

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

Варіант № 1

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = \sin 2t$.
2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:
а) $f(t) = \sin^2 t$; б) $f(t) = \frac{e^t - 1}{t}$; в) $f(t) = e^{-t} t^3$; г) $f(t) = \frac{|\sin 2t|}{\sin 2t}$.
3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{+\infty} \frac{(e^{-2t} - e^{-4t}) \sin 2t}{t} dt$.
4. Знайти оригінали для наступних зображень:
а) $F(p) = \frac{1}{p(p+1)(p^2+4)}$; б) $F(p) = \frac{p}{p^3-1} e^{-\frac{p}{2}}$.
6. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння $x'' + x' = 4 \sin^2 t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.
7. Знайти розв'язок задачі Коші:
 $x'' + 2x' + 5x = 1 - \eta(t-1)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
8. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:
$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases}$$
 $x(0) = y(0) = 0$.
9. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = e^t - t - 1 + \int_0^t x(\tau) d\tau$.
10. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = n^2 e^n$.
11. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} + 4x_{n+1} + 4x_n = (-2)^n$, $x_0 = x_1 = 0$.

Варіант № 2

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = t^2$.
2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:
а) $f(t) = e^t \sin^3 t$; б) $f(t) = \frac{\sin t - t}{t}$; в) $f(t) = t^2 \operatorname{ch} 4t$; г) $f(t) = |\sin t|$.
3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-3t} \sin 6t}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{p}{(p^2 - 4)(p^2 + 9)}$; б) $F(p) = \frac{p + 2}{(p + 1)(p - 2)(p^2 + 4)} e^{-p}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' + 2x' + 2x = 2e^{-t} \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 1.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x' + 4x = 2e^{-t} (1 - \eta(t - 1)), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' + y - x = e^t, \end{cases} \\ x(0) = y(0) = 1.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = \frac{t^2}{2} + \int_0^t (t - \tau)x(\tau) d\tau$.

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = n \sin \frac{n\pi}{2}$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+3} - x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 1$, $x_0 = x_1 = x_2 = 0$.

Варіант № 3

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = \cos 5t$.

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = \cos^4 t$; б) $f(t) = \int_0^t (\tau^5 + 1) \cos \omega \tau d\tau$; в) $f(t) = e^{-2t} t^{\frac{7}{2}}$; г) $f(t) = |\cos t|$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^\infty \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} \sin 3t dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{2}{p^2(p^2 + 4p + 5)}$; б) $F(p) = \frac{e^{-2p}}{(p - 1)^2(p - 3)}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' + x = \cos t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 1.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x = \sin t (1 - \eta(t - \pi)), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = 1.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = te^{2t} - \int_0^t e^{2(t-\tau)} x(\tau) d\tau.$

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = \text{sh} 2n \cdot \sin n.$

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = 0, x_0 = 1, x_1 = 0.$

Варіант № 4

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & t > 1. \end{cases}$

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = \sin 2t \cos 4t$; б) $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}$; в) $f(t) = e^{3t} \sin^2 t$; г) $f(t) = \{5t\}.$

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^\infty \frac{e^{-4t} - e^{-6t}}{t} dt.$

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{2p+3}{p^3+3p^2+3p+1}$; б) $F(p) = \frac{pe^{-p}}{(p^2+1)^2}.$

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння: $x'' - 2x' + 2x = 1, x(0) = x'(0) = 0.$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 6x' + 8x = \sin t - \cos t \cdot \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right), x(0) = x'(0) = 1.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x'' - y' = 0, \\ x - y'' = \sin t, \end{cases}$$

$$x(0) = -1, x'(0) = y(0) = y'(0) = 1.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = \cos t + \int_0^t x(\tau) d\tau.$

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = (n^2 + 2n)(-2)^n.$

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 0, x_0 = 1, x_1 = 1.$

Варіант № 5

- Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases}$
- За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:
а) $f(t) = \sin^4 t$; б) $f(t) = \frac{\cos t - \cos 2t}{t}$; в) $f(t) = e^{-t} \sqrt{t}$; г) $f(t) = \frac{|\cos 5t|}{\cos 5t}$.
- Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{\cos 8t - \cos 4t}{t} dt$.
- Знайти оригінали для наступних зображень:
а) $F(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}$; б) $F(p) = \frac{e^{-p}}{(p-1)(p-2)^2}$.
- Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:
 $x''' - 2x'' + x' = 4, \quad x(0) = 1, x'(0) = 2, x''(0) = -2.$
- Знайти розв'язок задачі Коші:
 $x'' + 4x' + 20x = \eta(t - 2\pi) \cdot \cos t, \quad x(0) = 1, x'(0) = 0.$
- Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:
$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases}$$

