оптимальных управлений, синтез оптимальных управлений и др. Эти вопросы подробно рассмотрены во второй половине статьи (6).

1. Допустимые управления. Мы будем рассматривать поведение объекта, состояние которого в каждый момент времени характеризуется n переменными $x^1, x^2, \ldots, x^n$ (например, координатами и скоростями). Векторное пространство X векторной переменной $x=\{x^1,x^2,\ldots,x^n\}$ является фазовым пространством рассматриваемого объекта. Поведение (движение) объекта заключается (с математической точки зрения) в том, что переменные $x^1, x^2,\ldots, x^n$ меняются с течением времени. Предполагается, что движением объекта можно *управлять*, т. е. что объект снабжен некоторыми «рулями», от положения которых зависит движение объекта. Положения «рулей» характеризуются точкой u некоторой *области управления* U, которая может быть любым топологическим хаусдорфовым пространством. В приложениях важен случай, когда U является замкнутой областью некоторого r-мерного эвклидова пространства E; в этом случае задание точки $u=(u^1, u^2, \ldots, u^r)\in U$ равносильно заданию системы числовых параметров $u^1, u^2, \ldots, u^r$.

Каждую функцию $u=u(t)$, определенную на некотором отрезке $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ времени t и принимающую значения в пространстве U, мы будем называть *управлением*. В дальнейшем предполагается, что выбран

некоторый класс D управлений; управления принадлежащие этому классу, будут называться *допустимыми*. От класса D допустимых управлений требуется только, чтобы он удовлетворял следующим трем условиям:

1) все управления $u = u(t)$, принадлежащие классу D (т. е. допустимые), должны быть *измеримыми* и *ограниченными*. Управление $u = u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, называется *измеримым*, если для любого открытого множества $O \subset U$ множество тех значений t, для которых $u(t) \in O$, измеримо на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Управление *ограниченно*, если множество всех точек $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, имеет в пространстве U компактное замыкание. (Если, в частности, U есть замкнутое подмножество векторного пространства переменной $u = (u^1, u^2, \ldots, u^r)$, то измеримость и ограниченность имеют обычный смысл.)

2) Если $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — допустимое управление и если v — произвольная точка пространства U, а t', t'' — такие числа, что $t_0 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant t_1$, то управление $u_1(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, определяемое формулой

$$u_1(t) = \begin{cases} v & \text{при } t' \leqslant t \leqslant t'', \\ u(t) & \text{при } t < t' \text{ или } t > t'', \end{cases}$$

также является допустимым.

3) Если отрезок $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ можно разбить точками деления на конечное число частичных отрезков, на каждом из которых управление $u(t)$ допустимо, то это управление допустимо и на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Допустимое управление, рассматриваемое на частичном отрезке, также является допустимым. Управление, получающееся из допустимого управления $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, сдвигом времени (т. е. управление $u_1(t) = u(t - \alpha)$, $t_0 + \alpha \leqslant t \leqslant t_1 + \alpha$), также является допустимым.

В качестве класса допустимых управлений можно взять, например, класс всех измеримых ограниченных управлений. Другим примером может служить множество всех кусочно-непрерывных управлений (т. е. таких управлений $u = u(t)$, каждое из которых непрерывно для всех рассматриваемых t, за исключением лишь конечного числа моментов времени, где функция $u(t)$ может терпеть разрывы первого рода). Этот класс допустимых управлений, по-видимому, наиболее интересен для технических применений развиваемой здесь теории; такие управления соответствуют предположению о «безынерционности» рулей. Можно также рассматривать класс всех кусочно-постоянных управлений, класс кусочно-линейных управлений и т. п. В дальнейшем класс D допустимых управлений предполагается раз навсегда фиксированным.

2. Постановка задачи. Мы будем предполагать, что закон движения объекта (и закон воздействия «рулей» на это движение) записывается в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n; u) = f^i(x, u), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

или, в векторной форме,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \tag{2}$$

где $f(x, u)$ — вектор с координатами $f^1(x, u), f^2(x, u), \ldots, f^n(x, u)$. Функции f^i определены для любых значений векторной переменной $x \in X$ и

для значений u, принадлежащих области управления U. Они предполагаются непрерывными по совокупности переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n, u$ и непрерывно дифференцируемыми по $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Иначе говоря, функции

$$f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n; u) \text{ и } \frac{\partial f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n; u)}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

определены и непрерывны на прямом произведении $X \times U$.

Заметим, что система (1) *автономна*, т. е. правые ее части не зависят от времени t. Случай, когда правые части зависят от t, мы рассмотрим в конце работы (п. 19).

Если задан закон управления, т. е. выбрано некоторое допустимое управление $u = u(t)$, то уравнение (2) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(t)), \tag{3}$$

откуда (при любых начальных условиях $x(t_0) = x_0$) однозначно определяется закон движения объекта $x = x(t)$, т. е. решение уравнения (3), определенное на некотором отрезке времени. Это решение является абсолютно непрерывной вектор-функцией, почти всюду (на отрезке своего определения) удовлетворяющей соотношению (3) [см. ([7])].

Мы будем говорить, что допустимое управление $u(t)$ *переводит* точку x_0 в точку x_1, если решение $x(t)$ уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, проходит в некоторый момент t_1 через точку x_1, т. е. удовлетворяет также конечному условию $x(t_1) = x_1$.

Предположим теперь, что задана функция $f^0(x^1, x^2, \ldots, x^n; u) = f^0(x, u)$, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными $\frac{\partial f^0}{\partial x^i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, на всем пространстве $X \times U$. Тогда основная задача (отыскание оптимальных управлений) может быть сформулирована следующим образом:

В фазовом пространстве X даны две точки x_0 и x_1. Среди всех допустимых управлений $u = u(t)$, переводящих точку x_0 в точку x_1 (если такие управления существуют), найти такое, для которого функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\, dt \tag{4}$$

принимает наименьшее возможное значение; здесь $x(t)$ — решение уравнения (3) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, а t_1 — момент прохождения этого решения через точку x_1.

Отметим, что (при фиксированных t_0, x_0, x_1) верхний предел t_1 в интеграле (4) не является фиксированным числом, а зависит от выбора управления $u(t)$, переводящего точку x_0 в точку x_1 (этот верхний предел определяется из соотношения $x(t_1) = x_1$). О решении задачи для случая закрепленного верхнего предела мы будем говорить в конце работы (п. 20).

Управление $u(t)$, дающее решение поставленной выше задачи, называется *оптимальным управлением*, соответствующим переходу из точки x_0 в точку x_1, а соответствующая траектория $x(t)$ — *оптимальной траекторией*. Таким образом, основная задача заключается в отыскании

оптимальных управлений (и соответствующих оптимальных траекторий).

Важным частным случаем поставленной выше оптимальной задачи является случай, когда $f^0(x, u) \equiv 1$. В этом случае функционал (4) принимает вид:

$$J = t_1 - t_0, \tag{5}$$

и оптимальность управления $u(t)$ означает *минимальность времени перехода из точки x_0 в точку x_1*. Задачу отыскания оптимальных управлений (и траекторий) в этом случае мы будем называть *задачей об оптимальном быстродействии*.

3. Эквивалентная формулировка задачи. Для формулировки и доказательства необходимого условия оптимальности нам будет удобно переформулировать поставленную выше задачу следующим образом. Добавим к фазовым координатам $x^1, x^2, \ldots, x^n$, меняющимся по закону (1), еще одну координату x^0, закон изменения которой имеет вид:

$$\frac{dx^0}{dt} = f^0(x^1, x^2, \ldots, x^n; u),$$

где f^0 — функция, участвующая в определении функционала J [см. (4)]. Иначе говоря, мы будем рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n; u) = f^i(x, u), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

правые части которой не зависят от переменного x^0. Введя в рассмотрение вектор

$$\mathbf{x} = \{x^0, x^1, \ldots, x^n\} = \{x^0, x\}$$

$(n+1)$-мерного векторного пространства $\mathbf{X}$, мы сможем систему (6) переписать в векторной форме:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \tag{7}$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ — вектор пространства $\mathbf{X}$, имеющий координаты $f^0(x, u)$, $\ldots, f^n(x, u)$. Заметим, что вектор $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ не зависит от координаты x^0 вектора $\mathbf{x}$.

Пусть теперь $u(t)$ — некоторое допустимое управление, переводящее x_0 в x_1, а $x = x(t)$ — решение уравнения (3) с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Обозначим через $\mathbf{x}_0$ точку $(0, x_0)$, т. е. точку пространства $\mathbf{X}$, имеющую координаты $0, x_0^1, \ldots, x_0^n$, где $x_0^1, \ldots, x_0^n$ — координаты точки x_0 в пространстве X. Тогда ясно, что решение уравнения (7) с начальным условием $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ имеет вид:

$$x^0 = \int_{t_0}^{t} f^0(x(t), u(t))\, dt,$$

$$x = x(t).$$

В частности, при $t = t_1$ мы получим

$$x^0 = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\, dt = J, \quad x = x_1.$$

т. е. решение $\mathbf{x}(t)$ уравнения (7) с начальным условием $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ проходит при $t = t_1$ через точку $\mathbf{x}_1 = (J, x_1)$. Иначе говоря, обозначив через Π прямую линию, проходящую в пространстве $\mathbf{X}$ через точку $\mathbf{x} = (0, x_1)$ параллельно оси x_0 (эта прямая образована всеми точками (ξ, x_1), где число ξ произвольно), мы можем сказать, что решение $\mathbf{x}(t)$ проходит в момент $t = t_1$ через точку, лежащую на прямой Π и имеющую координату $x^0 = J$. Обратно, если $u(t)$ — такое допустимое управление, что решение уравнения (7) с начальным условием $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = (0, x_0)$ проходит в некоторый момент t_1 через точку $\mathbf{x}_1 \in \Pi$ с координатой $x^0 = J$, то управление $u(t)$ переводит (в пространстве X) точку x_0 в точку x_1, причем функционал (4) принимает значение J.

Таким образом, мы можем сформулировать поставленную выше оптимальную задачу в следующем эквивалентном виде:

В $(n+1)$-мерном фазовом пространстве $\mathbf{X}$ даны точка $\mathbf{x}_0 = (0, x_0)$ и прямая Π, параллельная оси x^0 и проходящая через точку $(0, x_1)$. Среди всех допустимых управлений $u = u(t)$, обладающих тем свойством, что решение $\mathbf{x}(t)$ уравнения (7) с начальным условием $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ пересекает прямую Π, найти такое, для которого точка пересечения с прямой Π имеет наименьшую координату x^0.

Эту задачу мы и будем решать Термины «оптимальное управление» и «оптимальная траектория» мы сохраним и для задачи в этой новой формулировке.

4. Перенос вектора вдоль траектории. Мы переходим к решению поставленной оптимальной задачи. В этом и следующем пунктах вводится система уравнений (13), связанная с системой (6), и выясняется ее геометрический смысл. При желании читатель может временно пропустить эти два пункта, рассматривая (13) как вспомогательную систему, формально присоединяемую к системе (6), и перейти к п. 6, в котором формулируется необходимое условие оптимальности.

В приводимых ниже доказательствах часто будет встречаться положительный параметр ε, который мы будем считать величиной первого порядка малости. Величины, имеющие более высокий порядок малости (по ε), мы будем отбрасывать и заменять многоточием.

Условимся далее, что если в некотором одночлене (как, например, в правой части написанного ниже уравнения (9)) дважды встречается один и тот же индекс, один раз в качестве верхнего, а другой раз в качестве нижнего, то по этому индексу предполагается произведенным *суммирование*, распространенное на все допустимые значения этого индекса. Например, в уравнении (9) подразумевается суммирование от $\nu = 1$ до $\nu = n$. Во избежение недоразумений мы условимся обозначать индекс суммирования через α или β, когда суммирование производится в пределах от 0 до n, и через μ или ν, когда суммирование производится от 1 до n.

Пусть $u(t)$ — произвольное допустимое управление, заданное на некотором отрезке с левым концом в точке $t = t_0$, а

$$\mathbf{x}(t) = (x^0(t), x^1(t), \ldots, x^n(t)) = (x^0(t), x(t))$$

— соответствующее этому управлению решение уравнения (7) с началь-

ным условием $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Обозначим через $\mathbf{y}(t)$ решение, соответствующее тому же управлению $u(t)$ и исходящее (в тот же момент t_0) из близкой к $\mathbf{x}_0$ точки

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 + \varepsilon\xi_0 + \ldots,$$

где ξ_0 — постоянный (т. е. не зависящий от ε) вектор пространства $\mathbf{X}$. Как известно, решение $\mathbf{y}(t)$ имеет вид:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \varepsilon\delta\mathbf{x}(t) + \ldots, \tag{8}$$

где $\delta\mathbf{x}(t) = \{\delta x^0(t), \delta x^1(t), \ldots, \delta x^n(t)\}$ — не зависящий от ε вектор, определяемый следующими *уравнениями в вариациях*:

$$\frac{d(\delta x^i)}{dt} = \frac{\partial f^i(x(t), u(t))}{\partial x^\nu}\,\delta x^\nu, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{9}$$

при начальном условии

$$\delta\mathbf{x}(t_0) = \xi_0.$$

Уравнения (9) позволяют каждому вектору $\xi_0 = \delta\mathbf{x}(t_0)$ поставить в соответствие семейство векторов $\{\xi_t = \delta\mathbf{x}(t)\}$ (для t, бóльших чем t_0). Мы условимся считать $\xi_t = \delta\mathbf{x}(t)$ связанным вектором, исходящим из точки $\mathbf{x}(t)$. Таким образом, каждый вектор ξ_0, заданный в точке $\mathbf{x}_0$, определяет векторное поле $\{\xi_t\}$, заданное вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$. Будем говорить, что векторы этого поля получаются из начального вектора ξ_0 *переносом* вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$.

Обозначим через $\mathbf{X}_t$ векторное пространство, получающееся из $\mathbf{X}$ переносом начала в точку $\mathbf{x}(t)$, т. е. пространство связанных векторов, исходящих из точки $\mathbf{x}(t)$. Вектор $\xi_t = \delta\mathbf{x}(t)$ является элементом этого пространства $\mathbf{X}_t$. Обозначим, далее, через $A_{t_0,t}$ преобразование пространства $\mathbf{X}_{t_0}$ в пространство $\mathbf{X}_t$, переводящее каждый вектор ξ_0 пространства $\mathbf{X}_{t_0}$ в вектор ξ_t, получающийся из ξ_0 переносом вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$. Так как система (9) линейна и однородна, то преобразование $A_{t_0,t}$ линейно и невырожденно. Кроме того, оно, очевидно, однородно, т. е. переводит начало координат пространства $\mathbf{X}_{t_0}$ в начало координат пространства $\mathbf{X}_t$.

Рассмотрев вместо t_0 и t любые другие моменты времени t', t'' (взятые на отрезке, на котором определены и управление $u(t)$ и решение $\mathbf{x}(t)$), мы аналогично определим линейное невырожденное однородное преобразование $A_{t',t''}$ пространства $\mathbf{X}_{t'}$ на пространство $\mathbf{X}_{t''}$. Очевидно, что эти линейные преобразования обладают следующими свойствами (E — тождественное преобразование):

$$A_{t',t'} = E, \quad A_{t'',t'''} \cdot A_{t',t''} = A_{t',t'''}. \tag{10}$$

По определению преобразований $A_{t',t''}$, векторы $A_{t_0,t}(\xi_0)$ образуют семейство векторов, получающихся из ξ_0 переносом вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$, и потому удовлетворяют уравнению (9):

$$\frac{d}{dt}[A_{t_0,t}(\xi_0)]^i = \frac{\partial f^i(x(t), u(t))}{\partial x^\nu} \cdot [A_{t_0,t}(\xi_0)]^\nu, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Решение (8) переписывается, очевидно, следующим образом:

$$\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t) = \varepsilon A_{t_0,t}(\xi_0) + \ldots = A_{t_0,t}[\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)] + \ldots. \tag{11}$$

5. Сопряженная система уравнений. Пусть L_0 — некоторая гиперплоскость пространства $\mathbf{X}$, проходящая через точку $\mathbf{x}_0$ (т. е. n-мерное подпространство пространства $\mathbf{X}_{t_0}$). Линейное преобразование $A_{t_0,t}$ переводит гиперплоскость L_0 в некоторую гиперплоскость L_t (проходящую через точку $\mathbf{x}(t)$). Таким образом, мы получаем семейство гиперплоскостей $\{L_t\}$, получающихся, как мы будем говорить, *переносом* гиперплоскости L_0 вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$. Найдем дифференциальное уравнение таких семейств гиперплоскостей.

