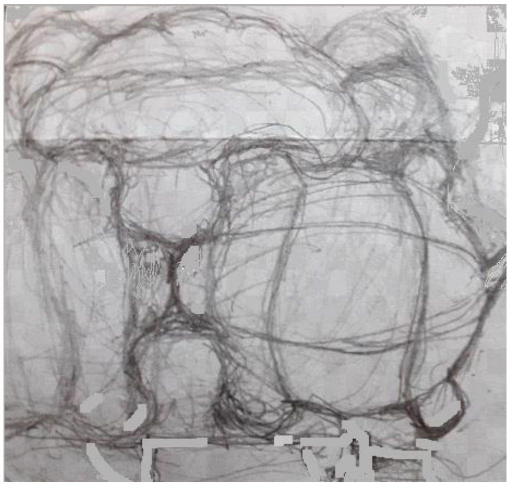
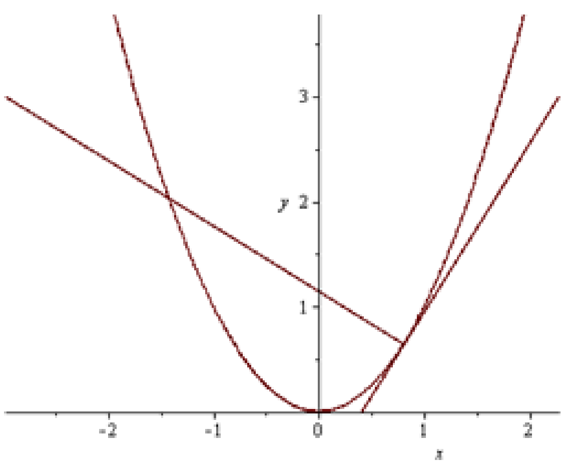
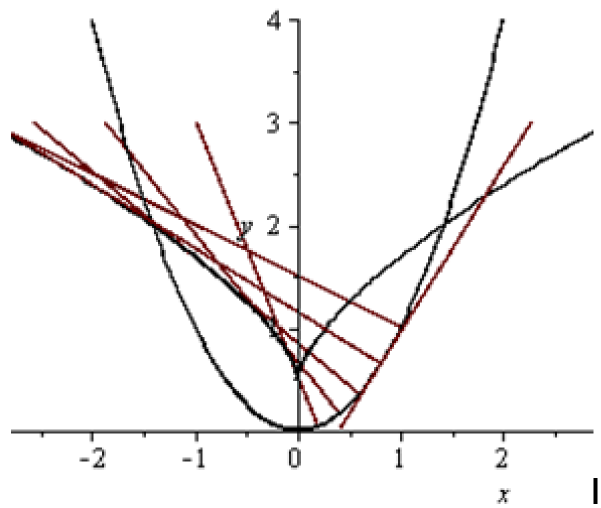
Кратність положень рівноваги – «ключ» до аналізу катастроф



