Тема 3. Алгебра нечітких множин

План

3.1. Доповнення множин.

3.2. Об'єднання множин.

3.3. Перетин множин.

3.4. Різниці множин.

3.5. Декартовий добуток множин.

3.6. Тотожності й закони алгебри нечітких множин.

Алгебра нечітких множин базується на правилах виконання арифметичних операцій над нечіткими множинами і на основних тотожностях й законах алгебри. Результатом виконання будь якої арифметичної операції є нова множина, навіть порожня. Розрізняють **одномісні** операції (для виконання необхідно тільки одна множина) та **двомісні** операції (для їх виконання необхідні дві множини). Математичний вираз на основі арифметичних операцій виконуються зліва направо, порядок може бути змінений за допомогою дужок. Одномісні операції мають пріоритет над двомісними операціями.

3.1 Доповнення множин

Нехай в деякій універсальній множині U побудована нечітка множина $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$. **Додатком множини** A є нова нечітка множина $\bar{A}$, в якій

$$\forall u \epsilon U: \mu_{\bar{A}}(u) = 1 - \mu_A(u) \qquad (3.1)$$

Дана операція є одномісною, при обчислені виразів завжди виконується в першу чергу.

Приклад 3.1 Множина $X = 0{,}1/u_2 + 0{,}3/u_3 + 0{,}5/u_4 + 0{,}7/u_5 + 0{,}9/u_6$ побудовано на універсальній множині $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{10}\}$. Виконаємо над множиною X операцію доповнення відповідно з (3.1), нижче в таблиці приведені зазначені ступені належності для множин X та $\bar{X}$.

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\mu_X(u)$	*0*	*0,1*	*0,3*	*0,5*	*0,7*	*0,9*	*0*	*0*	*0*	*0*
$\mu_{\bar{X}}(u)$	*1*	*0,9*	*0,7*	*0,5*	*0,3*	*0,1*	*1*	*1*	*1*	*1*

Тоді

$\bar{X} = 1/u_1 + 0{,}9/u_2 + 0{,}7/u_3 + 0{,}5/u_4 + 0{,}3/u_5 + 0{,}1/u_6 + 1/u_7 + 1/u_8 + 1/u_9 + 1/u_{10}$.

3.2 Об'єднання множин

Нехай в деякій універсальній множині U побудовано дві нечіткі множини $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$ та $B = \sum_{i=1}^{n} \mu_B(u_i)/u_i$. **Об'єднання** двох множин A та B буде нова множина $A \cup B$, в якій

$$\forall u \in U: \mu_{A \cup B}(u) = max[\mu_A(u), \mu_B(u)] \quad (3.2)$$

Приклад 3.2 Множини X та Y побудовані на універсальній множині $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{10}\}$ (нижче в таблиці наведені дані ступенів належності для цих множин). Визначимо ступені належності множені $X \cup Y$ за правилом об'єднання (3.2) і представим результати в наступному вигляді.

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\mu_X(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0	0	0	0
$\mu_Y(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	1	0	1	0,6	0	0,4
$\mu_{X \cup Y}(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	1	0,9	1	0,6	0	0,4