Мы можем записать уравнение гиперплоскости L_t в виде

$$\psi_\alpha(t)\, x^\alpha = 0, \tag{12}$$

где x^α, $\alpha = 0, 1, \ldots, n$, — текущие координаты, взятые в пространстве $\mathbf{X}_t$, а $\psi_\alpha(t)$ — коэффициенты уравнения этой гиперплоскости (свободный член отсутствует, так как гиперплоскость L_t проходит через начало координат пространства $\mathbf{X}_t$). Мы хотим узнать, каковы должны быть функции $\psi_\alpha(t)$, чтобы уравнение (12) определяло при различных значениях параметра t семейство гиперплоскостей, перенесенных вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$. Оказывается, что такие функции $\psi_\alpha(t)$ можно находить из системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = -\frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t))}{\partial x^i} \cdot \psi_\alpha(t), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{13}$$

В самом деле, рассмотрим скалярное произведение

$$(\psi(t), A_{t_0,t}(\xi_0)) = \psi_\alpha(t) \cdot [A_{t_0,t}(\xi_0)]^\alpha$$

векторов $\psi(t) = \{\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\}$ и $A_{t_0,t}(\xi_0)$, где $\psi_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, — некоторое (абсолютно непрерывное) решение системы (13). Мы имеем (почти всюду на рассматриваемом отрезке):

$$\frac{d}{dt}\{\psi_\alpha(t) \cdot [A_{t_0,t}(\xi_0)]^\alpha\} = \frac{d\psi_\alpha(t)}{dt} \cdot [A_{t_0,t}(\xi_0)]^\alpha +$$

$$+ \psi_\alpha(t) \cdot \frac{d}{dt}[A_{t_0,t}(\xi_0)]^\alpha = -\frac{\partial f^\beta(x(t), u(t))}{\partial x^\alpha}\psi_\beta(t) \cdot [A_{t_0,t}(\xi_0)]^\alpha +$$

$$+ \psi_\alpha(t) \cdot \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t))}{\partial x^\nu} \cdot [A_{t_0,t}(\xi_0)]^\nu = 0$$

(заметим, что $\frac{\partial f^\beta}{\partial x^0} = 0$, так как функции f^β не зависят от x^0); следовательно, в силу абсолютной непрерывности рассматриваемого скалярного произведения, оно постоянно. Таким образом, справедлива следующая

ЛЕММА 1. *Если $\psi(t) = \{\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t)\}$ — решение системы уравнений* (13), *рассматриваемое на некотором отрезке времени I, а ξ_0 — произвольный вектор, заданный в точке $\mathbf{x}(t_0)$, где t_0 — начальная точка отрезка I, то на всем отрезке I выполнено соотношение*:

$$(\psi(t), A_{t_0,t}(\xi_0)) = \text{const}.$$

Если функции $\psi_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, удовлетворяют системе (13) и если вектор ξ_0 лежит в гиперплоскости $\psi_\alpha(t_0)\, x^\alpha = 0$ (т. е. скалярное произведение $(\psi(t_0), \xi_0)$ обращается в нуль), то и при любом t скалярное произведение $(\psi(t), A_{t_0,t}(\xi_0))$ обращается в нуль, т. е. каждый вектор $\xi_t = A_{t_0,t}(\xi_0)$, получающийся из ξ_0 переносом вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$, лежит в соответствующей гиперплоскости (12). Так как это справедливо

для *любого* вектора ξ_0, лежащего в гиперплоскости $\psi_\alpha(t_0)x^\alpha = 0$, то мы и получаем, что *если функции* $\psi_i(t)$, $i=0,1,\ldots,n$, *удовлетворяют системе* (13), *то гиперплоскости* (12) *получаются друг из друга переносом вдоль траектории* $\mathbf{x}(t)$.

6. Принцип максимума. Запишем теперь системы уравнений (6) и (13):

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= f^i(x, u), \\ \frac{d\psi_i}{dt} &= -\frac{\partial f^\alpha(x, u)}{\partial x^i}\psi_\alpha \end{aligned} \qquad (i = 0,1,\ldots,n),$$

в более удобном виде. Для этого рассмотрим следующую функцию $\mathbf{H}$ переменных $x^1,\ldots,x^n$; $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$; u:

$$\mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u) = (\psi, \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)) = \psi_\alpha f^\alpha(x, u).$$

Непосредственно проверяется, что написанные выше уравнения могут быть с помощью этой функции $\mathbf{H}$ записаны в виде следующей гамильтоновой системы:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi_i}, \qquad i = 0,1,\ldots,n, \tag{14}$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^i}, \qquad i = 0,1,\ldots,n. \tag{15}$$

При фиксированных значениях ψ и $\mathbf{x}$ функция $\mathbf{H}$ становится функцией параметра u; верхнюю грань значений этой функции обозначим через $\mathbf{M}(\psi, \mathbf{x})$:

$$\mathbf{M}(\psi, \mathbf{x}) = \sup_{u \in U} \mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u).$$

Если верхняя грань значений непрерывной функции $\mathbf{H}$ достигается на U, то $\mathbf{M}(\psi, \mathbf{x})$ есть максимум значений функции $\mathbf{H}$ при фиксированных ψ и $\mathbf{x}$. Поэтому нижеследующую теорему 1 (необходимое условие оптимальности), главным содержанием которой является равенство (16), мы называем принципом максимума.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $u(t)$ — *такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория* $\mathbf{x}(t)$ *системы* (6), *исходящая в момент* t_0 *из точки* $\mathbf{x}_0$, *проходит в момент* $t_1 > t_0$ *через некоторую точку прямой* П. *Для оптимальности управления* $u(t)$ *и соответствующей ему траектории* $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *необходимо существование такого ненулевого абсолютно непрерывного вектора* $\psi(t) = \{\psi_0(t)\ \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\}$, *что*:

1) *величины* $\mathbf{x}(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$ *удовлетворяют гамильтоновой системе* (14), (15);

2) *почти для всех* t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *функция* $\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u)$ *переменного* $u \in U$ *достигает в точке* $u = u(t)$ *максимума* (*знак* (=) *обозначает равенство, справедливое почти всюду*):

$$\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) \ (=)\ \mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t)); \tag{16}$$

3) *в начальный момент* t_0 *выполнены соотношения*

$$\psi_0(t_0) \leqslant 0, \quad \mathbf{M}(\psi(t_0), \mathbf{x}(t_0)) = 0. \tag{17}$$

Если величины $\psi(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $u(t)$ *удовлетворяют условиям* 1) *и* 2), *то функции* $\psi_0(t)$ *и* $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ *переменного* t *являются постоянными, так что проверку соотношений* (17) *можно проводить не обязательно в момент* t_0, *а в любой момент* t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

В следующих двух пунктах мы дадим обсуждение этой теоремы, а затем, в пунктах 9 — 17, проведем ее доказательство.

Выведем из теоремы 1 аналогичное необходимое условие для оптимальности по быстродействию. Для этого в теореме 1 следует положить $f^0(x, u) = 1$. Функция $\mathbf{H}$ принимает в этом случае вид

$$\mathbf{H} = \psi_0 + \psi_\nu f^\nu(x, u)$$

(суммирование по ν от 1 до n). Вводя n-мерный вектор $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ и функцию

$$H(\psi, x, u) = \psi_\nu f^\nu(x, u),$$

мы сможем записать уравнения (1) и (13) (кроме уравнения (13) для $i = 0$ которое теперь не нужно) в виде гамильтоновой системы

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{18}$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{19}$$

При фиксированных значениях ψ и x функция H становится функцией параметра u; верхнюю грань значений этой функции мы обозначим через $M(\psi, x)$:

$$M(\psi, x) = \sup_{u \in U} H(\psi, x, u).$$

В силу соотношения

$$H(\psi, x, u) = \mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u) - \psi_0,$$

мы получаем:

$$M(\psi, x) = \mathbf{M}(\psi, \mathbf{x}) - \psi_0,$$

и поэтому условие (16) принимает вид:

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) \ (=) \ M(\psi(t), x(t)) = -\psi_0 \geqslant 0.$$

Таким образом, мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $u(t)$ — *допустимое управление, переводящее точку* x_0 *в точку* x_1, *а* $x(t)$ — *соответствующая траектория, так что* $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. *Для оптимальности по быстродействию управления* $u(t)$ *и траектории* $x(t)$ *необходимо существование такого ненулевого абсолютно непрерывного вектора* $\psi(t) = \{\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)\}$, *что*:

1) *величины* $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ *удовлетворяют гамильтоновой системе* (18), (19);

2) *почти для всех* t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *функция* $H(\psi(t), x(t), u)$ *переменного* $u \in U$ *достигает в точке* $u = u(t)$ *максимума*:

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) \ (=) \ M(\psi(t), x(t)); \tag{20}$$

3) *в начальный момент* t_0 *выполнено соотношение*

$$M(\psi(t_0), x(t_0)) \geqslant 0. \tag{21}$$

Если величины $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ *удовлетворяют условиям* 1) *и* 2), *то функция* $M(\psi(t), x(t))$ *переменного* t *постоянна, так что проверку соотношения* (21) *можно проводить не обязательно в момент* t_0, *а в любой момент* t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

7. Обсуждение принципа максимума. Теорема 1 позволяет из всех траекторий, начинающихся в точке $\mathbf{x}_0$ и кончающихся в некоторой точке прямой П, и соответствующих им управлений выделить лишь отдельные, вообще говоря, изолированные траектории и управления, удовлетворяющие всем сформулированным условиям. Действительно, мы имеем $2n+3$ соотношений (14), (15), (16) между $2n+3$ переменными * x^α, ψ_α, u, т. е. имеем «полную систему соотношений» для определения всех этих переменных. Так как, далее, соотношение (16) конечно (не дифференциально), а число дифференциальных уравнений равно $2n+2$ (соотношения (14) и (15)), то решения системы уравнений (14), (15), (16) зависят, вообще говоря, от $2n+2$ параметров (начальных условий). Однако один из этих параметров является несущественным, так как функции $\psi_\alpha(t)$ определены лишь с точностью до общего множителя (ибо функция H однородна относительно ψ_α). Кроме того, один из параметров связан условием, что в начальный момент величина $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ обращается в нуль.

Итак, имеется $2n$ параметров, от которых зависит все многообразие решений системы (14), (15), (16). Этими $2n$ параметрами следует распорядиться так, чтобы траектория $\mathbf{x}(t)$ проходила при заданном $t = t_0$ через точку $\mathbf{x}_0$, а при каком-нибудь $t_1 > t_0$ — через точку на прямой П. Число $t_1 - t_0$ также является параметром, так что всего у нас имеется $2n+1$ существенных параметров. Условие прохождения через точку $\mathbf{x}_0$ и прямую П дает $2n+1$ соотношений. Следовательно, можно ожидать, что имеются лишь отдельные, изолированные траектории, соединяющие точку $\mathbf{x}_0$ с прямой П и удовлетворяющие условиям, указанным в теореме 1. Лишь эти отдельные, изолированные траектории и могут оказаться оптимальными (ибо указанные в теореме 1 условия необходимы для оптимальности).

Если, в частности, условиям теоремы 1 удовлетворяет лишь *одна* траектория, соединяющая точку $\mathbf{x}_0$ с точкой прямой П, а из технических соображений, приведших к постановке оптимальной задачи, ясно, что оптимальная траектория должна существовать, то можно надеяться, что найденная траектория как раз и является оптимальной. Следует, однако, отметить, что математически вопрос о существовании оптимальной траектории представляется очень важным и трудным. В частном случае оптимальности по быстродействию для линейных систем (1) он решается в статье ([6]).

8. Сравнение с классическими результатами. В этом пункте мы покажем прежде всего, что в случае, если U есть *открытое* множество векторного пространства переменной $u = (u^1, \ldots, u^r)$, прин-

* Напомним, что одна переменная u может распадаться на несколько отдельных переменных, например может быть точкой r-мерного векторного пространства; в этом случае условие максимума (16) также можно считать содержащим r отдельных соотношений.

цип максимума, сформулированный выше, эквивалентен классическому условию Вейерштрасса для вариационной задачи Лагранжа [см. ([8]), стр. 264—265, а также ([9])]. Далее, мы дадим в этом пункте обсуждение соотношения между принципом максимума и условием Вейерштрасса. Из этого обсуждения выясняется, что уже в случае, если U есть *замкнутое* ограниченное множество векторного пространства, условие Вейерштрасса перестает действовать, т. е. теорема о том, что для достижения минимума функционала необходимо выполнение условия Вейерштрасса, становится неверной. В то же время доказываемый нами принцип максимума справедлив для любого топологического пространства U.

Расширение класса допустимых пространств U по сравнению с классическим случаем открытых множеств весьма существенно с точки зрения возможности технических применений теории. Можно считать, что именно случай замкнутого множества U (расположенного в некотором векторном пространстве или многообразии) наиболее интересен в прикладных задачах оптимального управления.

Переходим к обсуждению условия Вейерштрасса. Введем обозначения:

$$y_i = x^i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\frac{dy_{j+n}}{dt} = u^j \qquad (j = 1, \ldots, r),$$

$$\psi_i = -l_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

$$\Phi_i = f^i(x, u) - \frac{dx^i}{dt} \qquad (i = 1, \ldots, n), \qquad f = f^0,$$

и, кроме того, будем обозначать независимое переменное через x, а не через t. Тогда оптимальная задача, сформулированная в п. 2, сведется к вариационной задаче Лагранжа в той форме, в какой она сформулирована в книге ([8]) (стр. 224—225). Функция F [см. ([8]), стр. 236] примет вид

$$F = l_0 f + l_\nu \Phi_\nu = -\psi_0 f^0 - \psi^\nu \left(f^\nu(x, u) - \frac{dx^\nu}{dt} \right) =$$
$$= -\mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u) + \psi_\nu \cdot \frac{dx^\nu}{dt}.$$

Далее, если $\psi(t)$, $\mathbf{x}(t)$ и $u(t)$ — некоторые функции, а $\bar{u} \in U$ и $\bar{x}'^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ — величины, связанные между собой в некоторый момент t соотношением $\bar{x}'^i = f^i(x(t), \bar{u})$, то функция Вейерштрасса [см. ([8]), стр. 264] принимает вид:

$$E = [-\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), \bar{u}) + \psi_\nu(t) f^\nu(x(t), \bar{u})] -$$
$$- [-\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) + \psi_\nu(t) f^\nu(x(t), u(t))] +$$
$$+ (\bar{u}^i - u^i) \frac{\partial \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u^i} - (f^\nu(x(t), \bar{u}) - f^\nu(x(t), u(t)))\psi_\nu(t) =$$
$$= \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) - \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u) + (\bar{u}^i - u^i) \frac{\partial \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u^i}. \tag{22}$$

Так как для всякой внутренней точки области U производные

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\psi(t),\ \mathbf{x}(t),\ u(t))}{\partial u^i}$$

обращаются в нуль (это вытекает и из принципа максимума и из классических результатов [см. ([8]), стр. 249, теорема 76.1], то необходимое условие Вейерштрасса ($E \geqslant 0$ во внутренних точках) сводится к соотношению

$$\mathbf{H}(\psi(t),\ \mathbf{x}(t),\ u(t)) \geqslant \mathbf{H}(\psi(t),\ \mathbf{x}(t),\ \bar{u}) \qquad (\bar{u} \in U).$$

Это дает (для случая кусочно-линейных управлений, только и рассматривавшихся в ([8]) и ([9])) соотношение (16). Остальные соотношения, указанные в теореме 1, столь же легко вытекают из условия Вейерштрасса.

Таким образом, для случая открытого множества U теорема 1 вытекает из классических теорем вариационного исчисления. Обратно, необходимое условие Вейерштрасса вытекает из нашей теоремы 1.

Полагая $\bar{u} = u(t) + \Delta u$ и считая Δu бесконечно малой, мы можем, на основании формулы Тейлора, записать соотношение (22) (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка) в виде

$$E = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial u^i \partial u^j}\Delta u^i \Delta u^j. \tag{23}$$

Это делает совершенно естественным условие Вейерштрасса $E \geqslant 0$ во внутренних точках (ибо функция $\mathbf{H}$, по теореме 1, должна достигать максимума). Однако в граничных точках, где, вообще говоря, перестают обращаться в нуль производные $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u^i}$, т. е. в разложении функции $\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t),\ u(t)+\Delta u)$ имеются члены первого порядка малости относительно Δu, неотрицательность величины E (имеющей второй порядок малости) перестает быть необходимым условием максимальности функции $\mathbf{H}$. Иначе говоря, условие Вейерштрасса $E \geqslant 0$, вообще говоря, перестает быть справедливым в граничных точках множества U.