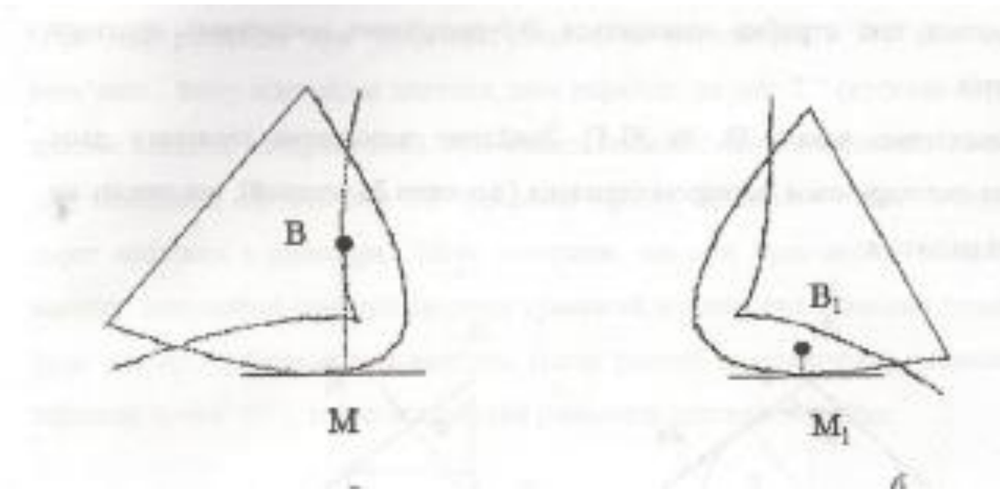
Гравітаційна машина катастроф Постона



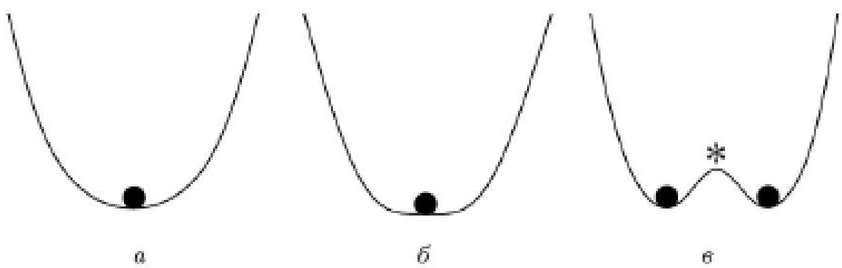


Зоні на параболічному сегменті, яка нижче еволюти (напівкубічна парабола) відповідає єдине положення рівноваги - стійке (згадайте ляльку «неваляшку»), а зоніі вище – три, одне з яких нестійке. Наприклад, вертикальне положення рівноваги буде нестійке (точкою опори є вершина параболи), якщо центр мас знаходиться вище точки загострення напівкубічної параболи (в цьому

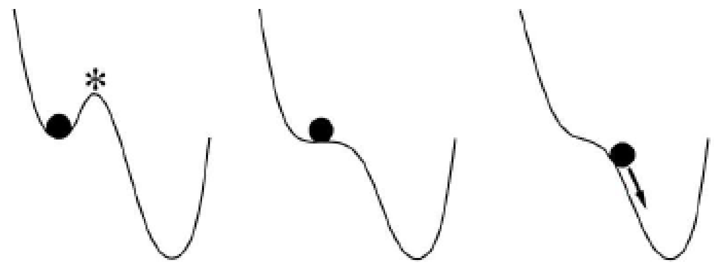
випадку висота центру мас над опорною поверхнею перевищує радіус кривизни, який відповідає вершині параболи). Навіть при малих відхиленнях центру мас від вертикалі параболічний сегмент перекинеться (малим змінам параметрів системи відповідають стрибкоподібні переходи системи з одного стану рівноваги в інший – катастрофи).



Приклад до пояснення «м’якої»



та «жорсткої» біфуркацій



Моделювання біфуркацій (катастроф) в пакеті MAPLE V

Застосування геометричного змісту похідної для побудови дискримінанту полінома (дискримінантної кривої).

(Скільки дійсних коренів має поліном? – в цьому допоможе розібратися дискримінантна крива)

```
> restart:
> pol:=x^4+a2*x^2+a3*x+a4;
```

$$pol := x^4 + a2\,x^2 + a3\,x + a4$$

```
> #Дискримінант полиному pol:
> DSC:=discrim(pol,x);
```

$$DSC := -4\,a2^3\,a3^2 - 27\,a3^4 + 16\,a2^4\,a4 - 128\,a2^2\,a4^2 + 144\,a2\,a4\,a3^2 + 256\,a4^3$$

```
> #Ілюстрація претворення змінних для  вилучення  моному x^3:
> expand((x-x0)^4);
```

$$x^4 - 4\,x^3\,x0 + 6\,x^2\,x0^2 - 4\,x\,x0^3 + x0^4$$

```
> collect(%,x);
```

```
>
```

$$x^4 - 4x^3 x0 + 6x^2 x0^2 - 4x x0^3 + x0^4$$

```
> a3:=-4*x0;
```

$$a3 := -4\,x0$$

```
> poll:=x^4+a3*x^3+a2*x^2+a3*x+a4;
```

$$poll := x^4 - 4x^3 x0 + a2\,x^2 - 4x\,x0 + a4$$

```
> subs(x=x-a3/4,poll);
```

