


3.5. Застосовуючи принцип стискуючих відображень, знайти в просторі  $C[0; 1]$  розв'язок інтегрального рівняння  $x(t) = \frac{1}{2} \int_a^b e^{t-s} x(s) ds + 1$ .

## **Тема 4. Вимірні множини та вимірні функції.**


Поняття міри множини є природним узагальненням поняття довжини відрізка, площі плоскої фігури, об'єму просторового тіла, приросту неспадної функції тощо. Це поняття виникло в теорії функцій дійсної змінної, а потім перейшло у різноманітні розділи математики. Спочатку ми познайомимось з теорією міри плоских та лінійних множин, але перед тим наведемо деякі означення, які стосуються сукупностей множин.

**4.1. Системи множин.** *Системою множин* називається будь-яка множина, елементи якої самі є довільними множинами. Якщо не зазначено протилежне, ми будемо розглядати системи таких множин, кожна з яких є підмножиною деякої фіксованої множини  $X$ .


 **Означення 4.1.1.** Непорожня система множин  $\mathfrak{X}$  називається *кільцем*, якщо з того, що  $A, B \in \mathfrak{X}$  випливає, що  $A \Delta B \in \mathfrak{X}$  та  $A \cap B \in \mathfrak{X}$ .

Оскільки  $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$  та  $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$ , тоді з того, що  $A, B \in \mathfrak{X}$ , випливає також належність до  $\mathfrak{X}$  множин  $A \cup B$  та  $A/B$ . Отже, кільце множин є системою множин, замкненою відносно операцій об'єднання, перетину, різниці та симетричної різниці. Очевидно, що кільце замкнене і по відношенню до утворення будь-яких скінченних об'єднань та перетинів.


Будь-яке кільце містить порожню множину  $\emptyset$ , оскільки завжди  $A \setminus A = \emptyset$ . Система, що складається тільки з порожньої множини, є найменшим можливим кільцем множин.

 **Означення 4.1.2.** Множина  $E$  називається *одиноцею* системи множин  $\mathfrak{S}$ , якщо вона належить  $\mathfrak{S}$  і якщо для будь-якого  $A \in \mathfrak{S}$   $A \cap E = A$ .

Таким чином, одиниця системи множин  $\mathfrak{S}$  є фактично максимальною множиною цієї системи, що містить всі інші множини, що входять до  $\sigma$ .

 **Означення 4.1.3.** Кільце множин з одиницею називається *алгеброю* множин.

Прикладом алгебри є система всіх підмножин деякої множини  $A$ , яка при цьому буде одиницею алгебри.

 **Означення 4.1.4.** Система множин  $\mathfrak{S}$  називається *півкільцем*, якщо вона містить порожню множину  $\emptyset$ , замкнена по відношенню до утворення перетинів і з належності до  $\sigma$  множин  $A$  і  $A_1 \subset A$  випливає можливість подання  $A$  у вигляді  $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ , де  $A_k$  – множини з  $\mathfrak{S}$ , які попарно не перетинаються, та перша з яких є заданою множиною  $A_1$ .

Будь-яке кільце множин  $\mathfrak{R}$  є півкільцем, тому що якщо  $A$  і  $A_1 \subset A$  належать  $\mathfrak{R}$ , тоді має місце розклад  $A = A_1 \cup A_2$ , де  $A_2 = A \setminus A_1 \in \mathfrak{R}$ .

Прикладом півкільця, яка не є кільцем множин, може служити сукупність всіх інтервалів  $(a, b)$ , відрізків  $[a, b]$  і напівінтервалів  $[a, b)$  і  $(a, b]$  на числовій прямій. Зрозуміло, що властивості півкільця для цієї системи виконуються, але навіть об'єднання двох інтервалів не мусить бути інтервалом, відрізком чи півінтервалом.

Відомо [Колм, с.51], що для кожної непорожньої системи множин  $\sigma$  існує єдине кільце, що містить  $\mathfrak{S}$  і що міститься в будь-якому кільці  $\mathfrak{R}$ , яке містить  $\mathfrak{S}$ . Таке кільце називається *мінімальним кільцем над  $\mathfrak{S}$* , або *кільцем, породженим  $\mathfrak{S}$* , і позначається  $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ . Для довільної системи  $\sigma$  побудувати кільце  $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$  по  $\mathfrak{S}$  досить складно. Але коли  $\mathfrak{S}$  є півкільцем, породжене ним кільце описується наступним твердженням.

**Твердження 4.1.5.** Якщо  $\mathfrak{S}$  – півкільце, тоді  $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$  збігається з системою  $\mathfrak{Z}$  множин  $A$ , що припускають подання у вигляді  $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ , де  $A_k \in \mathfrak{S}$ .

Тобто кільце, породжене півкільцем, утворюється усілякими скінченними об'єднаннями множин з півкільця.

Інколи доводиться розглядати об'єднання і перетини не лише скінченної, а й зліченної кількості множин.

**Означення 4.1.6.** Кільце множин називається  $\sigma$ -кільцем, якщо воно разом з кожною послідовністю множин  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  містить їх об'єднання  $S = \bigcup_n A_n$ .

**Означення 4.1.7.**  $\sigma$ -алгеброю називається  $\sigma$ -кільце з одиницею.

Найпростішим прикладом  $\sigma$ -алгебри є сукупність всіх підмножин деякої множини  $A$ .

В аналізі важливу роль відіграють так звані борельові множини.

**Означення 4.1.8.** Множина називається *борельовою*, якщо її можна отримати із відкритих або замкнених множин за допомогою не більш, ніж зліченної кількості операцій об'єднання, перетину та різниці.

Так, борельові множини на числовій прямій – це множини, що належать мінімальній  $\sigma$ -алгебрі над сукупністю всіх сегментів  $[a, b]$ .

**4.2. Міра плоских множин.** Розглянемо на площині систему прямокутників.

**Означення 4.2.1.** Прямокутником будемо називати множину на площині, яка є декартовим добутком однієї з множин  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq x < b$ ,  $a < x \leq b$ ,  $a < x < b$  та однією з множин  $c \leq y \leq d$ ,  $c \leq y < d$ ,  $c < y \leq d$ ,  $c < y < d$ , де  $a, b, c$  та  $d$  – довільні числа.

Наприклад, множина  $P = [a, b] \times [c, d]$  – це звичайний замкнений прямокутник, сторони якого паралельні осям координат, якщо  $a < b$  та  $c < d$ ;  $(a, b) \times (c, d)$  – відкритий прямокутник. Прямокутником буде відрізок  $[a, a] \times [c, d]$ , точка  $[a, a] \times [c, c]$  та порожня множина (якщо  $a > b$  або  $c > d$ ).

Клас всіх прямокутників на площині позначимо  $\mathfrak{S}$ . Зрозуміло, що цей клас є півкільцем. Для кожного із прямокутників визначимо його міру  $m(P) = (b - a)(d - c)$ .

Таким чином, кожному прямокутнику  $P$  поставлено у відповідність число  $m(P)$  (його міра), при цьому виконуються наступні умови:

- 1) міра  $m(P)$  приймає дійсні невід'ємні значення;
- 2) міра  $m(P)$  адитивна, тобто якщо  $P = \coprod_{k=1}^n P_k$ , де  $P_k \in \sigma$ , тоді

$$m(P) = \sum_{k=1}^n m(P_k).$$

Тут символ  $\coprod_{k=1}^n P_k$  означає об'єднання прямокутників, що попарно не перетинаються, тобто що  $P_i \cap P_k = \emptyset$  при  $i \neq k$ .

