ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА……...……..... **7**

Розділ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ……...….. **9**

§ 1. Первісна функції та невизначений інтеграл …….……..... **9**

1. Поняття первісної функції (**9**). 2. Основні методи інтегрування (**15**). 3. Інтегрування раціональних функцій (**25**). 4. Поняття про раціональну функцію двох змінних (**34**). 5. Інтегрування деяких тригонометричних функцій універсальною тригонометричною підстановкою (**34**). 6. Інтегрування дробово-лінійних ірраціональностей (**35**). 7. Інтегрування квадратичних ірраціональностей підстановками Ейлера (**37**). 8. Інтегрування квадратичних ірраціональностей іншими методами. Підстановка Абеля (**40**). 9. Інтегрування біноміальних диференціалів (**60**). 10. Інтегрування деяких тригонометричних функцій без використання універсальної тригонометричної підстановки (**62**). 11. Інтегрування деяких гіперболічних функцій (**68**).

§ 2. Визначений інтеграл…….…..……. **69**

1. Один підхід до задачі про площу (**69**). 2. Означення й умови існування визначеного інтеграла (**70**). 3. Верхня та нижня інтегральні суми Дарбу (**74**). 4. Критерії Дарбу інтегровності функцій за Ріманом (**79**). 5. Класи інтегровних за Ріманом функцій (**83**). 6. Множина лебеґової і жорданової міри нуль. Критерій інтегровності Лебеґа (**88**). 7. Властивості інтеграла Рімана (**92**). 8. Визначений інтеграл як функція верхньої межі (**103**). 9. Основна теорема інтегрального числення. Формули заміни змінної та інтегрування частинами під знаком визначеного інтеграла (**105**). 10. Інтегрування парних і непарних функцій (**111**).

§3. Застосування визначених інтегралів…… **112**

1. Обчислення довжин ліній за допомогою інтегралів (**112**). 2. Диференціал дуги (**121**). 3. Обчислення площ за допомогою

інтегралів (**123**). 4. Обчислення об'ємів тіл обертання (**134**). 5. Площі поверхонь обертання (**139**). 6. Схема застосування визначених інтегралів (**144**). 7. Статичні моменти й центр мас плоских кривих (**146**). 8. Центр мас криволінійної трапеції (**151**). 9. Механічна робота (**154**).

§ 4. Наближене обчислення інтегралів ……..…..... **156**

1. Формула прямокутників (**156**). 2. Формула трапецій (**161**). 3. Формула Сімпсона (формула парабол) (**165**).

§ 5. Невласні інтеграли ……..... **168**

1. Невласні інтеграли I роду (**168**). 2. Достатні ознаки збіжності невласного інтеграла I роду (**172**). 3. Абсолютна та умовна збіжність невласних інтегралів I роду (**177**). 4. Заміна змінних під знаком невласного інтеграла. Формула інтегрування частинами (**181**). 5. Невласні інтеграли II роду (**183**). 6. Зв'язок між невласними інтегралами I та II роду (**186**). 7. Головне значення за Коші невласних інтегралів (**188**).

§ 6. Функції обмеженої варіації та інтеграл Рімана-Стілтьєса..... **192**

1. Монотонні функції (**192**). 2. Функції обмеженої варіації: означення та властивості (**199**). 3. Означення інтеграла Рімана-Стілтьєса (**209**). 4. Властивості інтеграла Стілтьєса (**210**). 5. Теорема про існування інтеграла Рімана-Стілтьєса (**214**). 6. Теореми про обчислення інтеграла Рімана-Стілтьєса (**218**). 7. Про одне застосування інтеграла Стілтьєса у фізиці (**222**).

§ 7. Про використання програмного забезпечення в інтегральному численні..... **225**

Розділ 2. КОРОТКИЙ НАРИС ІСТОРІЇ РОЗВИТКУ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ…….. **231**

Розділ 3. ПРАКТИКУМ ІЗ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ……..……..…….. **238**

§ 1. Невизначений інтеграл…….……..... **238**

1. Безпосереднє інтегрування (**238**). 2. Метод підстановки (заміни змінної) в невизначеному інтегралі (**243**). 3. Метод інтегрування

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\cdot\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} y_i + 4\sum_{i=1}^{n} y_{i-1/2}\right) \qquad (1.41)$$

формула Сімпсона

В цій формулі

$$y_i = f(x_i) = f\left(a + \frac{b-a}{n}\cdot i\right); \qquad y_{i-1/2} = f\left(x_{i-1/2}\right) = f\left(a + \frac{b-a}{n}\cdot(i-1/2)\right).$$

Зробимо припущення про чотирикратну неперервну диференційовність функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Відомо, що залишковий член у формулі Сімпсона має вигляд

$$R_n = -\frac{f^{IV}\left(c^{**}\right)}{2880\cdot n^4}\cdot(b-a)^5 \qquad (1.42)$$

Тому *похибка має порядок* $\frac{1}{n^4}$. (✍ Розібрати виведення формули для залишкового члена самостійно [**3**, с.484–486; **6**, с162–163]!)

§5. Невласні інтеграли

Із означення визначеного інтеграла Рімана випливає, що він задається на скінченному відрізку $[a,b]$. Необхідною умовою інтегровності функції є її обмеженість. Однак багато геометричних і прикладних задач потребують обчислення інтегралів на нескінченних проміжках або від необмежених функцій. Цю проблему вирішують невласні інтеграли.

Невласні інтеграли I роду розглядаються на нескінченних проміжках, а невласні інтеграли II роду – від необмежених функцій.

1. Невласні інтеграли I роду

Розглянемо нескінченні проміжки трьох типів:

I. $[a,+\infty)$; II. $(-\infty,b]$; III. $(-\infty, +\infty)$.

У *випадку I* будемо **припускати**:

- функція $f(x)$ задана на $[a,+\infty)$;
- $\forall A > a$ функція $f(x)$ інтегровна на [*a, A*], тобто

$\forall A > a \quad \exists \int\limits_a^A f(x)dx$.