Простой пример подтверждает сказанное. Рассмотрим движение точки по закону

$$\frac{dx}{dt} = u^2 \qquad (|u| \leqslant 1),$$

где u и x — скалярные переменные. Очевидно, что движение по закону $u \equiv 1$, $x(t) = x_0 + t$ является оптимальным по быстродействию (между любыми двумя точками), так как скорость движения точки x, равная u^2, не может превосходить единицы. Здесь $f^0 \equiv 1$, $f^1 = u^2$; так как f^0 и f^1 не зависят от x, то уравнения (13) дают: $\psi_0 = \text{const}$, $\psi_1 = \text{const}$. Функция $\mathbf{H}$ принимает вид

$$\mathbf{H} = \psi_0 + \psi_1 u^2.$$

Вдоль рассматриваемой оптимальной траектории $u \equiv 1$, т. е.

$$\mathbf{H} = \psi_0 + \psi_1,$$

и потому [см. (17)] $\psi_0 < 0$, $\psi_1 > 0$. Выражение (23) для функции Вейер-

штрасса дает нам теперь:

$$E = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial u^2}(\Delta u)^2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2(\psi_0 + \psi_1 u^2)}{\partial u^2}(\Delta u)^2 = -\psi_1(\Delta u)^2.$$

Так как коэффициент $-\psi_1$ отрицателен, то условие Вейерштрасса $E \geqslant 0$ не выполняется. Произошло это потому, что точка $u = 1$ является граничной точкой отрезка U (т. е. отрезка $-1 \leqslant u \leqslant 1$).

9. Вариации управлений. В этом и следующих пунктах мы излагаем некоторые конструкции, необходимые для доказательства принципа максимума.

Пусть $u(t)$ — некоторое допустимое управление, определенное на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Точку θ интервала $t_0 < t < t_1$ мы будем называть *правильной* для управления $u(t)$, если выполнено следующее условие: какова бы ни была непрерывная по совокупности своих аргументов функция $g(t, u)$ и каковы бы ни были вещественные числа a и b, имеет место соотношение:

$$\int_{\theta+a\varepsilon}^{\theta+b\varepsilon} g(t, u(t))\,dt = \varepsilon(b-a)\,g(\theta, u(\theta)) + \ldots. \tag{24}$$

Для кусочно-непрерывной функции правильными являются все точки ее непрерывности, для измеримой функции правильной является любая точка Лебега [см. ([7])]. В любом случае множество всех правильных точек имеет на интервале $t_0 < t < t_1$ полную меру, т. е. *почти все точки интервала $t_0 < t < t_1$ являются правильными.*

Выберем некоторые моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s, \tau$, удовлетворяющие неравенствам $t_0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_s \leqslant \tau < t_1$ и являющиеся правильными точками для управления $u(t)$. Выберем, далее, произвольные неотрицательные числа $\delta t_1, \ldots, \delta t_s$, произвольное (не обязательно неотрицательное) действительное число δt и произвольные (не обязательно различные) точки $v_1, v_2, \ldots, v_s$ области управления U. Определим теперь зависящие от ε полуинтервалы $I_1, I_2, \ldots, I_s$ следующим образом. Положим

$$l_i = \begin{cases} \delta t - (\delta t_i + \ldots + \delta t_s), & \text{если } \tau_i = \tau; \\ \quad -(\delta t_i + \ldots + \delta t_s), & \text{если } \tau_i = \tau_s < \tau; \\ \quad -(\delta t_i + \ldots + \delta t_j), & \text{если } \tau_i = \tau_{i+1} = \ldots = \tau_j < \tau_{j+1} \quad (j < s), \end{cases}$$

и обозначим через I_i полуинтервал

$$\tau_i + \varepsilon l_i < t \leqslant \tau_i + \varepsilon(l_i + \delta t_i).$$

Таким образом, если $\tau_i = \tau_{i+1} = \ldots = \tau_j$, то полуинтервалы $I_i, I_{i+1}, \ldots, I_j$ следуют, примыкая друг к другу, слева направо; если же к полуинтервалу I_k не примыкает справа следующий полуинтервал (т. е. если $\tau_k < \tau_{k+1}$ или $k = s$), то правым концом полуинтервала I_k является точка τ_k при $\tau_k < \tau$ и точка $\tau + \varepsilon\delta t$ при $\tau_k = \tau$. Длина полуинтервала I_i равна $\varepsilon\delta t_i$. В случае $\delta t_i = 0$ соответствующий полуинтервал I_i является «пустым», т. е. отсутствует.

При достаточно малом ε *полуинтервалы $I_1, \ldots I_s$ попарно не пересекаются и располагаются все на основном отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, причем ле-*

вее точки $\tau + \varepsilon\delta t$. Считая, что ε удовлетворяет этим условиям, мы определим управление $u^*(t)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \tau + \varepsilon\delta t$, положив:

$$u^*(t) = \begin{cases} u(t), & \text{если } t \text{ не принадлежит ни одному из множеств } I_1, I_2, \ldots, I_s, \\ v_i, & \text{если } t \in I_i. \end{cases}$$

Будем говорить, что управление $u^*(t)$ получается *варьированием* управления $u(t)$.

10. Вариация траектории. Обозначим через $\mathbf{x}(t)$ траекторию, соответствующую управлению $u(t)$ и исходящую из точки $\mathbf{x}_0$, а через $\mathbf{x}^*(t)$ — траекторию, соответствующую проварьированному управлению $u^*(t)$ и исходящую из той же точки $\mathbf{x}_0$. При достаточно малом ε траектория $\mathbf{x}^*(t)$ определена на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \tau + \varepsilon\delta t$, на котором рассматривается управление $u^*(t)$ (теорема о непрерывной зависимости решения от параметров [см. ([7])]). Нашей ближайшей целью является вычисление положения точки $\mathbf{x}^*(\tau + \varepsilon\delta t)$. Именно, мы покажем, что справедлива следующая формула:

$$\mathbf{x}^*(\tau + \varepsilon\delta t) = \mathbf{x}(\tau) + \varepsilon\Delta\mathbf{x} + \ldots, \tag{25}$$

где $\Delta\mathbf{x}$ — не зависящий от ε вектор, определяемый формулой:

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))\,\delta t + \\ + \sum_{i=1}^{s} A_{\tau_i, \tau}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), v_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), u(\tau_i))]\,\delta t_i. \tag{26}$$

Доказательство формул (25), (26) мы проведем индукцией по s. Прежде всего, применяя соотношение (24) к векторной функции $g(t, u) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u)$ (очевидно непрерывной по совокупности своих аргументов) и полагая $\theta = \tau$, $a = 0$, $b = \delta t$, мы получим:

$$\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t))\,dt = \varepsilon\,\delta t \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau)) + \ldots,$$

или, так как $\mathbf{x}(t)$ есть решение уравнения (7),

$$\mathbf{x}(\tau + \varepsilon\delta t) = \mathbf{x}(\tau) + \varepsilon\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))\,\delta t + \ldots. \tag{27}$$

Далее, если $\tau_s < \tau$, то при достаточно малом ε отрезок между точками τ и $\tau + \varepsilon\delta t$ расположен правее точки τ_s, так что на этом отрезке управление $u^*(t)$ совпадает с $u(t)$, и потому

$$\mathbf{x}^*(\tau + \varepsilon\delta t) - \mathbf{x}^*(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), u^*(t))\,dt = \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), u(t))\,dt. \tag{28}$$

Кроме того, как легко видеть (используя теорему о непрерывной зависимости от начальных значений), решение $\mathbf{x}^*(t)$ равномерно (на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \tau + \varepsilon\delta t$) стремится к $\mathbf{x}(t)$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), u(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) + \xi_1(t),$$

где $\xi_1(t)$ равномерно стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Отсюда получаем:

$$\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), u(t))\,dt = \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t))\,dt + \ldots = \varepsilon\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))\,\delta t + \ldots$$

[см. (27)]. Сопоставляя это соотношение с (28), находим:

$$\mathbf{x}^*(\tau+\varepsilon\delta t)=\mathbf{x}^*(\tau)+\varepsilon\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau),\ u(\tau))\,\delta t+\ldots \tag{29}$$

при $\tau_s<\tau$. Наконец, найдем приращение функции $\mathbf{x}^*(t)$ на полуинтервале I_i. Так как на этом полуинтервале

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),\ u^*(t))=\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\ v_i)+\xi_2(t),$$

где $\xi_2(t)$ равномерно стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$, то для приращения

$$\mathbf{x}^*(\tau_i+\varepsilon(l_i+\delta t_i))-\mathbf{x}^*(\tau_i+\varepsilon l_i)=\mathbf{x}^*|_{I_i}$$

функции $\mathbf{x}^*(t)$ на полуинтервале I_i мы находим следующее значение.

$$\mathbf{x}^*|_{I_i}=\int\limits_{I_i}\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),\ u^*(t))\,dt=\int\limits_{I_i}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\ v_i)\,dt+\ldots=\varepsilon\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i)\,\delta t_i+\ldots \tag{30}$$

(напомним, что длина полуинтервала I_i равна $\varepsilon\delta t_i$, причем при $\varepsilon\to 0$ этот полуинтервал стягивается к точке τ_i).

Переходим к индуктивной проверке соотношений (25), (26). При $s=0$ мы имеем:

$$u^*(t)=u(t),\qquad \mathbf{x}^*(t)=\mathbf{x}(t),$$

и формулы (25), (26) сводятся к соотношению (27), справедливость которого была установлена выше.

Предположим теперь, что формулы (25), (26) уже доказаны для случая, когда число полуинтервалов $I_1, I_2, \ldots$ меньше чем s, и докажем справедливость этих формул при наличии s полуинтервалов $I_1, I_2, \ldots, I_s$. Обозначим через k такое целое число, что

$$\tau_{k+1}=\tau_{k+2}=\ldots=\tau_s \text{ и } \tau_i<\tau_s \text{ при } i\leqslant k$$

(случай $k=0$ не исключается). Заменяя точку τ точкой τ_s, число δt — числом l_{k+1}, а число s — меньшим числом k, мы в силу индуктивного предположения получим из (25), (26):

$$\mathbf{x}^*(\tau_s+\varepsilon l_{k+1})=\mathbf{x}(\tau_s)+\varepsilon\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_s),\ u(\tau_s))\cdot l_{k+1}+$$
$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{k}A_{\tau_i,\tau_s}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i)-\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ u(\tau_i))]\,\delta t_i+\ldots. \tag{31}$$

Это есть значение функции $\mathbf{x}^*(t)$ в левом конце полуинтервала I_{k+1}. Далее, так как полуинтервалы $I_{k+1},\ldots,I_s$ примыкают один к другому, то, суммируя соотношения (30) для $i=k+1,\ldots,s$, мы получим приращение функции $\mathbf{x}^*(t)$ от левого конца полуинтервала I_{k+1} до правого конца полуинтервала I_s, т. е. до точки $\tau_s+\varepsilon(l_s+\delta t_s)$:

$$\mathbf{x}^*(\tau_s+\varepsilon(l_s+\delta t_s))-\mathbf{x}^*(\tau_s+\varepsilon l_{k+1})=\varepsilon\sum_{i=k+1}^{s}\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i)\,\delta t_i+\ldots$$

Складывая это соотношение с соотношением (31), найдем:

$$\mathbf{x}^*(\tau_s+\varepsilon(l_s+\delta t_s))=\mathbf{x}(\tau_s)+\varepsilon\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_s),\ u(\tau_s))\cdot l_{k+1}+\varepsilon\sum_{i=k+1}^{s}\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i)\,\delta t_i+$$
$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{k}A_{\tau_i,\tau_s}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i)-\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ u(\tau_i))]\,\delta t_i+\ldots=$$
$$=\mathbf{x}(\tau_s)+\varepsilon\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_s),\ u(\tau_s))\,(l_{k+1}+\delta t_{k+1}+\ldots+\delta t_s)+$$

$$+\varepsilon \sum_{i=k+1}^{s} [\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_s),\ u(\tau_s))]\,\delta t_i +$$

$$+\varepsilon \sum_{i=1}^{k} A_{\tau_i,\tau_s}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ u(\tau_i))]\,\delta t_i + \ldots .$$

Учитывая, что $A_{\tau_i,\tau_s} = E$ при $i = k+1, \ldots, s$ [см. (10)], можно последнее соотношение переписать в виде:

$$\mathbf{x}^*(\tau_s + \varepsilon(l_s + \delta t_s)) = \mathbf{x}(\tau_s) + \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_s),\ u(\tau_s))(l_{k+1} + \delta t_{k+1} + \ldots + \delta t_s) +$$

$$+\varepsilon \sum_{i=1}^{s} A_{\tau_i,\tau_s}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ u(\tau_i))]\,\delta t_i + \ldots . \qquad (32)$$

Если $\tau_{k+1} = \tau_s = \tau$, то, в силу определения чисел l_i, мы имеем:

$$l_s + \delta t_s = \delta t, \quad l_{k+1} + \delta t_{k+1} + \ldots + \delta t_s = \delta t,$$

так что соотношение (32) совпадает в этом случае с (25), (26). Если же $\tau_s < \tau$, то

$$l_s + \delta t_s = 0, \quad l_{k+1} + \delta t_{k+1} + \ldots + \delta t_s = 0,$$

и соотношение (32) принимает вид:

$$\mathbf{x}^*(\tau_s) = \mathbf{x}(\tau_s) + \varepsilon \sum_{i=1}^{s} A_{\tau_i,\tau_s}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ u(\tau_i))]\,\delta t_i + \ldots . \qquad (33)$$

Так как в этом случае на отрезке $\tau_s < t \leqslant \tau$ управление $u^*(t)$ совпадает с $u(t)$, то (см. п. 4) с точностью до малых более высокого порядка, чем ε, векторы $\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}(t)$ при $\tau_s \leqslant t \leqslant \tau$ получаются друг из друга переносом вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$ [см. (11)]:

$$\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}(t) = A_{\tau_s,t}(\mathbf{x}^*(\tau_s) - \mathbf{x}(\tau_s)) + \ldots \quad (t \geqslant \tau_s).$$

Поэтому, применяя к формуле (33) преобразование $A_{\tau_s,\tau}$, мы получаем [см. второе из соотношений (10)]:

$$\mathbf{x}^*(\tau) - \mathbf{x}(\tau) = \varepsilon \sum_{i=1}^{s} A_{\tau_i,\tau}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ u(\tau_i))]\,\delta t_i + \ldots .$$

Наконец, складывая последнее соотношение с соотношением (29), мы и в этом случае (т. е. при $\tau_s < \tau$) получаем соотношения (25), (26), что и завершает индукцию.

11. Линейные комбинации вариаций. Если какое-либо из чисел δt_i равно нулю, то его можно отбросить при определении проварьированного управления $u^*(t)$ вместе с соответствующими точками τ_i и v_i — от этого управление $u^*(t)$ не изменится. Обратно, добавление новых точек τ_i, v_i, для которых $\delta t_i = 0$, не изменяет управления $u^*(t)$. Пользуясь этим, мы можем, если речь идет о конечном числе управлений $u_1^*(t), \ldots, u_p^*(t)$, получающихся варьированием одного и того же управления $u(t)$ при одном и том же τ, считать, что все точки τ_i, v_i одинаковы и взяты в одинаковом числе при определении управлений $u_1^*(t), \ldots, u_p^*(t)$, а все различие между этими управлениями заключается в том, что у них не одинаковы числа δt_i и δt. Этой воз-

можностью — считать все точки τ_i, v_i одинаковыми (при рассмотрении конечного числа различным образом проварьированных управлений) — мы будем пользоваться в дальнейшем, не указывая этого каждый раз.

Вектор $\Delta\mathbf{x}$ [см. (26)] не зависит от ε, но существенно зависит, конечно, от выбора точек τ_i, v_i, τ и чисел δt и δt_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Обозначим совокупность величин τ_i, v_i, τ, δt_i, δt через $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a} = \{\tau_i,\ v_i,\ \tau,\ \delta t_i,\ \delta t\}$$

и будем вектор (26) обозначать далее через $\Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}}$, подчеркивая тем самым его зависимость от этих величин.

В этом и двух следующих пунктах мы будем предполагать, что правильная точка τ управления $u(t)$ зафиксирована и что все рассматривающиеся вариации удовлетворяют условию

$$t_0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_s \leqslant \tau < t_1.$$

Если имеется конечное число величин $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a}' = \{\tau_i,\ v_i,\ \tau,\ \delta t_i',\ \delta t'\},$$
$$\mathfrak{a}'' = \{\tau_i,\ v_i,\ \tau,\ \delta t_i'',\ \delta t''\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

то их линейную комбинацию $\lambda'\mathfrak{a}' + \lambda''\mathfrak{a}'' + \ldots$ с неотрицательными коэффициентами λ', λ'', ... мы определим формулой:

$$\lambda'\mathfrak{a}' + \lambda''\mathfrak{a}'' + \ldots = \{\tau_i,\ v_i,\ \tau,\ \lambda'\delta t_i' + \lambda''\delta t_i'' + \ldots,\ \lambda'\delta t' + \lambda''\delta t'' + \ldots\}.$$

(Неотрицательность коэффициентов λ' λ'', ... существенна потому, что в противном случае величины $\lambda'\delta t_i' + \lambda''\delta t_i'' + \ldots$ могли бы оказаться отрицательными, что недопустимо.)