Тоді

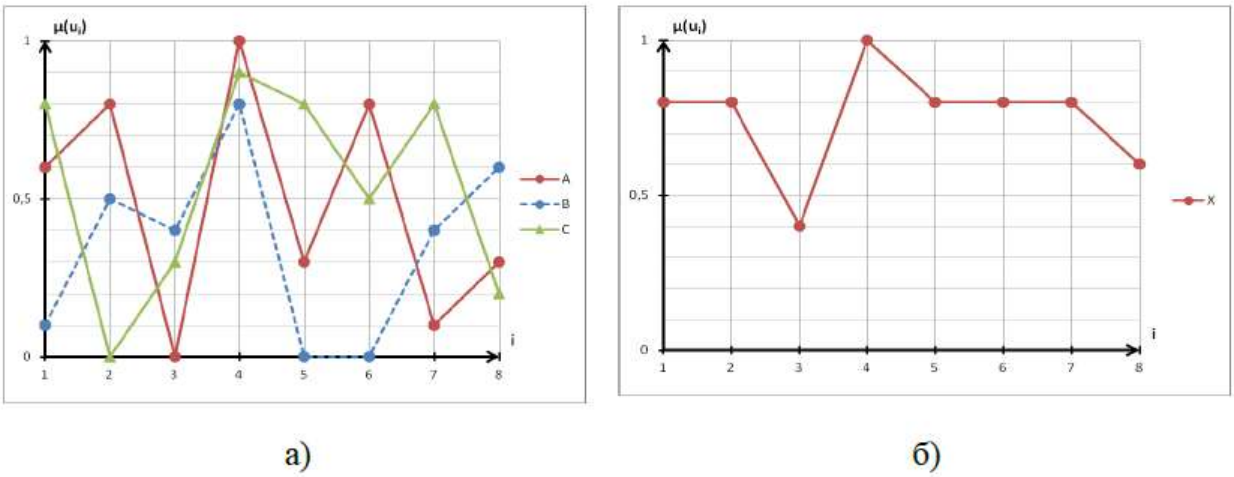
$X \cup Y = 0{,}2/u_1 + 0{,}1/u_2 + 0{,}7/u_3 + 0{,}5/u_4 + 1/u_5 + 0{,}9/u_6 + 1/u_7 + 0{,}6/u_8 + 0{,}4\ /u_{10}$.

Нехай в деякій універсальній множини U побудовано m нечітких множин $A_1 = \sum_{i=1}^{n} \mu_{A_1}(u_i)/u_i$, …, $A_m = \sum_{i=1}^{n} \mu_{A_m}(u_i)/u_i$. Об'єднанням декількох множин A_1,…, A_m буде множина $\bigcup_{j=1}^{m} A_j$, в якій

$$\forall u \epsilon U: \mu_{\bigcup_{j=1}^{m} A_j}(u) = \max_{j=1}^{m} \mu_{A_j}(u). \quad (3.3)$$

Приклад 3.3 Розглянемо графічний спосіб об'єднання декількох нечітких множин (3.3). На рисунку 3.1,а представлені діаграми Заде трьох множин A, B та C, а на рисунку 3.1,б – діаграма Заде множини X, котра є їх

об’єднанням. Для побудови діаграми Заде (рис. 3.1,б) для кожного елементу $u \in U$ вибиралась точка, розташована вище усіх на діаграми Заде (рис. 3.1,а) у цього елемента.



а) б)

Рисунок 3.1 – Приклад графічного способу об’єднання декількох нечітких множин

3.3 Перетин множин

Нехай в деякій універсальній множини U побудовано дві нечіткі множини $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$ та $B = \sum_{i=1}^{n} \mu_B(u_i)/u_i$. **Перетином** двох множин A та B буде нова множина $A \cap B$, в якій

$$\forall u \in U: \mu_{A \cap B}(u) = \min[\mu_A(u), \mu_B(u)]. \quad (3.4)$$

Приклад 3.4. Множини X та Y побудовані на універсальній множині $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{10}\}$ (нижче в таблиці наведені дані ступенів належності для цих множин). Визначимо ступені належності множені $X \cap Y$ по правилу перетину (3.4) і представим результати в наступній таблиці.

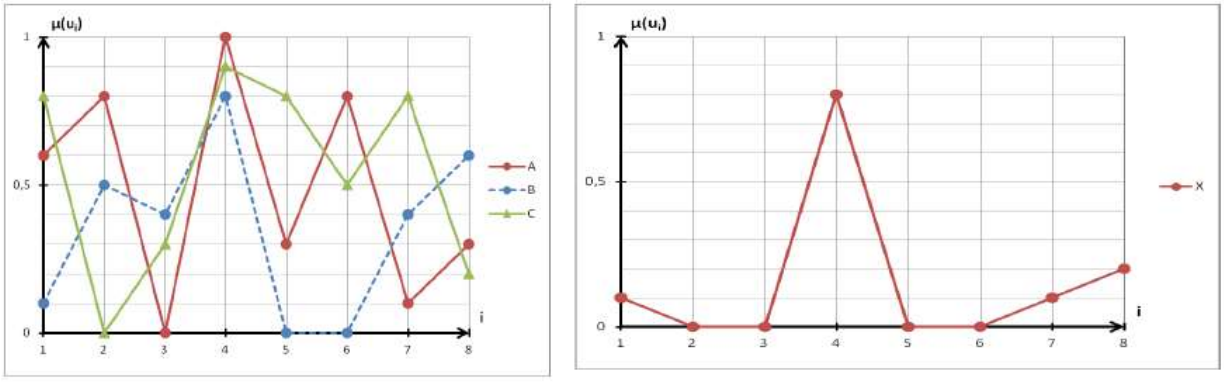
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\mu_X(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0	0	0	0
$\mu_Y(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	1	0	1	0,6	0	0,4
$\mu_{X \cap Y}(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0	0	0	0	0