Тоді будь-якому $A > a$ відповідає єдине значення інтеграла $\int\limits_a^A f(x)dx$, в результаті чого утворюють функцію $F(A) = \int\limits_a^A f(x)dx$, яку задано на [*a,* $+\infty$). Таким чином, коректним буде питання: чи існує границя

$$\lim_{A\to+\infty} F(A) = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx\,? \tag{1.43}$$

Не завжди!

☝ 🗁**Означення 1.44**. У випадку, коли функція $f(x)$ справджує зазначені вище припущення і існує границя (1.43),

1) значення границі називають *невласним інтегралом I роду* на $[a,+\infty)$, який позначають $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, тобто

$$\boxed{\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx};$$

2) інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називають *збіжним.*

У випадку, коли границі (1.43) не існує, то кажуть, що невласний інтеграл *розбігається*, використовуючи для його позначення той самий символ: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

II. 🗁**Означення 1.45**. Нехай функцію $f(x)$ задано на $(-\infty, b]$ і $\forall\, B < b\ \exists \int\limits_B^b f(x)dx$, то у випадку, коли $\exists \lim\limits_{B\to-\infty} \int\limits_B^b f(x)dx$,

1) значення границі називають *невласним інтегралом I роду на* $(-\infty, b]$, тобто

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{B\to-\infty} \int\limits_B^b f(x)dx};$$

2) інтеграл $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$ називають *збіжним*.

III. 🗁**Означення 1.46**. Нехай функцію $f(x)$ задано на $(-\infty, +\infty)$ і $\forall\left(A \in \mathbb{R} \wedge B \in \mathbb{R}\right)\ \exists \int\limits_B^A f(x)dx$, тоді, якщо $\exists \lim\limits_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int\limits_B^A f(x)dx$ при незалежному прямуванні $A\to+\infty$ і $B\to-\infty$, то значення цієї границі називають *невласним інтегралом I роду на* $(-\infty, +\infty)$, тобто

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int\limits_B^A f(x)dx}$$

При цьому інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають *збіжним* на $(-\infty, +\infty)$.

Зауваження 1.16 *до випадку III*. Якщо для деякого $a \in \mathbb{R}$ $\exists \int\limits_{-\infty}^a f(x)dx$ і $\exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, тоді $\exists \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Доведення.

$$\lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int\limits_B^A f(x)dx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \left(\int\limits_B^a f(x)dx + \int\limits_a^A f(x)dx \right) = \lim_{B\to-\infty} \int\limits_B^a f(x)dx + \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^B f(x)dx,$$

$$\begin{array}{ccccccc} \exists & \Leftrightarrow & \exists & \Leftarrow & (\exists & \wedge & \exists) \\ \| & & & & \| & & \| \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx & & = & & \int\limits_{-\infty}^a f(x)dx & + & \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx. \end{array} \blacksquare$$

Зауваження 1.17.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx, \\ \\ 2)\ b > a, \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 1^0\ \exists \int\limits_b^{+\infty} f(x)dx; \\ \\ 2^0\ \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x)dx. \end{array}$$

Доведення. Оскільки $\exists \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, то при $b > a$ маємо

$$\begin{array}{ccccc} \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx & = & \lim\limits_{A\to+\infty} \left(\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^A f(x)dx \right) & = & \int\limits_a^b f(x)dx + \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_b^A f(x)dx \\ \exists & \Rightarrow & & & \exists \\ \| & & & & \| \\ \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx & = & & & \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x)dx. \end{array} \quad \blacksquare$$

Приклад 1.22.

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^A = \lim\limits_{A\to+\infty} (\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}$.

2) Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$, $a > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A\to+\infty} \frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\Bigg|_a^A = \lim_{A\to+\infty} \frac{A^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}}{1-\lambda}, \text{ якщо } \lambda \neq 1,$$

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A\to+\infty} \ln|x|\Big|_a^A = \lim_{A\to+\infty} \ln\frac{A}{a}, \text{ якщо } \lambda = 1.$$

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}, & \text{якщо } \lambda > 1 \\ \infty, & \text{якщо } \lambda < 1 \\ \infty, & \text{якщо } \lambda = 1 \end{cases}$$

Висновок: $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$, $a > 0$

збігається при $\lambda > 1$ розбігається при $\lambda \le 1$.

Нехай функцію $f(x)$ задано на $[a,+\infty)$ і $\exists\int\limits_a^A f(x)dx\ \forall A>a$. Відповідь на питання, збігається чи розбігається інтеграл, залежить від того, чи $\exists\lim\limits_{A\to+\infty}F(A)=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$. Пригадаємо критерій Коші [**4**, с. 134] існування границі функції на нескінченності:

$$\exists\lim_{A\to+\infty}F(A)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists\Delta>0:\forall\left(A_1>a\wedge A_2>a\right)\ \left(A_1>\Delta\wedge A_2>\Delta\right)\Rightarrow\left|F(A_1)-F(A_2)\right|<\varepsilon.$$

Оскільки $\left|F(A_1)-F(A_2)\right|=\left|\int\limits_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|$, то, об'єднуючи все разом, отримаємо

Теорема 1.31 (*критерій Коші збіжності невласного інтеграла I роду*). Нехай функцію $f(x)$ задано на $[a,+\infty)$ і

$$\forall A>a\ \ \exists\int\limits_a^A f(x)dx.$$

Невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ збігається тоді і лише тоді, коли

$$\forall\varepsilon>0\exists\Delta>0:\forall\left(A_1>a\wedge A_2>a\right)\ \left(A_1>\Delta\wedge A_2>\Delta\right)\Rightarrow\ \left|\int\limits_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