$$(x + x0)^4 - 4(x + x0)^3 x0 + a2(x + x0)^2 - 4(x + x0)\,x0 + a4$$

```
> collect(%,x);

>
```

$$x^4 + \left(-6\,x0^2 + a2\right)x^2 + \left(-8\,x0^3 + 2\,a2\,x0 - 4\,x0\right)x - 3\,x0^4 + a4 - 4\,x0^2 + a2\,x0^2$$

Після перетворення координат поліном набуває наступного вигляду

```
> x^4+A2*x^2 +A3*x+A4
```

3.4 Знаходження дискримінанту полінома

Знаходження дискримінанту полінома pol на основі геометричної інтерпретації: при наявності кратних дійсних коренів полінома pol пряма -(A3*x+A4) повинна бути дотичною до графіка функції x^4+A2*x^2:

```
># Отримаємо рівняння дискримінантної кривої в параметричній формі:

> a3:=-diff(x^4+a2*x^2,x);
```

$$a3 := -4x^3 - 2\,a2\,x$$

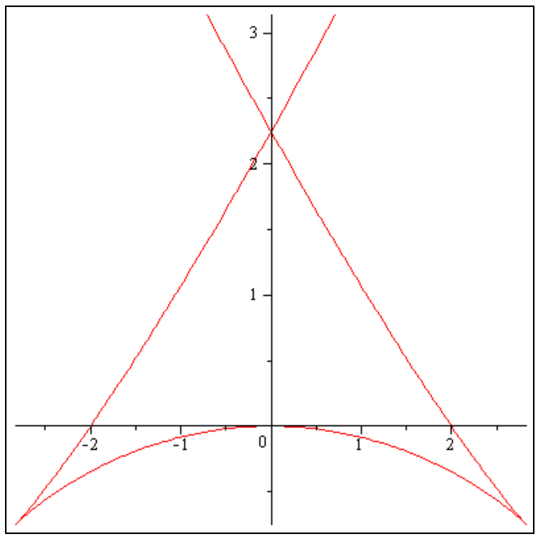
```
> a4:=solve(pol,a4);
```

$$a4 := 3\,x^4 + a2\,x^2$$

> #Далі розглянуто випадок a2=-3;

> #Побудова графіку дискримінантної кривої в параметричній формі:

> plot([subs(a2=-3,a3),subs(a2=-3,a4),x=-1.28..1.28]);



У «трикутній» області з точками загострення лежать значення коефіцієнтів полінома pol, при яких він має чотири дійсних кореня; при перетині межі «трикутної» області, число дійсних коренів на дві одиниці менше - два; при повторному перетині межі дискримінантної кривої (вище її точки самоперетину) потрапляємо в область, де дійсні корені відсутні. Точкам (a3, a4) на межі дискримінантної кривої відповідають кратні дійсні корені полінома pol (в точках загострення - триразові дійсні корені).

```
> a3:='a3';a4:='a4';
```

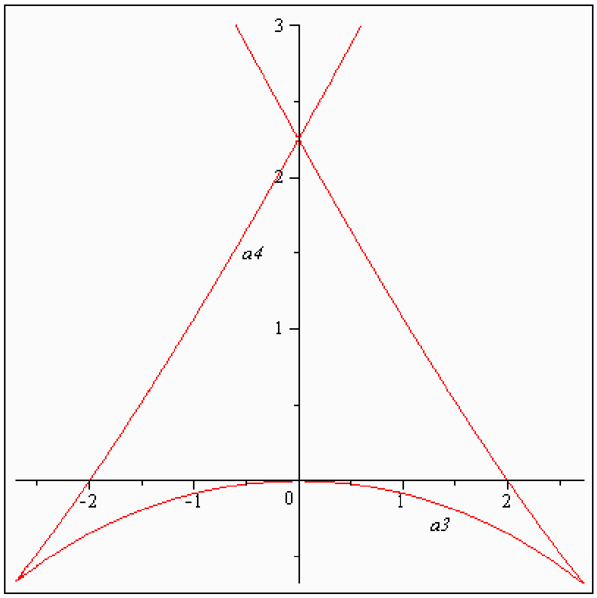
$$a3 := a3$$

$$a4 := a4$$

```
> with(plots);
```

># **Побудова графіка дискримінантної кривої за допомогою оператора implicitplot для неявно заданої функції;**

```
> implicitplot(subs(a2=-3,DSC)=0,a3=-3..3,a4=-3..3,
grid=[200,300]);
```



