Тема5. ВЛАСТИВОСТІ СПЕЦІАЛЬНИХ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ

План

5.1 Поняття спеціального бінарного відношення.
5.2 Основні властивості спеціальних бінарних відношень.
5.2.1 Рефлексивність.
5.2.2 Симетричність.
5.2.3 Транзитивність.
5.3 Властивості чітких спеціальних бінарних відношень.
5.4 Властивості нечітких спеціальних бінарних відношень.

5.1 Поняття спеціального бінарного відношення

Нехай задана непорожня множина $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. **Спеціальним бінарним відношенням** R на множині X називається нова множина $R \subseteq X \cdot X$, де $X \cdot X$ - результат прямого декартового добутку множини X самої на себе.

Таким чином, спеціальне бінарне відношення R має $DomR \subseteq X$ і $ImR \subseteq X$ тобто в ньому можуть бути впорядковані пари з однаковими координатами $(x, x) \in R$, а також упорядковані пари виду $(x, y) \in R$ і $(y, x) \in R$. При відображенні $f: X \to X$ множина оригіналів (прообразів) і множина образів збігаються з вихідною множиною X. Графічне зображення спеціального бінарного відношення називається **графом**.

Якщо відношення $R \subseteq X \cdot X$ нечітке, то й граф є нечітким (кожна дуга $(x, y) \in R$ має вагу, що дорівнює ступеню приналежності відповідної пари до множини R). При цьому, спеціальному бінарному відношенню R можна поставити у відповідність не один, а кілька графів, які відрізняються між собою лише кратністю дуг.

Приклад 5.1. Місто Київ, розташоване на березі річки Дніпро. Усі мешканці цього міста проживають на берегах цієї річки, які ми позначимо як «a» та «d», а також на островах – «b» та «c». Всі ці ділянки суші з'єднані сімома мостами так, як показано на рисунку 5.1 зліва. Побудуємо спеціальне бінарне відношення R на множині

$$X = \{a, b, c, d\}$$

з функцією приналежності

$$\mu_R(x, y)\text{: «дільниці суші } x \text{ та } y \text{ з'єднані мостом».}$$

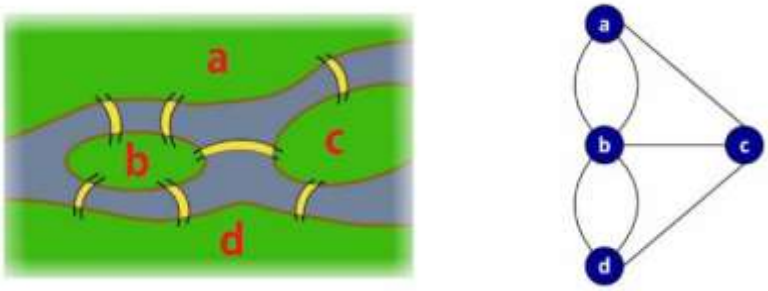


Рисунок 5.1 – Граф для задачі про Київські мости

Тоді

$$R = \{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(b,d),(c,a),(c,b),(c,d),(d,b),(d,c)\}.$$

Дослідника зацікавило питання про те, чи зможе будь-який житель Київа, де б він не проживав, вийти зі свого будинку, пройти по всіх мостах рівно один раз без повтору і повернутися додому? Праворуч на рисунку 5.1 зображено граф, який дослідник побудував на вирішення цієї задачі. Тут кожна пара зустрічних дуг замінена ребром, а кратність ребер відображає важливу властивість об'єкта, що моделюється, в контексті розв'язуваної задачі (наявність декількох мостів).

5.2 Основні властивості спеціальних бінарних відносин

5.2.1 Рефлексивність

Рефлексивність – це основна властивість спеціальних бінарних відношень, що залежить від наявності (відсутності) у ньому упорядкованих пар з однаковими координатами.