2. Достатні ознаки збіжності невласного інтеграла I роду

☝ **Теорема 1.32** (*загальна ознака порівняння*). Нехай функцію $f(x)$ задано на $[a,+\infty)$ і $\exists\int\limits_a^A f(x)dx\ \forall A>a$. Тоді мають місце твердження

$$\text{I. }\exists\ g(x):\ \left.\begin{array}{l}1)\ \left|f(x)\right|\le g(x)\ \forall x\ge a,\\ 2)\ \int\limits_a^{+\infty}g(x)dx\ \text{збігається},\end{array}\right\}\Rightarrow\ \int\limits_a^{+\infty}f(x)dx\ \text{збігається};$$

II. $\exists$ *g(x)*: 1) $0 \le g(x) \le f(x)\ \forall x \ge a$,

2) $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ розбігається,

$\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Зокрема, якщо $f(x) \ge 0\ \forall x \in [a, +\infty)$, то дослідження на збіжність невласних інтегралів I роду можна подати таким чином:

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \le f(x) \le g(x) \\ \text{зб.} \Leftarrow \text{зб.} \\ \text{розб.} \Rightarrow \text{розб.} \end{array}}$$

Доведення

I. Із властивостей визначених інтегралів отримаємо:

$$\left| \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| \le \int\limits_{A_1}^{A_2} \left| f(x) \right| dx \le \int\limits_{A_1}^{A_2} g(x)dx\ . \qquad (1.44)$$

Оскільки інтеграл і $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збігається, то за критерієм Коші одержимо:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \Delta > 0 : \forall \left(A_1 > a \wedge A_2 > a \right)\ \left(A_1 > \Delta \wedge A_2 > \Delta \right) \Rightarrow \int\limits_{A_1}^{A_2} g(x)dx < \varepsilon\ . \quad (1.45)$$

Із (1.44) і (1.45) випливає:

$$\left| \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| \le \int\limits_{A_1}^{A_2} g(x)dx < \varepsilon\ , \text{ якщо } \left(A_1 > \Delta \wedge A_2 > \Delta \right).$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \Delta > 0 : \forall \left(A_1 > a \wedge A_2 > a \right)\ \left(A_1 > \Delta \wedge A_2 > \Delta \right) \Rightarrow \left| \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| < \varepsilon\ .$$

Це означає, що за критерієм Коші інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

II. За умовою $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ розбігається. Це означає, що для функції $G(A)=\int\limits_a^A g(x)dx$ не існує границі $\lim\limits_{A\to+\infty} G(A)$. У даному випадку, коли $g(x)\ge 0 \quad \forall x\in[a,+\infty)$, це означає, що функція $G(A)$ має властивості:

1) $G(A)\ge 0 \quad \forall A>a$;

2) якщо $a<A\le B$, то

$$G(A)=\int\limits_a^A g(x)dx=\int\limits_a^B g(x)dx-\underbrace{\int\limits_A^B \underbrace{g(x)}_{\ge 0}dx}_{\ge 0\ (\text{за вл. } 6^o)}\le\int\limits_a^B g(x)dx=G(B),$$

тобто $G(A)\nearrow$ на $[a,+\infty)$.

Звідки отримаємо:

$$\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \text{ розбігається } \Rightarrow \lim_{A\to+\infty} G(A)=+\infty, \text{ тобто } \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A g(x)dx=+\infty.$$

Тепер застосуємо до умови $0\le g(x)\le f(x)\ \forall x\ge a$ *властивість* 7° *визначеного інтеграла* та отримаємо:

$$\int\limits_a^A f(x)dx \ge \int\limits_a^A g(x)dx$$
$$\Downarrow \qquad \swarrow \quad (A\to+\infty)$$
$$+\infty$$

Отже, $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx=+\infty \quad\Rightarrow\quad \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ – розбігається. ■

Пригадаємо, що $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}$ збігається, якщо $\lambda>1$ і розбігається, якщо $\lambda\le 1$. Тому, як наслідок загальної ознаки порівняння, одержимо таку теорему.

☝ **Теорема 1.33** (*частинна ознака порівняння*). Нехай функція $f(x)$ задана на $[a,+\infty)$ і $\exists\int\limits_a^A f(x)dx\ \forall A>a$.

I. Якщо $\exists\lambda > 1 \wedge \exists c > 0 : |f(x)| \le \dfrac{c}{x^{\lambda}}\ \forall x \ge a$, тоді $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

II. Якщо $\exists\lambda \le 1 \wedge \exists c > 0 : f(x) \ge \dfrac{c}{x^{\lambda}}\ \forall x \ge a$, тоді $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Доведення. Покладемо $g(x) = \dfrac{c}{x^{\lambda}}$, тоді ми опиняємося в умовах загальної ознаки порівняння, звідки приходимо до висновків теореми. ■

☝ **Наслідок 1.9** (*частинна ознака порівняння в граничній формі*): $f(x)$ задана на $[a, +\infty)$

I. Якщо $\exists\lambda > 1 \wedge \exists \lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)|x^{\lambda} = c$, тоді $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

II. Якщо $\exists\lambda \le 1 \wedge \exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\, x^{\lambda} = c > 0$, тоді $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Зокрема, якщо $f(x) \ge 0\ \forall x \in [a, +\infty)$, то при $f(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\lambda}}$ маємо:

якщо $\lambda > 1$, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається,

якщо $\lambda \le 1$, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Доведення. I. Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)|x^{\lambda} = c$, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\Delta > 0 : \forall x \ge a\ \ x > \Delta \Rightarrow\ \big||f(x)|x^{\lambda} - c\big| < \varepsilon,$$

тому

$$c - \varepsilon < |f(x)|x^{\lambda} < c + \varepsilon \ \text{ при } x > \Delta,$$

$$\text{при } x > \Delta\ \ |f(x)| < \frac{c+\varepsilon}{x^{\lambda}} \quad (\lambda > 1).$$

Отже, за частинною ознакою порівняння, інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

II. Зауважимо, що $\exists \varepsilon > 0 : c - \varepsilon > 0$, наприклад, $\varepsilon = \dfrac{c}{2}$. Тоді

$\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) x^{\lambda} = c > 0 \Rightarrow$

для цього ε $\exists \Delta > 0 : \forall x \geq a \;\; x > \Delta \Rightarrow \left| f(x) x^{\lambda} - c \right| < \varepsilon$,

$c - \varepsilon < f(x) x^{\lambda} < c + \varepsilon$ при $x > \Delta$,

при $x > \Delta \;\; f(x) > \dfrac{c - \varepsilon}{x^{\lambda}} \quad (\lambda \leq 1)$.