Тоді $X \cap Y = 0{,}1/u_2 + 0{,}3/u_3 + 0{,}5/u_4 + 0{,}7/u_5$.

Нехай в деякій універсальній множини U побудовано m нечітких множин $A_1 = \sum_{i=1}^{n} \mu_{A_1}(u_i)/u_i$, …, $A_m = \sum_{i=1}^{n} \mu_{A_m}(u_i)/u_i$. **Перетином** декількох множин A_1,…, A_m буде множина $\bigcap_{j=1}^{m} A_j$, в якій

$$\forall u \in U: \mu_{\bigcap_{j=1}^{m} A_j}(u) = \min_{j=1}^{m} \mu_{A_j}(u). \quad (3.5)$$

Приклад 3.5. Розглянемо графічний спосіб перетину декількох нечітких множин (3.5). На рисунку 3.2,а представлені діаграми Заде трьох множин A, B та C, а на рисунку 3.2,б – діаграма Заде множини X, котра є їх перетином. Для побудови діаграми Заде (рис. 3.2,б) для кожного елементу $u \in U$ вибиралась точка, розташована нижче усіх на діаграми Заде (рис. 3.2,а) у цього елемента.



а) б)

Рисунок 3.2 – Приклад графічного способу перетину декількох нечітких множин

3.4 Різниці множин

Нехай в деякій універсальній множини U побудовано дві нечіткі множини $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$ та $B = \sum_{i=1}^{n} \mu_B(u_i)/u_i$. **Різницею** двох множин A та B (A без B) буде нова множина $A \backslash B$, в якій

$$\forall u \in U: \mu_{A \backslash B}(u) = \min[\mu_A(u), \mu_{\bar{B}}(u)]. \quad (3.6)$$

Із визначення даної операції очевидно, що $A \backslash B = A \cap \bar{B}$. Слідує відмітити, що $A \backslash B \neq B \backslash A$.

Приклад 3.6. Множини X та Y побудовані на універсальній множині $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{10}\}$ (нижче в таблиці наведені дані ступенів належності для цих множин). Для побудови нових множин $X\backslash Y$ та $Y\backslash X$ використаємо тотожність $A\backslash B = A \cap \bar{B}$. Нижче в таблиці спочатку знайдені доповнення $\bar{X}$ та $\bar{Y}$, а потім визначимо ступені належності множинам $X\backslash Y$ та $Y\backslash X$ за правилом перетину (3.6).

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\mu_X(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0	0	0	0
$\mu_Y(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	1	0	1	0,6	0	0,4
$\mu_{\bar{X}}(u)$	1	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1	1	1	1	1
$\mu_{\bar{Y}}(u)$	0,8	0,9	0,3	0,5	0	1	0	0,4	1	0,6
$\mu_{X\backslash Y}(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0	0,9	0	0	0	0
$\mu_{Y\backslash X}(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	0,3	0	1	0,6	0	0,4

Тоді:

$X\backslash Y = 0{,}1/u_2 + 0{,}3/u_3 + 0{,}5/u_4 + 0{,}9/u_6,$

$Y\backslash X = 0{,}2/u_1 + 0{,}1/u_2 + 0{,}7/u_3 + 0{,}5/u_4 + 0{,}3/u_5 + 1/u_7 + 0{,}6/u_8 + 0{,}4/u_{10}.$

Як видно з цього прикладу, $X\backslash Y \neq Y\backslash X$.