 $x(0) = y(0) = 0.$
- Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = \sin t + \int_0^t \cos(t - \tau) x(\tau) d\tau$.
- Знайти зображення решітчастої функції $f_n = n \cdot \sin^2 2n$.
- Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} - 3x_{n+1} - 4x_n = (-1)^n, \quad x_0 = 1, x_1 = -1.$

Варіант № 6

- Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = 2t$.
- За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:
а) $f(t) = t(e^t + \cosh t)$; б) $f(t) = \frac{1 - \cos t}{t}$; в) $f(t) = \sin^2 t \cos^2 t$; г) $f(t) = |\sin 2t|$.
- Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{\sin 4t \sin 6t}{t} dt$.
- Знайти оригінали для наступних зображень:
а) $F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p-3)}$; б) $F(p) = \frac{e^{-5p}}{p^3 + 2p^2 + p}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' + 4x = t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 7x' + 6x = e^{-2t} \operatorname{sh} t + \eta(t-1), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + x = y + e^t, \\ y' + y = x + e^t, \end{cases}$$
$$x(0) = y(0) = 1.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = e^t + \int_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)d\tau$.

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = n^2 + 2n$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = n^2$, $x_0 = x_1 = x_2 = 0$.

Варіант № 7

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = \cos t$.

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = \sin 3t \cos 5t$; б) $f(t) = \frac{\cos t - \cos 2t}{t}$; в) $f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$; г) $f(t) = \{3t\}$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^\infty \frac{(1 - \cos 4t)e^{-2t}}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{1}{p(p^2 - 4)}$; б) $F(p) = \frac{2p + 3}{p^3 + 4p^2 + 5p} e^{-p}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' - 2x' + x = 4t + 1, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x''' + 4x'' + 5x' + 2x = 2e^{-2t}(1 - \eta(t-3)), \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases}$$
$$x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = \sin t - \int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)x(\tau)d\tau$.

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = (n-1)\sin n$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 1$, $x_0 = x_1 = 0$.

Варіант № 8

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = te^{2t}$.

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = (t+1)\sin 2t$; б) $f(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$; в) $f(t) = te^t \cos t$; г) $f(t) = e^{\{t\}}$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} \cos 2t dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{p}{p^3 + 1}$; б) $F(p) = \frac{e^{-\frac{p}{4}}}{7p - p^2 + p^3}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' + 3x' = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + x = t \cdot \eta(t) - (t-2) \cdot \eta(t-2) - (t-4) \cdot \eta(t-4) - \eta(t-4) + (t-5) \cdot \eta(t-5),$$
$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x'' - y' = e^t, \\ x' + y'' - y = 0, \end{cases}$$
$$x(0) = 1, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = x'(0) = 0.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t (t-\tau)^2 x(\tau) d\tau$.

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = 2n^2 - n^3$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 4x_n = 0$, $x_0 = 2$, $x_1 = 1$.

Варіант № 9

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 2, \\ 4, & t > 2. \end{cases}$

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = \sqrt{5t} \cdot e^{4t}$; б) $f(t) = \int_0^t \tau^4 \operatorname{ch} 2\tau d\tau$; в) $f(t) = \cos 2t \sin 5t$; г) $f(t) = (\{t\})^2$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{\sin 4t - \sin 2t}{t} dt$.
4. Знайти оригінали для наступних зображень:
 - а) $F(p) = \frac{p}{p^3 - 8}$; б) $F(p) = \frac{p + 2}{(p + 1)(p - 2)(p^2 + 4)} e^{-2p}$.
5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:
 $x'' + 2x' + 2x = 2e^{-t} \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 1$.
6. Знайти розв'язок задачі Коші:
 $x'' + 4x = \eta(t) - \eta(t - \pi), \quad x(0) = x'(0) = 0$.
7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' + y - x = e^t, \end{cases}$$
 $x(0) = y(0) = 1$.
8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = e^{2t} + \int_0^t (t - \tau) e^{t-\tau} x(\tau) d\tau$.
9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = (n + 3) \sin 2n$.
10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 0$.

