

Модульна контрольна робота №1

Варіант № 1

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції $y = \sin 2t$.
2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:
а) $y = \sin^2 t$; б) $y = \frac{e^t - 1}{t}$; в) $y = e^{-t} t^3$.
3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} dt$.
4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші:
 $x''' - 2x'' + x' = \cos t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.
5. Поняття функції-оригіналу.

Варіант № 2

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції $y = t^2$.
2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:
а) $y = e^t \sin^3 t$; б) $y = \frac{\sin t - t}{t}$; в) $y = |\sin t|$.
3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} \sin at}{t} dt$.
4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x'' - 2x' + x = e^t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.
5. Визначення перетворення Лапласа

Варіант № 3

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції $y = \cos 5t$.
2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:
а) $y = \cos^4 t$; б) $y = \int_0^t (\tau + 1) \cos \omega \tau d\tau$; в) $y = |\cos t|$.
3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} \sin 3t dt$.
4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x''' + x'' = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = -1$.
5. Функція Хевісайда.

Варіант № 4

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції
 $y = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1; \\ 1, & t > 1. \end{cases}$
2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:
а) $y = \sin 2t \cos 4t$; б) $y = \frac{\sin^2 t}{t}$; в) $y = e^{3t} \sin^2 t$.
3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t} + e^{-3t} - e^{-4t}}{t} dt$.
4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

5. Теорема випередження.

Варіант № 5

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції
$$y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 3; \\ -1, & 3 < t < 4; \\ 0, & t \geq 4. \end{cases}$$
2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:
а) $y = \sin^4 t$; б) $y = \frac{\cos t - \cos 2t}{t}$; в) $y = e^{-t} \sqrt{t}$.
3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2t - \cos 4t}{t} dt$.
4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x''' + x'' = 1$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = -1$.
5. Згортка функцій та її властивості.

Варіант № 6

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції $y = 2t$.
2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:
а) $y = t(e^t + \cosh t)$; б) $y = \frac{1 - \cos t}{t}$; в) $y = |\sin 2t|$.
3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin 2t \sin 3t}{t} dt$.
4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x''' + 4x = t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
5. Зображення тригонометричних функцій.

Варіант № 7

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції $y = \cos t$.
2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:
а) $y = \sin 3t \cos 5t$; б) $y = \frac{\cos t - \cos 2t}{t}$; в) $y = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$.
3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos 2t}{t} dt$.
4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x'' - x = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.
5. Зображення гіперболічних функцій.

Варіант № 8

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції $y = te^{2t}$.
2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:
а) $y = (t + 1) \sin 2t$; б) $y = \frac{1 - e^{-t}}{t}$; в) $y = te^t \cos t$.
3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} \cos 2t dt$.
4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x''' + x'' = \sin t$, $x(0) = x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.

5. Зображення згортки функцій.

Варіант № 9

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції

$$y = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 2; \\ 4, & t > 2. \end{cases}$$

2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:

а) $y = (t-1)^2 \eta(t-1)$; б) $y = \int_0^t \tau h 2\pi d\tau$; в) $y = e^{-t} \sin 5t$.

3. Обчислити інтеграл $\int_0^\infty \frac{\sin 4t - \sin 2t}{t} dt$.

4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші:

$$x''' + 2x'' - x' = t \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = 0.$$

5. Обчислення невластних інтегралів за допомогою операційного числення.

Варіант № 10

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції

$$y = \begin{cases} e^t, & 0 \leq t \leq 1; \\ 1, & 1 < t \leq 2; \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:

а) $y = t^2 \sin^2 t$; б) $y = \frac{e^t - 1 - t}{t}$; в) $y = e^{2t} t^5$.

3. Обчислити інтеграл $\int_0^\infty \frac{e^{-t} \sin t}{t} dt$.

4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x'' - 3x' + 2x = t^2$, $x(0) = 2$, $x'(0) = -1$.

5. Теорема диференціювання зображення.

Варіант № 11

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції $y = 4sh2t$.

3. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:

а) $y = \sin^2 3t$; б) $y = \frac{e^{-2t} - 1}{t}$; в) $y = 5^{-t} t^5$.

3. Обчислити інтеграл $\int_0^\infty \frac{e^{-2t} - 1}{t} dt$.

4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші:

$$x''' - 2x'' + x' = \cos t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = 0.$$

5. Зображення степеневих функцій з натуральним показником.

Варіант № 12

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції $y = t^2 + 2t$.

2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:

а) $y = e^t \sin^3 t$; б) $y = \frac{\sin t - t}{t}$; в) $y = |\sin t|$.

3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} \sin at}{t} dt$.

4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x'' - 2x' + x = e^t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.

5. Теорема випередження.

Варіант № 13

- Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції $y = \cos 4t$.
- Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:

а) $y = \sin 2t \cos 2t$; б) $y = \int_0^t (\tau + 1) \cos \omega \tau d\tau$; в) $y = |\cos t|$.

3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} \cos t dt$.

4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x''' + x'' = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = -1$.

