

Функціональні ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

необхідна умова збіжності ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 0$$

=====

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$$

I) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^n} = 0, |x| > 1$

II) Абсолютна збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n}{x^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{|x|^n}$$

За радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{|x|^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{|x|} = \frac{1}{|x|} < 1 \rightarrow |x| > 1$$

III) Умовна збіжність:

$$x = 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \neq 0$$

$$x = -1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \neq 0$$

умовної збіжності немає.

---> ряд абсолютно збіжний.

=====

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n$$

$$\text{I)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \right\| = 0, \left| \frac{x}{2x+1} \right| < 1$$

$$\left| \frac{x}{2x+1} \right| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2x+1} < 1 \\ \frac{x}{2x+1} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty \right)$$

II) Абсолютна збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \left| \frac{x}{2x+1} \right|^n$$

За радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n+1} \cdot \left| \frac{x}{2x+1} \right|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \cdot \sqrt[n]{\left| \frac{x}{2x+1} \right|^n} = \left| \frac{x}{2x+1} \right| < 1$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty \right)$$

III) Умовна збіжність:

$$x = -1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{-1}{-2+1} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}+1} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

умовної збіжності немає.

---> ряд абсолютно збіжний.