 **Самостійна робота по курсу**

1.Спробуйте побудувати графіки полінома pol при конкретних значеннях параметрів (a3, a4), що належать різним областям дискримінантної кривої, наприклад, для випадку, що представлений нижче, повинно реалізовуватися чотири дійсних кореня (інтервал a..b зміни незалежної змінної x знаходиться підбором)

```
>plot(subs({a2=-3,a3=1,a4=0.5}, pol), x=a..b);
```

2.Знайдіть дискримінант кубічного рівняння: x^3+p*x+q;

Application of elements Bifurcation theory for steady oscillations:

```
> Diff(x,`$`(t,2))+2*gamma*Diff(x,t)+Omega^2*x^3 =
p0*sin(omega*t+phi);
```

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} x + 2\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} x\right) + \Omega^2 x^3 = p0 \sin(\omega t + \phi)$$

```
> x:=a*sin(omega*t);
```

$$x := a \sin(\omega t)$$

```
> EQ:=diff(x,`$`(t,2))+2*gamma*diff(x,t)+Omega^2*x^3 -
p0*sin(omega*t+phi)=0;
```

$$EQ := -a \sin(\omega t)\,\omega^2 + 2\gamma a \cos(\omega t)\,\omega + \Omega^2 a^3 \sin(\omega t)^3 - p0 \sin(\omega t + \phi) = 0$$

```
> evalm(subs(t=0,EQ));
```

$$2\gamma a \omega - p0 \sin(\phi) = 0$$

```
> evalm(subs(omega*t=Pi/2,EQ));
```

$$-a\omega^2 + \Omega^2 a^3 - p0 \cos(\phi) = 0$$

```
> (2*gamma*a*omega)^2+(-a*omega^2+Omega^2*a^3)^2-
p0^2=0;
```

$$4\gamma^2 a^2 \omega^2 + \left(-a\omega^2 + \Omega^2 a^3\right)^2 - p0^2 = 0$$

```
> 4*gamma^2*AA*omega^2+AA*(-omega^2+Omega^2*AA)^2-p0^2
= 0;
```

$$4\gamma^2 AA\,\omega^2 + AA\left(-\omega^2 + \Omega^2 AA\right)^2 - p0^2 = 0$$

```
> collect(%,AA);
```

$$\Omega^4 AA^3 - 2\omega^2 \Omega^2 AA^2 + \left(\omega^4 + 4\gamma^2 \omega^2\right) AA - p0^2 = 0$$

Amplitud Equation

```
> Poly:=expand((Omega^4*AA^3-
2*omega^2*Omega^2*AA^2+(omega^4+4*gamma^2*omega^2)*AA-
p0^2)/Omega^4);
```

$$Poly := AA^3 - \frac{2\,\omega^2\,AA^2}{\Omega^2} + \frac{AA\,\omega^4}{\Omega^4} + \frac{4\,AA\,\gamma^2\,\omega^2}{\Omega^4} - \frac{p0^2}{\Omega^4}$$