12. Конусы достижимости. Будем теперь, имея некоторое управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и соответствующую траекторию $\mathbf{x}(t)$, рассматривать векторы $\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}}$ для различных символов $\mathfrak{a}$ (τ фиксировано). Легко видеть, что имеет место следующая

ЛЕММА 2. *Если* $\mathfrak{a} = \lambda'\mathfrak{a}'' + \lambda''\mathfrak{a}'' + \ldots$ *(где* $\lambda' \geqslant 0$, $\lambda'' \geqslant 0, \ldots$*), то соответствующие векторы* $\Delta\mathbf{x}$ *связаны такой же линейной зависимостью*:

$$\Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}} = \lambda'\Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}'} + \lambda''\Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}''} + \ldots.$$

Это непосредственно вытекает из того, что в формулу (26) все числа $\delta t_1, \ldots, \delta t_s$, δt входят линейно.

Мы будем считать $\Delta\mathbf{x}$ связанным вектором, исходящим из точки $\mathbf{x}(\tau)$, т. е. будем считать этот вектор элементом пространства $\mathbf{X}_\tau$ (см. п. 4). Если мы будем брать всевозможные символы $\mathfrak{a}$, описанные в п. 11 (τ фиксировано), то векторы $\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}}$ заполнят некоторое множество $\mathbf{K}_\tau$ в пространстве $\mathbf{X}_\tau$.

Докажем, что *множество* $\mathbf{K}_\tau$ *является выпуклым конусом* векторного пространства* $\mathbf{X}_\tau$.

* Множество M, лежащее в некотором векторном пространстве, называется *выпуклым конусом* с вершиной в точке o, если 1) оно является *конусом*, т. е. вместе с каждой отличной от o точкой a содержит и весь луч $\overrightarrow{oa}$; 2) оно *выпукло*, т. е. вместе с

(продолжение сноски см. на стр. 20)

В самом деле, если a' и a'' — две точки пространства $\mathbf{X}_\tau$, принадлежащие множеству $\mathbf{K}_\tau$, т. е. если существуют такие символы $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, что

$$a' = \Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}'}, \quad a'' = \Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}''},$$

то для любых неотрицательных λ', λ'' мы имеем в силу леммы 2:

$$\lambda' a' + \lambda'' a'' = \lambda' \Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}'} + \lambda'' \Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}''} = \Delta\mathbf{x}_{(\lambda'\mathfrak{a}' + \lambda''\mathfrak{a}'')},$$

т. е. точка $\lambda' a' + \lambda'' a''$ также принадлежит множеству $\mathbf{K}_\tau$. Это и означает, что $\mathbf{K}_\tau$ есть выпуклый конус пространства $\mathbf{X}_\tau$ (или, что то же самое, выпуклый конус пространства $\mathbf{X}$ с вершиной в точке $\mathbf{x}(\tau)$).

Мы будем называть множество $\mathbf{K}_\tau$ *конусом достижимости* (с точностью до малых более высокого порядка, чем ε, $\mathbf{K}_\tau$ есть геометрическое место точек $\mathbf{x}^*(\tau + \varepsilon\delta t)$, т. е. тех точек фазового пространства $\mathbf{X}$, которые могут быть достигнуты движущейся точкой в момент времени, близкий к τ, с помощью варьирования управления $u(t)$).

13. Основные леммы. В этом пункте мы докажем две леммы, служащие основой для применения вышеизложенных конструкций к изучению оптимальных процессов.

ЛЕММА 3. *Пусть $\tau\,(t_0 < \tau < t_1)$ — правильная точка управления $u(t)$, $\mathbf{x}(t)$ — траектория, соответствующая управлению $u(t)$ и исходящая из точки $\mathbf{x}_0$, а Λ — некоторая линия, исходящая из точки $\mathbf{x}(\tau)$ и имеющая в этой точке касательный луч L. Если луч L принадлежит внутренности конуса $\mathbf{K}_\tau$ (т. е. все точки луча L, кроме его конца, являются внутренними точками множества $\mathbf{K}_\tau$), то существует такое управление $u_*(t)$, что соответствующая ему траектория $\mathbf{x}_*(t)$, исходящая из той же точки $\mathbf{x}_0$, проходит через некоторую (отличную от $\mathbf{x}(\tau)$) точку линии Λ.*

Доказательство. Выберем на луче L какую-либо точку A и проведем из нее n векторов $e_1, \ldots, e_n$ равной длины r, перпендикулярных к лучу L и взаимно перпендикулярных между собой. Положим, далее, $f_i = -e_i$, $i = 1, \ldots, n$, причем векторы f_i также будем считать исходящими из точки A. Общую длину r векторов $e_1, \ldots, e_n$, $f_1, \ldots, f_n$ будем считать настолько малой, чтобы концы всех этих векторов принадлежали конусу $\mathbf{K}_\tau$ (это возможно, так как A есть внутренняя точка конуса). Наконец, через c обозначим вектор с началом в точке $\mathbf{x}(\tau)$ и концом в точке A. Так как векторы

$$c,\ c + e_1,\ c + e_2, \ldots, c + e_n,\ c + f_1,\ c + f_2, \ldots, c + f_n$$

(исходящие из точки $\mathbf{x}(\tau)$) принадлежат конусу $\mathbf{K}_\tau$, то существуют та-

каждыми двумя точками содержит целиком соединяющий их отрезок. Заметим, что если выпуклый конус M не заполняет всего векторного пространства X, в котором он расположен, то в пространстве X существует такая гиперплоскость, проходящая через вершину конуса M, что весь конус M расположен целиком в каком-либо одном (замкнутом) полупространстве, определяемом этой гиперплоскостью. Если имеются два выпуклых конуса с общей вершиной, внутренность каждого из которых не пересекается с другим конусом, то существует разделяющая их гиперплоскость, т. е. такая гиперплоскость, что один конус расположен целиком в одном (замкнутом) полупространстве, определяемом этой гиперплоскостью, а другой конус — в другом полупространстве.

кие символы $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}_1', \ldots, \mathfrak{a}_n'$, что

$$\Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}_0} = c,\ \Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}_1} = c + e_1, \ldots, \Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}_n} = c + e_n, \qquad \Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}_1'} = c + f_1, \ldots, \Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}_n'} = c + f_n.$$

Определим две (очевидно непрерывные и неотрицательные) функции $h^+(\xi)$ и $h^-(\xi)$ действительного переменного ξ, положив:

$$h^+(\xi) = \begin{cases} \xi \text{ при } \xi \geqslant 0, \\ 0 \text{ при } \xi < 0; \end{cases}$$

$$h^-(\xi) = \begin{cases} 0 \text{ при } \xi \geqslant 0, \\ -\xi \text{ при } \xi < 0. \end{cases}$$

При $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + \ldots + (\xi^n)^2 \leqslant 1$ формула

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\xi^1, \ldots, \xi^n) = \left(1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\xi^i|\right)\mathfrak{a}_0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^+(\xi^i)\,\mathfrak{a}_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^-(\xi^i)\,\mathfrak{a}_i'$$

определяет зависящий от n действительных чисел $\xi^1, \ldots, \xi^n$ символ $\mathfrak{a}(\xi^1, \ldots, \xi^n)$. (Действительно, у нас имеется *конечное* число символов

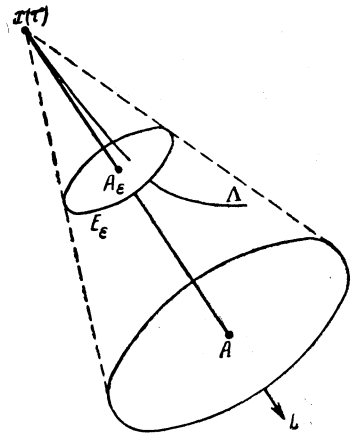

Рис. 1.

$\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i'$, причем все коэффициенты $h^+(\xi^i)$, $h^-(\xi^i)$ и $1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\xi^i|$, как легко видеть, неотрицательны.) Вектор $\Delta\mathbf{x}$, соответствующий символу $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\xi^1, \ldots, \xi^n)$, имеет, в силу леммы 2 (и в силу соотношений $f_i = -e_i$, $h^+(\xi) + h^-(\xi) = |\xi|$, $h^+(\xi) - h^-(\xi) = \xi$), следующий вид:

$$\Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}} = \left(1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\xi^i|\right) c + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^+(\xi^i)(c + e_i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^-(\xi^i)(c + f_i) = \left[1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-|\xi^i| + h^+(\xi^i) + h^-(\xi^i))\right] c + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[h^+(\xi^i) - h^-(\xi^i)]\,e_i = c + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi^i e_i.$$

Следовательно, если точка $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ пробегает в n-мерном числовом пространстве единичный шар

$$(\xi^1)^2 + \ldots + (\xi^n)^2 \leqslant 1, \tag{34}$$

то вектор $\Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}}$ (точнее, конец этого вектора) также пробегает n-мерный шар в пространстве $\mathbf{X}_\tau$, а именно, шар радиуса $\frac{1}{n}r$ с центром в точке A, ортогональный лучу L. При тех же условиях конец вектора $\varepsilon\Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}}$ (все векторы исходят из точки $\mathbf{x}(\tau)$, т. е. из начала координат пространства $\mathbf{X}_\tau$) пробегает n-мерный шар E_ε радиуса $\varepsilon \cdot \frac{r}{n}$, ортогональный лучу L; центр шара E_ε расположен в точке A_ε луча L, находящейся на расстоянии εd от точки $\mathbf{x}(\tau)$, где d — длина вектора c (рис. 1).

Так как в нашем рассуждении рассматриваются лишь такие символы $\mathfrak{a}$, которые являются линейными комбинациями (с некоторыми коэф-

фициентами) конечного числа символов $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_i'$, то точки τ_i, v_i, входящие в определение символа

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\xi^1, \ldots, \xi^n),$$

мы считаем одинаковыми для всех этих символов, т. е. не зависящими от $\xi^1, \ldots, \xi^n$; точка τ также фиксирована. Числа же $\delta t_1, \ldots, \delta t_s$ и δt (определяющие проварьированное управление $u^*(t)$) зависят от $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Поэтому мы будем писать $u^*_{\mathfrak{a}}(t)$ и $\delta t_{\mathfrak{a}}$, чтобы подчеркнуть зависимость величин $u^*(t)$ и δt от $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Траекторию $\mathbf{x}^*(t)$, исходящую из точки $\mathbf{x}_0$ и соответствующую управлению $u^*_{\mathfrak{a}}(t)$, будем обозначать через $\mathbf{x}^*_{\mathfrak{a}}(t)$, так что соотношение (25) даст нам:

$$\mathbf{x}^*_{\mathfrak{a}}(\tau + \varepsilon\delta t_{\mathfrak{a}}) = \mathbf{x}(\tau) + \varepsilon\Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}} + \ldots . \qquad (35)$$

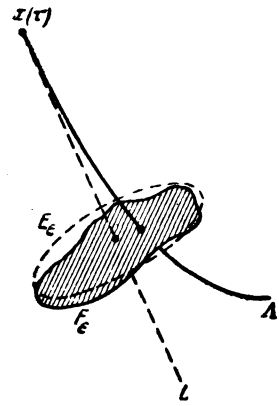

Рис. 2

Отметим, что траектория $\mathbf{x}^*_{\mathfrak{a}}(t)$ непрерывно зависит от параметров $\xi^1, \ldots, \xi^n$; точно так же число $\delta t_{\mathfrak{a}}$ непрерывно зависит от $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Поэтому и точка $\mathbf{x}^*_{\mathfrak{a}}(\tau + \varepsilon\delta t_{\mathfrak{a}})$ непрерывно зависит от $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Следовательно, когда точка $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ описывает шар (34), точка (35) пробегает (при любом фиксированном ε) некоторый «диск» F_ε (т. е. непрерывный образ шара (34); этот диск может иметь самопересечения и т. п.). С точностью до малых более высокого порядка, чем ε, диск F_ε «совпадает» с шаром E_ε [см. (35)]; точнее говоря, точки диска F_ε отстоят от соответствующих точек шара E_ε на величину более высокого порядка малости, чем ε. Точка же пересечения этого шара с линией Λ (существующая при достаточно малых ε) отстоит от точки $\mathbf{x}(\tau)$ и от границы шара E_ε на величину порядка ε. Следовательно, при достаточно малом ε диск F_ε пересекает линию Λ в некоторой точке * (рис. 2). Выберем такое ε. Так как весь диск F_ε (по доказанному пересекающийся с линией Λ) состоит из точек вида (35), то существуют такие $\xi^1, \ldots, \xi^n$ (удовлетворяющие условию (34)), что

$$\mathbf{x}^*_{\mathfrak{a}}(\tau + \varepsilon\delta t_{\mathfrak{a}}) \in \Lambda.$$

Иначе говоря, обозначив величины $u^*_{\mathfrak{a}}(t)$, $\mathbf{x}^*_{\mathfrak{a}}(t)$, соответствующие выбранным значениям $\xi^1, \ldots, \xi^n$, через $u_*(t)$, $\mathbf{x}_*(t)$ и полагая

$$\tau + \varepsilon\delta t_{\mathfrak{a}} = \tau',$$

мы получим:

$$\mathbf{x}_*(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_*(\tau') \in \Lambda,$$

и лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. *Если управление $u(t)$ и соответствующая ему траектория $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, оптимальны, то для любой правильной точки τ*

* Факт существования такой точки пересечения представляется наглядно «очевидным»; строгое доказательство легко проводится элементарными средствами топологии (с помощью понятия индекса пересечения).

($t_0 < \tau < t_1$) луч L_τ, исходящий из точки $\mathbf{x}(\tau)$ и идущий в направлении отрицательной полуоси x^0, не принадлежит внутренности конуса $\mathbf{K}_\tau$ (т. е. проходит либо вне этого конуса, либо по его границе).

Доказательство. Допустим, что при некотором τ луч L_τ принадлежит внутренности конуса $\mathbf{K}_\tau$. Применим лемму 3, принимая за линию Λ (и за луч L) луч L_τ. Тогда мы получим, что существует такое управление $u_*(t)$, для которого соответствующая траектория $\mathbf{x}_*(t)$ (исходящая из той же точки $\mathbf{x}_0$) проходит в некоторый момент $\tau' > t_0$ через точку, лежащую на луче L_τ. Иначе говоря,

$$x_*^i(\tau') = x^i(\tau), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x_*^0(\tau') < x^0(\tau).$$

Определим управление $u_{**}(t)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1 + (\tau' - \tau)$, положив

$$u_{**}(t) = \begin{cases} u_*(t) & \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant \tau', \\ u(t - (\tau' - \tau)) & \text{при } \tau' < t \leqslant t_1 + (\tau' - \tau). \end{cases}$$

Траектория $\mathbf{x}_{**}(t)$, соответствующая управлению $u_{**}(t)$ и исходящая из точки $\mathbf{x}_0$, на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \tau'$ совпадает, очевидно, с траекторией $\mathbf{x}_*(t)$, так что, в частности,

$$\begin{gathered} x_{**}^i(\tau') = x^i(\tau), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ x_{**}^0(\tau') < x^0(\tau). \end{gathered} \tag{36}$$

Далее, на отрезке $\tau' \leqslant t \leqslant t_1 + (\tau' - \tau)$ траектория $\mathbf{x}_{**}(t)$ имеет вид

$$\mathbf{x}_{**}(t) = \mathbf{x}(t - (\tau' - \tau)) + \mathbf{p}, \tag{37}$$

где $\mathbf{p}$ — постоянный вектор:

$$\mathbf{p} = \{x_{**}^0(\tau') - x^0(\tau), 0, 0, \ldots, 0\}.$$

(Это получается непосредственной подстановкой решения (37) в уравнения (6) с учетом того факта, что правые части системы (6) не зависят от t и x^0; вектор $\mathbf{p}$ определяется тем условием, что в точке τ' — точке стыка двух кусков траектории $\mathbf{x}_{**}(t)$ — эта траектория должна быть непрерывна.) При $t = t_1 + (\tau' - \tau)$ получаем:

$$\mathbf{x}_{**}(t_1 + (\tau' - \tau)) = \mathbf{x}(t_1) + \mathbf{p}.$$

Иначе говоря, точка $\mathbf{x}_{**}(t_1 + (\tau' - \tau))$ лежит на прямой Π, определенной в п. 3 (ибо вектор $\mathbf{p}$ параллелен оси x^0) и, кроме того,

$$x_{**}^0(t_1 + (\tau' - \tau)) = x^0(t_1) + x_{**}^0(\tau') - x^0(\tau) < x^0(t_1)$$

[см. (36)]. Но это противоречит оптимальности траектории $\mathbf{x}(t)$ и управления $u(t)$. Таким образом, предположение, сделанное в начале доказательства, приводит к противоречию, и лемма 4 полностью доказана.