Отже, за частинною ознакою порівняння, $\int\limits_a^{+\infty} f(x) dx$ розбігається.

У частинному випадку, коли $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a, +\infty)$, висловлювання $f(x) \overset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\lambda}}$ еквівалентне тому, що $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{1/x^{\lambda}} = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \cdot x^{\lambda} = 1$. Отже, для завершення доведення потрібно обрати $c = 1 > 0$ в загальному формулюванні наслідку. ■

Приклад 1.23. **1.** Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \sin \dfrac{1}{x^2} dx$.

Оскільки $\sin t \overset{t \to 0}{\sim} t$ (це те саме, що $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$) та $t = \dfrac{1}{x^2} \to 0$ при $x \to +\infty$, тоді, $\sin \dfrac{1}{x^2} \overset{x \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$. Оскільки $\lambda = 2 > 1$, то за ознакою порівняння в граничній формі інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \sin \dfrac{1}{x^2} dx$ збігається.

Відповідь: заданий інтеграл збігається.

2. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^3} dx$.

Розв'язання проілюструємо схемою

$$\left| \frac{\cos x}{x^3} \right| \leq \frac{1}{x^3}, \qquad \lambda = 3 > 1$$

зб. $\Leftarrow$ зб.

Відповідь: заданий інтеграл збігається.

3. Абсолютна та умовна збіжність невласних інтегралів I роду

Означення 1.47. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx -$ *абсолютно збіжний* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ – збіжний.

Усі попередні ознаки порівняння дають можливість відповісти на питання про абсолютну збіжність інтегралів.

Теорема 1.34. Якщо інтеграл збігається абсолютно, тоді він збігається.

Доведення. Покладемо $g(x) = |f(x)|$, тоді

$$\left.\begin{array}{l} |f(x)| \le g(x), \\ \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx \text{ збігається (за умовою),} \end{array}\right\} \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

збігається. ■

Означення 1.48. Якщо інтеграл збігається, але не абсолютно, то його називають *умовно збіжним*.

Теорема 1.35 (*ознака Діріхле-Абеля*).

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f(x) \text{ неперервна і має обмежену первісну на} \\ [a,+\infty), \text{ тобто функція } F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt - \text{ обмежена:} \\ \exists\ K > 0 : \forall\ x \ge a\ \ |F(x)| \le K\ ; \\ 2)\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0\ ; \\ 3)\ g(x) \text{ неперервна і не зростає на } [a,+\infty); \\ 4)\ \exists\ g'(x) \text{ - неперервна на } [a,+\infty), \end{array}\right\} \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

збігається.

Доведення. Завдяки умовам 1) і 4) можна застосувати формулу інтегрування частинами на відрізку $[A_1, A_2]$:

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right| = \left\|\begin{array}{ll} u = g(x), & du = g'(x)dx, \\ dv = f(x)dx & v = F(x) \end{array}\right\| =$$

$$= \left| F(x)\,g(x)\Big|_{A_1}^{A_2} - \int_{A_1}^{A_2} F(x)g'(x)dx \right| = \left| F(A_2)g(A_2) - F(A_1)g(A_1) - \right.$$

$$\left. - \int_{A_1}^{A_2} F(x)g'(x)dx \right| \le \left| F(A_2)g(A_2) \right| + \left| F(A_1)g(A_1) \right| + \left| \int_{A_1}^{A_2} F(x)g'(x)dx \right| .$$

Оскільки *g(x)* не зростає на $[a,+\infty)$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, то

а) $g(x) \ge 0$ на $[a,+\infty)$,

б) $g'(x) \le 0$ на $[a,+\infty)$.

Звідси $\left|g(x)\right| = g(x)$, $\left|g'(x)\right| = -g'(x)$ на $[a,+\infty)$. Звідки й за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx \right| \le \; K \cdot g(A_2) + K \cdot g(A_1) + K \cdot \int_{A_1}^{A_2} (-g'(x))dx =$$

$$= K \cdot g(A_2) + K \cdot g(A_1) - K \cdot g(A_2) + K \cdot g(A_1) = 2 \cdot K \cdot g(A_1) .$$

Отже,

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx \right| \le 2K \cdot g(A_1) .$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, то

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \Delta > 0 : \forall A \ge a :\ \ A > \Delta \Rightarrow\ g(A) < \varepsilon/(2K) .$$

Таким чином,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \Delta > 0 : \forall A_1, A_2 \ge a :\ \ (A_1 \ge \Delta\ \wedge\ A_2 > \Delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx \right| \le 2K \cdot g(A_1) < 2K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon .$$

Отже, за критерієм Коші інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ збігається. ■

Зауваження 1.18. Якщо для доведення використати не формулу інтегрування частинами, а другу теорему про середнє, то припущення *теореми 1.35* можна послабити і сформулювати цю теорему у вигляді [**6**, с. 564-565]:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \forall x \ge a\ f(x) - \text{ інтегровна на } [a,x] \text{ і } f(x) \text{ задо-} \\ \text{вольняє умову: } \exists\ K > 0 : \forall\ x \ge a\ \left|\int\limits_a^x f(t)dt\right| \le K\ ; \\ 2)\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0\ ; \\ 3)\ g(x) \text{ монотонна на } [a,+\infty); \end{array}\right\} \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ збігається.}$$

Приклад 1.24. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx$ ($p > 0$).