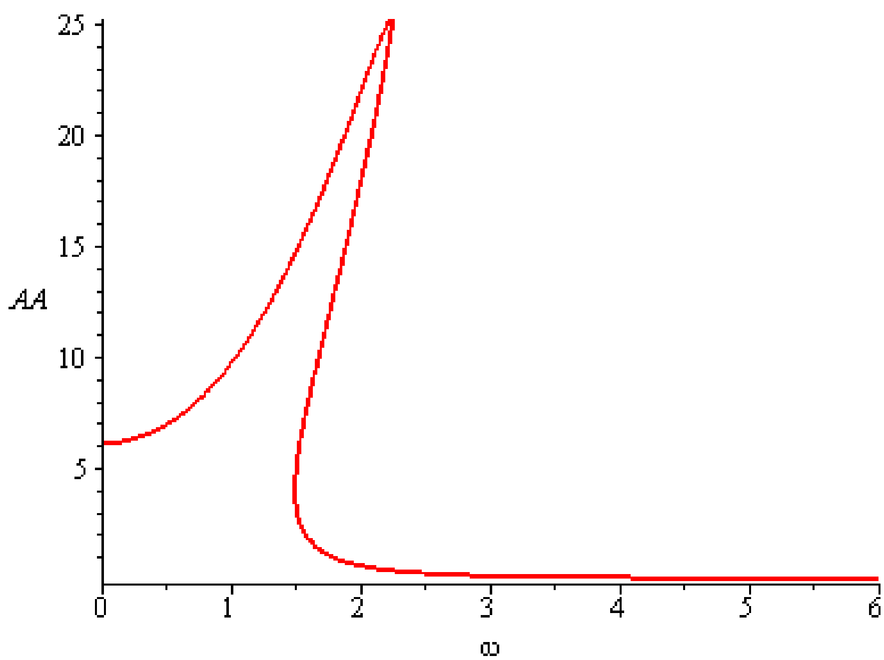
```
> DISC:=expand(discrim(Poly,AA));
```

$$DISC := \frac{4\,\omega^6\,p0^2}{\Omega^{10}} - \frac{16\,\omega^{10}\,\gamma^2}{\Omega^{12}} - \frac{27\,p0^4}{\Omega^8} + \frac{144\,p0^2\,\gamma^2\,\omega^4}{\Omega^{10}} - \frac{128\,\gamma^4\,\omega^8}{\Omega^{12}} - \frac{256\,\omega^6\,\gamma^6}{\Omega^{12}}$$

Discriminate of Amplitud Equation

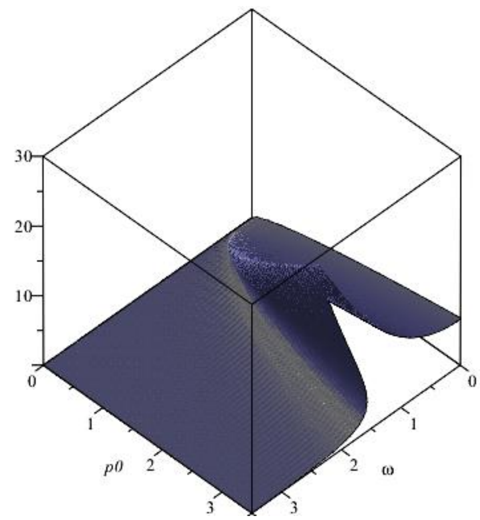
```
> with(plots):
```

```
>
implicitplot(subs({gamma=alpha/(2*m),Omega=sqrt(C/m),p0
=3},Poly)=0,omega=0..6,AA=0..30,grid=[250,250]);
```



