

Степеневі ряди

$$C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + \dots + C_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n \quad (1)$$

$$x_0 = 0:$$

$$C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_nx^n \quad (2)$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| \quad (3)$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}} \quad (4)$$

$R = 0$ – ряд збіжний тільки в одній точці

$R = \infty$ – ряд збіжний на всій числовій прямій

=====

1) Визначити область збіжності (абсолютна і умовна) функціонального ряду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x + 1)^n$$

$$x_0 = -1, \quad C_n = \frac{3^n + (-2)^n}{n}, \quad C_{n+1} = \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{n+1}$$

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{3^n + (-2)^n}{n}}{\frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{n+1}} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(3^n + (-2)^n)(n+1)}{(3^{n+1} + (-2)^{n+1})n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^n + (-2)^n}{3 \cdot 3^n + (-2) \cdot (-2)^n} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{3 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n} \right| = \frac{1}{3} \Rightarrow R = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

інтервал збіжності:

$$\left(-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$$

Перевіримо збіжність ряду на кінцях:

$$x = -\frac{4}{3}:$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{4}{3} + 1\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n}\end{aligned}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ – збіжний за ознакою Лейбніца.

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n}$ – збіжний за радикальною ознакою Коші.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \left((-1)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \cdot \frac{1}{n} \right| \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$x = -\frac{2}{3}:$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{2}{3} + 1\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) \cdot \frac{1}{n} > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Область збіжності

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x + 1)^n$$

є

$$\left[-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$$

Область абсолютної збіжності:

$$\left(-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^{2n}, \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^{n^2}, \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^{2n-1}$$

Якщо степеневі ряди містять у собі тільки парні чи непарні степені x або $(x-x_0)$, користуватися формулами (3) та (4) не можна!

1) Визначити область збіжності функціонального ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n}}{n}$$

$$x_0 = -3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(x+3)^{2n}}{n} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(x+3)^{2n}}{n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(x+3)^2|}{\sqrt[n]{n}} = (x+3)^2 < 1$$

$$(x+3)^2 < 1$$

$$|x+3| < 1 \Rightarrow -4 < x < -2$$

Перевіримо збіжність ряду на кінцях:

$$x = -4:$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4+3)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$x = -2:$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2+3)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(+1)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Область збіжності:

$$(-4; -2).$$