

Розвинення функцій у степеневі ряди

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

ряд Тейлора

Якщо $a = 0$, то отримаємо ряд Маклорена:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$$

Формули (розклади функції у ряд Маклорена):

$$1) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
$$\forall -\infty < x < \infty.$$

$$2) \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$
$$\forall -\infty < x < \infty.$$

$$3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$
$$\forall -\infty < x < \infty.$$

$$4) \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$
$$\forall -1 < x \leq 1.$$

$$5) (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n$$
$$\forall |x| < 1$$

=====

1) Розкласти функцію у ряд Маклорена за степенями x :

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$e^{-x^2} = \|t = -x^2, e^t\| = 1 + \frac{-x^2}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \dots +$$

$$+ \frac{(-x^2)^n}{n!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + o(x^{2n+1})$$

=====

$$f(x) = \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos 2x =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n} + o(x^{2n+2}) \right)$$

=====

2) Розкласти функцію у ряд Маклорена за степенями x :

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x}$$

Щоб розкласти функцію $\operatorname{arctg}(\quad)$, $\arcsin(\quad)$, $\arccos(\quad)$ у ряд Маклорена, треба знайти похідну, а потім проінтегрувати отриманий ряд:

Метод такий:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

$$\int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{t^{k+1}}{k+1} \Big|_0^x$$

$$f(t)|_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$f(x) - f(0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$f'(x) = \left(\operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x} \right)' = -\frac{2}{1+4x^2} = -2(1+4x^2)^{-1};$$

$$f'(x) = \|\alpha = -1\| = -2 \left(1 + \frac{-1}{1!} 4x^2 + \frac{(-1)(-1-1)}{2!} (4x^2)^2 + \right. \\ \left. + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!} (4x^2)^3 + \dots + \frac{(-1)(-1-1) \dots (-1-n+1)}{n!} (4x^2)^n \right);$$

перепозначення: $x \leftrightarrow t$

$$f'(t) = \|\alpha = -1\| = -2 + 2 \cdot 4t^2 - 2 \cdot 16t^4 + \\ + 2 \cdot 64t^6 + \dots + (-1)^n 2 \cdot 4^n t^{2n} + \dots);$$

$$\int_0^x f'(t) dt = \int_0^x (-2 + 2 \cdot 4t^2 - 2 \cdot 16t^4 + 2 \cdot 64t^6 + \dots + (-1)^n 2 \cdot 4^n t^{2n} + \dots) dt;$$

$$f(t)|_0^x = \left(-2t + 8 \frac{t^3}{3} - 32 \frac{t^5}{5} + 128 \frac{t^7}{7} + \dots + (-1)^n 2 \cdot 4^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right) \Big|_0^x;$$

$$f(x) - f(0) = -2x + 8 \frac{x^3}{3} - 32 \frac{x^5}{5} + 128 \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n 2 \cdot 4^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots;$$

$$f(0) = \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x} \Big|_0 = \operatorname{arctg} \frac{2-0}{1+0} = \operatorname{arctg} 2$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} 2 - 2x + \frac{8}{3} x^3 - \frac{32}{5} x^5 + \frac{128}{7} x^7 + \dots + (-1)^n 2 \cdot 4^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots;$$