14. Опорные гиперплоскости. В этом пункте мы будем предполагать, что $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,— оптимальная траектория (соединяющая точку $\mathbf{x}_0$ с некоторой точкой прямой Π, см. п. 3), а $u(t)$ — соответствующее оптимальное управление. Пусть τ — некоторая правильная точка управления $u(t)$. Согласно лемме 3, луч L_τ не принадлежит внутренности конуса $\mathbf{K}_\tau$, так что этот конус не заполняет всего пространства $\mathbf{X}$. Поэтому существует опорная гиперплоскость к конусу $\mathbf{K}_\tau$ в его вершине, т. е. такая гиперплоскость Γ, что весь конус $\mathbf{K}_\tau$ лежит в одном из двух

замкнутых полупространств, определяемых гиперплоскостью Г. (Гиперплоскость Г, обладающая этим свойством, может быть не единственной последующие рассуждения этого пункта справедливы для любой такой гиперплоскости.) Уравнение гиперплоскости Г (в пространстве $\mathbf{X}_\tau$) можно записать в виде $a_\alpha x^\alpha = 0$, где $x^0, x^1, \ldots, x^n$ — текущие координаты. Так как умножение всех коэффициентов a_α на одно и то же отличное от нуля число не меняет гиперплоскости Г, то мы можем считать (изменив, если нужно, знаки всех чисел a_α на обратные), что конус $\mathbf{K}_\tau$ лежит в отрицательном полупространстве ($a_\alpha x^\alpha \leqslant 0$). Иначе говоря, для любого вектора $\Delta\mathbf{x}$, определяемого формулой (26), выполнено неравенство

$$(\mathbf{a}, \Delta\mathbf{x}) \leqslant 0 \quad (\Delta\mathbf{x} \in \mathbf{K}_\tau), \tag{38}$$

где через $\mathbf{a}$ обозначен вектор $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ (ибо совокупность векторов (26) и есть конус $\mathbf{K}_\tau$). Полагая в формуле (26)

$$\delta t_1 = \delta t_2 = \ldots = \delta t_s = 0,$$

мы получим:

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))\,\delta t,$$

и, в силу (38),

$$(\mathbf{a}, \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))\,\delta t) \leqslant 0.$$

Так как это неравенство справедливо при любых δt (как положительных, так и отрицательных), то

$$(\mathbf{a}, \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))) = 0,$$

или, в силу определения функции $\mathbf{H}$,

$$\mathbf{H}(\mathbf{a}, \mathbf{x}(\tau), u(\tau)) = 0 \tag{39}$$

(это соотношение выполняется, если вектор $\mathbf{a}$ удовлетворяет условию (38))

Обозначим через

$$\psi(t, \mathbf{a}) = \{\psi_0(t, \mathbf{a}), \psi_1(t, \mathbf{a}), \ldots, \psi_n(t, \mathbf{a})\}$$

решение системы уравнений (13) (для изучаемых оптимальных $u(t)$ и $\mathbf{x}(t)$) с начальным условием

$$\psi(\tau, \mathbf{a}) = \mathbf{a}. \tag{40}$$

Решение $\psi(t, \mathbf{a})$ определено на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, так как система (13) линейна.

ЛЕММА 5. *Если вектор* $\mathbf{a}$ *удовлетворяет условию* (38), *то во всякой правильной точке управления* $u(t)$, *лежащей на полуинтервале* $t_0 < t \leqslant \tau$, *выполнено соотношение*

$$\mathbf{H}(\psi(t, \mathbf{a}), \mathbf{x}(t), u(t)) = \mathbf{M}(\psi(t, \mathbf{a}), \mathbf{x}(t)).$$

Пусть τ_1 — правильная точка управления $u(t)$, расположенная на полуинтервале $t_0 < t \leqslant \tau$, а v_1 — произвольная точка пространства U. Рассмотрим символ $\mathfrak{a}$ (см. п. 11) с единственной точкой τ_1 (т. е. $s = 1$) и с числами δt_1, δt, соответственно равными единице и нулю:

$$\mathfrak{a} = \{\tau_1, v_1, \tau, 1, 0\}.$$

Тогда вектор $\Delta\mathbf{x}$ [см. (26)], соответствующий этому символу $\mathbf{a}$, будет иметь значение

$$\Delta\mathbf{x} = A_{\tau_1, \tau}\,[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_1),\ v_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_1),\ u(\tau_1))].$$

В силу соотношений (38) и (40) отсюда получаем:

$$(\psi(\tau,\ \mathbf{a}),\ A_{\tau_1, \tau}\,[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_1),\ v_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_1),\ u(\tau_1))]) \leqslant 0,$$

и потому, согласно лемме 1 и соотношению $A_{\tau_1, \tau_1} = E$ [см. (10)],

$$(\psi(\tau_1,\ \mathbf{a}),\ \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_1),\ v_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_1),\ u(\tau_1))) \leqslant 0.$$

Последнее соотношение переписывается (в силу определения функции $\mathbf{H}$) в виде

$$\mathbf{H}(\psi(\tau_1,\ \mathbf{a}),\ \mathbf{x}(\tau_1),\ v_1) - \mathbf{H}(\psi(\tau_1,\ \mathbf{a}),\ \mathbf{x}(\tau_1),\ u(\tau_1)) \leqslant 0,$$

а так как это неравенство справедливо для любой точки $v_1 \in U$, то мы получаем:

$$\mathbf{H}(\psi(\tau_1,\ \mathbf{a}),\ \mathbf{x}(\tau_1),\ u(\tau_1)) = \max_{v_1 \in U} \mathbf{H}(\psi(\tau_1,\ \mathbf{a}),\ \mathbf{x}(\tau_1),\ v_1) = \mathbf{M}(\psi(\tau_1,\ \mathbf{a}),\ \mathbf{x}(\tau_1)),$$

и лемма 5 доказана.

Соотношение, указанное в лемме 5, справедливо при $t = \tau$ (ибо τ — правильная точка):

$$\mathbf{H}(\psi(\tau,\ \mathbf{a}),\ \mathbf{x}(\tau),\ u(\tau)) = \mathbf{M}(\psi(\tau,\ \mathbf{a}),\ \mathbf{x}(\tau)).$$

Поэтому, в силу (39) и (40), мы получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 6. *Если вектор* $\mathbf{a}$ *удовлетворяет условию* (38), *то*

$$\mathbf{M}(\psi(\tau,\ \mathbf{a}),\ \mathbf{x}(\tau)) = 0.$$

15. Постоянство функции $\mathbf{M}$.

ЛЕММА 7. *Если абсолютно непрерывная функция* $\psi(t)$ *почти всюду на некотором отрезке* I *удовлетворяет уравнениям* (13) *и соотношению*

$$\mathbf{H}(\psi(t),\ \mathbf{x}(t),\ u(t)) = \mathbf{M}(\psi(t),\ \mathbf{x}(t)), \tag{41}$$

то функция $\mathbf{M}(\psi(t),\ \mathbf{x}(t))$ *постоянна на всем отрезке* I.

Заметим прежде всего, что функция $\mathbf{M}(\psi(t),\ \mathbf{x}(t))$ полунепрерывна снизу на отрезке I. Действительно, пусть t' — произвольная точка этого отрезка, а ε — положительное число. В силу определения верхней грани, существует такая точка $u' \in U$, что

$$\mathbf{H}(\psi(t'),\ \mathbf{x}(t'),\ u') \geqslant \mathbf{M}(\psi(t'),\ \mathbf{x}(t')) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, в силу непрерывности функции $\mathbf{H}(\psi(t),\ \mathbf{x}(t),\ u)$ по t при фиксированном u, существует такое $\delta > 0$, что при $|t - t'| < \delta$ имеем:

$$|\mathbf{H}(\psi(t),\ \mathbf{x}(t),\ u') - \mathbf{H}(\psi(t'),\ \mathbf{x}(t'),\ u')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, при $|t - t'| < \delta$ справедливо неравенство

$$\mathbf{M}(\psi(t),\ \mathbf{x}(t)) = \sup_{u \in U} \mathbf{H}(\psi(t),\ \mathbf{x}(t),\ u) \geqslant$$

$$\geqslant \mathbf{H}(\psi(t),\ \mathbf{x}(t),\ u') > \mathbf{M}(\psi(t'),\ \mathbf{x}(t')) - \varepsilon,$$

показывающее, что функция $\mathbf{M}(\psi(t),\ \mathbf{x}(t))$ полунепрерывна снизу.

Далее, так как управление $u(t)$ допустимо, то образ отрезка I при

отображении u обладает в пространстве U компактным замыканием (см. п. 1), т. е. в пространстве U существует такое (замкнутое) компактное множество P, что $u(t) \in P$ при $t \in I$. Положим

$$\mathbf{m}(\psi, \mathbf{x}) = \max_{u \in P} \mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u).$$

Очевидно, имеет место неравенство

$$\mathbf{M}(\psi, \mathbf{x}) \geqslant \mathbf{m}(\psi, \mathbf{x}), \tag{42}$$

справедливое при любых $\mathbf{x}$ и ψ. Соотношение (41) означает, что *почти всюду на отрезке I имеет место равенство*

$$\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t)) = \mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$$

(ибо $u(t) \in P$).

Итак, $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ есть полунепрерывная снизу функция, почти всюду на отрезке I совпадающая с функцией $\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ и связанная с ней формулой (42). Из этого следует, что *если функция* $\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ *непрерывна, то функция* $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ всюду *на отрезке I совпадает с ней (и потому также непрерывна)*. Мы сейчас покажем, что функция $\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$,— а значит, в силу сказанного, и $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ — абсолютно непрерывна на отрезке I.

Так как отрезок I компактен, то в пространстве переменных $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, x^0, x^1, \ldots, x^n$ существует такое выпуклое ограниченное множество Q, что точка $(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ принадлежит множеству Q при $t \in I$. Таким образом, тройка $(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t))$ принадлежит множеству $Q \times P$ при $t \in I$. Далее, так как производные функции $\mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u)$ по переменным ψ_α, x^α непрерывны по совокупности переменных ψ, $\mathbf{x}$, u (см. условия, наложенные на функции f^i в п. 2), то на компактном множестве $Q \times P$ все эти производные ограниченны. Отсюда следует существование такой (не зависящей от u) константы $K > 0$, что для любых $(\psi, \mathbf{x}) \in Q$, $(\psi', \mathbf{x}') \in Q$, $u \in P$ выполнено соотношение

$$|\mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u) - \mathbf{H}(\psi', \mathbf{x}', u)| \leqslant Kd, \tag{43}$$

где d — наибольшее из чисел $|\psi - \psi'|$, $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$.

Пусть $(\psi, \mathbf{x})$ и $(\psi', \mathbf{x}')$ — две точки множества Q, а u и u' — такие точки множества P, что $\mathbf{m}(\psi, \mathbf{x}) = \mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u)$, $\mathbf{m}(\psi', \mathbf{x}') = \mathbf{H}(\psi', \mathbf{x}', u')$. Тогда, очевидно, выполнены неравенства

$$\mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u') \leqslant \mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u), \quad \mathbf{H}(\psi', \mathbf{x}', u) \leqslant \mathbf{H}(\psi', \mathbf{x}', u'),$$

и потому (учитывая соотношение (43)) мы получаем:

$$-Kd \leqslant \mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u') - \mathbf{H}(\psi', \mathbf{x}', u') \leqslant \mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u) - \mathbf{H}(\psi', \mathbf{x}', u') \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u) - \mathbf{H}(\psi', \mathbf{x}', u) \leqslant Kd.$$

Иначе говоря,

$$|\mathbf{m}(\psi, \mathbf{x}) - \mathbf{m}(\psi', \mathbf{x}')| \leqslant Kd,$$

где d — наибольшее из чисел $|\psi - \psi'|$, $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. В частности, отсюда получаем:

$$|\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t)) - \mathbf{m}(\psi(t'), \mathbf{x}(t'))| \leqslant Kd, \quad t, t' \in I,$$

где d — наибольшее из чисел $|\psi(t) - \psi(t')|$, $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t')|$. Из этого неравенства, в силу абсолютной непрерывности функций $\psi(t)$ и $\mathbf{x}(t)$, без труда заключаем, что функция $\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ абсолютно непрерывна.

Покажем, наконец, что функция $\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ почти всюду имеет производную, равную нулю. В силу абсолютной непрерывности функции $\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ и определения функций $\mathbf{x}(t)$ и $\psi(t)$, почти всюду на отрезке I имеют место следующие обстоятельства: функция $\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ имеет производную, а для функций $\mathbf{x}(t)$ и $\psi(t)$ выполнены соотношения (6) и (13), или, что то же самое, (14) и (15). Пусть t — какая-либо точка, в которой эти обстоятельства имеют место, t' — произвольная, отличная от t, точка отрезка I, а u — такая точка множества P, для которой

$$\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t)) = \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u).$$

Тогда $\mathbf{m}(\psi(t'), \mathbf{x}(t')) \geqslant \mathbf{H}(\psi(t'), \mathbf{x}(t'), u)$, и потому

$$\mathbf{m}(\psi(t'), \mathbf{x}(t')) - \mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t)) \geqslant \mathbf{H}(\psi(t'), \mathbf{x}(t'), u) - \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u).$$

Будем теперь считать, что t' приближается к t, оставаясь больше t, так что разность $t'-t$ положительна. Тогда деление на $t'-t$ не меняет направления знака неравенства в последнем соотношении:

$$\frac{\mathbf{m}(\psi(t'), \mathbf{x}(t')) - \mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t))}{t'-t} \geqslant \frac{\mathbf{H}(\psi(t'), \mathbf{x}(t'), u) - \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u)}{t'-t}.$$

Переходя к пределу при $t' \to t$ $(t' > t)$, получаем отсюда:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t)) \geqslant \frac{d}{dt}\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u) = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi_\alpha} \cdot \frac{d\psi_\alpha(t)}{dt} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{dx^\alpha(t)}{dt} = 0$$

(здесь производные вычисляются в точке t, а u фиксировано). Аналогично, при $t' \to t$, $t' < t$, получаем обратное неравенство:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t)) \leqslant 0.$$

Итак, функции $\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ (а также и совпадающая с ней функция $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$) есть абсолютно непрерывная функция, имеющая почти всюду производную, равную нулю. Следовательно, эта функция постоянна на отрезке I.

16. Предельный конус. Докажем следующее важное свойство конусов $\mathbf{K}_\tau$:

ЛЕММА 8. *Если τ и τ' — правильные точки управления $u(t)$, причем $\tau' < \tau$, то $A_{\tau', \tau}(\mathbf{K}_{\tau'}) \subset \mathbf{K}_\tau$, где $A_{\tau', \tau}$ — отображение пространства $\mathbf{X}_{\tau'}$ на $\mathbf{X}_\tau$, определенное в п. 4.*

В самом деле, конус $\mathbf{K}_{\tau'}$ образован векторами, каждый из которых, в силу (26), можно представить в виде суммы двух векторов:

$$\Delta_1 \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau'), u(\tau'))\,\delta t,$$

$$\Delta_2 \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{s} A_{\tau_i, \tau'}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), v_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), u(\tau_i))]\,\delta t_i.$$

Поэтому нам достаточно показать, что имеют место включения

$$A_{\tau', \tau}(\Delta_1 \mathbf{x}) \in \mathbf{K}_\tau, \qquad A_{\tau', \tau}(\Delta_2 \mathbf{x}) \in \mathbf{K}_\tau. \tag{44}$$

Мы имеем в силу (10):

$$A_{\tau', \tau}(\Delta_2 \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{s} A_{\tau_i, \tau}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), v_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), u(\tau_i))]\,\delta t_i,$$

и потому второе из включений (44) имеет место (ибо $\tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_s \leqslant \tau' < \tau$). Докажем первое из этих включений. Допустим, что (при некотором δt) вектор $A_{\tau', \tau}(\Delta_1 \mathbf{x})$ не принадлежит конусу $\mathbf{K}_\tau$. Тогда существует гиперплоскость, разделяющая их, т. е. существуют такие числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$, что конус $\mathbf{K}_\tau$ расположен в отрицательном полупространстве $a_\alpha x^\alpha \leqslant 0$, а вектор $A_{\tau', \tau}(\Delta_1 \mathbf{x})$ — в открытом положительном полупространстве, т. е.

$$(\mathbf{a}, A_{\tau', \tau}(\Delta_1 \mathbf{x})) > 0, \tag{45}$$

где $\mathbf{a}$ — вектор $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$.