Дослідимо спочатку на звичайну збіжність. Покладемо $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x^p}$. Отримаємо:

1) $F(x) = \int\limits_1^x \sin t\ dt = -\cos t\big|_1^x \Rightarrow |F(x)| \le |\cos 1| + |\cos x| \le 2 \quad \Rightarrow F(x) -$ обмежена на $[1,+\infty)$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^p} = 0 \quad \forall p > 0$;

3) $g(x)$ спадає ($\searrow$) на $[1,+\infty)$.

Висновок 1: інтеграл збігається $\forall p > 0$ за ознакою Діріхле-Абеля.

Дослідимо на *абсолютну збіжність*. Оцінимо інтеграл знизу:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}dx \ge \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p}dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^p}dx\ .$$

Перший із інтегралів $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ збігається, якщо $p > 1$, і розбігається, якщо $p \le 1$. У другому інтегралі покладемо $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = \frac{1}{x^p}$. Отримаємо:

1) $F(x) = \int\limits_1^x \cos 2t\ dt = \frac{1}{2}\sin 2t\big|_1^x \Rightarrow |F(x)| \le \frac{1}{2}\left(|\sin 2| + |\sin 2x|\right) \le 1\ \forall x \in [1,+\infty)$

$\Rightarrow F(x) -$ обмежена на $[1,+\infty)$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^p}=0 \quad \forall p>0$;

3) $g(x)-\ \searrow$ на $[1,+\infty)$.

Отже, другий інтеграл збігається $\forall p>0$ за ознакою Діріхле-Абеля.

Висновок 2: інтеграл збігається абсолютно при $p>1$, а при $p\le 1$ він абсолютно розбігається.

Відповідь: інтеграл збігається абсолютно при $p>1$, умовно – при $p\le 1$.

Приклад 1.25. Дослідити інтеграл Френеля $\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2dx$ на збіжність.

Запишемо цей інтеграл сумою

$$\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2dx=\int\limits_0^{1}\sin x^2dx+\int\limits_1^{+\infty}\sin x^2dx\ .$$

Тут $\int\limits_0^{1}\sin x^2dx$ – визначений інтеграл Рімана, він існує (підінтегральна функція неперервна на відрізку інтегрування) і скінченний. Розглянемо другий інтеграл суми:

$$\int\limits_1^{+\infty}\sin x^2dx=\int\limits_1^{+\infty}\underbrace{x\sin x^2}_{=f(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{=g(x)}\ dx\ .$$

Застосуємо ознаку Діріхле-Абеля:

1) $F(x)=\int\limits_1^{x}t\sin t^2dt=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^{x}\sin t^2d(t^2)=\left\|\begin{array}{c}u=t^2\\ t\,|1|x\\ \hline u|1|x^2\end{array}\right\|=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^{x^2}\sin u\,du=$

$=-\dfrac{1}{2}\cos u\Big|_1^{x^2}=-\dfrac{1}{2}\left[\cos x^2-\cos 1\right]\ \Rightarrow |F(x)|\le 1\ \ \forall x\in[1,+\infty)$

$\Rightarrow F(x)-$ обмежена на $[1,+\infty)$;

2) $g(x)=\dfrac{1}{x}-\ \searrow$ на $[1,+\infty)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Відповідь: інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2 dx$ збігається.

Самостійно дослідити ✍ на абсолютну збіжність і зробити висновки щодо умовної збіжності!

4. Заміна змінних під знаком невласного інтеграла. Формула інтегрування частинами

Пригадаємо теорему про заміну змінної під знаком визначеного інтеграла.

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ f(x)\ \text{– неперервна на}\ [a,\,A];\\
2)\ x=\varphi(t)\ \text{– неперервно диференційовна на}\ [\alpha,\beta]\ \ ([\beta,\alpha]);\\
3)\ a=\varphi(\alpha),\ A=\varphi(\beta);\\
4)\ \varphi([\alpha,\beta])=[a,A]\ \ \big(\varphi([\beta,\alpha])=[a,A]\big),
\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \int\limits_a^A f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt\,.$$

☝ **Теорема 1.36** (*заміна змінної під знаком невласного інтеграла I роду*).

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ f(x)\ \text{– неперервна на}\ [a,+\infty);\\
2)\ x=\varphi(t)\ \text{– неперервно диференційовна на}\ [\alpha,+\infty)\ ((-\infty,\alpha]);\\
3)\ a=\varphi(\alpha);\\
4)\ \varphi(t)\ \text{– строго монотонна;}\\
5)\ \varphi([\alpha,+\infty))=[a,+\infty)\\
\big(\varphi((-\infty,\alpha])=[a,+\infty)\big),
\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_\alpha^{\pm\infty} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt\,.\\ \text{зб.}\quad\Rightarrow\quad\text{зб.}\end{array}}$$

Доведення. Нехай для визначеності $\varphi(t)$ зростає ($\nearrow$) на $[\alpha,+\infty)$. Під знаком визначеного інтеграла $\int\limits_a^A f(x)dx$ ($A>a$) зробимо заміну, застосовуючи

згадану теорему, а потім здійснимо граничний перехід при $A \to +\infty$. Але спочатку доведемо: якщо $A \to +\infty$, то $\beta \to +\infty$.