Спеціальне бінарне відношення $R \subseteq X \cdot X$ називається **рефлексивним,** якщо виконується умова

$$\forall x \in X: \mu_R(x,x) = 1. \tag{5.1}$$

Спеціальне бінарне відношення $R \subseteq X \cdot X$ називається **антирефлексивним**, якщо виконується умова

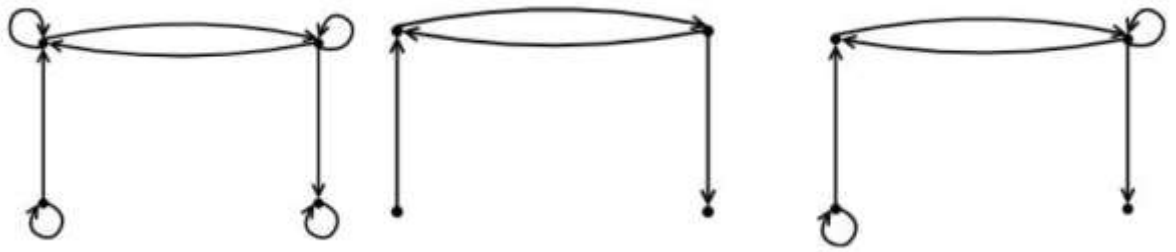
$$\forall x \in X: \mu_R(x,x) = 0. \tag{5.2}$$

В іншому випадку відношення $R \subseteq X \cdot X$ не володіє властивістю рефлексності, тобто. воно і **нерефлексивне,** і **не антирефлексивне**.

Слід зауважити**, що матриця $||\boldsymbol{M_R}||$ для рефлексивного відношення має лише елементи, що дорівнюють одиниці, а для**

антирефлексивного відношення – лише нульові елементи на головній діагоналі.

На рисунку 5.2 наведено приклади графічного зображення рефлексивного (рис. 5.2, а), антирефлексивного (рис. 5.2, б) і не володіє властивістю рефлексивності (мал. 5.2, в) спеціального бінарного відношення.



а) рефлексивне б) антирефлексивне в) нерефлексивне та не антирефлексивне

Рисунок 5.2 – Приклади спеціального бінарного відношення

5.2.2 Симетричність

Симетричність – це основна властивість спеціальних бінарних відносин, що залежить від наявності (відсутності) у ньому впорядкованих пар виду $(x, y) \in R$ та $(y, x) \in R$.

Спеціальне бінарне відношення $R \subseteq X \cdot X$ називається **симетричним**, якщо для $x \neq y$ виконується умова

$$\forall (x, y) \in R \exists (y, x) \in R: \mu_R(x, y) = \mu_R(y, x). \quad (5.3)$$

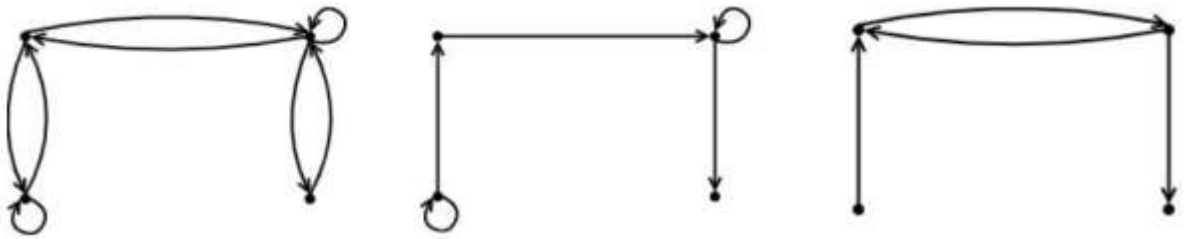
Спеціальне бінарне відношення $R \subseteq X \cdot X$ називається **антисиметричним**, якщо для $x \neq y$ виконується умова

$$\forall (x, y) \in R \exists (y, x) \in R: \mu_R(x, y) = \mu_R(y, x) \neq \mu_R(y, x) \wedge \mu_R(y, x) = 0. \quad (5.4)$$

В іншому випадку відношення $R \subseteq X \cdot X$ не має властивості симетричності, тобто воно і не симетричне, і не антисиметричне.

Слід зауважити, **що для симетричного відношення матриця $||\boldsymbol{M_R}||$ симетрична щодо головної діагоналі, тобто, кожен *i*-ий рядок збігається з *j*-им стовпцем.**

На рисунку 5.3 наведено приклади графічного зображення симетричного (рис. 5.3, а), антисиметричного (рис. 5.3, б) і не має симетричності (рис. 5.3, в) спеціального бінарного відношення.