Обозначим через $\psi(t, \mathbf{a})$ решение системы (13) с начальным условием $\psi(\tau, \mathbf{a}) = \mathbf{a}$. Это решение мы будем рассматривать на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$. Так как конус $\mathbf{K}_\tau$ расположен в отрицательном пространстве, т. е. выполнено условие (38), то из лемм 5, 7 и 6 вытекает, что

$$\mathbf{M}(\psi(t, \mathbf{a}), \mathbf{x}(t)) \equiv 0$$

при $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$. Так как, далее, τ' — правильная точка (лежащая на отрезке $t_0 < t \leqslant \tau$), то, согласно лемме 5,

$$\mathbf{H}(\psi(\tau', \mathbf{a}), \mathbf{x}(\tau'), u(\tau')) = \mathbf{M}(\psi(\tau', \mathbf{a}), \mathbf{x}(\tau')) = 0,$$

т. е.

$$(\psi(\tau', \mathbf{a}), \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau'), u(\tau'))) = 0.$$

Отсюда, согласно лемме 1, мы получаем соотношение

$$(\psi(\tau, \mathbf{a}), A_{\tau', \tau}(\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau'), u(\tau'))) = 0,$$

противоречащее неравенству (45). Полученное противоречие и доказывает лемму 8.

Пусть теперь τ — произвольная правильная точка управления $u(t)$, лежащая на интервале $t_0 < t < t_1$. Положим $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)} = A_{\tau, t_1}(\mathbf{K}_\tau)$. Так как A_{τ, t_1} есть линейное отображение, то $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}$ есть выпуклый конус пространства $\mathbf{X}_{t_1}$. Конусы $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}$ образуют возрастающую последовательность: если $\tau' < \tau$ — правильные точки, то в силу леммы 8 имеем [см. (10)]:

$$\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau')} = A_{\tau', t_1}(\mathbf{K}_{\tau'}) = A_{\tau, t_1}(A_{\tau', \tau}(\mathbf{K}_{\tau'})) \subset A_{\tau, t_1}(\mathbf{K}_\tau) = \mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}.$$

Поэтому объединение (по всем правильным точкам τ интервала $t_0 < t < t_1$) всех конусов $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}$ снова есть выпуклый конус (возможно не замкнутый) пространства $\mathbf{X}_{t_1}$ (с вершиной в начале). Этот конус мы обозначим через $\mathbf{K}_{t_1}$ и назовем *предельным конусом*.

ЛЕММА 9. *Если управление $u(t)$ и соответствующая траектория $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, оптимальны, то луч L_{t_1}, исходящий из точки $\mathbf{x}(t_1)$ в направлении отрицательной оси x^0, не принадлежит внутренности конуса $\mathbf{K}_{t_1}$.*

В самом деле, пусть луч L_{t_1} принадлежит внутренности конуса $\mathbf{K}_{t_1}$. Выберем выпуклый многогранник M, целиком лежащий в $\mathbf{K}_{t_1}$ и содержащий какую-либо точку $l \in L_{t_1}$ внутри себя. Каждая вершина многогранника M принадлежит конусу $\mathbf{K}_{t_1}$, т е. принадлежит некоторому конусу $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}$, а так как конусы $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}$ образуют возрастающую последовательность, то найдется такая правильная точка τ, что все вершины многогранника M принадлежат конусу $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}$. Следовательно, конус $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}$

содержит весь многогранник M, так что точка l является внутренней точкой конуса $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}$, или, что то же самое, луч L_{t_1} принадлежит внутренности конуса $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}$. Но тогда луч $A_{\tau, t_1}^{-1}(L_{t_1})$ принадлежит внутренности конуса

$$A_{\tau, t_1}^{-1}(\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}) = \mathbf{K}_\tau$$

(ибо A_{τ, t_1}^{-1} есть линейное невырожденное, следовательно, гомеоморфное, отображение). Луч же $A_{\tau, t_1}^{-1}(L_{t_1})$ совпадает с лучом L_τ, исходящим из точки $\mathbf{x}(\tau)$ в направлении отрицательной оси x^0. Это вытекает из того, что уравнения в вариациях (9) не содержат в своих правых частях переменного x^0, и потому равные между собой векторы $\{-1, 0, 0, \ldots, 0\}$, исходящие из точек кривой $\mathbf{x}(t)$, получаются друг из друга переносом вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$. Итак, луч L_τ принадлежит внутренности конуса $\mathbf{K}_\tau$, а это противоречит оптимальности управления $u(t)$ (см. лемму 4).

17. Доказательство принципа максимума. Переходим к завершению доказательства теоремы 1. Пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — оптимальное управление, а $\mathbf{x}(t)$ — соответствующая ему оптимальная траектория. Тогда луч L_{t_1} не принадлежит внутренности предельного конуса $\mathbf{K}_{t_1}$ (лемма 9), и потому существует разделяющая их гиперплоскость, т. е. существуют такие числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$, что весь конус $\mathbf{K}_{t_1}$ лежит в полупространстве $c_\alpha x^\alpha \leqslant 0$, а луч L_{t_1} — в полупространстве $c_\alpha x^\alpha \geqslant 0$. Иначе говоря, вектор $\{-1, 0, 0, \ldots, 0\}$, имеющий направление луча L_{t_1}, лежит в полупространстве $c_\alpha x^\alpha \geqslant 0$, т. е. $c_0 \leqslant 0$.

Обозначим через $\psi(t) = \{\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\}$ решение системы (13) с начальным условием $\psi(t_1) = \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — вектор $\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$. Так как система (13) линейна, то решение $\psi(t)$ определено на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Покажем, что вектор $\psi(t)$ и является тем вектором, существование которого утверждается в теореме 1.

Прежде всего, $\mathbf{x}(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют уравнениям (6) и (13), или, что то же самое, (14) и (15). Докажем, что соотношение (16) имеет место во всякой правильной точке интервала $t_0 < t < t_1$. Пусть τ — правильная точка, лежащая на этом интервале. Так как весь конус $\mathbf{K}_{t_1}$, а следовательно, и конус $A_{\tau, t_1}(\mathbf{K}_\tau)$ лежит в отрицательном полупространстве $\psi_\alpha(t_1) x^\alpha \leqslant 0$, то (совершая перенос вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$ из точки $\mathbf{x}(t_1)$ в точку $\mathbf{x}(\tau)$) мы получаем, что весь конус

$$A_{\tau, t_1}^{-1}(A_{\tau, t_1}(\mathbf{K}_\tau)) = \mathbf{K}_\tau$$

лежит в полупространстве $\psi_\alpha(\tau) x^\alpha \leqslant 0$ (см. п. 5). Иначе говоря, вектор $\mathbf{a} = \psi(\tau)$ удовлетворяет условию (38). Отсюда вытекает, что для решения $\psi(t, \mathbf{a})$ уравнения (13) с начальным условием $\psi(\tau, \mathbf{a}) = \psi(\tau)$, — а это решение, очевидно, совпадает с $\psi(t)$ — справедливо утверждение леммы 5. В частности (в силу того, что τ — правильная точка),

$$\mathbf{H}(\psi(\tau), \mathbf{x}(\tau), u(\tau)) = \mathbf{M}(\psi(\tau), \mathbf{x}(\tau)) = 0$$

(см. лемму 6).

Итак, условия 1) и 2), указанные в теореме 1, выполняются. Кроме того, есть точки, в которых функция $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ обращается в нуль (это будет во всякой правильной точке τ), и, далее, $\psi_0(t_1) = c_0 \leqslant 0$. Поэтому для проверки условия 3) теоремы 1 достаточно доказать послед-

нее утверждение теоремы 1 о постоянстве функций $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ и $\psi_0(t)$, если выполнены условия 1) и 2). Это непосредственно вытекает из леммы 7 и того факта, что функции f^α не зависят от x^0, так что первое из уравнений (13) имеет вид

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0.$$

Таким образом, теорема 1 (и теорема 2) полностью доказана.

18. Условия трансверсальности. В этом пункте мы рассматриваем оптимальные задачи с подвижными концами. Пусть S_0 и S_1 — гладкие непересекающиеся многообразия (произвольных размерностей r_1, r_2, каждая из которых не превосходит $n-1$), расположенные в пространстве X. Поставим задачу *найти такое допустимое управление* $u(t)$, *которое некоторую (заранее не заданную) точку* $x_0 \in S_0$ *переводит в некоторую точку* $x_1 \in S_1$ *и при этом придает функционалу* (4) *минимальное значение*. Эту задачу мы и будем называть оптимальной задачей с подвижными концами. Если оба многообразия S_0, S_1 вырождаются в точки, то задача с подвижными концами обращается в прежнюю, уже решенную нами задачу (*задачу с закрепленными концами*).

Ясно, что если бы точки x_0, x_1 были известны, то мы имели бы задачу с закрепленными концами. Отсюда следует, что управление $u(t)$, оптимальное в смысле задачи с подвижными концами, оптимально и в прежнем смысле, т. е. принцип максимума (теоремы 1, 2) остается в силе и для задачи со свободными концами. Однако в этом случае нужно иметь еще соотношения, из которых можно было бы определить положение точек x_0, x_1 на многообразиях S_0, S_1. Такими соотношениями и являются выводимые в этом пункте условия трансверсальности.

Пусть $x_0 \in S_0$, $x_1 \in S_1$ — некоторые точки, а T_0 и T_1 — касательные плоскости многообразий S_0 и S_1, проведенные в этих точках. Плоскости T_0 и T_1 расположены в пространстве X, а следовательно, и в пространстве $\mathbf{X}$ (мы считаем, что $X \subset \mathbf{X}$, отождествляя точку $(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in X$ с точкой $(0, x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbf{X}$). Пусть, далее, $u(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — решение оптимальной задачи с закрепленными концами x_0 и x_1. Обозначим через $\mathbf{T}_0$ и $\mathbf{T}_1$ плоскости, параллельные T_0 и T_1 и проходящие через точки $\mathbf{x}(t_0)$ и $\mathbf{x}(t_1)$ соответственно. Наконец, пусть $\psi(t)$ — вектор, существование которого утверждается в теореме 1. Мы будем говорить, что вектор $\psi(t)$ *удовлетворяет условию трансверсальности в правом конце* траектории $\mathbf{x}(t)$ (т. е. в точке $\mathbf{x}(t_1)$), если плоскость $\mathbf{T}_1$ целиком содержится в гиперплоскости $\psi_\alpha(t_1)x^\alpha = 0$ (напомним, что эта гиперплоскость предполагается проходящей через точку $\mathbf{x}(t_1)$, через которую также проходит и плоскость $\mathbf{T}_1$). Иначе говоря, условие трансверсальности означает, что для любого вектора $\theta = \{0, \theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n\}$, принадлежащего (или параллельного) плоскости T_1, выполнено соотношение $(\psi(t_1), \theta) = 0$. Аналогичный смысл имеет условие трансверсальности в *левом* конце траектории $\mathbf{x}(t)$ (нужно лишь заменить t_1, T_1 и $\mathbf{T}_1$ на t_0, T_0 и $\mathbf{T}_0$ соответственно).

Пользуясь условиями трансверсальности, можно сформулировать решение задачи с подвижными концами.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — *допустимое управление, пере-*

*водящее некоторую фиксированную точку x_0 в точку $x_1 \in S_1$, а $\mathbf{x}(t)$ — соответствующая траектория (исходящая из точки $\mathbf{x}_0 = (0, x_0)$). Для того чтобы $u(t)$ и $\mathbf{x}(t)$ давали решение оптимальной задачи с подвижным правым концом, необходимо, чтобы существовал вектор $\psi(t)$, удовлетворяющий условиям, указанным в теореме 1, и, кроме того, условию трансверсальности * в точке $\mathbf{x}(t_1)$.*

Разумеется, если многообразие S_1 вырождается в точку, то условие трансверсальности заменяется условием прохождения траектории $\mathbf{x}(t)$ через эту точку.

Докажем теорему 3. Проведем через каждую точку плоскости $\mathbf{T}_1$ луч, идущий в направлении отрицательной полуоси x^0, и обозначим множество точек, заполняемое всеми этими лучами, через Q_1. Множество Q_1 представляет собой полуплоскость; ее граничными точками являются точки плоскости $\mathbf{T}_1$.

ЛЕММА 10. *Если некоторый луч L, исходящий из точки $\mathbf{x}(t_1)$ и принадлежащий полуплоскости Q_1, является внутренним лучом предельного конуса $\mathbf{K}_{t_1}$, то управление $u(t)$ и траектория $\mathbf{x}(t)$ не являются оптимальными.*

В самом деле, допустим, что в полуплоскости Q_1 существует луч L^*, являющийся внутренним лучом конуса $\mathbf{K}_{t_1}$. Так как всякий луч, достаточно близкий к L^*, также является внутренним лучом конуса $\mathbf{K}_{t_1}$, то мы можем без ограничения общности считать, что луч L^* проходит внутри полуплоскости Q_1, т. е. имеет с $\mathbf{T}_1$ лишь одну общую точку $\mathbf{x}(t_1)$. Возьмем вектор l, имеющий направление луча L^*, и представим его в виде суммы двух векторов l_0 и s, где l_0 параллелен оси x^0, а s параллелен подпространству $X \subset \mathbf{X}$. Тогда вектор l_0 идет в направлении отрицательной полуоси x^0, а вектор s параллелен плоскости T_1 (и плоскости $\mathbf{T}_1$). Поэтому на многообразии S_1 существует дифференцируемая кривая, исходящая из точки x_1 и касающаяся вектора s. Пусть

$$\xi(\varepsilon) = (\xi^1(\varepsilon), \xi^2(\varepsilon), \ldots, \xi^n(\varepsilon)), \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0,$$

—параметрическая запись этой кривой. Без ограничения общности мы можем считать параметр ε выбранным на кривой так, что

$$\left.\frac{d\xi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = s.$$

Обозначим через $\xi(\varepsilon)$ точку с координатами $(x^0(t_1) - \varepsilon \cdot |l_0|, \xi^1(\varepsilon), \xi^2(\varepsilon), \ldots, \xi^n(\varepsilon))$. Кривая $\xi(\varepsilon)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, исходит из точки $\mathbf{x}(t_1)$, а ее касательный вектор в точке $\mathbf{x}(t_1)$, как легко видеть, равен $l_0 + s = l$, т. е. луч, касающийся кривой $\xi(\varepsilon)$ в точке $\mathbf{x}(t_1)$, совпадает с L^*. Далее мы можем написать:

$$\xi(\varepsilon) = \mathbf{x}(t_1) + l\varepsilon + \ldots. \tag{46}$$

Так как луч L^* является внутренним для конуса $\mathbf{K}_{t_1}$, то найдется такая правильная точка τ управления $u(t)$, что луч L^* является внутрен-

* Можно доказать, что если оба конца подвижны ($x_0 \in S_0$, $x_1 \in S_1$), то для оптимальности необходимо существование вектора $\psi(t)$, удовлетворяющего условию трансверсальности в обоих концах траектории $\mathbf{x}(t)$.

ним для конуса $A_{\tau,t_1}(\mathbf{K}_\tau)$ (ср. п. 16). Выберем такую точку τ. Обозначим через $\mathbf{y}(t,\varepsilon)$ решение уравнения (7) с тем же управлением $u(t)$ и начальным условием $\mathbf{y}(t_1,\varepsilon)=\xi(\varepsilon)$. Мы будем рассматривать это решение на отрезке $\tau\leqslant t\leqslant t_1$, где τ — выбранная правильная точка управления $u(t)$. В силу теоремы о дифференцируемости решений по параметрам, функция $\mathbf{y}(t,\varepsilon)$ дифференцируема по ε, причем имеет место соотношение (см. п. 4 и формулу (46))

$$\left.\frac{d\mathbf{y}(\tau,\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=A^{-1}_{\tau,t_1}(l).$$

Иначе говоря, луч L^*_τ, касательный к кривой $\mathbf{y}(\tau,\varepsilon)$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, совпадает с лучом $A^{-1}_{\tau,t_1}(L^*)$, т. е. $A_{\tau,t_1}(L^*_\tau)=L^*$.

Таким образом, луч $A_{\tau,t_1}(L^*_\tau)$ является внутренним для конуса $A_{\tau,t_1}(\mathbf{K}_\tau)$, и потому луч L^*_τ является внутренним для конуса $\mathbf{K}_\tau$. Из этого (так как кривая $\mathbf{y}(t,\varepsilon)$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, касается луча L^*_τ), в силу леммы 3, можно заключить, что существует такое управление $u_*(t)$, для которого соответствующая траектория $\mathbf{x}_*(t)$, исходящая из точки $\mathbf{x}_0$, проходит через некоторую (отличную от $\mathbf{x}(\tau)$) точку линии $\mathbf{y}(\tau,\varepsilon)$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$. Иначе говоря, существуют такие $t'>t_0$ и $\varepsilon'>0$, что

$$\mathbf{x}_*(t')=\mathbf{y}(\tau,\varepsilon'). \tag{47}$$

Определим управление $u_{**}(t)$ на отрезке $t_0\leqslant t\leqslant t_1+(t'-\tau)$, положив

$$u_{**}(t)=\begin{cases} u_*(t) & \text{при } t_0\leqslant t\leqslant t',\\ u(t-(t'-\tau)) & \text{при } t'<t\leqslant t_1+(t'-\tau).\end{cases}$$

Траектория $\mathbf{x}_{**}(t)$, соответствующая управлению $u_{**}(t)$ и исходящая из точки $\mathbf{x}_0$, имеет, очевидно, следующий вид [ср. (47)]:

$$\mathbf{x}_{**}(t)=\begin{cases} \mathbf{x}_*(t) & \text{при } t_0\leqslant t\leqslant t',\\ \mathbf{y}(t-(t'-\tau),\varepsilon') & \text{при } t'<t\leqslant t_1+(t'-\tau).\end{cases}$$

В частности,

$$\mathbf{x}_{**}(t_1+(t'-\tau))=\mathbf{y}(t_1,\varepsilon')=\xi(\varepsilon').$$

Но так как точка $\xi(\varepsilon')$ имеет координату x^0, равную $x^0(t_1)-\varepsilon'|l_0|$, т. е. меньшую чем $x^0(t_1)$, то управление $u_{**}(t)$ переводит точку x_0 в точку $\xi(\varepsilon')\in S_1$ и для него функционал (4) принимает меньшее значение, чем для управления $u(t)$. Таким образом, управление $u(t)$ и траектория $\mathbf{x}(t)$ не оптимальны, и лемма 10 доказана.