Маємо (з теореми про неперервність оберненої функції [**4**, с.172–173]):

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \varphi(t) - \nearrow \text{ на } [\alpha, +\infty), \\ 2)\ \varphi([\alpha, +\infty)) = [a, +\infty), \\ 3)\ \varphi(t) - \text{неперервна на } [\alpha, +\infty), \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 1)\ \exists \varphi^{-1} : [a, +\infty) \to [\alpha, +\infty), \\ 2)\ \varphi^{-1}(x) - \nearrow \text{ на } [a, +\infty), \\ 3)\ \varphi^{-1}(x) - \text{неперервна на } [a, +\infty). \end{array}$$

Розглянемо нескінченно велику послідовність $\{A_n\}$ таку, що $A_n \to +\infty$. Упорядкуємо її в порядку зростання (доведіть, що це можливо зробити ✍!), утворивши послідовність $\{A'_n\} - \nearrow$, при цьому $A'_n \to +\infty$. Тоді послідовність $\{\beta_n = \varphi^{-1}(A_n)\}$ буде упорядкованою разом із $\{A'_n\}$, в результаті послідовність $\{\beta'_n = \varphi^{-1}(A'_n)\}$ також буде зростаючою. Дійсно,

$$\left.\begin{array}{l} A'_n \le A'_{n+1}, \\ \varphi^{-1}(x) - \nearrow \text{ на } [a, +\infty), \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \beta'_n = \varphi^{-1}(A'_n) \le \varphi^{-1}(A'_{n+1}) = \beta'_{n+1}.$$

Доведемо, що $\beta'_n \to +\infty$. Припустимо супротивне: $\beta'_n \not\to +\infty$. Оскільки послідовність $\{\beta'_n\}$ зростає, і $\beta'_n \not\to +\infty$, то вона є обмеженою, а тому, за теоремою Вейєрштрасса ([**3**, с.96, теорема 3.15; **4**, с.71), збіжною.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Нехай } \lim\limits_{n\to\infty} \beta'_n = \mathrm{B} \in [\alpha, +\infty), \\ \text{за умовою } \varphi(t) - \\ \text{неперервна на } [\alpha, +\infty), \\ \varphi([\alpha, +\infty)) = [a, +\infty), \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} A'_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(\beta'_n) = \varphi(\mathrm{B}) \in [a, +\infty).$$

Отримане суперечить припущенню про те, що $A'_n \to +\infty$.

При переставленні послідовностей $\{A'_n\}$ і $\{\beta'_n\}$ у зворотному порядку висновки щодо їх прямування до $+\infty$ не зміняться. Отже, якщо $A \to +\infty$, то $\beta \to +\infty$.

Таким чином, маємо

$$\int_a^A f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt\ ;$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = \lim_{\beta\to\pm\infty}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = \int_\alpha^{\pm\infty} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt\ ,$$

$$\exists \quad \Rightarrow \quad \exists$$ ■

Пригадаємо теорему про інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Якщо *u, v* неперервно диференційовні на [*a,A*], то

$$\int_a^A udv = uv\Big|_a^A - \int_a^A vdu\ . \qquad (1.46)$$

Теорема 1.37 (*інтегрування частинами під знаком невласного інтеграла I роду*).

$$\left.\begin{array}{l} u,\ v \text{ неперервно} \\ \text{диференційовні на } [a,+\infty)\ ; \\ \exists \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x) = L\ , \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \int_a^{+\infty} udv = L - u(a)v(a) - \int_a^{+\infty} vdu \\ \text{зб.} \quad \Leftrightarrow \quad \text{зб.} \end{array}}$$

Доведення. Потрібно лише зробити граничний перехід у формулі (1.46). Ті дві границі, що будуть стояти перед знаками інтегралів, будуть існувати чи не існувати одночасно. ■

5. Невласні інтеграли II роду

Ці інтеграли є узагальненням визначеного інтеграла Рімана для необмеженої функції.

Нехай $f(x)$ задана на [*a, b*).

Означення 1.49. Точку b називають *особливою точкою функції* $f(x)$, якщо функція обмежена на будь-якому відрізку $[a,b-\alpha]$ $\forall\alpha\in(0,b-a)$, а на [*a, b*) ця функція необмежена.

$F(\alpha) = \int_a^{b-\alpha} f(x)dx$ – функція змінної $\alpha\in(0,b-a)$.

Чи існує границя $\lim\limits_{\alpha\to+0} F(\alpha)$? Не завжди!

Означення 1.50. Нехай точка b – особлива точка функції $f(x)$, тоді якщо $\exists \lim\limits_{\alpha\to+0}\int\limits_a^{b-\alpha} f(x)dx$, то значення цієї границі називають *невласним інтегралом II роду*. Позначення: $\int\limits_a^b f(x)dx$. Крім того, в цьому випадку інтеграл називають *збіжним*. Таке ж позначення зберігають й тоді, коли відповідної границі $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int\limits_a^{b-\alpha} f(x)dx$ не існує, а інтеграл називають *розбіжним*.

Зауваження 1.19. Розглянемо випадок, коли функція $f(x)$ має скінченну кількість особливих точок на проміжку інтегрування.

Нехай спочатку на відрізку $[a,b]$ особливими є точки a,b,c, де $a<c<b$, тоді, за означенням,

$$\int\limits_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\substack{\alpha_1\to+0\\ \alpha_2\to+0\\ \alpha_3\to+0\\ \alpha_4\to+0}}\left(\int\limits_{a+\alpha_1}^{c-\alpha_2} f(x)dx+\int\limits_{c+\alpha_3}^{b-\alpha_4} f(x)dx\right)$$

при незалежному прямуванні $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ до нуля справа. В загальному випадку потрібно діяти за тим самим означенням.

Якщо відрізок $[a,b]$ з декількома особливими точками можна розбити на скінченну кількість відрізків, на кожному з яких лежить тільки одна особлива точка (що збігається з одним із кінців відрізка), причому на кожному такому відрізку інтеграл II роду збігається, то в такому випадку інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ буде збігатися й дорівнювати сумі інтегралів на відрізках розбиття. Доведення цього факту здійснюють аналогічно доведенню зауваження 1.16.