Зрозуміло, що міра звичайного прямокутника (з межею чи ні) – це його площа, міра відрізка, точки та порожньої множини на площині дорівнює нулю.

Наша задача – розповсюдити, із збереганням властивостей 1) та 2), міру  $m(P)$ , визначену для прямокутників, на більш широкий клас множин.

**Означення 4.2.2.** Назвемо плоску множину *елементарною*, якщо її можна представити хоча б в один спосіб у вигляді об'єднання скінченної кількості прямокутників, що попарно не перетинаються.

**Твердження 4.2.3.** Об'єднання, перетин, різниця та симетрична різниця двох елементарних множин також являються елементарними множинами.

Доведення. Зрозуміло, що перетин двох прямокутників є прямокутником. Значить, якщо  $A = \coprod_k P_k$ ,  $B = \coprod_i Q_i$  – дві елементарні множини, тоді їх перетин  $A \cap B = \cup_{k,i} (P_k \cap Q_i)$  – також елементарна множина.

Різниця двох прямокутників – це елементарна множина. Отже, віднімаючи з прямокутника деяку елементарну множину, ми знову отримуємо елементарну множину (як перетин елементарних).

Нехай тепер множини  $A$  та  $B$  – елементарні. Знайдеться, очевидно, прямокутник  $P$ , що містить кожну із них. Тоді множина  $A \cup B = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)]$  в силу вище сказаного буде елементарною. Звідси та з рівностей  $A \setminus B = A \cap (P \setminus B)$ ,  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  випливає, що різниця та симетрична різниця елементарних множин є елементарними множинами. ■

Отже, система елементарних множин є кільцем. Більше того, вона є мінімальним кільцем, породженим півкільцем прямокутників.

Визначимо міру  $m'(A)$  елементарних множин наступним чином: якщо  $A = \coprod_{k=1}^n P_k$ , де  $P_k$  – прямокутники, тоді

$$m'(A) = \sum_{k=1}^n m(P_k).$$

Покажемо, що  $m'(A)$  не залежить від способу розкладу  $A$  в суму скінченного числа прямокутників. Нехай  $A = \coprod_k P_k = \coprod_i Q_i$ , де  $P_k$  та  $Q_i$  – прямокутники. Оскільки перетин  $P_k \cap Q_k$  двох прямокутників є прямокутником, то, в силу адитивності міри для прямокутників,

$$\sum_k m(P_k) = \sum_{k,I} m(P_k \cap Q_k) = \sum_I m(Q_k).$$

Зокрема, для прямокутників міра  $m'$  збігається з даною мірою  $m$ . Зрозуміло, що визначена таким чином міра елементарних множин невід'ємна та адитивна.

Визначимо наступну важливу властивість міри елементарних множин.

**Твердження 4.2.4.** Якщо  $A$  – елементарна множина та  $\{A_n\}$  – скінченна або зліченна система елементарних множин така, що  $A \subset \bigcup_n A_n$ , тоді

$$m'(A) \leq \sum_n m'(A_n). \quad (4.1)$$

Доведення. Для будь-якого  $\varepsilon > 0$  та для даної множини  $A$  можна, очевидно, знайти таку замкнену елементарну множину  $\bar{A}$ , яка міститься в  $A$  та задовольняє умову  $m'(\bar{A}) \geq m'(A_n) - \varepsilon/2$ . Для цього достатньо кожний із  $k$  прямокутників  $P_i$ , які утворюють  $A$ , замінити замкненим прямокутником, що лежить в ньому та має площу, більшу, ніж  $m(P_i) - \varepsilon/2k$ .

Далі, для кожного  $A_n$  можна знайти відкриту елементарну множину  $\tilde{A}_n$ , що міститься в  $A_n$  та задовольняє умову  $m'(\tilde{A}_n) \leq m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ . Очевидно, що  $A \subset \bigcup_n \tilde{A}_n$ . З  $\{A_n\}$  можна (за лемою Гейне – Бореля) вибрати скінченну систему  $\tilde{A}_{n_1}, \dots, \tilde{A}_{n_s}$ , що покриває  $\bar{A}$ . При цьому, очевидно,

$$m'(\bar{A}) \leq \sum_{i=1}^s m'(\tilde{A}_{n_i})$$

(інакше  $\bar{A}$  виявилося би покритим скінченною кількістю прямокутників, сумарної площі меншої, ніж  $m'(\bar{A})$ , що неможливо). Тому

$$\begin{aligned} m'(A) &\leq m'(\bar{A}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^s m'(\tilde{A}_{n_i}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq \sum_n m'(\tilde{A}_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_n m'(A_n) + \sum_n \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_n m'(A_n) + \varepsilon, \end{aligned}$$

звідки в силу довільності  $\varepsilon > 0$  випливає (4.1). ■

Властивість міри  $m'$ , встановлена твердженням 4.2.4. (міра множини не перевищує суми мір скінченної або зліченної сукупності покриваючих її множин), називається *півадитивністю*. З неї випливає властивість так званої зліченної адитивності, або  $\sigma$  – адитивності.

Нехай елементарну множину  $A$  подано у вигляді суми зліченної сукупності елементарних множин  $A_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), що попарно не перетинаються:

$$A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

тоді

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n).$$

Дійсно, в силу адитивності, при будь-якому  $N$  маємо:

$$m'(A) \geq m'\left(\bigsqcup_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N m'(A_n).$$

Переходячи до границі при  $N \rightarrow \infty$ , маємо

$$m'(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n).$$

В силу твердження 4.2.4, має місце і протилежна нерівність. Таким чином,  $\sigma$  – адитивність міри  $m'$  доведено.

Елементарні множини не вичерпують всі множини, які зустрічаються в геометрії та в класичному аналізі. Тому природно намагатися поширити поняття міри, із збереженням її основних властивостей, на більш широкий клас множин, ніж скінченне об'єднання прямокутників зі сторонами, паралельними осям координат.

Нам доведеться розглядати не тільки скінченні, але і нескінченні об'єднання прямокутників. Для того, щоб при цьому не зіткнутися з множиною «нескінченної міри», обмежимося спочатку множинами, що повністю належать квадрату  $E = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ .

На сукупності всіх таких множин визначимо функцію  $\mu^*(A)$  наступним чином.

 **Означення 4.2.5.** Зовнішньою мірою множини  $A$  називається число

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup P_k} \sum_k m(P_k),$$

де нижня межа береться за всіма можливими покриттями множини  $A$  скінченними або зліченими системами прямокутників.

Якщо  $A$  – елементарна множина, для неї зовнішня множина збігається з вище означеною, тобто  $\mu^*(A) = m'(A)$ . Дійсно, нехай  $P_1, P_2, \dots, P_n$  – прямокутники, які утворюють  $A$ . Тоді  $m'(A) = \sum_{i=1}^n m(P_i)$ . Оскільки прямокутники  $P_i$  покривають  $A$ , тоді

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^n m(P_i) = m'(A).$$

Але якщо  $\{Q_j\}$  – довільна скінченна або зліченна система прямокутників, що покриває  $A$ , то в силу теореми 4.2.4.

$$m'(A) \leq \sum_I m(Q_j),$$

тому  $\mu^*(A) = m'(A)$ .


**Твердження 4.2.6.** Якщо  $A \subset \bigcup_n A_n$ , де  $A_n$  – скінченна або зліченна система множин, тоді

$$\mu^*(A) \leq \sum_n \mu^*(A_n).$$

Зокрема, якщо  $A \subset B$ , тоді  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ . Ця властивість носить назву *монотонності зовнішньої міри*.