5. Теорема запізнення.

Варіант № 14

- Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції $y = \begin{cases} t + 3, & 0 \leq t \leq 1; \\ 4, & t > 1. \end{cases}$
- Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:

а) $y = \sin 2t \operatorname{ch} 4t$; б) $y = \frac{\sin^2 t}{t}$; в) $y = e^{3t} \sin^2 t$.

3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t} + e^{-3t} - e^{-4t}}{t} dt$.

4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

5. Наслідки з теореми про диференціювання оригіналу.

Варіант № 15

- Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції $y = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 3; \\ -2, & 3 < t < 4; \\ 1, & t \geq 4. \end{cases}$
- Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:

а) $y = \sin t \cdot \operatorname{sh} 2t$; б) $y = \frac{\cos t - \cos 2t}{t}$; в) $y = e^{-t} \sqrt{t+1}$.

3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2t - \cos 4t}{t} dt$.

4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x''' + x'' = 1$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = -1$.

5. Зображення степеневі функції $x(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$.

Варіант № 16

- Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції $y = 5t$.
- Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:

а) $y = t(e^t + cht)$; б) $y = \frac{1 - \cos t}{t}$; в) $y = |\sin 3t|$.

3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin 2t \sin 3t}{t} dt$.

4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x''' + 4x = t^2 - 1$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

5. Область існування зображення.

Варіант № 17

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції $y = \cos t$.
2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:

а) $y = sh 2t \cos 5t$; б) $y = \frac{\cos t - \cos 2t}{t}$; в) $y = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$.

3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos 2t}{t} dt$.

4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x'' - x = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.

5. Теорема подібності для перетворення Лапласа.

Варіант № 18

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції $y = te^{2t}$.
2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:

а) $y = (t + 1) \sin 2t$; б) $y = \frac{1 - e^{-t}}{t}$; в) $y = te^t \cos t$.

3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} \cos 2t dt$.

4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x''' + x'' = t + \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.

5. Теорема про диференціювання оригіналу по параметру.

Варіант № 19

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції $y = \begin{cases} 2t + 3, & 0 \leq t \leq 2; \\ 7, & t > 2. \end{cases}$
2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:

а) $y = (t - 3)^2 \eta(t - 2)$; б) $y = \int_0^t \tau^2 sh 2\tau d\tau$; в) $y = e^{-t} \sin 5t$.

3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin 4t - \sin 2t}{t} dt$.

4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x''' + 2x'' - x' = t \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.

5. Властивість лінійності перетворення Лапласа.

Варіант № 20

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції

$$y = \begin{cases} e^{2t}, & 0 \leq t \leq 1; \\ 0, & 1 < t \leq 2; \\ 1, & t > 2. \end{cases}$$
2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:
 - а) $y = t^2 \sin^2 t$; б) $y = \frac{e^t - 1 - t}{t}$; в) $y = e^{2t} t^5$.
3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \sin t}{t} dt$.
4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x'' - 3x' + 2x = t^2$, $x(0) = 2$, $x'(0) = -1$.
5. Теорема про інтегрування оригіналу.

Варіант № 21

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції $y = \cos 5t$.
2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:
 - а) $y = \cos^4 t$; б) $y = \int_0^t (\tau + 1) \cos \omega \tau d\tau$; в) $y = |\cos t|$.
3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} \sin 3t dt$.
4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x''' + x'' = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = -1$.
5. Теорема випередження.

Варіант № 22

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції

$$y = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1; \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$
2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:
 - а) $y = \sin 2t \cos 4t$; б) $y = \frac{\sin^2 t}{t}$; в) $y = e^{3t} \sin^2 t$.
3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t} + e^{-3t} - e^{-4t}}{t} dt$.
4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
5. Теорема про диференціювання оригіналу.

Варіант № 23

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції

$$y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 3; \\ -1, & 3 < t < 4; \\ 0, & t \geq 4. \end{cases}$$
2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:
 - а) $y = \sin^4 t$; б) $y = \frac{\cos t - \cos 2t}{t}$; в) $y = e^{-t} \sqrt{t}$.

3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2t - \cos 4t}{t} dt$.
4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x''' + x'' = t + 2$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = -1$.
5. Зображення періодичного оригіналу.

Варіант № 24

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції $y = 2t$.
2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:
а) $y = t(e^t + \cosh t)$; б) $y = \frac{1 - \cos t}{t}$; в) $y = |\sin 2t| + 2$.
3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin 2t \sin 3t}{t} dt$.
4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x''' + 4x = t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
5. Інтеграли Дюамеля.

Варіант № 25

1. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення функції $y = 2 \cos t - 1$.
2. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних функцій:
а) $y = \sin 3t \cdot \cosh 5t$; б) $y = \frac{\cos t - \cos 2t}{t}$; в) $y = \int_0^t \tau^2 e^{-2\tau} d\tau$.
3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos^3 t}{t} dt$.
4. Знайти зображення розв'язку задачі Коші: $x'' - x = 2 \cos t - \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.
5. Теорема інтегрування зображення.