Симетричною різницею двох множин А та В буде нова множина $A + B$, в якій

$$\forall u \in U: \mu_{A+B}(u) = \max\Big(\min[\mu_A(u), \mu_{\bar{B}}(u)], \min[\mu_B(u), \mu_{\bar{A}}(u)]\Big). \quad (3.7)$$

Із визначення даної операції очевидно, що $A + B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$. Слідує відмітити $A + B = B + A$.

Алгоритм побудови симетричної різниці двох множин X та Y.

1. Будуємо множину $X\backslash Y$.
2. Будуємо множину $Y\backslash X$.
3. Визначаємо ступені належності множини $X + Y$ за правилом об'єднання.

Приклад 3.7. Множини X та Y побудовані на універсальній множині $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{10}\}$ (нижче в таблиці наведені дані ступенів належності для цих множин). Для побудови нової множини $X + Y$ використаємо результати побудови двох множин $X\backslash Y$ та $Y\backslash X$ із прикладу 3.6, а потім визначимо ступені належності множини $X + Y$ за правилом об'єднання (3.7) для цих

двох множин. Нижче в таблиці наведені розрахунки для побудови множини $X + Y$.

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\mu_X(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0	0	0	0
$\mu_Y(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	1	0	1	0,6	0	0,4
$\mu_{X\setminus Y}(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0	0,9	0	0	0	0
$\mu_{Y\setminus X}(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	0,3	0	1	0,6	0	0,4
$\mu_{X+Y}(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	0,3	0,9	1	0,6	0	0,4

Тоді

$$X + Y = 0{,}2/u_1 + 0{,}1/u_2 + 0{,}7/u_3 + 0{,}5/u_4 + 0{,}3/u_5 + 0{,}9/u_6 + 1/u_7 + 0{,}6/u_8 + 0{,}4/u_{10}$$

3.5 Декартовий добуток множин

Нехай задані дві не порожні множини $A \neq \emptyset$ та $B \neq \emptyset$. Результатом прямого декартового добутку цих множин буде нова множина $A \cdot B$, елементами якої буде всі можливі впорядковані пари, складені із елементів цих множин, тобто

$$\forall (a, b) \in A \cdot B: a \in A, b \in B, \tag{3.8}$$

Варто зауважити, що множини можуть бути побудовані на різних універсальних множинах. Із визначення цієї операції слідують наступні її основні властивості:

1). $|A| = n, |B| = m \rightarrow |A \cdot B| = n \cdot m,$

2). $A \cdot B \neq B \cdot A.$

Приклад 3.8. Задані множини $X = \{1,2,3\}$ та $Y = \{a, b\}$. Для знаходження $X \cdot Y$ визначимо спочатку кількість впорядкованих пар в ньому: $|X| = 3, |Y| = 2 \rightarrow |X \cdot Y| = 6$. Потім перерахуємо упорядковані пари: $X \cdot Y = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$. Порядок переліку елементів (пар) в цій множині не важливий, упорядкованість відноситься тільки до пари: в ній на першому місці повинен бути елемент із множини X, а на другому місці – елемент із множини Y. А тепер перерахуємо упорядковані пари для $Y \cdot X$: $Y \cdot X = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\}$. Очевидно, що множини $X \cdot Y$ та $Y \cdot X$ містять однакову кількість упорядкованих пар, але є різними множинами, причому відрізняються лише порядком перерахування в парах елементів з множин X та Y.

3.6 Тотожності й закони алгебри нечітких множин

Тотожності (табл. 3.1) та закони (табл. 3.2) алгебри множин відображають властивості операцій доповнення, перетину та об'єднання нечітких множин.