Доведення. За означенням зовнішньої міри, для довільного  $\varepsilon > 0$  та для кожного  $A_n$  знайдеться така система прямокутників  $\{P_{nk}\}$ , скінченна або зліченна, така що  $A_n \subset \bigcup_k P_{nk}$  та  $\sum_k m(P_{nk}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ .

Тоді  $A \subset \bigcup_n \bigcup_k P_{nk}$  та  $\mu^*(A) \leq \sum_n \sum_k m(P_{nk}) \leq \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon$ . Оскільки  $\varepsilon$  – довільне, звідси випливає твердження теореми. ■

 **Означення 4.2.7.** Множина  $A$  називається *вимірною за Лебегом*, якщо для будь-якого  $\varepsilon > 0$  знайдеться така елементарна множина  $B$ , що

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon.$$

Функція  $\mu^*$ , яка розглядається тільки на вимірних множинах називається *мірою Лебега*. Будемо позначати її через  $\mu$ .

Це означає, що множина вимірна, якщо її можливо «як завгодно точно наблизити» елементарними множинами.

Отже, ми визначили деякий клас  $\mathfrak{W}_E$  множин, які називаються вимірними, і функцію  $\mu$ , міру Лебега, на цьому класі.

**4.3. Властивості вимірних множин та міри Лебега.** Познайомимось з основними властивостями вимірних множин та властивостями міри.

**Твердження 4.3.1.** Доповнення вимірної множини є вимірною множиною.

Доведення. Це факт випливає з рівності  $(E/A)\Delta(E/B) = A\Delta B$ , яка перевіряється безпосередньо. ■

✎ **Вправа.** Самостійно перевірте цю рівність множин.

**Твердження 4.3.2.** Сума і перетин скінченної кількості вимірних множин є вимірною множиною.

Доведення. Достатньо, очевидно, провести доведення для двох множин. Нехай  $A_1$  і  $A_2$  – вимірні множини. Це означає, що для будь-якого  $\varepsilon > 0$  знайдуться такі елементарні множини  $B_1$  і  $B_2$ , що

$$\mu^*(A_1\Delta B_1) < \varepsilon/2, \mu^*(A_2\Delta B_2) < \varepsilon/2.$$

Оскільки  $(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2)$ , тоді

$$\mu^*[(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2)] \leq \mu^*(A_1\Delta B_1) + \mu^*(A_2\Delta B_2) < \varepsilon.$$

Але  $B_1 \cup B_2$  – елементарна множина, тому множина  $A_1 \cup A_2$  вимірна.

Вимірність перетину двох вимірних множин випливає з теореми 4.3.1 і відношення  $A_1 \cap A_2 = E[(E\setminus A_1) \cup (E\setminus A_2)]$ . ■

**Наслідок 4.3.3.** Різниця і симетрична різниця двох вимірних множин вимірні.

Доведення. Результат випливає з тверджень 4.3.1. і 4.3.2. і рівності

$$A_1\setminus A_2 = A_1 \cap (E\setminus A_2), \quad A_1\Delta A_2 = (A_1\setminus A_2) \cup (A_2\setminus A_1). \blacksquare$$

**Твердження 4.3.4. (адитивність міри)** Якщо  $A_1, \dots, A_n$  – вимірні множини, що попарно не перетинаються, тоді

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

Для доведення цієї теореми нам знадобиться наступна лема.

**Лема 4.3.5.** Для будь-яких двох множин  $A$  і  $B$   $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A\Delta B)$ .

Доведення леми. Оскільки  $A \subset B \cup (A\Delta B)$ , тоді в силу твердження 4.2.6.,

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A\Delta B).$$

Звідси випливає твердження леми у випадку  $\mu^*(A) \geq \mu^*(B)$ . Якщо ж  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ , тоді твердження леми випливає з рівності, що  $\mu^*(B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(A\Delta B)$ , яке встановлюється аналогічно. ■

**Доведення твердження 4.3.4.** Як і в твердженні 4.3.2., достатньо розглянути випадок двох множин. Виберемо довільне  $\varepsilon > 0$  і такі елементарні множини  $B_1$  і  $B_2$ , що

$$\mu^*(A_1\Delta B_1) < \varepsilon, \mu^*(A_2\Delta B_2) < \varepsilon. \quad (4.2)$$

Покладемо  $A = A_1 \cup A_2$  і  $B = B_1 \cup B_2$ . Множина  $A$  вимірна в силу твердження 4.3.2. Оскільки множини  $A_1$  і  $A_2$  не перетинаються, тоді  $B_1 \cap B_2 \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2)$  і, відповідно,  $m'(B_1 \cap B_2) \leq 2\varepsilon$ .

В силу леми 4.3.5. з нерівностей (4.2) випливає, що

$$|m'(B_1) - \mu^*(A_1)|, |m'(B_2) - \mu^*(A_2)| < \varepsilon.$$

Оскільки на сукупності елементарних множин міра адитивна, отримуємо

$$m'(B) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon.$$

Зауважимо також, що  $A \Delta B \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$  та отримаємо остаточно оцінку  $\mu^*(A) \geq m'(B) - \mu^*(A \Delta B) \geq m'(B) - 2\varepsilon \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon$ .

Оскільки  $\varepsilon > 0$  може бути вибрано довільно малим, тоді  $\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$ .

Оскільки протилежна нерівність  $\mu^*(A) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$  виконується завжди (в силу твердження 4.2.6.), остаточно отримуємо  $\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$ . Оскільки  $A_1, A_2$  і  $A$  вимірні, то тут  $\mu^*$  можна замінити на  $\mu$ . ■

З цієї теореми, зокрема, випливає, що для будь-якої вимірної множини  $A$   $\mu(E \setminus A) = 1 - \mu(A)$ .

**Твердження 4.3.5.** Сума і перетин зліченної кількості вимірних множин є вимірними множинами.

Доведення. Нехай  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  – злічена система вимірних множин і  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Покладемо  $A'_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ . Зрозуміло, що  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$  причому множини  $A'_n$  попарно не перетинаються. В силу твердження 4.3.2 і наслідку 4.3.3., всі множини  $A'_n$  вимірні. В силу твердження 4.3.4 і означення зовнішньої міри, при будь-якому скінченному  $n$

$$\sum_{k=1}^n \mu(A'_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A'_k\right) \leq \mu^*(A),$$

тому ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A'_k)$  збігається і, відповідно, для будь-якого  $\varepsilon > 0$  знайдеться таке  $N$ , що

$$\sum_{n>N} \mu(A'_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оскільки множина  $C = \bigcup_{n=1}^N A'_n$  вимірна (як сума скінченної кількості вимірних множин), тоді для неї знайдеться така елементарна множина  $B$ , що  $\mu^*(C \Delta B) < \varepsilon/2$ . Оскільки

$$A \Delta B \subset (C \Delta B) \cup \left(\bigcup_{n>N} A'_n\right),$$

тоді  $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ , тобто  $A$  – вимірна.

Оскільки доповнення вимірних множин вимірні, тоді твердження теореми стосовно перетину впливає з рівності

$$\bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n). \blacksquare$$

Твердження 4.3.5. підсилює твердження 4.3.2. і означає, що система вимірних множин утворює  $\sigma$  – алгебру. Наступне твердження є аналогічним підсиленням твердження 4.3.4.



**Твердження 4.3.6.** Якщо  $\{A_n\}$  – послідовність вимірних множин, що попарно не перетинаються і  $A = \coprod_n A_n$ , тоді

$$\mu(A) = \sum_n \mu(A_n).$$

*Доведення.* В силу твердження 4.3.4., при будь-якому  $N$

$$\mu\left(\coprod_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N \mu(A_n) < \mu(A).$$

Переходячи до границі при  $N \rightarrow \infty$ , отримуємо

$$\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \quad (4.3)$$

З іншого боку, згідно твердження 4.2.6.,

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \quad (4.4)$$

З (4.3) і (4.4) випливає твердження теореми.