а) симетричне б) антисиметричне в) не симетричне та не антисиметричне

Рисунок 5.3 – Приклади спеціального бінарного відношення

5.2.3 Транзитивність

Відношенням другого ступеня для спеціального бінарного відношення $R \subseteq X \cdot X$ називається нова множина $R^2 = R \circ R$, яка будується по правилам (4.1)

$$(a,b) \in R_1, (b,c) \in R_2 \Longrightarrow (a,c) \in R_1 \circ R_2$$

та (4.2)

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(a,c) = \max_{b \in B}\left(\min\left(\mu_{R_1}(a,b), \mu_{R_2}(b,c)\right)\right).$$

Множина R^2 містить у собі впорядковані пари, для котрих виконується умова

$$\forall (x,z) \in R^2 : (x,y) \in R \vee (y,z) \in R. \qquad (5.5)$$

Спеціальне бінарне відношення $R \subseteq X \cdot X$ називається **транзитивним**, якщо для кожної трійки елементів $x \neq y \neq z \neq$ множини X виконується умова

$$(x,y) \in R \vee (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R. \qquad (5.6)$$

Нехай відношення $R \subseteq X \cdot X$ представлено матрицею M_R, тоді відношення другого ступеня R^2 буде представлено матрицею M_{R^2}, елементи в якій обчислюються за формулою (4.2) виду

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(a,c) = \max_{b \in B}\left(\min\left(\mu_{R_1}(a,b), \mu_{R_2}(b,c)\right)\right).$$

Перевірка умови транзитивності відношення (5.6) зводиться до поелементного порівняння матриць M_R і M_{R^2} . Якщо M_{R^2} **не більше** відповідного елемента в матриці M_R, то це відношення R транзитивно, в

іншому випадку, кожен елемент у матриці відношення не має властивості транзитивності.

Приклад 5.2. Спеціальне бінарне відношення $R \subseteq X \cdot X$ побудовано на множині $X = \{a, b, c, d\}$ і представлено у вигляді матриці відношення

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Необхідно перевірити, чи є це відношення транзитивним?

Для цього спочатку побудуємо матрицю за правилом (4.2) для композиції $R \circ R$

$$M_{R^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тут

$$m_{R^2}(1,1) = \max_{i=1}(\min(m_R(1,i), \mu_R(i,1))) =$$

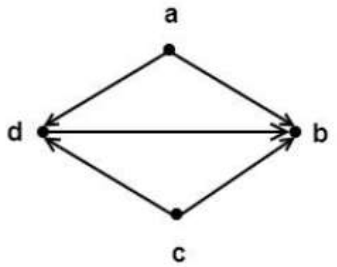
$$\max\,(\min(0,0), \min(1,0), \min(0,0), \min(1,0)) = 0,$$

$$m_{R^2}(1,2) = \max_{i=1}^{4}(\min(m_R(1,i), \mu_R(i,2))) =$$

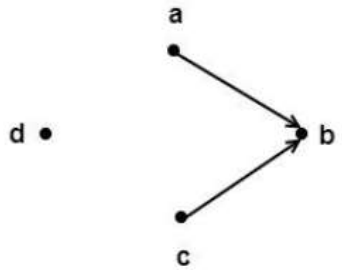
$$\max\,(\min(0,1), \min(1,0), \min(0,1), \min(1,1)) = 1$$

І так далі.

Вочевидь, що $R^2 = \{(a, b), (c, b)\}$. Поелементне порівняння матриць M_R і M_{R^2} встановило, що відношення $R \subseteq X \cdot X$ транзитивно (кожен елемент у матриці M_{R^2} не більше відповідного елемента в матриці M_R). На малюнку 5.4 ліворуч зображено граф для відношення R, а праворуч – граф для відношення R^2. Наявність дуг (a, b) та (c, b) в обох графах характеризує транзитивність спеціального бінарного відношення R .



а)відношення R



б)відношення R^2

Рисунок 5.4 – Графічне зображення відношень

Приклад 5.3. Нечітке спеціальне бінарне відношення $R \subseteq X \cdot X$ побудовано на множині $X = \{a, b, c, d\}$ і представлене у вигляді матриці відношення

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Необхідно перевірити усі основні властивості цього відношення. Оскільки, на головній діагоналі матриці M_R не всі елементи дорівнюють 1, то це відношення не є рефлексивним. Відсутність всіх нулів на головній діагоналі матриці M_R вказує на те, що це відношення не є антирефлексивним. Тому $R \subseteq X \cdot X$ не має властивості рефлексивності. Порівняння кожного i-ого рядка з i-им стовпцем встановило, що всі вони різні, що вказує на антисиметричність цього відношення.

Для перевірки транзитивності заданого відношення побудуємо матрицю.

$$M_{R^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поелементне порівняння матриць M_R і M_{R^2} встановило, що відношення $R \subseteq X \cdot X$ транзитивно (кожен елемент у матриці M_{R^2} не більше відповідного елемента в матриці M_R). Таким чином, задане нечітке спеціальне бінарне відношення $R \subseteq X \cdot X$ є антисиметричним та транзитивним.