Теперь уже нетрудно закончить доказательство теоремы 3. Предельный конус $\mathbf{K}_{t_1}$ и полуплоскость Q_1 являются выпуклыми конусами пространства $\mathbf{X}$ с общей вершиной в точке $\mathbf{x}(t_1)$. В силу леммы 10, внутренность конуса $\mathbf{K}_{t_1}$ не пересекается с конусом Q_1; конус же Q_1 совсем не содержит внутренних точек, так как размерность многообразия S_1 меньше n, и, следовательно, размерность полуплоскости Q_1 меньше $n+1$, т. е. меньше размерности пространства $\mathbf{X}$. Итак, каждый из конусов K_{t_1}, Q_1 не пересекается с внутренностью другого, и потому существует разделяющая их гиперплоскость, т. е. существуют такие числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$, что весь конус $\mathbf{K}_{t_1}$ лежит в полупространстве $c_\alpha x^\alpha\leqslant 0$ (где x^0,

$x^1, \ldots, x^n$ — координаты в пространстве $\mathbf{X}_{t_1}$), а конус Q_1 — в полупространстве $c_\alpha x^\alpha \geqslant 0$. В частности, луч L_{t_1} (лежащий в полупространстве Q_1) расположен в полупространстве $c_\alpha x^\alpha \geqslant 0$. Таким образом, числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$ обладают всеми свойствами, указанными в п. 17, и потому решение $\psi(t) = \{\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\}$ системы (13) с начальным условием $\psi(t_1) = \mathbf{c}$ (где $\mathbf{c}$ — вектор $\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$) удовлетворяет условиям, указанным в теореме 1.

Далее, плоскость $\mathbf{T}_1$ (содержащаяся в Q_1) расположена целиком в полупространстве $c_\alpha x^\alpha \geqslant 0$, а следовательно, в гиперплоскости $c_\alpha x^\alpha = 0$, или, что то же самое, в гиперплоскости $\psi_\alpha(t_1) x^\alpha = 0$. Таким образом, вектор $\psi(t)$ удовлетворяет условию трансверсальности в правом конце траектории $\mathbf{x}(t)$.

19. Принцип максимума для неавтономных систем. В этом и следующих пунктах мы рассмотрим некоторые оптимальные задачи, решение которых получается либо в качестве следствия из предыдущих результатов, либо при помощи незначительных видоизменений проведенных выше рассуждений.

Прежде всего рассмотрим оптимальную задачу такого же вида, как и (1), (4), но в случае, когда функции f^α явно зависят от времени (пространство U предполагается не зависящим от времени). Таким образом, закон движения объекта и функционал, минимум которого ищется, принимают в рассматриваемом случае вид:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{48}$$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)\, dt. \tag{49}$$

Введя, как и прежде, новую координату

$$x^0 = \int_{t_0}^{t} f^0(x(t), u(t), t)\, dt,$$

мы сформулируем рассматриваемую задачу в следующей форме (ср. п. 3):

В $(n+1)$-мерном фазовом пространстве $\mathbf{X}$ *даны точка* $\mathbf{x}_0 = (0, x_0)$ *и прямая* Π, *параллельная оси* x^0 *и проходящая через точку* $(0, x_1)$. *Среди всех допустимых управлений* $u = u(t)$, *обладающих тем свойством, что решение* $\mathbf{x}(t)$ *системы*

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, t), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{50}$$

с начальным условием $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *пересекает прямую* Π, *найти такое, для которого точка пересечения с прямой* Π *имеет наименьшую координату* x^0.

Для решения этой задачи введем еще одно вспомогательное неизвестное x^{n+1}, изменяющееся по закону

$$\frac{dx^{n+1}}{dt} = 1, \quad x^{n+1}(t_0) = t_0.$$

Очевидно, что $x^{n+1} \equiv t$. С помощью неизвестного x^{n+1} система (50) может быть записана в виде следующей автономной системы (т. е. системы

у которой правые части не зависят от t):

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, x^{n+1}), & i = 0, 1, \ldots, n, \\ \dfrac{dx^{n+1}}{dt} = 1. \end{cases}$$

При этом мы должны найти оптимальную траекторию, соединяющую точку $(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n, t_0)$ с некоторой точкой прямой S_1, проходящей через точку $(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n, 0)$ параллельно оси x^{n+1} (ибо конечное значение переменного x^{n+1}, т. е. момент времени, когда движущаяся точка приходит в положение x_1, не является заранее заданным). Таким образом, мы получаем обычную оптимальную задачу с закрепленным левым и подвижным правом концом.

Напишем принцип максимума и условие трансверсальности для полученной задачи. Сопряженная система уравнений имеет вид (суммирование по α от 0 до n):

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\psi_\alpha, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{51}$$

$$\frac{d\psi_{n+1}}{dt} = -\frac{\partial f^\alpha}{\partial t}\psi_\alpha. \tag{52}$$

Согласно теоремам 1 и 3, для решения рассматриваемой задачи нужно составить функцию

$$\psi_0 f^0(x, u, x^{n+1}) + \psi_1 f^1(x, u, x^{n+1}) + \ldots + \psi_n f^n(x, u, x^{n+1}) + \psi_{n+1}\cdot 1.$$

Эту функцию мы обозначим через $\mathbf{H}^*$ (а не через $\mathbf{H}$, как в теореме 1), сохранив обозначение $\mathbf{H}$ для функции

$$\mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u, t) = \psi_0 f^0(x, u, t) + \psi_1 f^1(x, u, t) + \ldots + \psi_n f^n(x, u, t).$$

Точно так же максимум по u функции $\mathbf{H}^*$ при фиксированных x^i, ψ_i мы обозначим через $\mathbf{M}^*(\psi, \mathbf{x}, x^{n+1})$ (а не через $\mathbf{M}$, как в теореме 1), сохранив обозначение $\mathbf{M}(\psi, \mathbf{x}, t)$ для максимума (по u) функции $\mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u, t)$ при фиксированных $\psi, \mathbf{x}, t$. Таким образом, учитывая соотношение $x^{n+1} \equiv t$, мы можем написать:

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H} + \psi_{n+1}, \qquad \mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \psi_{n+1},$$

и потому соотношение $\mathbf{H}^*(=)\mathbf{M}^* \equiv 0$, выполняющееся вдоль оптимальной траектории (см. теорему 1), принимает вид:

$$\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t), t)(=)\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t), t) \equiv -\psi_{n+1}(t). \tag{53}$$

Наконец, условие трансверсальности в правом конце траектории показывает, что прямая S_1 (параллельная оси x^{n+1}) содержится в плоскости $\psi_\rho(t_1)x^\rho = 0$ (суммирование по ρ от 0 до $n+1$). Иначе говоря,

$$\psi_{n+1}(t_1) = 0.$$

Вместе с соотношениями (53), (52) это дает:

$$\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t), t) = \int_{t_1}^{t} \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), t)}{\partial t}\psi_\alpha(t)\,dt.$$

Итак, мы получаем следующую теорему (принцип максимума для неавтономных систем):

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $u(t)$ — такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория $\mathbf{x}(t)$ системы* (50), *исходящая в момент t_0 из точки $\mathbf{x}_0$, проходит в момент $t_1 > t_0$ через некоторую точку прямой* П. *Для оптимальности управления $u(t)$ и соответствующей ему траектории $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, необходимо существование такого ненулевого абсолютно непрерывного вектора $\psi(t) = \{\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\}$, что:*

1) *величины $\mathbf{x}(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$ удовлетворяют гамильтоновой системе*

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi_i}, \qquad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^i} \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

или, что то же самое, системе (50), (51);

2) *почти для всех $t, t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, функция $\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u, t)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума:*

$$\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t), t) (=) \mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t), t);$$

3) *выполнены соотношения*

$$\psi_0(t) = \text{const} \leqslant 0, \qquad \mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t), t) = \int_{t_1}^{t} \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), t)}{\partial t} \psi_\alpha(t)\, dt. \tag{54}$$

Если величины $\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)$ удовлетворяют условиям 1) *и* 2), *то функция $\psi_0(t)$ переменного t постоянна, а функция $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t), t)$ может лишь на константу отличаться от интеграла, указанного в соотношениях* (54), *так что проверку соотношений* (54) *достаточно произвести лишь в какой-либо один момент времени t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$; например, вместо* (54) *достаточно проверить соотношения*

$$\psi_0(t_1) \leqslant 0, \qquad \mathbf{M}(\psi(t_1), \mathbf{x}(t_1), t_1) = 0. \tag{55}$$

Если теперь предположить, что точка x_1, в которую точка x_0 должна переводиться с помощью управления $u(t)$, не неподвижна, а перемещается, т. е. $x_1 = x_1(t)$, то формулировка теоремы 4 несколько меняется. Именно, пусть $u(t)$ — такое допустимое управление, которое точку x_0 в некоторый момент времени t_1 переводит в точку $x_1(t_1)$, и пусть

$$\left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{t=t_1} = \{q^1, q^2, \ldots, q^n\}$$

— касательный вектор к кривой $x_1(t)$ в момент t_1. Тогда, после введения вспомогательного переменного $x^{n+1} = t$, мы получим, что многообразие S_1 будет уже не прямой, параллельной оси x^{n+1}, а линией $(x_1^1(\theta), x_1^2(\theta), \ldots, x_1^n(\theta), \theta)$, где θ — параметр. Касательная прямая к этой линии в точке $\theta = t_1$ определяется вектором $\{q^1, q^2, \ldots, q^n, 1\}$, и потому условие трансверсальности принимает вид

$$\psi_\nu(t_1) q^\nu + \psi_{n+1}(t_1) \cdot 1 = 0.$$

Отсюда, учитывая соотношение (53), находим:

$$\mathbf{M}(\psi(t_1), \mathbf{x}(t_1), t_1) = -\psi_{n+1}(t_1) = \psi_\nu(t_1) q^\nu.$$

Так как, согласно (53) и (52), функция $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t), t)$ является первообразной для $\frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), t)}{\partial t} \psi_\alpha(t)$, то мы получаем:

$$\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t), t) = \psi_\nu(t_1) q^\nu + \int_{t_1}^{t} \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), t)}{\partial t} \psi_\alpha(t)\, dt. \tag{56}$$

Это и есть соотношение, которым заменяется равенство (54) в формулировке теоремы 4; в связи с этим соотношение (55) принимает вид

$$\psi_0(t_1) \leqslant 0, \quad \mathbf{M}(\psi(t_1), \mathbf{x}(t_1), t_1) = \psi_\nu(t_1) q^\nu. \tag{57}$$

В остальном формулировка теоремы 4 сохраняется.

Наконец, рассмотрим неавтономную оптимальную задачу с подвижными концами. Ограничимся случаем подвижного правого конца. Пусть $S_1(t)$ — перемещающееся многообразие, дифференцируемым образом зависящее от t и внутренних координат на этом многообразии. Задача заключается в отыскании такого допустимого управления $u(t)$, что точка, движущаяся по закону (48) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, попадает в некоторый момент t_1 на многообразие $S(t_1)$, причем осуществляется минимум функционала (49) при этих условиях. Обозначим через T_1 касательную плоскость многообразия $S(t_1)$ в точке $x(t_1)$, а через $\mathbf{T}_1$ — параллельную ей плоскость, проходящую через точку $\mathbf{x}(t_1)$. Далее, обозначим через S_1^* множество всех точек $(n+1)$-мерного пространства $(x^1, x^2, \ldots, x^n, t)$, для которых точка $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ принадлежит многообразию $S(t)$. Ясно, что S_1^* является (r_1+1)-мерным многообразием (где r_1 — размерность многообразия $S(t)$). Так как множество всех векторов, касательных к многообразию S_1^* в точке $(x(t_1), t_1)$ и имеющих вид $\{q^1, q^2, \ldots, q^n, 0\}$, имеет размерность r_1, а многообразие S_1^* имеет размерность $> r_1$, то существуют такие числа $q^1, q^2, \ldots, q^n$, что вектор $\{q^1, q^2, \ldots, q^n, 1\}$ касается многообразия S_1^* (в точке $(x(t_1), t_1)$). Эти числа $q^1, q^2, \ldots, q^n$ дадут нам возможность написать соотношения (56), (57), которым должен удовлетворять вектор $\psi(t)$. Наконец, как и в п. 18, будем говорить, что вектор $\psi(t) = \{\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\}$ удовлетворяет условию трансверсальности в точке t_1, если плоскость $\mathbf{T}_1$ расположена целиком в гиперплоскости $\psi_\alpha(t_1) x^\alpha = 0$. При этих условиях имеет место следующее предложение (обобщение теоремы 3 на неавтономный случай):

Для того чтобы $u(t)$ и $\mathbf{x}(t)$ давали решение оптимальной неавтономной задачи с подвижным правым концом, необходимо, чтобы существовал вектор $\psi(t)$, удовлетворяющий условиям, указанным в теореме 4, с заменой соотношений (54), (55) *соотношениями* (56), (57) *и, кроме того, условию трансверсальности в точке t_1.*

Это утверждение легко вытекает из теоремы 3 после введения новой переменной $x^{n+1} = t$ (ср. доказательство теоремы 4).

Отметим, что если многообразие S_1 неподвижно, то соотношения (56), (57) совпадают с (54), (55), так как в этом случае вектор $\{0, 0, \ldots, 0, 1\}$ касается многообразия S_1^*.

20. Задача с закрепленным временем. Предположим теперь, что рассматривается такая же оптимальная задача, что и в п. 2 (или в п. 19, т. е. с зависимостью функций f^α от времени), но с условием, что время t_0 начала движения точки (из положения x_0) и время t_1 ее попадания в точку x_1 заданы заранее, так что время $t_1 - t_0$ закреплено. Решение этой задачи мы легко получим из предыдущих рассмотрений. Именно, мы условимся рассматривать лишь такие символы

$$\mathfrak{a} = \{\tau \quad v_i, \tau, \delta t_i, \delta t\},$$

для которых $\delta t = 0$. Тогда все рассуждения предыдущих пунктов, приведшие нас к доказательству принципа максимума, сохраняются и даже несколько упрощаются. Например, доказательство соотношения $A_{\tau',\tau}(\Delta_1 \mathbf{x}) \in \mathbf{K}_\tau$ (см. (44)) становится просто излишним, так как в рассматриваемом случае $\Delta_1 \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau'), u(\tau'))\,\delta t = 0$. Единственной формулой, которая перестает быть справедливой, является формула (39), при доказательстве которой существенно предполагалось, что δt может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В соответствии с этим мы уже не можем утверждать, что $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t)) \equiv 0$, хотя по-прежнему $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t)) = \text{const}$. Все же остальные положения теоремы 1 полностью сохраняются, так что мы получаем следующее предложение.

Пусть $u(t), t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — допустимое управление, для которого соответствующая траектория $x(t)$, исходящая в момент времени t_0 из точки x_0, удовлетворяет условию $x(t_1) = x_1$. Для того чтобы $u(t)$ давало решение поставленной оптимальной задачи с закрепленным временем, необходимо, чтобы существовал такой абсолютно непрерывный вектор $\psi(t) = \{\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots \psi_n(t)\}$, что:

1) *величины $\mathbf{x}(t), \psi(t), u(t)$ удовлетворяют гамильтоновой системе*

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi_i}, \quad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^i} \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

или, что то же самое, системе

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, t), \quad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\psi_\alpha \quad (i = 0, 1, \ldots, n);$$

2) *почти для всех t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, функция $\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума:*

$$\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) (=) \mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t));$$

3) *функция $\psi_0(t)$ неположительна (что достаточно проверить лишь в какой-либо одной точке отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, так как, на основании условия 1), $\psi_0 = \text{const}$).*

Отметим, что эта теорема в такой же степени решает задачу с закрепленным временем, в какой теорема 1 решает задачу с незакрепленным временем. Уменьшение числа условий на одно (а именно, отсутствие, по сравнению с теоремой 1, условия $\mathbf{M}(\psi(t_1), \mathbf{x}(t_1)) = 0$) компенсируется здесь тем, что и число неизвестных уменьшается на единицу, так как время t_1 прохождения траектории через точку x_1 теперь задано.