Встановлена в твердженні 4.3.6. властивість міри називається її *зліченною адитивністю*, або  $\sigma$  – *адитивністю*. З  $\sigma$  – адитивності випливає наступна властивість міри, названа її *неперервністю*.

**Твердження 4.3.7. (неперервність міри)** Якщо  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$  – послідовність вкладених одна в одну вимірних множин і  $A = \bigcap_n A_n$ , тоді

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

*Доведення.* Достатньо розглянути випадок  $A = \emptyset$ ; загальний випадок зводиться до цього заміною  $A_n$  на  $A_n \setminus A$  (якщо  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ , тоді  $A_1 \setminus A \supset A_2 \setminus A \supset \dots \supset A_n \setminus A \supset \dots$  та  $\bigcap_n A_n \setminus A = \emptyset$ ).

Запишемо кожену множину у вигляді об'єднань множин, які не перетинаються:

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \dots,$$

$$A_n = (A_n \setminus A_{n+1}) \cup (A_{n+1} \setminus A_{n+2}) \cup (A_{n+2} \setminus A_{n+3}) \cup \dots$$

Тоді, в силу  $\sigma$  – адитивності  $\mu$ ,

$$\mu(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}) \quad (4.5)$$

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}) \quad (4.6)$$

Оскільки ряд (4.5) збігається, то його залишок (4.6) прямує до 0 при  $n \rightarrow \infty$ . Таким чином,  $\mu(A_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , що й потрібно було довести. ■

**Наслідок 4.3.8.** Якщо  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$  – зростаюча послідовність вимірних множин і

$$A = \bigcup_n A_n,$$

тоді

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Доведення. Оскільки  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ , для вимірних доповнень цих множин буде виконуватися протилежне включення :  $CA_1 \supset CA_2 \supset \dots \supset CA_n \supset \dots$ . Тоді, за твердженням 4.2.7.,  $\mu(\bigcap_n CA_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(CA_n)$ . З формул двоїстості випливає, що  $\bigcap_n CA_n = C(\bigcup_n A_n)$ . Але  $\mu(C(\bigcup_n A_n)) = 1 - \mu(\bigcup_n A_n)$ ,  $\mu(CA_n) = 1 - \mu(A_n)$ , звідки й випливає, що  $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ . ■

☞ **Зауваження 4.3.9.** Будь-яка множина  $A$ , зовнішня міра якої рівна 0, вимірна. В означенні вимірності достатньо вибрати  $B = \emptyset$ ; тоді

$$\mu^*(A \Delta B) = \mu^*(A \Delta \emptyset) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon.$$

Отже, ми розповсюдили міру з елементарних множин на більш широкий клас  $\mathfrak{W}_E$ , замкнений відносно операцій взяття злічених об'єднань та перетинів, тобто представляє собою  $\sigma$ -алгебру з одиницею  $E$ . Побудована міра  $\sigma$ -адитивна на цьому класі. Встановлені вище теореми дозволяють описати сукупність вимірних по Лебегу множин.

Будь-яку відкриту множину, яка належить  $E$ , можна подати у вигляді об'єднання скінченної або зліченної кількості відкритих прямокутників, тобто вимірних множин, і в силу твердження 4.3.5., всі відкриті множини вимірні. Замкнені множини є доповненнями відкритих, а значить, вони також вимірні. Згідно твердження 4.3.5., вимірними мають бути і всі ті множини, які можуть бути отримані з відкритих і замкнутих за допомогою скінченної або зліченної кількості операцій об'єднання і перетину, тобто будь-яка борельова множина є вимірною.

Вище ми розглядали лише ті множини, які містяться в одиничному квадраті  $E = \{0 \leq x, y \leq 1\}$ . Позбавимось тепер цього обмеження. Подамо всю площину як суму напіввідкритих квадратів  $E_{nm} = \{n < x \leq n+1, m < y \leq m+1\}$  ( $n, m$  – цілі) та будемо говорити, що плоска множина  $A$  *вимірна*, якщо її перетин  $A_{nm} = A \cap E_{nm}$  з кожним з цих квадратів вимірний. При цьому ми припустимо, за означенням,

$$\mu(A) = \sum_{n,m} \mu(A_{nm}).$$

Ряд, який стоїть праворуч, або збігається до деякого чила, або розбігається до  $+\infty$ . Тому міра може приймати і нескінченні значення. Всі властивості міри і вимірних множин, встановлені вище, очевидним чином переносяться на цей випадок. Потрібно відмітити лише те, що сума зліченого числа вимірних множин скінченної міри може мати нескінченну міру. Клас вимірних множин на всій площині позначимо  $\mathfrak{A}$ .

Ми докладно розглянули побудову міри Лебега для плоских множин. Аналогічно може бути побудована лебегова міра на прямій, в трьохвимірному просторі або, взагалі, в скінченновимірному просторі. В кожному з цих випадків міра будується за одним зразком: виходячи з міри, визначеної заздалегідь для деякої системи найпростіших множин (прямокутників у випадку площини, інтервалів  $(a, b)$ , відрізків  $[a, b]$  та півінтервалів  $(a, b]$ ,  $[a, b)$  у випадку прямої тощо), ми визначаємо міру спочатку для скінченних об'єднань таких множин, а потім розповсюджуємо її на більш широкий клас множин – на множини, вимірні за Лебегом. При цьому означення вимірності переноситься на множини в просторі будь-якої вимірності.

Вводячи поняття міри Лебега, ми виходили із звичайного означення площини. Аналогічна побудова для одновимірного випадку спирається на поняття довжини інтервалу (відрізка, півінтервалу).

**4.4. Загальне поняття міри.** Ми будували міру плоских множин, відштовхуючись від міри (площі) прямокутника і розповсюджуючи її на більш широкий клас множин. Але суттєвим був не конкретний вираз площі прямокутника, а лише його загальні властивості. Так при продовженні плоскої міри з прямокутників на елементарні множини ми користувались лише тим, що площа – це невід'ємна адитивна функція множини, і тим, що сукупність прямокутників є півкільцем. При побудові лебегового продовження плоскої міри була, окрім того, важлива її  $\sigma$ -адитивність.

Наведемо стисло ідею побудови загального поняття міри та основні її властивостями. Більш докладно про це можна прочитати, наприклад, у [ Колм., Дороговцев ]

**Означення 4.4.1.** Функція множини  $\mu(A)$  називається *мірою*, якщо:

- 1) Область визначення  $\mathfrak{S}_\mu$  функції  $\mu(A)$  є півкільцем множин,
- 2) Значення функції  $\mu(A)$  дійсні та невід'ємні,
- 3)  $\mu(A)$  адитивна, тобто для будь-якого скінченного розкладу  $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ , де  $A \in \mathfrak{S}_\mu$ ,  $A_k \in \mathfrak{S}_\mu$  виконана рівність

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

**Зауваження 4.4.2.** Із розкладу  $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$  випливає, що  $\mu(\emptyset) = 2\mu(\emptyset)$ , тобто  $\mu(\emptyset) = 0$ .

**Означення 4.4.3.** Міра  $\mu$  називається *продовженням* міри  $m$ , якщо  $\mathfrak{S}_m \subset \mathfrak{S}_\mu$  і для кожного  $A \in \mathfrak{S}_m$  має місце рівність  $\mu(A) = m(A)$ .