Транзитивним замиканням спеціального бінарного відношення

$$R \subseteq X \cdot X$$

називається множина R_T, що є об'єднанням відношень усіх його ступенів, тобто $R_T, = \cup_{i=1}^{\infty} R^i$. Вважається, що $R^1 = R$, а відношення i- ступеня визначається, як $R^i = R^{i-1} \circ R$ (4.1). Якщо відношення $R \subseteq X \cdot X$ представлено матрицею M_R, то кожне R^i може бути представлено матрицею M_{R^i} (4.2).

Побудова ряду множин $R^1, R^2, \ldots$ завершується, якщо на деякому кроці виконується вимога

$$M_{R^i} = M_{R^{i-1}}.$$

Вочевидь, що пошук транзитивного замикання R_T кінцевий, оскільки множина X кінцева. Для транзитивного спеціального бінарного відношення $R \subseteq X \cdot X$ справедливе твердження $R = R_T$.

Приклад 5.4. Знайдемо транзитивне замикання R_T для відношення $R \subseteq X \cdot X$ з прикладу 5.2. Ми там встановили, що це ставлення транзитивне, і збудували відношення R^2, яке представлено матрицею

$$M_{R^1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так як $M_{R^3} = M_{R^2}$, то пошук степені співвідношення R можна завершити.

Отже, транзитивне замикання для цього відношення $R_T = R^1 \cup R^2$. Після об'єднання цих множин представимо R_T матрицею

$$M_{R_T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

У цьому прикладі ми переконалися, що для транзитивного спеціального бінарного відношення $R = R_T$.

Різні поєднання основних властивостей спеціального бінарного відношення $R \subseteq X \cdot X$ визначають інші властивості цього відношення.

5.3 Властивості чітких спеціальних бінарних відношень

Будь-яке рефлексивне, симетричне та транзитивне чітке спеціальне бінарне відношення R називається **еквівалентним**.

Нехай $R \subseteq X \cdot X$ - відношення еквівалентності. Тоді **класом еквівалентності** $[x]$, породженим елементом $x \in X$, називається така підмножина елементів $y \in X$, для яких $(x, y) \in R$. Для класів еквівалентності вірні наступні твердження.

1). $x \in X \Rightarrow x \in [x]$

2). $(x, y) \in R \Rightarrow [x] = [y]$

3). Співвідношення еквівалентності R розбиває множину X на непересічні між собою класи еквівалентності.

Фактор-множиною X/R називається множина, що включає в якості елементів всі класи еквівалентності $[x]$ у відношенні R.

Приклад 5.5.

Задано

$$X = \{\text{Москва}, \text{Санкт} - \text{Петербург}, \text{Тамбов}, \text{Берлін}, \text{Мюнхен}, \text{Лондон}\}.$$

Побудуємо спеціальне бінарне відношення $R \subseteq X \cdot X$ з функцією приналежності μ_R(x, y): «x і y-міста однієї держави».

Граф цього відношення (рис. 5.5) має петлю при кожній вершині (рефлексивність R), у кожної дуги є зустрічна дуга (симетричність R). На властивість транзитивності R вказує наявність дуги (Москва, Тамбов) для ланцюжка (Москва, Санкт-Петербург), (Санкт-Петербург, Тамбов), і навіть дуги (Тамбов, Москва) для ланцюжка (Тамбов, Санкт-Петербург), (Санкт-Петербург, Москва). Отже, побудоване спеціальне бінарне відношення R – відношення еквівалентності.

