

### Контрольна робота № 3.

#### Варіант № 1

1. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 2x' + 5x = 1 - \eta(t-1), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

2. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases}$$
$$x(0) = y(0) = 0.$$

3. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = e^t - t - 1 + \int_0^t x(\tau) d\tau$ .

4. Знайти розв'язок хвильового рівняння  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових та початкових умовах:  $u(0, t) = u(l, t) = 0, u(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{l}, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, 0 \leq x \leq l$ .

#### Варіант № 2

1. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x' + 4x = 2e^{-t}(1 - \eta(t-1)), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

2. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' + y - x = e^t, \end{cases}$$
$$x(0) = y(0) = 1.$$

3. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = \frac{t^2}{2} + \int_0^t (t - \tau)x(\tau) d\tau$ .

4. Знайти розв'язок рівняння теплопровідності  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових та початкових умовах:  $u(0, t) = u(l, t) = 0, u(x, 0) = Ax, 0 \leq x \leq l$ .

#### Варіант № 3

1. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x = \sin t(1 - \eta(t - \pi)), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

2. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' = 2x + 2y, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

3. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = te^{2t} - \int_0^t e^{2(t-\tau)} x(\tau) d\tau$ .

4. Знайти розв'язок хвильового рівняння  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових та початкових умовах:  $u(0, t) = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = A, 0 \leq x \leq l$ .

#### Варіант № 4

1. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 6x' + 8x = \sin t - \cos t \cdot \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right), x(0) = x'(0) = 1.$$

2. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x'' - y' = 0, \\ x - y'' = \sin t, \end{cases}$$

$$x(0) = -1, x'(0) = y(0) = y'(0) = 1.$$

3. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = \cos t + \int_0^t x(\tau) d\tau$ .

4. Знайти розв'язок рівняння теплопровідності  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових та початкових умовах:  $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = u(l, t) = 0, u(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{l}, 0 \leq x \leq l$ .

#### Варіант № 5

1. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x' + 20x = \eta(t - 2\pi) \cdot \cos t, x(0) = 1, x'(0) = 0.$$

2. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = 0.$$

3. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = \sin t + \int_0^t \cos(t - \tau) x(\tau) d\tau$ .

4. Знайти розв'язок хвильового рівняння  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових та початкових умовах:  $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, u(x,0) = x, \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, 0 \leq x \leq l.$

### Варіант № 6

1. Знайти розв'язок задачі Коші:  
 $x'' + 7x' + 6x = e^{-2t} \operatorname{sh} t + \eta(t-1), x(0) = 1, x'(0) = 0.$
2. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:  

$$\begin{cases} x' + x = y + e^t, \\ y' + y = x + e^t, \end{cases}$$
 $x(0) = y(0) = 1.$
3. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = e^t + \int_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)d\tau.$
4. Знайти розв'язок хвильового рівняння  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових та початкових умовах:  $u(0,t) = u(l,t) = 0, u(x,0) = B \sin \frac{\pi x}{l}, \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, 0 \leq x \leq l.$

### Варіант № 7

1. Знайти розв'язок задачі Коші:  
 $x''' + 4x'' + 5x' + 2x = 2e^{-2t}(1 - \eta(t-3)), x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$
2. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:  

$$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases}$$
 $x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$
3. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = \sin t - \int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)x(\tau)d\tau.$
4. Знайти розв'язок рівняння теплопровідності  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових та початкових умовах:  $u(0,t) = u(l,t) = 0, u(x,0) = Ax, 0 \leq x \leq l.$

### Варіант № 8

1. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + x = t \cdot \eta(t) - (t-2) \cdot \eta(t-2) - (t-4) \cdot \eta(t-4) - \eta(t-4) + (t-5) \cdot \eta(t-5),$$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

2. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x'' - y' = e^t, \\ x' + y'' - y = 0, \end{cases}$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = x'(0) = 0.$$

3. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t (t-\tau)^2 x(\tau) d\tau.$

4. Знайти розв'язок хвильового рівняння  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових та початкових умовах:  $u(0, t) = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = A, 0 \leq x \leq l.$

### Варіант № 9

1. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x = \eta(t) - \eta(t - \pi), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

2. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' + y - x = e^t, \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = 1.$$

3. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = e^{2t} + \int_0^t (t-\tau) e^{t-\tau} x(\tau) d\tau.$

4. Знайти розв'язок рівняння теплопровідності  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових та початкових умовах:  $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = u(l, t) = 0, u(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{l}, 0 \leq x \leq l.$

### Варіант № 10

1. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + x = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ -1, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & t \notin [0; 2], \end{cases}$$

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

2. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \\ x(0) = y(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

3. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = 1 + \int_0^t \cos(t - \tau) \sin(t - \tau) x(\tau) d\tau$ .

4. Знайти розв'язок хвильового рівняння  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових та початкових умовах:  $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, u(x,0) = x, \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, 0 \leq x \leq l$ .

### Варіант № 11

5. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 2x' + 5x = 1 - \eta(t - 1), x(0) = 1, x'(0) = 0.$$

6. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

7. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = e^t - t - 1 + \int_0^t x(\tau) d\tau$ .