**Твердження 4.4.4.** Для кожної міри  $m(A)$ , заданої на деякому півкільці  $\mathfrak{S}_m$ , існує одне і тільки одне продовження  $m'(A)$ , що має своєю областю визначення кільце  $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$  (тобто мінімальне кільце над  $\mathfrak{S}_m$ ).

Фактично це твердження повторює в абстрактних термінах прийом, яким в п.4.2. міру з прямокутників було продовжено на елементарні множини. Клас елементарних множин як раз і є мінімальним кільцем над півкільцем прямокутників.

Із адитивності та невід'ємності міри витікають наступні, майже очевидні, але важливі властивості.

**Твердження 4.4.5.** Нехай  $m$  – міра, що задана на деякому кільці  $\mathfrak{R}_m$ , і множини  $A, A_1, \dots, A_n$  належать  $\mathfrak{R}_m$ . Тоді


1. якщо  $\coprod_{k=1}^n A_k \subset A$  тоді

$$\sum_{k=1}^n m(A_k) \leq m(A);$$

2. якщо  $\cup_{k=1}^n A_k \supset A$ , тоді

$$\sum_{k=1}^n m(A_k) \geq m(A).$$

Зокрема, якщо  $A \subset A'$  та  $A, A' \in \mathfrak{R}$ , то  $m(A) \leq m(A')$ .

 **Означення 4.4.6.** Міра  $m$  називається *зліченно-адитивною*, чи  $\sigma$ -адитивною, якщо для будь-яких множин  $A, A_1, \dots, A_n, \dots$ , що належать її області визначення  $\mathfrak{S}_m$  та задовольняють умову  $A = \coprod_{n=1}^{\infty} A_n$ , має місце рівність

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

**Приклад 4.4.7.** Наведемо приклад адитивної, але не  $\sigma$ -адитивної міри. Нехай  $X$  – множина всіх раціональних точок відрізка  $[0,1]$ , а  $\mathfrak{S}_m$  складається з перетину множини  $X$  із довільними інтервалами  $(a, b)$ . Легко побачити, що  $\mathfrak{S}_m$  являє собою півкільце. Для кожної такої множини  $A_{ab} \in \mathfrak{S}_m$  покладемо


$$m(A_{ab}) = b - a.$$

Ця міра адитивна, проте вона не  $\sigma$ -адитивна, оскільки  $m(X) = 1$ , але у цей час  $X$  є об'єднанням зліченної кількості точок, кожна з яких має міру 0.

Далі будемо розглядати лише  $\sigma$ -адитивні міри.

**Твердження 4.4.8.** Якщо міра  $m$ , визначена на деякому півкільці  $\mathfrak{S}_m$ ,  $\sigma$ -адитивна, то і міра  $\mu$ , отримана її продовженням на кільце  $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ ,  $\sigma$ -адитивна.

Нехай на деякому півкільці множин  $\mathfrak{S}_m$  з одиницею  $E$  задана  $\sigma$ -адитивна міра  $m$ . Визначимо на системі  $\mathfrak{U}$  всіх підмножин множини  $E$  функцію  $\mu^*(A)$  – зовнішню міру наступним чином.

 **Означення 4.4.9.** *Зовнішньої мірою* множини  $A \subset E$  називається число

$$\mu^*(A) = \inf \sum_n m(B_n),$$

де нижня межа береться за всіма покриттями множини  $A$  скінченними або зліченими системами множин  $B_n \in \mathfrak{S}_m$ .

**Означення 4.4.10.** Множина  $A$  називається *вимірною за Лебегом*, якщо, яке б не було  $\varepsilon > 0$ , знайдеться таке  $B \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ , що  $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ .

**Означення 4.4.11.** Функція  $\mu^*$ , розглянута лише на вимірних множинах, називається *лебеговою мірою* (або просто *мірою*) і позначається  $\mu$ .

Зрозуміло, що всі множини з  $\mathfrak{S}_m$  та з  $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$  вимірні. При цьому якщо  $A \in \mathfrak{S}_m$ , тоді  $\mu(A) = m(A)$ .

**Теорема 4.4.12.** На системі  $\mathfrak{W}$  вимірних множин функція  $\mu(A)$  –  $\sigma$ -адитивна.

**Теорема 4.4.13.** Система  $\mathfrak{W}$  вимірних за Лебегом множин є  $\sigma$ -алгеброю з одиницею  $E$ .

Отже, система  $\mathfrak{W}$  є  $\sigma$ -алгеброю, а визначена на ній функція  $\mu(A)$  має всі властивості  $\sigma$ -адитивної міри.

**Означення 4.4.14.** Лебеговим продовженням  $\mu = L(m)$  міри  $m$  називається функція  $\mu(A)$ , яка визначена на системі вимірних множин  $\mathfrak{W}$  та збігається на  $\mathfrak{W}$  з зовнішньою мірою  $\mu^*(A)$ .

**Означення 4.4.15.** Міра  $\mu$  називається *повною*, якщо з  $\mu(A) = 0$  и  $A' \subset A$  випливає, що  $A'$  вимірна.

Очевидно, що при цьому  $\mu(A') = 0$ . Зрозуміло, що лебегово продовження будь-якої міри повно. Це випливає з того, що з  $A' \subset A$  та  $\mu(A) = 0$  випливає, що зовнішня міра множини  $A'$  дорівнює нулю:  $\mu^*(A') = 0$ , а будь-яка множина  $C$ , для якої  $\mu^*(C) = 0$ , вимірна, оскільки  $\mu^*(C \Delta \emptyset) = \mu^*(C) = 0$ .

**4.5. Вимірні функції.** Ми будемо розглядати числові функції, задані на числовій прямій. Але усі поняття легко переносяться на випадок функції  $m$  змінних. Домовимося, що функція  $f$  задана на вимірній множині  $A$  та будемо скорочено позначати множину  $\{x \in A: f(x) < c\}$  символом  $\{f < c\}$ . Аналогічно вводяться символи  $\{f \geq c\}$ ,  $\{f = c\}$ ,  $\{f \leq c\}$ ,  $\{f > c\}$ .

**Означення 4.5.1.** Числова функція  $f(x)$ , яка задана на вимірній множині  $A$ , називається *вимірною*, якщо  $\forall c \in \mathbb{R}$  вимірною буде множина  $\{x: f(x) < c\}$ .

Знак  $<$  в цьому означенні можна замінити на інший, а саме, мають місце наступні результати.

**Твердження 4.5.2.** Якщо  $f$  – вимірна функція, яка задана на множині  $A$ , то при будь-якому дійсному  $c$  вимірні множини  $\{f \leq c\}$ ,  $\{f \geq c\}$ ,  $\{f = c\}$ ,  $\{f > c\}$ .

Доведення. Легко перевірити, що  $\{f \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{f < c + \frac{1}{n}\right\}$ . Дійсно, якщо  $x \in \{f \leq c\}$ , тоді  $f(x) \leq c < c + \frac{1}{n}$  для всіх натуральних  $n$ , тобто  $\forall n$   $x \in \left\{f < c + \frac{1}{n}\right\}$  або  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{f < c + \frac{1}{n}\right\}$  і  $\{f \leq c\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{f < c + \frac{1}{n}\right\}$ . Нехай тепер  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{f < c + \frac{1}{n}\right\}$ , тобто  $\forall n$   $x \in \left\{f < c + \frac{1}{n}\right\}$  або  $\forall n$   $f(x) < c + \frac{1}{n}$ . Перейдемо в цій нерівності до границі та отримаємо  $f(x) \leq c$ , тобто  $x \in \{f \leq c\}$  та  $\{f \leq c\} \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{f < c + \frac{1}{n}\right\}$ . Таким чином, рівність  $\{f \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{f < c + \frac{1}{n}\right\}$  має місце. З неї випливає вимірність множини  $\{f \leq c\}$  як зліченного перетину вимірних множин.