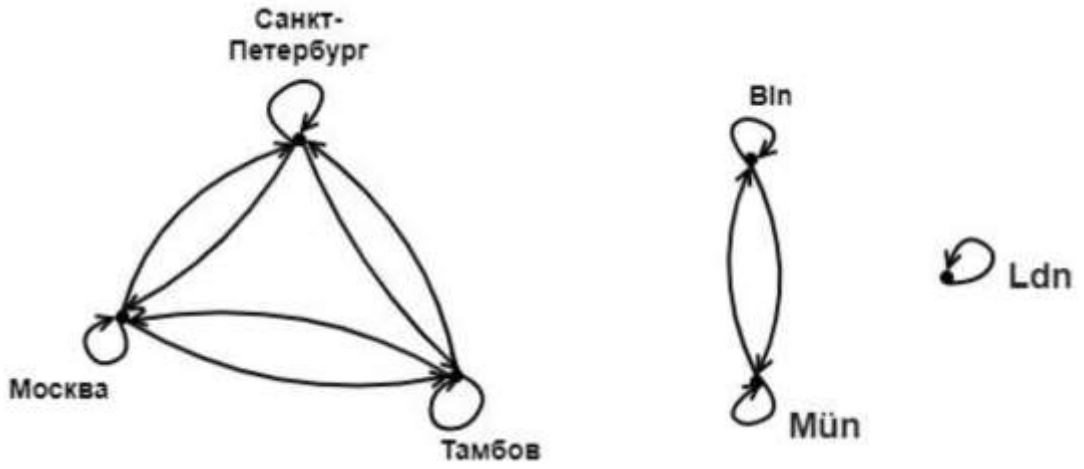


Рисунок 5.5 – Приклад еквівалентного відношення

Побудуємо в множині X класи еквівалентності та перерахуємо їх далі.

[Москва]={Москва, Санкт-Петербург, Тамбов}=[Санкт-Петербург]= [Тамбов]

[Берлін]={Берлін, Мюнхен}=[Мюнхен]

[Лондон] = {Лондон}.

Тоді фактор-множина

$$X/R = \{\{\text{Москва}, \text{Санкт} - \text{Петербург}, \text{Тамбов}\}, \{\text{Берлін}, \text{Мюнхен}\}, \{\text{Лондон}\}\}$$

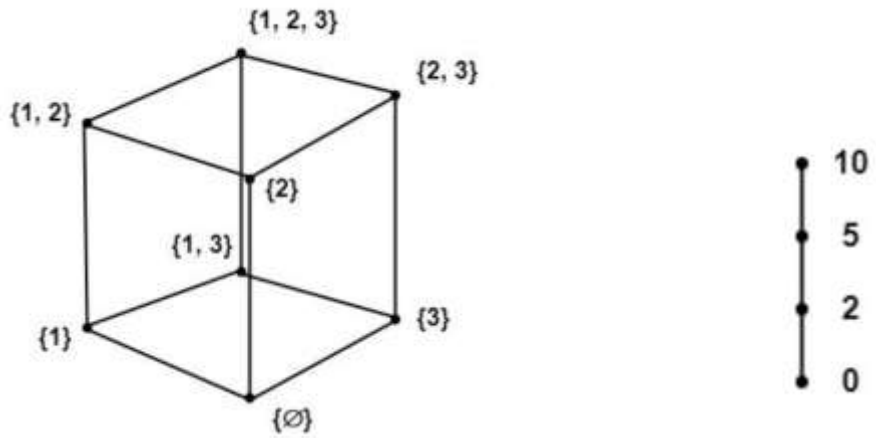
Будь-яке рефлексивне, антисиметричне та транзитивне спеціальне бінарне відношення $R \subseteq X \cdot X$ називається відношенням порядку або часткового порядку на множині X і позначається символом $\prec$.

Кажуть, що елемент $y \in X$ безпосередньо покриває елемент $x \in X$ щодо $R = (x \prec y)$, якщо немає іншого такого елемента $z \in X$, що $x \prec z \prec y$, де $x \neq y \neq z$.

Відношення порядку R на множині X, для якого будь-які два елементи можна порівняти, називається відношенням **лінійного порядку**. Множина $X_R = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ називається **упорядкованою**, якщо $x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_n$ щодо R, тобто у таких множинах порядок перерахування важливий.

Приклад 5.6. На множині $X = \{5,2,10,0\}$ побудовано відношення $R \subseteq X \cdot X$ з функцією приналежності $\mu_R = (x, y)$: «x≥ y». Оскільки будь-які два елементи множини X можна порівняти щодо R, то R – відношення лінійного порядку. Воно визначає впорядковану множину X_R={10,5,2,0}. Будь-яку впорядковану множину X_R можна представити у вигляді діаграми Хассе, у якій кожен елемент зображується точкою на площині. Якщо $x \prec y$, то ці точки з'єднують на схемі відрізком, причому точка x зображується на схемі **нижче**, ніж y.