Таблиця 3.1 - Основні тотожності алгебри множин

№	Властивість	Тотожності
1.	Комутативність	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
2.	Асоціативність	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3.	Дистрибутивність	$A \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap C) \cup (A \cap C)$
4.	Ідемпотентність	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
5.	Властивість нуля	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
6.	Властивість одиниці	$A \cup U = U$ $A \cap U = A$

Таблиця 3.2 - Основні закони алгебри множин

№	Закон	Тотожності
1.	Закон поглинання	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
2.	Закон подвійного доповнення	$\bar{\bar{A}} = A$
3.	Закон де Моргана	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Слід зазначити, що тотожності $A \cup \bar{A} = U$ та $A \cap \bar{A} = \emptyset$ [3-5] виключені з переліку, оскільки їхня вірність спростовується для нечітких множин. Доведемо це твердження.

Нехай є деяка нечітка множна $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$. Очевидно, що в цій множині $\exists u \in U: \mu_A(u) \neq \{0,1\}$, наприклад, ступеня належності можуть набувати значення 0,8 або 0,4. Тоді такі елементи в множині доповнення (3.1) будуть мати властивість $\exists u \in U: \mu_{\bar{A}}(u) \neq \{0,1\}$, наприклад, 0,2 або 0,6 відповідно.

При об'єднанні $A \cup \bar{A}$ (3.2) такі елементи ніколи не матимуть ступеня належності 1, що потрібно для універсальної множини U. Їх ступеня приналежності вибиратимуться як максимум серед ступенів приналежності множині A або $\bar{A}$. Наприклад, $\max[0{,}8; 0{,}2] = 0{,}8$ або $\max[0{,}4; 0{,}6] = 0{,}6$. Отже, тотожність $A \cup \bar{A} = U$ невірна для нечітких множин.

При перетині $A \cap \bar{A}$ (3.4) такі елементи ніколи не матимуть ступінь належності 0, що потрібно для порожньої множини. Їх ступеня приналежності вибиратимуться як мінімум серед ступенів приналежності безлічі A або $\bar{A}$. Наприклад, $\min[0{,}8; 0{,}2] = 0{,}2$ або $\min[0{,}4; 0{,}6] = 0{,}4$. Отже, тотожність $A \cap \bar{A} = \emptyset$ невірна для нечітких множин.

Приклад 3.9. Задано дві нечіткі множини $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$ та $B = \sum_{i=1}^{n} \mu_B(u_i)/u_i$. Потрібно довести для них вірність закону поглинання $A \cup (A \cap B) = A$.

З використанням формул (3.2) та (3.4) визначимо наступне правило обчислення ступенів належності:

$$\forall u \in U: \mu_{A\cup(A\cap B)=A}(u) = \max\Big[\mu_A(u), \min\big(\mu_A(u), \mu_B(u)\big)\Big].$$

При обчисленні можуть бути наступні два випадки:

1) Якщо $\mu_A(u) < \mu_B(u)$, то $\min\big(\mu_A(u), \mu_B(u)\big) = \mu_A(u)$, отже $\mu_{A\cup(A\cap B)=A}(u) = \max\Big[\mu_A(u), \min\big(\mu_A(u), \mu_B(u)\big)\Big] = \mu_A(u)$.
2) Якщо $\mu_A(u) > \mu_B(u)$, то $\min\big(\mu_A(u), \mu_B(u)\big) = \mu_B(u)$, отже $\mu_{A\cup(A\cap B)=A}(u) = \max\Big[\mu_A(u), \min\big(\mu_A(u), \mu_B(u)\big)\Big] = \mu_A(u)$.

Таким чином, ми довели, що $\forall u \in U: \mu_{A\cup(A\cap B)=A}(u) = \mu_A(u)$. Тому закон поглинання $\cup\ (A \cap B) = A$ вірний і для нечітких множин.

Приклад 3.10 Множини X та Y побудовані на універсальній множині $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{10}\}$ (нижче в таблиці наведені дані ступенів належності для цих множин). Необхідно побудувати нову множину $Z = \bar{X} \backslash Y$.

Скористайтеся формулою (3.6) та замінимо операцію віднімання за правилом $\bar{X} \backslash Y = \bar{X} \cap \bar{Y}$ а потім застосуємо закон де Моргана $\bar{X} \cap \bar{Y} = \overline{X \cup Y}$. Таким чином, шукана множина може бути знайдена як $Z = \overline{X \cup Y}$. Нижче в таблиці наведено розрахунки для побудови множини Z.