8. Знайти розв'язок хвильового рівняння  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових та початкових умовах:  $u(0,t) = u(l,t) = 0, u(x,0) = B \sin \frac{\pi x}{l}, \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, 0 \leq x \leq l$ .

### Варіант № 12

5. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x' + 4x = 2e^{-t} (1 - \eta(t - 1)), x(0) = 1, x'(0) = 0.$$

6. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' + y - x = e^t, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

7. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = \frac{t^2}{2} + \int_0^t (t - \tau) x(\tau) d\tau$ .

8. Знайти розв'язок рівняння теплопровідності  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових та початкових умовах:  $u(0, t) = u(l, t) = 0, u(x, 0) = Ax, 0 \leq x \leq l$ .

### Варіант № 13

5. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x = \sin t(1 - \eta(t - \pi)), x(0) = 0, x'(0) = 1.$$

6. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases}$$
$$x(0) = y(0) = 1.$$

7. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = te^{2t} - \int_0^t e^{2(t-\tau)} x(\tau) d\tau$ .

8. Знайти розв'язок хвильового рівняння  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових та початкових умовах:  $u(0, t) = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = A, 0 \leq x \leq l$ .

### Варіант № 14

5. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 6x' + 8x = \sin t - \cos t \cdot \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right), x(0) = x'(0) = 1.$$

6. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x'' - y' = 0, \\ x - y'' = \sin t, \end{cases}$$

$$x(0) = -1, x'(0) = y(0) = y'(0) = 1.$$

7. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = \cos t + \int_0^t x(\tau) d\tau$ .

8. Знайти розв'язок рівняння теплопровідності  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових та початкових умовах:  $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = u(l, t) = 0, u(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{l}, 0 \leq x \leq l$ .

### Варіант № 15

5. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 4x' + 20x = \eta(t - 2\pi) \cdot \cos t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

6. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = 0.$$

7. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = \sin t + \int_0^t \cos(t - \tau)x(\tau)d\tau$ .

8. Знайти розв'язок хвильового рівняння  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових

та початкових умовах:  $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, u(x,0) = x, \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0,$   
 $0 \leq x \leq l.$

### Варіант № 16

5. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + 7x' + 6x = e^{-2t} \operatorname{sh} t + \eta(t - 1), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

6. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' + x = y + e^t, \\ y' + y = x + e^t, \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = 1.$$

7. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = e^t + \int_0^t \sin(t - \tau)x(\tau)d\tau$ .

8. Знайти розв'язок хвильового рівняння  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових

та початкових умовах:  $u(0,t) = u(l,t) = 0, u(x,0) = B \sin \frac{\pi x}{l}, \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0,$   
 $0 \leq x \leq l.$

### Варіант № 17

5. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x''' + 4x'' + 5x' + 2x = 2e^{-2t}(1 - \eta(t - 3)), \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

6. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = \sin t - \int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)x(\tau)d\tau$ .
8. Знайти розв'язок рівняння теплопровідності  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових та початкових умовах:  $u(0,t) = u(l,t) = 0, u(x,0) = Ax, 0 \leq x \leq l$ .

### Варіант № 18

5. Знайти розв'язок задачі Коші:  
 $x'' + x = t \cdot \eta(t) - (t-2) \cdot \eta(t-2) - (t-4) \cdot \eta(t-4) - \eta(t-4) + (t-5) \cdot \eta(t-5),$   
 $x(0) = 1, x'(0) = 2.$
6. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:  

$$\begin{cases} x'' - y' = e^t, \\ x' + y'' - y = 0, \end{cases}$$
  
 $x(0) = 1, y(0) = -1, y'(0) = x'(0) = 0.$
7. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t (t-\tau)^2 x(\tau) d\tau.$
8. Знайти розв'язок хвильового рівняння  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових та початкових умовах:  $u(0,t) = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, u(x,0) = 0, \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = A, 0 \leq x \leq l.$

### Варіант № 19

5. Знайти розв'язок задачі Коші:  
 $x'' + 4x = \eta(t) - \eta(t-\pi), x(0) = x'(0) = 0.$
6. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:  

$$\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' + y - x = e^t, \end{cases}$$
  
 $x(0) = y(0) = 1.$
7. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = e^{2t} + \int_0^t (t-\tau)e^{t-\tau}x(\tau)d\tau.$
8. Знайти розв'язок рівняння теплопровідності  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових та початкових умовах:  $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = u(l,t) = 0, u(x,0) = \cos \frac{\pi x}{l}, 0 \leq x \leq l.$



## Варіант № 20

5. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$x'' + x = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ -1, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & t \notin [0; 2], \end{cases}$$

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

6. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$$

7. Розв'язати інтегральне рівняння:  $x(t) = 1 + \int_0^t \cos(t - \tau) \sin(t - \tau) x(\tau) d\tau$ .

8. Знайти розв'язок хвильового рівняння  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  при наступних крайових

та початкових умовах:  $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, u(x, 0) = x, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$

$$0 \leq x \leq l.$$