Приклад 5.7. Нехай є множина $A = \{1,2,3\}$. **Булеан** $P(A)$– це множина, що включає в себе в якості елементів всі можливі підмножини A, у тому числі і порожню множину. Відомо, що $|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^n$. Тоді $X = P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$. Побудуємо відношення порядку R на множині X з функцією приналежності $\mu_R = (x, y)$: «x включає y». На рисунку 5.6 а) представлено за допомогою діаграми Хассе частково впорядковану множину X_R для цього відношення, а на рисунку 5.6,б) – для відношення лінійного порядку з прикладу 5.6.



а) відношення нелінійного порядку б) відношення лінійного порядку

Рисунок 5.6 – Приклади діаграм Хассе

5.4 Властивості нечітких спеціальних бінарних відношень

Деякі важливі властивості нечітких спеціальних бінарних відношень представлені далі у таблиці. Тут Р – рефлексивність, АР – антирефлексивність, Т – транзитивність, С – симетричність, АС – антисиметричність.

Властивість	**Р**	**АР**	**Т**	**С**	**АС**
подібність	+			+	
несхожість		+		+	
подібність	+		+	+	
препорядок	+		+		
нестрогий порядок	+		+		+
строгий порядок		+	+		+

Лабораторна робота 5

Тема. ВЛАСТИВОСТІ СПЕЦІАЛЬНИХ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ

Мета роботи

Закріплення теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок з визначення властивостей спеціальних бінарних відношень, створення відповідного програмного забезпечення.

У результаті виконання лабораторної роботи студент повинен вміти:

- визначати спеціальне бінарне відношення;
- визначати основні властивості спеціальних бінарних відношень;
- створювати програмні функції для визначення властивостей спеціальних бінарних відношень.

Завдання на підготовку

Студент повинен знати:

- як визначати спеціальне бінарне відношення;
- як визначати основні властивості спеціальних бінарних відношень;
- одну з мов програмування.

Студент повинен вміти:

- створювати програми однією з мов програмування.

Для допуску до виконання роботи необхідно:

- вміти відповісти на теоретичні запитання по ходу виконання роботи;
- дати викладачу заготівку звіту про лабораторну роботу, яка повинна містити титульний лист та опис виконаного завдання.

Зміст звіту

Титульний лист.

Назва і мета лабораторної роботи.

Теоретична частина:

1. Основні теоретичні положення за темою лабораторної роботи
2. Опис умов задачі.

Практична частина:

1. Розв'язок завдань лабораторної роботи, ілюстровані скріншотами.

Висновки по роботі.

Завдання 1

На множині $X = \{1,2,3,4\}$ побудовано спеціальне бінарне відношення R з наступною функцією приналежності: $\mu_R = (a, b)$: $a \leq b$.

Виберіть правильні твердження.

a. $|X \cdot X| = 12$

b. $|R| = 10$

c. $\forall a \in X: \mu_R(a,a) = 1$

d. $\forall a \in X: \mu_R(a,a) = 0$

e. $(2,3) \in R$

f. $(3,2) \in R$

g. немає вірної відповіді.

Завдання 2

Спеціальне бінарне відношення R представлене матрицею

$$M_R = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 1 & 0{,}8 & 0.3 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}9 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Виберіть правильні твердження.

a. Це рефлексивне відношення.

b. Це антирефлексивне відношення

c. Дане відношення не має властивості рефлексивності.

d. Немає вірної відповіді.

Завдання 3

Спеціальне бінарне відношення R представлене матрицею

$$M_R = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 1 & 0{,}8 & 0.3 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}9 & 1 \\ 0{,}8 & 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Виберіть правильні твердження.

a. Це симетричне відношення.

b. Це антисиметричне відношення.

c. Дане відношення не має властивості симетричності.

d. Немає вірної відповіді.

Література

1. Zadeh L. A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. Т. 8, № 3. P. 338-353.

2. Заде Л. Поняття лінгвістичної змінної та її застосування до прийняття наближених рішень. - М.: Світ, 1976. - 166 с.

3. Конишева Л.К., Назаров Д.М. Основи теорії нечітких множин: Навчальний посібник. - СПб.: Пітер, 2011. - 192с.: Іл.

4. Осипова В.А. Основи дискретної математики: Навчальний посібник. - М.: ФОРУМ: ІНФРА-М, 2006. - 160с.: Іл. - (Вища освіта).

5. Новіков Ф.А. Дискретна математика: Підручник для вишів. Стандарт третього покоління. - СПб.: Пітер, 2011. - 384с.: Іл.

6. Андерсон, Джеймс А. Дискретна математика та комбінаторика.: Пер. з англ. - М.: Видавничий дім "Вільямс", 2004. - 960с.: Іл.