Вимірність інших множин випливає з відношень:

$$\{f = c\} = \{f \leq c\} \setminus \{f < c\}, \{f \geq c\} = A \setminus \{f < c\}, \{f > c\} = A \setminus \{f \leq c\}. \blacksquare$$

**Твердження 4.5.3.** Якщо хоча б одна з множин  $\{f \leq c\}, \{f \geq c\}, \{f > c\}$  виявиться вимірною при довільному дійсному  $c$ , тоді функція  $f$  вимірна на множині  $A$  (яка також є вимірною).

Доведення. Дійсно, тотожність  $\{f < c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{f \leq c - \frac{1}{n}\right\}$  (перевірте її самостійно) показує, що  $f$  вимірна, якщо вимірні всі множини  $\left\{f \leq c - \frac{1}{n}\right\}$ . Оскільки  $\{f < c\} = A \setminus \{f \geq c\}$ , з вимірності множини  $\{f \geq c\}$  випливає вимірність функції  $f$ . З рівності  $\{f < c\} = A \setminus \{f \geq c\} = A \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{f > c - \frac{1}{n}\right\}$  (перевірте її самостійно – вона доводиться аналогічно доведенню рівності в твердженні 4.5.2.) випливає, що якщо множини  $\left\{f > c - \frac{1}{n}\right\}$  вимірні, вимірною буде і функція  $f$ . ■

Отже, в означенні 4.5.1. вимірної функції можна замінити множину  $\{f < c\}$  будь-якою з множин  $\{f \leq c\}, \{f \geq c\}, \{f > c\}$ .

Розглянемо докладно властивості вимірних функцій.

**Теорема 4.5.4.** Довільна, задана на множині міри нуль, вимірна.

Це твердження випливає з умови повноти міри Лебега.

**Теорема 4.5.5.** Вимірна функція  $f$ , задана на множині  $A$ , буде вимірною на будь-якій вимірній підмножині  $B \subset A$ .

Доведення. Це твердження випливає з рівності  $\{x \in B: f(x) < c\} = B \cap \{f < c\}$  та вимірності перетину двох вимірних множин. ■

**Терема 4.5.6.** Нехай  $f$  задана на вимірній множині  $A$ , яка подається у вигляді об'єднання скінченної або зліченної сукупності вимірних множин  $A_k$ :  $A = \bigcup_k A_k$ . Якщо  $f$  вимірна на кожній із множин  $A_k$ , тоді вона вимірна й на  $A$ .

Доведення. Дійсно,  $\{f < c\} = \bigcup_k \{x \in A_k: f(x) < c\}$ . ■


**Теорема 4.5.7.** Якщо для всіх точок вимірної множини  $A$   $f(x) = k = \text{const}$ , тоді функція  $f$  вимірна.

Доведення. Вимірність сталої функції випливає із очевидної рівності

$$\{f < c\} = \begin{cases} A, & \text{якщо } k < c \\ \emptyset, & \text{якщо } k \geq c \end{cases} \blacksquare$$

**Теорема 4.5.8.** Неперервна на множині  $A$  функція  $f(x)$  вимірна.

Доведення. Перш за все встановимо, що для довільного дійсного  $c$  множина  $\{f \geq c\}$  замкнена. Дійсно, якщо  $x_0$  є граничною точкою цієї множини та  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in \{f \geq c\}$ ), тоді  $f(x_n) \geq c$  та, в силу неперервності  $f$ , буде  $f(x_0) \geq c$ , тобто  $x_0 \in \{f \geq c\}$ , що й означає замкненість (а отже й вимірність) множини  $\{f \geq c\}$ . Але тоді множина  $\{f < c\} = A \setminus \{f \geq c\}$  – вимірна, що й доводить теорему. ■

 **Означення 4.5.9.** Характеристичною функцією множини  $M$  називається функція  $\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in M \\ 0, & \text{якщо } x \notin M \end{cases}$

**Теорема 4.5.10.** Множина  $M$  і її характеристична функція  $\chi_M(x)$  одночасно вимірні або ні.

Доведення. Якщо функція  $\chi_M(x)$  вимірна, тоді вимірність множини  $M$  випливає із співвідношення  $M = \{\chi_M > 0\}$ .

Навпаки, якщо  $M$  є вимірною множиною, тоді співвідношення

$$\{\chi_M < c\} = \begin{cases} A, & \text{якщо } c > 1 \\ M, & \text{якщо } 0 < c \leq 1 \\ \emptyset, & \text{якщо } c \leq 0 \end{cases}$$

встановлюють вимірність характеристичної функції. ■

З цієї теореми дуже просто отримуються приклади розривних вимірних функцій.

**Теорема 4.5.11.** Якщо функція  $f$ , яка задана на множині  $A$ , вимірна, а  $k = \text{const} \neq 0$ , тоді вимірними будуть функції 1)  $f + k$ , 2)  $kf$ , 3)  $|f|$ , 4)  $f^2$ , і якщо  $f(x) \neq 0$ , тоді вимірна й функція 5)  $\frac{1}{f}$ .

Доведення. 1) Вимірність функції  $f + k$  випливає із співвідношення  $\{f + k < c\} = \{f < c - k\}$ .

2) Вимірність функції  $kf$  випливає зі співвідношень

$$\{kf < c\} = \begin{cases} \{f < \frac{c}{k}\}, & \text{якщо } k > 0 \\ \{f > \frac{c}{k}\}, & \text{якщо } k < 0 \end{cases}.$$

3) Функція  $|f|$  вимірна тому, що

$$\{|f| < c\} = \begin{cases} A, & \text{якщо } c < 0 \\ \{f < c\} \cap \{f > -c\}, & \text{якщо } c \geq 0 \end{cases}$$

4) Аналогічно, з того, що

$$\{f^2 < c\} = \begin{cases} A, & \text{якщо } c < 0 \\ \{|f| < \sqrt{c}\}, & \text{якщо } c \geq 0. \end{cases}$$

впливає вимірність функції  $f^2$ .

5) При  $f(x) \neq 0$  маємо

$$\left\{\frac{1}{f} < c\right\} = \begin{cases} \{f < 0\}, & \text{якщо } c = 0 \\ \{f < 0\} \cup (f > 1/c), & \text{якщо } c > 0, \\ \{f < 0\} \cap (f > 1/c), & \text{якщо } c < 0 \end{cases}$$

звідки впливає вимірність  $\frac{1}{f(x)}$ . ■

**Лема 4.5.12.** Якщо  $f$  та  $g$  – вимірні функції, тоді множина  $\{f < g\}$  – вимірна.

Доведення. Занумеруємо в довільному порядку всі раціональні числа  $r_1, r_2, r_3, \dots$ , тоді легко перевірити співвідношення:

$$\{f < g\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{f < r_k\} \cap \{g > r_k\}),$$

звідки і впливає твердження леми. ■

✍ **Вправа.** Доведіть самостійно співвідношення, яке використовувалося при доведенні леми 4.5.12. Слід скористатися лемою про наближення дійсних чисел раціональними. [5]

**Теорема 4.5.13.** Нехай  $f$  та  $g$  – вимірні функції. Тоді вимірна кожна з функцій 1)  $f(x) - g(x)$ , 2)  $f(x) + g(x)$ , 3)  $f(x)g(x)$ , і якщо  $g(x) \neq 0$ , тоді вимірна також функція 4)  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .

Доведення. 1) З теореми 4.5.11. випливає, що функція  $g(x) + c$  вимірна при довільному  $c$ . Згідно з лемою 4.5.12., множина  $\{f < g + c\}$  – вимірна. Але тоді вимірною буде множина  $\{f - g < c\} = \{f < g + c\}$ , тоді функція  $f(x) - g(x)$  – вимірна.

2) Вимірність суми  $f(x) + g(x)$  випливає з того, що  $f(x) + g(x) = f(x) - [-g(x)]$ .

3) Вимірність добутку  $f(x)g(x)$  випливає з тотожності

$$f(x)g(x) = 1/4\{[f(x) + g(x)]^2 - [f(x) - g(x)]^2\}$$

і теореми 4.5.11.

4) Вимірність частки  $\frac{f(x)}{g(x)}$  є наслідком тотожності  $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$  та вимірності добутку двох вимірних функцій. ■

Отже, ми показали, що арифметичні дії над вимірними функціями знову приводять до вимірних функцій. Тепер покажемо, що сукупність вимірних



функцій замкнена по відношенню не тільки до арифметичних операцій, але і до операції граничного переходу.

**Теорема 4.5.14.** Границя збіжної при кожному  $x \in A$  послідовності вимірних функцій вимірна.

Доведення. Нехай  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , тоді вимірність функції  $f$  буде випливати з рівності

$$\{f < c\} = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m \geq n} \left\{x: f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\}. \quad (4.7)$$

Дійсно, якщо  $f(x) < c$ , тоді існує таке  $k$ , що  $f(x) < c - \frac{1}{k}$ ; далі, при такому  $k$  можна знайти настільки велике  $n$ , що при  $m \geq n$  виконується нерівність  $f_m(x) < c - \frac{1}{k}$ , тобто  $x$  належить правій частині співвідношення (4.7).

Навпаки, якщо  $x \in \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m \geq n} \left\{x: f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\}$ , тоді існує таке  $k$ , що при всіх достатньо великих  $m$   $f_m(x) < c - \frac{1}{k}$ , але тоді  $f(x) < c$ , тобто  $x \in \{f < c\}$ . Отже, співвідношення (4.7) доведено.

Якщо функції  $f_m(x)$  вимірні, тоді множини  $\left\{x: f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\}$  – вимірні. Оскільки сукупність вимірних множин утворює  $\sigma$ -алгебру, тоді множина  $\{f < c\}$  також вимірна, що і доводить вимірність функції  $f$ . ■

При вивченні вимірних функцій часто можна знехтувати їх значеннями на множині міри нуль. У зв'язку з цим виникає наступне означення.

**Означення 4.5.15.** Дві функції,  $f$  та  $g$ , задані на одній і тій ж вимірній множині  $A$ , називаються *еквівалентними* (позначення:  $f \sim g$ ), якщо

$$\mu\{x: f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

**Означення 4.5.16.** Говорять, що деяка властивість виконана *майже скрізь* на  $A$ , якщо воно виконано всюди на  $A$ , окрім точок, які утворюють множину міри нуль. Таким чином, дві функції називають еквівалентними, якщо вони співпадають майже скрізь (м.с.).

**Приклад 4.5.17.** Нехай  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ . Оскільки  $\mu(\mathbb{Q}) = 0$ ,  $f(x) = 0$  майже скрізь.

**Теорема 4.5.18.** Функція  $f$ , визначена на деякій вимірній множині  $A$  та еквівалентна деякій вимірній функції  $g$ , також вимірна.

Доведення. Зрозуміло, що при довільному дійсному  $c$   $\{f < c\} = (\{f < c\} \cap \{f = g\}) \cup (\{f < c\} \cap \{f \neq g\}) = \{g < c\} \cup (\{f < c\} \cap \{f \neq g\})$ . В цьому об'єднанні перша множина  $\{g < c\}$  є вимірною за рахунок вимірності функції  $g$ , а друга множина  $\{f < c\} \cap \{f \neq g\} \subset \{f \neq g\}$  є вимірною, оскільки

вона є підмножиною множини нульової міри. Отже, множина  $\{f < c\}$  – вимірна, що означає вимірність функції  $f$ . ■

☞ **Зауваження 4.5.19.** У класичному аналізі поняття еквівалентності функції не відіграє суттєвої ролі, оскільки там переважно розглядаються неперервні функції однієї або декількох змінних, а для них еквівалентність рівносильна тотожності. Точніше, якщо дві функції,  $f$  та  $g$ , неперервні на деякому сегменті, еквівалентні (відносно міри Лебега), тоді вони збігаються. Дійсно, якщо  $f(x_0) \neq g(x_0)$  у будь-якій точці  $x_0$ , тоді у силу неперервності  $f$  та  $g$  знайдеться окіл точки  $x_0$ , в межах якого  $f(x) \neq g(x)$ . Міра такого околу додатна, тому неперервні функції не можуть бути еквівалентні, якщо вони не збігаються.

**4.6. Збіжність послідовностей вимірних функцій.** Оскільки у багатьох випадках поведінка вимірної функції на той або іншій множині міри нуль для нас несуттєва, буде природно ввести наступне узагальнення поняття поточної збіжності.

📁 **Означення 4.6.1.** Послідовність  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  функцій, визначених на деякій множині  $A$ , називається *збіжною майже скрізь* до функції  $f(x)$ , якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  для майже всіх  $x \in X$  (тобто  $\mu\{f_n \nrightarrow f\} = 0$ ).

☐ **Приклад 4.6.2.** Послідовність функцій  $f_n(x) = (-x)^n$ , визначених на відрізьку  $[0; 1]$ , при  $n \rightarrow \infty$  збігається до функції  $f(x) = 0$  майже скрізь (а саме, крім точки  $x = 1$ ).

Уведене поняття дає нам можливість узагальнити теорему 4.5.14.

**Теорема 4.6.3.** Якщо послідовність вимірних функцій  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  збігається до функції  $f(x)$  майже скрізь на  $A$ , тоді  $f$  також вимірна.

Доведення. Нехай  $A_0$  – та множина, на якій  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)$ . За теоремою 4.5.14.,  $f$  вимірна на  $A_0$ . За умовою,  $\mu(A \setminus A_0) = 0$ , тобто  $f$  вимірна на  $A \setminus A_0$  як будь-яка функція на множині міри нуль. Отже, за теоремою 4.5.6.,  $f$  вимірна на  $A = A_0 \cup (A \setminus A_0)$ . ■

Нагадаємо відоме з математичного аналізу означення рівномірної збіжності послідовності.

📁 **Означення 4.6.4.** Послідовність  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  функцій називається *рівномірно збіжною* на множині  $A$  до функції  $f(x)$ , якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$ .

Зрозуміло, що з рівномірної збіжності випливає поточкова збіжність. Наведемо теорему, яка дає умови, за яких зі збіжності майже скрізь може випливати рівномірна збіжність.

**Теорема 4.6.5. (Єгорова)** Нехай  $A$  – множина скінченної міри та послідовність вимірних функцій  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  збігається на  $A$  майже скрізь до  $f(x)$ . Тоді для будь-якого  $\delta > 0$  існує така вимірна множина  $A_\delta \subset A$ , що

- 1)  $\mu(A_\delta) > \mu(A) - \delta$ ;
- 2) на множині  $A_\delta$  послідовність  $f_n(x)$  збігається до  $f(x)$  рівномірно.