Варіант № 10

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = t \cdot e^t$.
2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:
 - а) $f(t) = t^2 \sin^2 t$; б) $f(t) = \frac{e^t - 1 - t}{t}$; в) $f(t) = e^{2t} t^5$; г) $f(t) = \frac{2|\sin 4t|}{\sin 4t}$.
3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \sin t \cos t}{t} dt$.
4. Знайти оригінали для наступних зображень:
 - а) $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)}$; б) $F(p) = \frac{e^{-p}}{p^3 - 3p^2 + 3p - 1}$.
5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:
 $x'' - 2x' + x = 4t + 1, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$.
6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + x = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ -1, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & t \notin [0; 2], \end{cases}$$

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = 1 + \int_0^t \cos(t - \tau) \sin(t - \tau) x(\tau) d\tau.$

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = n^2 \cdot 3^n.$

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 5x_n = 0, x_0 = 0, x_1 = 1.$

Варіант № 11

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = 4 \cdot \text{sh} 2t.$

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = \sin^2 3t$; б) $f(t) = \frac{e^{-2t} - 1}{t}$; в) $f(t) = 5^{-t} t^5$; г) $f(t) = \sin(\{t\}).$

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^\infty \frac{e^{-2t} - e^{-6t}}{t} dt.$

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{p-1}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}$; б) $F(p) = \frac{pe^{-p}}{(p^2 + 1)(p^2 + 16)}.$

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' - 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t < 1, \\ -2t + 2, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & t \notin [0; 2], \end{cases}$$

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y + y' - x = e^t, \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = 1.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = t + 2 - 2 \cos t - \int_0^t (t - \tau) x(\tau) d\tau.$

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = \sin 2n(1 - n \cos(n+1))$.
10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$.

Варіант № 12

- Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = t^2 + 2t$.
- За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:
а) $f(t) = e^t \sin^4 t$; б) $f(t) = \frac{\sin 4t}{t}$; в) $f(t) = t^2 e^{-t} \sin 2t$; г) $f(t) = e^t |\sin 2t|$.
- Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t} \sin 4t}{t} dt$.
- Знайти оригінали для наступних зображень:
а) $F(p) = \frac{1}{p(p+3)(p^2+9)}$; б) $F(p) = \frac{pe^{-\frac{p}{2}}}{p^3+1}$.
- Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:
 $x'' + x' = 4 \sin^2 t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.
- Знайти розв'язок задачі Коші:
$$x'' + x = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1, \\ 4, & t \geq 1, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

 $x(0) = x'(0) = 0$.
- Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:
$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases}$$

 $x(0) = y(0) = 0$.
- Розв'язати інтегральне рівняння:
$$x(t) = 1 + t \cos t - \sin t + \int_0^t (t - \tau) \sin(t - \tau) x(\tau) d\tau$$
.
- Знайти зображення решітчастої функції $f_n = 2^n \cos 2n$.
- Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+3} - 5x_{n+2} + 8x_{n+1} - 4x_n = 0$, $x_0 = x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Варіант № 13

- Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = \cos 4t$.
- За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:
а) $f(t) = e^{5t} \cos 2t$; б) $f(t) = \int_0^t \tau^2 \cos \omega \tau d\tau$; в) $f(t) = t^2 e^{8t}$; г) $f(t) = |\cos \pi t|$.
- Обчислити інтеграл: $\int_0^\infty \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} \cos t dt$.
- Знайти оригінали для наступних зображень:
а) $F(p) = \frac{1}{p^4 + p}$; б) $F(p) = \frac{e^{-3p}}{(p^2 + 1)(p^2 + 6p + 10)}$.
- Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:
 $x'' + 3x' = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.
- Знайти розв'язок задачі Коші:
$$x'' + 9x = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} t - 1, & 1 \leq t < 2, \\ -t + 3, & 2 \leq t \leq 3, \\ 0, & t \notin [1; 2], \end{cases}$$

 $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
- Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:
$$\begin{cases} x' + y = 5e^t, \\ y' - x = e^t, \end{cases}$$

 $x(0) = 2$, $y(0) = 3$.
- Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = t^2 + \int_0^t x(\tau) d\tau$.
- Знайти зображення решітчастої функції $f_n = n \sin 2n \cos 3n$.
- Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+1} - 2x_n = \cos \frac{n\pi}{3}$, $x_0 = 0$.