21. Случай функционала, заданного несобственным интегралом. Рассмотрим теперь следующий вариант оптимальной задачи, сводящийся к рассмотрению бесконечного интервала интегрирования в функционале (4):

*В фазовом пространстве X дана точка x_0. Среди всех допустимых * управлений $u = u(t), t_0 \leqslant t < +\infty$, для которых соответствующая траек-*

* Ограниченность управления $u(t)$, входящая в требование допустимости (см. стр. 4), следует понимать в том смысле, что множество всех точек $u(t)$, где t пробегает любой конечный отрезок, лежащий в промежутке $t_0 \leqslant t < +\infty$, имеет компактное замыкание.

тория $x(t)$ системы (1), *исходящая из точки x_0, удовлетворяет при $t \to \infty$ некоторым (заданным заранее) предельным условиям, найти такое, для которого интеграл*

$$J = \int_{t_0}^{\infty} f^0(x(t), u(t))\, dt \tag{58}$$

сходится и принимает наименьшее возможное значение.

Покажем, что решение этой оптимальной задачи дается той же теоремой 1 (с очевидной заменой отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ бесконечным промежутком $t_0 \leqslant t < +\infty$ и с заменой условия прохождения траектории через некоторую точку прямой П предельными условиями на бесконечности). В самом деле, пусть $u(t)$ — допустимое управление, для которого траектория $x(t)$, исходящая из точки x_0, удовлетворяет наложенным предельным условиям на бесконечности, и интеграл (58) сходится. Как и прежде, будем рассматривать систему уравнений (6). Тогда все рассмотрения пп. 4, 5, 9—15 и лемма 8 (см. п. 16) остаются в силе (с отмеченными выше очевидными изменениями). Однако построение предельного конуса уже не проходит, так как точки t_1 (правого конца отрезка времени) уже не существует. Тем не менее, легко видоизменить конструкцию предельного конуса таким образом, чтобы ее можно было применить и в рассматриваемом случае. В самом деле, обозначим через $\mathbf{K}_{t_0}^{(\tau)}$ выпуклый конус $A_{t_0,\tau}^{-1}(\mathbf{K}_\tau)$. Эти конусы образуют возрастающую последовательность:

$$\mathbf{K}_{t_0}^{(\tau')} \subset \mathbf{K}_{t_0}^{(\tau)} \text{ при } \tau' < \tau.$$

Поэтому объединение (по всем правильным точкам τ) всех конусов $\mathbf{K}_{t_0}^{(\tau)}$ снова есть выпуклый конус (возможно незамкнутый) пространства $\mathbf{X}_{t_0}$. Назовем его *начальным конусом* и обозначим через $\mathbf{K}_{t_0}$. Легко видеть, что (для ранее рассматривавшейся оптимальной задачи (4)) имеет место соотношение

$$A_{t_0,t_1}(\mathbf{K}_{t_0}) = \mathbf{K}_{t_1}.$$

Поэтому начальный конус совершенно эквивалентен предельному, и можно было бы завершение доказательства принципа максимума (пп. 16—17) провести с помощью начального конуса $\mathbf{K}_{t_0}$. При этом лемма 9, как и ее доказательство, остается в силе (с очевидной заменой луча L_{t_1} и конуса $\mathbf{K}_{t_1}$ соответственно на L_{t_0} и $\mathbf{K}_{t_0}$). После этого без труда проводятся и рассуждения п. 17, чем доказательство теоремы 1, проводимое с помощью начального конуса (вместо предельного), и завершается. Но такое доказательство дословно (с заменой отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ промежутком $t_0 \leqslant t < +\infty$) переносится и на случай рассматриваемой оптимальной задачи (58). Тем самым наше утверждение доказано.

Заметим в заключение, что конусы $\mathbf{K}_\tau$ можно было «сносить» не в точку $\mathbf{x}(t_1)$ или в точку $\mathbf{x}(t_0)$, а в любую точку $\mathbf{x}(t)$ рассматриваемой траектории. Поэтому изложенное доказательство применимо и к случаю, когда промежутком интегрирования является вся прямая $-\infty < t < +\infty$.

22. Оптимальные процессы с параметрами. Рассмотрим следующую оптимальную задачу. Функции $f^0, f^1, \ldots, f^n$ зависят от трех переменных $x \in X$, $u \in U$, $w \in W$, где X и U имеют прежний смысл, а W — векторное пространство размерности s. Функции $f^0, f^1, \ldots, f^n$ и их част-

ные производные по переменным $x^1, x^2, \ldots, x^n, w^1, \ldots, w^s$ предполагаются определенными и непрерывными на всем пространстве $X \times U \times W$. Закон движения объекта задается уравнениями

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, w), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В пространстве X заданы две точки x_0 и x_1. Требуется выбрать такую постоянную точку $w_0 \in W$ (т. е. до начала движения подобрать значение параметра w, остающееся постоянным в течение всего движения) и такое допустимое управление $u(t)$, чтобы соответствующая траектория $x(t)$, исходящая в момент t_0 из точки x_0, проходила в некоторый момент t_1 через точку x_1 и чтобы при этом интеграл

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), w_0)\, dt$$

принимал наименьшее возможное значение.

При решении этой задачи мы будем предполагать, что все допустимые функции кусочно-непрерывны, т. е. что класс D допустимых управлений либо совпадает с множеством всех кусочно-непрерывных функций (заданных на U), либо является его подмножеством, удовлетворяющим условиям 1), 2), 3) п. 1. В этих условиях имеет место следующая теорема [см. ([10])], аналогичная теореме 1 (функция $\mathbf{H}$ определяется, как и прежде: $\mathbf{H} = \psi_\alpha f^\alpha$).

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — такое допустимое управление, а $w_0 = (w^1, \ldots, w^s)$ — такое значение параметра w, что соответствующая траектория*

$$\mathbf{x}(t) = (x^0(t), x^1(t), \ldots, x^n(t)) = (x^0(t), x(t))$$

удовлетворяет условиям: $x(t_0) = x_0$, $x^0(t_0) = 0$, $x(t_1) = x_1$. Для того чтобы величины $u(t)$, w_0, $x(t)$ давали решение поставленной оптимальной задачи, необходимо существование такого ненулевого непрерывного кусочно-дифференцируемого вектора $\psi(t) = \{\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\}$, что:

1) *величины $\mathbf{x}(t), \psi(t), u(t)$, w_0 удовлетворяют гамильтоновой системе*

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t), w_0)}{\partial \psi_i}, \\ \frac{d\psi_i}{dt} &= -\frac{\partial \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t), w_0)}{\partial x^i} \end{aligned} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n);$$

2) *всюду, кроме, может быть, точек разрыва* функции $u(t)$, функция $\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u, w_0)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u(t)$ максимума;*

3) *в начальной точке t_0 выполнены соотношения*

$$\psi_0(t_0) \leqslant 0, \quad \mathbf{M}(\psi(t_0), \mathbf{x}(t_0), w_0) = 0;$$

* Так как изменение значений функции $u(t)$ в конечном числе точек не влияет на оптимальность управления $u(t)$, то, полагая в каждой точке разрыва $u(t) = u(t-0)$ или $u(t) = u(t+0)$, мы добьемся того, что функция $\mathbf{H}$ будет всюду на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ достигать максимума:

$$\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t), w_0) \equiv \mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t), w_0), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

4) *имеют место равенства*

$$\psi_\alpha(t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{\partial f^\alpha(x(t),u(t),w_0)}{\partial w^\rho}\,dt=0,\qquad \rho=1,2,\ldots,s.$$

Если величины $\psi(t), \mathbf{x}(t)$, w_0, $u(t)$ *удовлетворяют условиям* 1) *и* 2), *то функции* $\psi_0(t)$ *и* $\mathbf{M}(\psi(t),\mathbf{x}(t),w_0)$ *переменного* t *являются постоянными, так что проверку условия* 3) *можно проводить не обязательно в момент* t_0, *а в любой момент* t, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$.

Эта теорема отличается от теоремы 1 наличием условия 4), которое дает s дополнительных соотношений, что и определяет возможность решения задачи, так как в эту задачу введены дополнительно s неизвестных $w^1, w^2, \ldots, w^s$ (координаты точки w_0 в пространстве W). Отметим некоторую специфику рассматриваемой задачи, заставляющую ограничиваться лишь кусочно-непрерывными (а не произвольными измеримыми) управлениями. В то время как в оптимальной задаче, сформулированной в п. 2, каждый кусок оптимальной траектории снова является оптимальной траекторией (ибо «улучшение» куска траектории ведет к «улучшению» всей траектории, ср. доказательство леммы 4), здесь, в рассматриваемой задаче с параметрами, это будет уже не так. Ведь если мы знаем значение параметра w_0, то мы имеем рассматривавшуюся ранее оптимальную задачу, решаемую теоремой 1. Поэтому если $u(t), w_0$ дают решение поставленной в этом пункте оптимальной задачи, причем управление $u(t)$ определено на отрезке $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, то на меньшем отрезке за счет изменения параметра w_0 возможно удастся «улучшить» управление $u(t)$. Из сказанного следует, что рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 4, не применимы к рассматриваемой оптимальной задаче. Рассуждения, доказывающие теорему 1, можно, однако, применить и здесь, считая в лемме 3 точку τ совпадающей с концевой точкой t_1 (что делает излишним лемму 4). Но для этого приходится считать точку t_1 правильной точкой управления $u(t)$, т. е. в качестве класса допустимых управлений приходится брать управления, правильные в правом конце отрезка. При этих условиях наиболее естественным классом допустимых управлений является класс кусочно-непрерывных управлений (или какой-либо его подкласс).

Укажем, какие изменения нужно произвести в доказательстве теоремы 1, чтобы получить доказательство теоремы 5. Конструкции пп. 4 и 5 сохраняются полностью; надо только помнить, что они проводятся не только при фиксированном управлении $u(t)$, но и при фиксированном значении параметра w_0 (меняются только начальные условия, определяющие решения (8)). Обратимся, далее, к п. 9. Правильными точками управления $u(t)$ являются все его точки непрерывности, т. е. все точки отрезка $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, за исключением конечного числа точек разрыва. Мы продолжим управление $u(t)$ несколько дальше, за правый конец отрезка $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, полагая $u(t)=u(t_1-0)$ при $t>t_1$. Продолженное таким образом управление $u(t)$ непрерывно в точке t_1, так что t_1 является правильной точкой. Далее, точку τ, входящую в определение прсварьированного управления (стр. 15), мы теперь будем считать совпадающей с t_1, т. е. положим $t_0<\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\ldots\leqslant\tau_s\leqslant\tau=t_1$.

Основные изменения произойдут в п. 10. Помимо варьирования управления $u(t)$ мы будем также варьировать параметр w_0. Именно, мы выберем некоторый вектор δw пространства W и через $\mathbf{x}^*(t)$ будем обозначать (при достаточно малом ε) решение системы

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x,\ u^*(t),\ w_0 + \varepsilon\,\delta w),\quad i = 0,\ 1, \ldots, n,$$

т. е. траекторию, соответствующую проварьированному управлению $u^*(t)$ и смещенному значению $w = w_0 + \varepsilon\,\delta w$ параметра w. Мы имеем, очевидно (по ρ предполагается суммирование от 1 до s):

$$\mathbf{x}^*(t_1 + \varepsilon\delta t) = \mathbf{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1+\varepsilon\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),\ u^*(t),\ w_0 + \varepsilon\delta w)\,dt =$$

$$= \mathbf{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1+\varepsilon\delta t} \left[\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),\ u^*(t),\ w_0) + \varepsilon\,\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),\ u^*(t),\ w_0)}{\partial w^\rho}\,\delta w^\rho + \ldots\right] dt =$$

$$= \mathbf{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1+\varepsilon\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),\ u^*(t), w_0)\,dt + \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t_1+\varepsilon\delta t} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),\ u^*(t),\ w_0)}{\partial w^\rho}\,\delta w^\rho\,dt + \ldots =$$

$$= \mathbf{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1+\varepsilon\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),\ u^*(t),\ w_0)\,dt + \varepsilon\left[\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\ u(t),\ w_0)}{\partial w^\rho}\,dt\right]\delta w^\rho + \ldots.$$

Но так как

$$\mathbf{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1+\varepsilon\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),\ u^*(t),\ w_0)\,dt$$

есть точка на траектории, соответствующей измененному управлению $u^*(t)$, но не измененному значению параметра w_0, то к ней применимы формулы (25), (26), так что мы в нашем случае получаем:

$$\mathbf{x}^*(t_1 + \varepsilon\delta t) = \mathbf{x}(t_1) + \varepsilon\Delta\mathbf{x} + \ldots,$$

где

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_1),\ u(t_1),\ w_0)\,\delta t + \sum_{i=1}^{s} A_{\tau_i,\ t_1}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i,\ w_0) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ u(\tau_i),\ w_0)]\,\delta t_i +$$

$$+ \delta w^\rho \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\ u(t),\ w_0)}{\partial w^\rho}\,dt. \tag{59}$$

Такой вид принимают формулы (25), (26) в рассматриваемом случае.

Обратимся теперь к п. 11. Мы включим вектор δw в символ $\mathfrak{a}$, т. е. будем теперь полагать:

$$\mathfrak{a} = \{\tau_i,\ v_i,\ \delta t_i,\ \delta t,\ \delta w\}$$

(мы опустили обозначение точки τ, так как теперь $\tau = t_1$ есть фиксированная точка). Линейная комбинация символов $\mathfrak{a}$ определяется так же, как и раньше, только с учетом последнего аргумента:

$$\lambda'\{\ldots, \delta w'\} + \lambda''\{\ldots, \delta w''\} + \ldots = \{\ldots, \lambda'\delta w' + \lambda''\delta w'' + \ldots\}.$$

После этого рассуждения п. 12 и доказательство леммы 3 (при $\tau = t_1$) проходят без изменения, а лемма 4 становится просто ненужной (ибо

$\tau = t_1$). В результате мы получаем конус достижимости $\mathbf{K}_{t_1}$, для которого справедлива лемма 3. Рассуждения пп. 14, 15 также сохраняются (с заменой τ на t_1), а предельный конус (п. 16) становится ненужным, так как у нас имеется лишь один конус $\mathbf{K}_{t_1}$, построенный как раз в конце $\mathbf{x}(t_1)$ траектории $\mathbf{x}(t)$ (в силу этого лемма 9 не нужна — она просто сводится к лемме 3). Наконец, рассуждения п. 17 доказывают выполнение условий 1), 2), 3) и заключительную часть теоремы 5. Остается показать, что для выбранного таким образом вектора $\psi(t)$ выполняется условие 4). Положим в формуле (59)

$$\delta t = \delta t_1 = \delta t_2 = \ldots = \delta t_s = 0.$$

Мы получим:

$$\Delta x = \delta w^\rho \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t), w_0)}{\partial w^\rho} dt.$$

Согласно сказанному выше [ср. (38), (40)], имеем:

$$\psi_\alpha(t_1)\, \Delta x^\alpha \leqslant 0$$

для любого вектора (59), и потому

$$\psi_\alpha(t_1)\, \delta w^\rho \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), w_0)}{\partial w^\rho} dt \leqslant 0.$$

Так как эти соотношения справедливы при любых действительных значениях параметров δw^ρ, то

$$\psi_\alpha(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), w_0)}{\partial w^\rho} dt = 0, \quad \rho = 1, 2, \ldots, s,$$

и теорема 5 полностью доказана.

Поступило
14. V. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С., К теории оптимальных процессов, Доклады Ак. наук СССР, 110, № 1 (1956), 7—10.

[2] Болтянский В. Г., Принцип максимума в теории оптимальных процессов, Доклады Ак. наук СССР, 119, № 6 (1958), 1070—1073.

[3] Гамкрелидзе Р. В., К общей теории оптимальных процессов, Доклады Ак. наук СССР, 123, № 2 (1958), 223—226.

[4] Гамкрелидзе Р. В., К теории оптимальных процессов в линейных системах, Доклады Ак. наук СССР, 116, № 1 (1957), 9—11.

[5] Гамкрелидзе Р. В., Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 449—474.

[6] Понтрягин Л. С., Оптимальные процессы регулирования, Успехи мат. наук, т. 14, вып. 1 (1959), 3—20.

[7] Caratheodory C., Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig, 1927.

[8] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, ИЛ, М., 1950.

[9] McShane, On Multipliers for Lagrange Problems, Amer. J. Math., 61 (1939), 809—819.

[10] Болтянский В. Г., Оптимальные процессы с параметрами, Доклады Ак. наук Узб. ССР, 10 (1959), 9—13.