Приклад 1.26. Розглянемо інтеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Підінтегральна функція на відрізку $[-1,1]$ має дві особливі точки -1 і 1. Подамо цей інтеграл у вигляді суми двох: $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\limits_{-1}^{0}\ldots+\int\limits_{0}^{1}\ldots$.

Оскільки

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\alpha\to+0}\int_{-1+\alpha}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\alpha\to+0}\arcsin x\Big|_{-1+\alpha}^{0}=\lim_{\alpha\to+0}\big(0-\arcsin(-1+\alpha)\big)=\frac{\pi}{2},$$

аналогічно $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$ (доведіть це ✍!), тобто обидва інтеграли збігаються, тому збігається й заданий інтеграл, причому

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{0}\ldots+\int_{0}^{1}\ldots=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi\cdot$$

Приклад 1.27. Розглянемо інтеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$.

Підінтегральна функція на відрізку $[-1,1]$ має одну особливу точку 0. Подамо інтеграл за означенням як таку границю:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1}+\ln|x|\Big|_{\varepsilon_2}^{1}\right)=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}\left(\ln|-\varepsilon_1|-\ln\varepsilon_2\right)=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Покажемо, що така границя не існує. Застосуємо означення границі за Гейне:

для $\varepsilon_{1,1}^{(n)}=\varepsilon_{2,1}^{(n)}=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ маємо $\ln\frac{\varepsilon_{1,1}^{(n)}}{\varepsilon_{2,1}^{(n)}}=\ln 1=0\xrightarrow[n\to\infty]{}0$,

для $\varepsilon_{1,2}^{(n)}=\frac{1}{n}$ і $\varepsilon_{2,2}^{(n)}=\frac{2}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, маємо $\ln\frac{\varepsilon_{1,2}^{(n)}}{\varepsilon_{2,2}^{(n)}}=\ln\frac{1}{2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\ln\frac{1}{2}$,

тому границя не існує.

Отже, заданий інтеграл розбігається.

Приклад 1.28. Розглянемо такий інтеграл:

$$\int_{a}^{b}\frac{dx}{(b-x)^{\lambda}}=\lim_{\alpha\to+0}\int_{a}^{b-\alpha}\frac{dx}{(b-x)^{\lambda}}=\lim_{\alpha\to+0}\begin{cases}-\dfrac{(b-x)^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Bigg|_{a}^{b-\alpha}, & \lambda\neq 1,\\ \ln|b-x|\Big|_{a}^{b-\alpha}, & \lambda=1\end{cases}=$$

$$=\lim_{\alpha\to+0}\begin{cases}\dfrac{-\alpha^{1-\lambda}+(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \lambda\neq 1,\\ -\ln\alpha+\ln|b-a|, & \lambda=1.\end{cases}$$

Тому при

$1-\lambda>0$ – інтеграл збігається, $\Rightarrow$ при $\lambda<1$ – збігається;

$1-\lambda\le 0$ – інтеграл розбігається, $\Rightarrow$ при $\lambda\ge 1$ – розбігається.

Висновок: $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$

збігається при $\lambda<1$ розбігається при $\lambda\ge 1$

6. Зв'язок між невласними інтегралами I та II роду

Маємо:

$$\int\limits_a^{b-\alpha} f(x)dx = \left\| \begin{array}{c|c|c} t=\frac{1}{b-x} & & x=b-\frac{1}{t} \\ x & a \quad b-\alpha & \\ \hline t & \frac{1}{b-a} \quad \frac{1}{\alpha} & dx=\frac{dt}{t^2} \end{array} \right\| = \int\limits_{\frac{1}{b-\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2};$$

$f(x)$ на $[a, b\text{-}\alpha]$ обмежена і неперервна $\Rightarrow \exists \int\limits_a^b f(x)dx$;

$\varphi(t)=b-\frac{1}{t} \Rightarrow \varphi'(t)=\frac{1}{t^2}$ на $\left[\frac{1}{b\text{-}a},\frac{1}{\alpha}\right]$ неперервна;

$\alpha\to+0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}\to+\infty$, $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_{\frac{1}{b-\alpha}}^{+\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2} = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

<u>*Отже,*</u> якщо інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ є невласним інтегралом другого роду з особливою точкою b, то після заміни $t=\frac{1}{b-x}$ він буде невласним інтегралом $\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}dt$ першого роду.

<u>*Висновок:*</u> із наявності зв'язку між невласними інтегралами I і II роду випливає можливість використання властивостей інтегралів I роду для дослідження та обчислення невласних інтегралів II роду.

Теорема 1.38 (*критерій Коші збіжності невласних інтегралів II роду*). Нехай точка b – особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається тоді й лише тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta>0:\ \forall\ \alpha_1,\alpha_2 \in (0,b)\ \ \left(\alpha_1 < \delta \wedge \alpha_2 < \delta\right) \Rightarrow \left|\int\limits_{b-\alpha_1}^{b-\alpha_2} f(x)dx\right| < \varepsilon .$$

Доведення. Потрібно до функції $F(\alpha) = \int\limits_a^{b-\alpha} f(x)dx$ застосувати критерій Коші існування границі $\lim\limits_{\alpha\to+0} F(\alpha)$. (Закінчить доведення самостійно ✍!) ■

Як наслідок зв'язку між невласними інтегралами I і II роду й ознак порівняння для інтегралів I роду, існують ознаки порівняння для інтегралів II роду.

Загальна ознака порівняння має майже таке формулювання, що і для невласного інтеграла I роду.