Варіант № 14

- Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = \begin{cases} t + 3, & 0 \leq t \leq 1, \\ 4t, & 1 < t \leq 2, \\ 8, & t > 2. \end{cases}$
- За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = \sin 2t \cdot \operatorname{ch} 4t$; б) $f(t) = \frac{\sin 4t}{t}$; в) $f(t) = e^{3t} \cos^2 t$; г) $f(t) = e^{-2t} |\sin 5t|$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t} + e^{-3t} - e^{-4t}}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{1}{(p^2 + p + 1)^2}$; б) $F(p) = \frac{e^{-3p}}{(p+1)^2 p}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$x''' + 2x'' + x' = -2e^{-2t}$, $x(0) = 2$, $x'(0) = x''(0) = 1$.

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$x'' - 2x' + x = f(t)$, $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0;1] \cup [2;3] \\ 0, & t \notin [0;1] \cup [2;3], \end{cases}$

$x(0) = x'(0) = 0$.

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$\begin{cases} x'' - y' = e^t, \\ x' + y'' - y = 0, \end{cases}$

$x(0) = 1$, $y(0) = -1$, $x'(0) = y(0) = y'(0) = 1$.

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = 1 + \int_0^t \operatorname{ch}(t - \tau) x(\tau) d\tau$.

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = (n + 5) \cdot 2^n$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = n$, $x_0 = x_1 = x_2 = 0$.

Варіант № 15

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення

функції $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 3, \\ -2, & 3 < t < 4, \\ 1, & t \geq 4. \end{cases}$

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = \sin t \cdot \operatorname{sh} 2t$; б) $f(t) = \frac{\cos 2t - \cos 4t}{t}$; в) $f(t) = t^3 e^{5t}$; г) $f(t) = 2\{t\}$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2t - \cos 4t}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{2p + 3}{(p^2 - 4)(p - 1)}$; б) $F(p) = \frac{e^{-4p}}{(p^2 + 1)(p - 2)}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:
 $x''' - 2x'' + x' = 4, \quad x(0) = 1, x'(0) = 2, x''(0) = -2.$
6. Знайти розв'язок задачі Коші:
 $x'' + 16x = \eta(t-2) - \eta(t-1), \quad x(0) = x'(0) = 0.$
7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases}$$
 $x(0) = y(0) = 0.$
8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = 2 + \frac{1}{6} \int_0^t (t-\tau)^3 x(\tau) d\tau.$
9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = n \cdot \cos 2n \cdot \cos 4n.$
10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+1} - 2x_n = n \cdot 2^n, \quad x_0 = 0.$

Варіант № 16

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = 5t.$
2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:
 а) $f(t) = t^2(e^{2t} + \operatorname{sh} 4t);$ б) $f(t) = \frac{\sin 6t}{t};$ в) $f(t) = \sin t \cos 7t;$ г) $f(t) = |\sin 3t|.$
3. Обчислити інтеграл: $\int_0^\infty \frac{\sin 2t \sin 3t}{t} dt.$
4. Знайти оригінали для наступних зображень:
 а) $F(p) = \frac{1}{(p^2 + 9)^2};$ б) $F(p) = \frac{e^{-2p}}{(p-1)^2(p-3)}.$
5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:
 $x'' + x = \cos t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 1.$
6. Знайти розв'язок задачі Коші:
 $x'' + 4x' + 20x = \eta\left(t - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y' - 2x = -2t, \\ x' - y = t + 1, \end{cases}$$
 $x(0) = y(0) = 1$
8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = 1 + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} x(\tau) d\tau.$

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = n \cos \frac{n\pi}{2}$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = \sin \frac{n\pi}{3}$, $x_0 = x_1 = 0$.

Варіант № 17

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = \cos t$.