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\mu_X(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0	0	0	0
$\mu_Y(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	1	0	1	0,6	0	0,4
$\mu_{X \cup Y}(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	1	0,9	1	0,6	0	0,4
$\mu_{\overline{X \cup Y}}(u)$	0,8	0,9	0,3	0,5	0	0,1	0	0,4	1	0,6

Тоді $Z = 0{,}8/u_1 + 0{,}9/u_2 + 0{,}3/u_3 + 0{,}5/u_4 + 0{,}1/u_6 + 0{,}4/u_8 + 1/u_9 + 0{,}6/u_{10}$.

Лабораторна робота 3

Тема. Алгебра нечітких множин

Мета роботи

Закріплення теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок з визначення операцій доповнення, об'єднання, перетину, різниці, декартового добутку множин та тотожностей й законів алгебри нечітких множин, створення відповідного програмного забезпечення.

У результаті виконання лабораторної роботи студент повинен вміти:

- визначати операцію доповнення нечіткої множини;
- визначати операцію об'єднання нечітких множин;
- визначати операцію перетину нечітких множин;
- визначати операцію різниці нечітких множин;
- визначати операцію декартового добутку нечітких множин;
- застосовувати тотожності й закони алгебри нечітких множин на практиці.

Завдання на підготовку

Студент повинен знати:

- основні поняття алгебри нечітких множин;
- методики проведення операцій доповнення, об'єднання, перетину, різниці, декартового добутку множин.

Студент повинен вміти:

- створювати програми однією з мов програмування для визначення операцій доповнення, об'єднання, перетину, різниці, декартового добутку множин та тотожностей й законів алгебри нечітких множин.

Для допуску до виконання роботи необхідно

- вміти відповісти на теоретичні запитання по ходу виконання роботи;
- дати викладачу заготівку звіту про лабораторну роботу, яка повинна містити титульний лист та опис виконаного завдання.

Зміст звіту

Титульний лист.

Назва і мета лабораторної роботи.

Теоретична частина:

1.Основні теоретичні відомості за темою лабораторної роботи.

Практична частина:

Виконані завдання та наведіть розв'язки завдань ілюстровані скріншотами, отриманими за розробленим програмним продуктом.

Висновки по роботі.

Виконайте умови завдань 1-4.

Завдання 1

Множина $X = 0{,}2/u_2 + 0{,}1/u_3 + 0{,}5/u_4 + 0{,}6/u_5 + 0{,}8/u_6$ побудована на універсальній множині $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{10}\}$. Виконайте над множиною X операцію доповнення.

Завдання 2

Множини X та Y побудовані на універсальній множині $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{10}\}$ (нижче в таблиці наведені дані ступенів належності для цих множин).

Визначте ступені належності множені $X \cup Y$.

Представьте результати в таблиці та на діаграмі Заде.

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\mu_X(u)$	0	0,2	0,4	0,5	0,8	0,7	0	1	0	0
$\mu_Y(u)$	0,2	0,1	0,6	0,5	1	0	0,2	0,5	1	0,3
$\mu_{X \cup Y}(u)$										

Завдання 3

Множини X та Y побудовані на універсальній множині $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{10}\}$ (нижче в таблиці наведені дані ступенів належності для цих множин).

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\mu_X(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1	0	1	0
$\mu_Y(u)$	0,4	0,3	0,6	0,4	1	1	1	0,5	0	0,6

Визначте ступені належності множені $X \cap Y$ по правилу перетину і представте результати в таблиці.

Завдання 4

Множини X та Y побудовані на універсальній множині $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{10}\}$ (нижче в таблиці наведені дані ступенів належності для цих множин).

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\mu_X(u)$	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,5	0	0,2	1	0
$\mu_Y(u)$	0,2	0,3	0,6	0,4	1	0	1	0,5	0	0,1

1. **Визначте**:
   - множину $X + Y$,
   - декартовий добуток $X \cdot Y$ та $Y \cdot X$,
   - множину $Z = \bar{X} \backslash Y$.
2. **Перевірте** вірність закону поглинання $X \cup (X \cap Y) = X$.