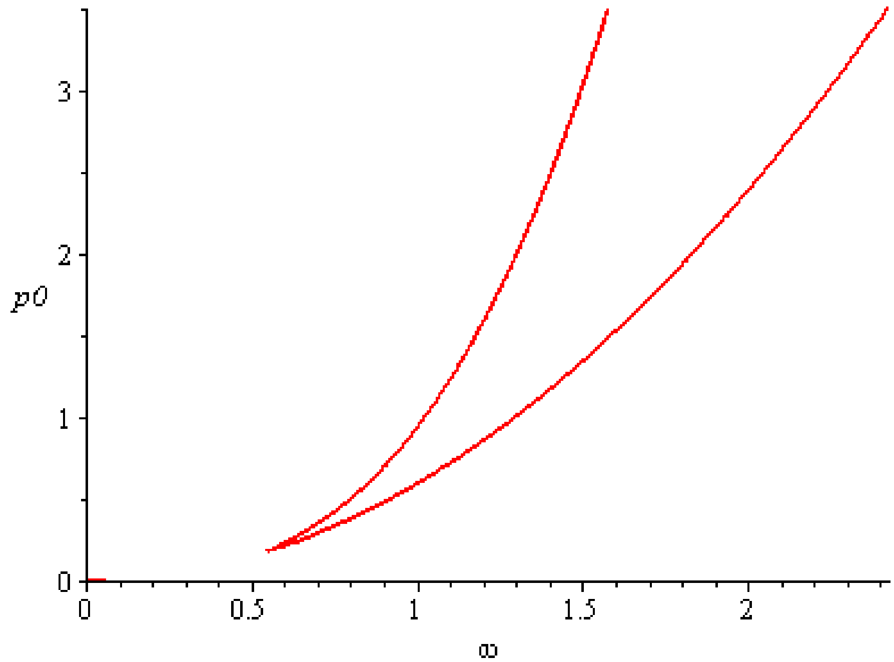
Amplitude - Frequency diagram

```
>
implicitplot3d(subs({gamma=alpha/(2*m),Omega=sqrt(C/m)}
,Poly)=0,omega=0..3.5,p0=0..3.5,AA=0..30,grid=[50,50,50
]);
```



Surface of catastrophe

```
>
implicitplot(subs({gamma=alpha/(2*m),Omega=sqrt(C/m)},D
ISC)=0,omega=0..3,p0=0..3.5,grid=[250,250]);
```



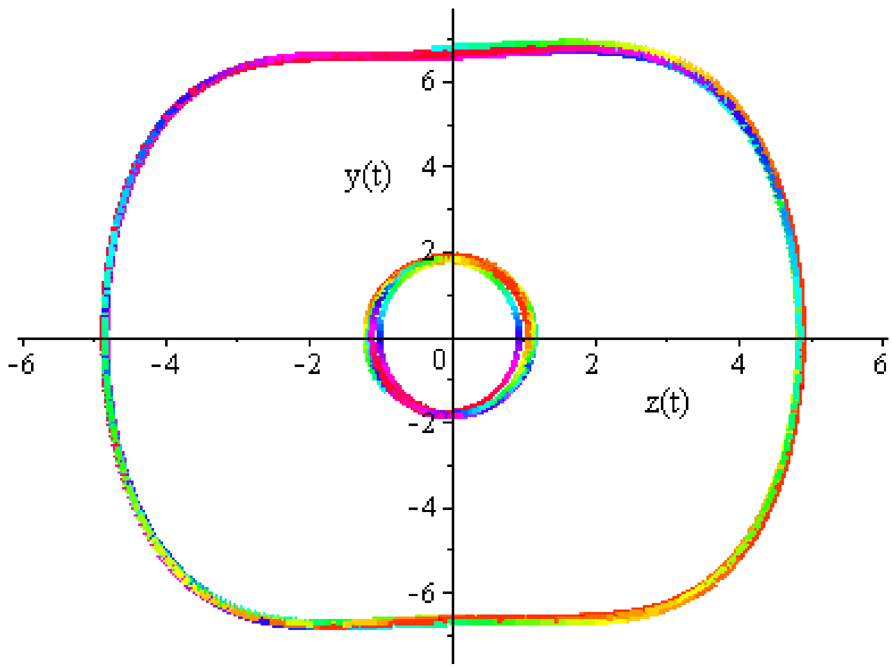
Discriminate manifold:

cusp appears 3 steady oscillations (two are stable)

```
> DEplot([D(z)(t)=y(t),D(y)(t)=-alpha*(y(t))/m-
C*(z(t))^3/m+3*sin(1.7*t)],

[z(t),y(t)],t=30..45,[[z(0)=0.5,y(0)=0],[z(0)=0,y(0)=1]
],stepsize=.005,

scene=[z(t),y(t)],z(t)=-5.5..5.5,y(t)=-
7...7.,linecolour=sin(t*Pi/2));
```



y(t)
z(t)
6
4
2
0
-2
-4
-6
-6
-4
-2
2
4
6