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = \operatorname{sh} 2t \cdot \cos 5t$; б) $f(t) = \frac{\sin 2t}{t}$; в) $f(t) = \int_0^t \tau^5 e^{-4\tau} d\tau$; г) $f(t) = \left| \sin \frac{t}{2} \right|$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^\infty \frac{(1 - \cos 2t)e^{-t}}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+25)}$; б) $F(p) = \frac{e^{-p}}{p^3+2p^2+p}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' + x = 2 \sin t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 2 - t, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & t \notin [0; 2], \end{cases}$$

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + x = y + e^t, \\ y' + y = x + e^t, \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = 1.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = 2t + \int_0^t \sin(t-\tau)x(\tau) d\tau$.

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = 2^n \cos \frac{n\pi}{3}$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n = \cos \frac{n\pi}{3}$, $x_0 = x_1 = 0$.

Варіант № 18

- Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 < t \leq 4, \\ 0, & t > 4. \end{cases}$
- За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:
а) $f(t) = t^2 \sin 3t$; б) $f(t) = \frac{1 - e^{-5t}}{t}$; в) $f(t) = e^{4t} \cos^2 2t$; г) $f(t) = \{t\}^3$.
- Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} \cos 2t dt$.
- Знайти оригінали для заданих зображень:
а) $F(p) = \frac{p}{p^4 - 1}$; б) $F(p) = \frac{e^{-3p}}{(p^2 + 2p + 5)^2}$.
- Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:
 $x'' + 3x' = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1$.
- Знайти розв'язок задачі Коші:
 $x'' - 2x' + x = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; 3] \cup [6; 9], \\ 0, & t \notin [0; 3] \cup [6; 9], \end{cases}$
 $x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$.
- Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:
 $\begin{cases} x' + y'' = 0, \\ x'' + y' = -2 \sin t, \end{cases}$
 $x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$.
- Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = \sin 2t - \int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau$.
- Знайти зображення решітчастої функції $f_n = (-1)^n \cdot n^2$.
- Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = n, \quad x_0 = x_1 = 0$.

Варіант № 19

- Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = \begin{cases} 2t + 3, & 0 \leq t \leq 2, \\ 7, & t > 2. \end{cases}$
- За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = t^4 e^{-5t}$; б) $f(t) = \int_0^t \tau^2 \operatorname{sh} 2\tau d\tau$; в) $f(t) = e^{-t} \sin 5t$; г) $f(t) = \frac{|\sin 2\pi t|}{\sin 2\pi t}$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^\infty \frac{\sin 8t - \sin 2t}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{p}{(p+4)^2(p-2)}$; б) $F(p) = \frac{pe^{-2p}}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' + 2x' + 2x = 2e^{-t} \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 1.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x = 2(\eta(t) - \eta(t-5)), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' + y - x = e^t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = \frac{t^2}{2} + \int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau$.

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = (-1)^n \cdot \sin \frac{n}{2}$.

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+1} - 3x_n = n \cdot 3^n, \quad x_0 = 1$.

Варіант № 20

1. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t) = e^{2t} \cdot \sin t$.

2. За допомогою властивостей перетворення Лапласа знайти зображення наступних функцій:

а) $f(t) = t^2 \operatorname{sh} 2t$; б) $f(t) = \frac{e^{4t} - 1}{t}$; в) $f(t) = e^{4t} t^3$; г) $f(t) = \frac{|\sin \pi t|}{\sin \pi t}$.

3. Обчислити інтеграл: $\int_0^\infty \frac{e^{-t} \sin t}{t} dt$.

4. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p) = \frac{3p-1}{(p-2)^3}$; б) $F(p) = \frac{e^{-4p}}{(p+1)^2(p-3)}$.

5. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння:

$$x'' + x = \cos t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 1.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x' + 20x = \eta\left(t - \frac{2\pi}{9}\right) \cdot \cos\left(t - \frac{2\pi}{9}\right), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = 1.$$

8. Розв'язати інтегральне рівняння: $x(t) = 1 + \int_0^t e^{3(t-\tau)} x(\tau) d\tau.$

9. Знайти зображення решітчастої функції $f_n = 2^n \cdot \cos^2 n.$

10. Розв'язати різницеве рівняння: $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = (-1)^n, \quad x_0 = x_1 = 0.$