Нехай точка b – особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, тоді:

I. Якщо $\exists$ *g(x)*:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \left|f(x)\right| \le g(x)\ \forall x \in [a.b), \\ 2)\ \int\limits_a^b g(x)dx \text{ збігається,} \end{array}\right\}, \text{ тоді } \int\limits_a^b f(x)dx \text{ збігається;}$$

II. Якщо $\exists$ *g(x)*:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 0 \le g(x) \le f(x)\ \forall x \in [a.b), \\ 2)\ \int\limits_a^b g(x)dx \text{ розбігається,} \end{array}\right\}, \text{ тоді } \int\limits_a^b f(x)dx \text{ розбігається.}$$

Зокрема, якщо $f(x) \ge 0\ \forall x \in [a.b)$, то має місце схематичне зображення щодо дослідження на збіжність невласних інтегралів II роду

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \le f(x) \le g(x) \\ \text{зб.} \Leftarrow \text{зб.} \\ \text{розб.} \Rightarrow \text{розб.} \end{array}}$$

Частинна ознака порівняння. Нехай точка b – особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, тоді

I. якщо $\exists \lambda < 1 \wedge \exists\, c > 0:\ |f(x)| \le \dfrac{c}{(b-x)^{\lambda}}$, тоді $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається;

II. якщо $\exists \lambda \ge 1 \wedge \exists\, c > 0:\ f(x) \ge \dfrac{c}{(b-x)^{\lambda}}$, тоді $\int\limits_a^b f(x)dx$ розбігається.

Частинна ознака порівняння в граничній формі. Нехай точка b – особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, тоді:

I. Якщо $\exists \lambda < 1 \wedge \exists \lim\limits_{x \to b-0} |f(x)|(b-x)^{\lambda} = c$, тоді $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається.

II. Якщо $\exists \lambda \ge 1 \wedge \exists \lim\limits_{x \to b-0} f(x)(b-x)^{\lambda} = c > 0$, тоді $\int\limits_a^b f(x)dx$ розбігається.

7. Головне значення за Коші невласних інтегралів

Для функції $f(x)$, що задана на (-∞,+∞), невласний інтеграл I роду $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ було означено як значення границі (якщо вона існує); $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{A \to +\infty \\ B \to -\infty}} \int\limits_B^A f(x)dx$ при незалежному прямуванні A, B до $+\infty$ і $-\infty$. Якщо границі не існує, то інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають *розбіжним* на (-∞, +∞). Існують випадки, коли при заміні $B = -A$ дана границя існує. В такому випадку говорять про головне значення за Коші цього інтеграла.

☝ 🗁**Означення 1.51.** Нехай функція $f(x)$ визначена на $(-\infty, +\infty)$ і інтегровна на будь-якому сегменті $[-A, A]$, тоді кажуть, що *існує невласний*

інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *у розумінні головного значення за Коші*, якщо $\exists \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$. Цю границю називають *головним значенням за Коші* й позначають $\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ [1]. Тобто

$$\boxed{\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx}$$

Із означення випливає, що зі збіжності невласного інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ випливає його існування в розумінні Коші, крім того $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Приклад 1.29. Розглянемо головне значення інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx$.

Маємо:

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx = \lim_{A\to+\infty} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-A}^{A} = 0 .$$

Як бачимо, він існує у розумінні головного значення за Коші. Однак він є розбіжним як невласний інтеграл I роду:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{B}^{A} = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \frac{1}{2}(A^2 - B^2) ,$$

така границя не існує. Пояснимо це. Застосуємо означення границі за Гейне: для $A_1^{(n)} = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, $B_1^{(n)} = -n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ маємо

$$\frac{1}{2}\left[\left(A_1^{(n)}\right)^2 - \left(B_1^{(n)}\right)^2\right] = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 ,$$

[1] V.p. – початкові літери словосполучення “Valeur principal”, що означає французькою «головне значення»

для $A_2^{(n)} = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, $B_2^{(n)} = -2n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ маємо

$$\frac{1}{2}\left[\left(A_2^{(n)}\right)^2 - \left(B_2^{(n)}\right)^2\right] = -\frac{3n^2}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty ,$$

тому границі не існує.

Теорема 1.39 1) Якщо $f(x)$ – непарна на (-∞, +∞) і інтегровна на будь-якому сегменті $[-A, A]$, то $\exists$ $\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$.

2) Якщо $f(x)$ – парна на (-∞, +∞) і інтегровна на будь-якому сегменті $[-A, A]$, тоді

$\exists$ $\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ $\Leftrightarrow$ збігається невласний інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx$, причому

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx .$$

Доведення. Якщо $f(x)$ – непарна на $[-A, A]$, тоді $\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx = 0$ $\Rightarrow$

$\exists$ $\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx = 0$.

Якщо $f(x)$ – парна на $[-A, A]$, то $\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{A} f(x)dx$, тоді

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx = 2\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{0}^{A} f(x)dx, & & \\ \exists & \Leftrightarrow & \exists\,(\text{зб.}), \\ \| & & \| \\ \text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx. & & \blacksquare \end{array}$$

Розглянемо відрізок $[a, b]$, і нехай $a < c < b$, а точка c – особлива.

Означення 1.52. Якщо функція $f(x)$ така, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ такого, що $a < c - \varepsilon < c + \varepsilon < b$, існують інтеграли Рімана $\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$ і $\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, то під *головним значенням невласного інтеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *в розумінні Коші* (V.p.) розуміють значення границі (якщо вона існує):

$$\boxed{\text{V.p.}\int\limits_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right]}.$$

Нагадаємо, що звичайний *невласний інтеграл II роду* з тією ж особливою точкою означається як

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx\right)$$

у випадку існування границі в правій частині рівності при незалежному прямуванні ε_1 і ε_2 до нуля справа.

Із означень випливає, що якщо існує невласний інтеграл II роду з особливою точкою в середині відрізка, то існує й інтеграл у розумінні головного значення за Коші. Зворотне твердження – невірне.

Приклад 1.30. Розглянемо один наочний приклад. Інтеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ як невласний інтеграл є розбіжним (див. приклад 1.27). При цьому в розумінні головного значення Коші він існує й дорівнює нулю, а саме:

$$\text{V.p.}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon} \ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1}\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{-\varepsilon}{\varepsilon}\right| = 0.$$