Доведення. Згідно теореми 4.6.3., функція  $f$  – вимірна. Покладемо

$$A_n^m = \bigcap_{i \geq n} \left\{ x : |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \right\}.$$

Тобто  $A_n^m$  при фіксованих  $m$  та  $n$  – це множина всіх тих точок  $x$ , для яких  $|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$  при всіх  $i \geq n$ .

Нехай  $A^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^m$ . З означення множин  $A_n^m$  зрозуміло, що при фіксованих  $m$   $A_1^m \subset A_2^m \subset \dots \subset A_n^m \subset \dots$ . У силу того, що  $\sigma$ -адитивна міра неперервна, для будь-якого  $m$  та довільного  $\delta > 0$  знайдеться такий номер  $n_0$ , що  $\mu(A^m \setminus A_{n_0}^m) < \frac{\delta}{2^m}$ .

Покладемо  $A_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{n_0}^m$  і покажемо, що так побудована множина  $A_\delta$  задовольняє умови теореми.

Доведемо спочатку, що на  $A_\delta$  послідовність  $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$  збігається рівномірно до функції  $f(x)$ . Це випливає з того, що якщо  $x \in A_\delta$ , тоді для будь-якого  $m$   $|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$  при  $i \geq n_0$ .

Оцінимо тепер міру множини  $A \setminus A_\delta$ . Для цього зауважимо, що при будь-якому  $m$  маємо  $\mu(A \setminus A^m) = 0$ . Дійсно, якщо  $x_0 \in A \setminus A^m$ , тоді існують як завгодно великі значення  $i$ , при яких  $|f_i(x_0) - f(x_0)| \geq \frac{1}{m}$ , тобто послідовність  $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$  у точці  $x_0$  не збігається до  $f(x)$ . Оскільки за умовою  $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$  збігається до  $f(x)$  майже скрізь, тоді  $\mu(A \setminus A^m) = 0$ .

Звідси випливає, що

$$\mu(A \setminus A_{n_0}^m) = \mu(A \setminus A^m) + \mu(A^m \setminus A_{n_0}^m) = \mu(A^m \setminus A_{n_0}^m) < \frac{\delta}{2^m}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тому } \mu(A \setminus A_\delta) &= \mu\left(A \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{n_0}^m\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (A \setminus A_{n_0}^m)\right) \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A \setminus A_{n_0}^m) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta. \blacksquare \end{aligned}$$

**Означення 4.6.6.** Говорять, що послідовність вимірних функцій  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  збігається за мірою на множині скінченної міри  $A$  до функції  $f(x)$ , якщо для будь-якого  $\sigma > 0$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} = 0$ .

Встановимо зв'язок між поняттями збіжності майже скрізь та збіжності за мірою. Знову міру множини  $A$  вважаємо скінченною.

**Теорема 4.6.7. (Лебега)** Якщо послідовність вимірних функцій  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  збігається майже скрізь на множині  $A$  до деякої функції  $f(x)$ , тоді вона збігається до тієї ж граничної функції  $f(x)$  за мірою.

Доведення. З теореми 4.6.3. випливає, що гранична функція  $f(x)$  вимірна. Нехай  $A_0$  – та множина нульової міри, на якій  $f_n(x)$  не прямує до  $f(x)$ . Покладемо

$$A_k(\sigma) = \{x: |f_k(x) - f(x)| \geq \sigma\}, R_n(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma), M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma).$$

Зрозуміло, що всі ці множини вимірні. Оскільки  $R_1(\sigma) \supset R_2(\sigma) \supset \dots$ , тоді, виходячи з властивості неперервності міри,  $\mu(R_n(\sigma)) \rightarrow \mu(M)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Покажемо тепер, що  $M \subset A_0$ . Дійсно, якщо  $x_0 \notin A_0$ , тобто якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ , тоді для даного  $\sigma > 0$  знайдеться таке  $n$ , що  $|f_k(x_0) - f(x_0)| < \sigma$ , при  $k \geq n$ , тобто  $x_0 \notin R_n(\sigma)$  і, тим більш,  $x_0 \notin M$ . Але  $\mu(A_0) = 0$ , і тому з включення  $M \subset A_0$  випливає, що  $\mu(M) = 0$ , та, отже,  $\mu(R_n(\sigma)) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Оскільки  $A_n(\sigma) \subset R_n(\sigma)$ , тоді  $\mu(A_n(\sigma)) \rightarrow 0$ , що означає збіжність послідовності  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  за мірою. ■

□ **Приклад 4.6.8.** Покажемо, що із збіжності послідовності функцій за мірою, взагалі не випливає її збіжність майже скрізь. Означимо для кожного натурального  $k$  на півінтервалі  $(0, 1]$  функції  $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_k^{(k)}, \dots$  наступним чином:

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } \frac{i-1}{k} < x \leq \frac{i}{k} \\ 0, & \text{при інших значеннях } x \end{cases}.$$

Пронумерувавши всі ці функції поспіль, ми отримаємо послідовність, яка збігається за мірою до нуля:  $\{|f_i^{(k)}| \geq \sigma\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{якщо } \sigma > 1 \\ \left[\frac{i-1}{k}; \frac{i}{k}\right], & \text{якщо } \sigma \leq 1 \end{cases}$

$$\mu\{|f_i^{(k)}| \geq \sigma\} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \sigma > 1 \\ \frac{1}{k}, & \text{якщо } \sigma \leq 1 \end{cases}$$

Отже, при довільному  $\sigma > 0$   $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu\{x: |f_i^{(k)}(x)| \geq \sigma\} = 0$ , тобто послідовність збігається до нуля за мірою. І у той же час вона не збігається в жодній точці, оскільки послідовність значень функцій в будь-якій точці з  $(0, 1]$  містить нескінченну кількість нулів та нескінченну кількість одиниць, тобто не є збіжною.

Але існує зв'язок між збіжністю за мірою та збіжністю майже скрізь. Він встановлюється наступною теоремою.

**Теорема 4.6.9. (Рісса)** Нехай послідовність вимірних функцій  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  на множині скінченної міри  $A$  збігається за мірою до функції  $f(x)$ . Тоді з цієї

послідовності можна вилучити підпослідовність  $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ , яка збігається до  $f(x)$  майже скрізь на  $A$ .

Доведення. Нехай  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$  — деяка послідовність додатних чисел, які прямують до нуля:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ . Нехай додатні числа  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$  такі, що ряд  $\sum_k \eta_k$  збігається.

Побудуємо послідовність індексів  $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$  наступним чином: виберемо  $n_1$ , так, щоб  $\mu\{x: |f_{n_1}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_1\} < \eta_1$  (таке  $n_1$  обов'язково існує); далі виберемо  $n_2 > n_1$  так, щоб  $\mu\{x: |f_{n_2}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_2\} < \eta_2$ . Взагалі, виберемо  $n_k > n_{k-1}$  так, щоб  $\mu\{x: |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\} < \eta_k$ .

Покажемо, що побудована послідовність збігається до  $f(x)$  майже скрізь. Дійсно, нехай  $R_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} \{x: |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}$ ,  $D = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i$ .

Оскільки  $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \dots \supset R_n \supset \dots$ , тоді в силу неперервності міри  $\mu(R_i) \rightarrow \mu(D)$ .

З іншого боку, зрозуміло, що  $D \subset \sum_{k=i}^{\infty} \eta_k$ , звідки  $\mu(R_i) \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$ , тобто  $\mu(D) = 0$ . Залишається перевірити, що у всіх точках множини  $A \setminus D$  має місце збіжність  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ .

Нехай  $x_0 \in A \setminus D$ . Тоді знайдеться таке  $i_0$ , що  $x_0 \notin R_{i_0}$ , це означає, що для всіх  $k \geq i_0$   $x_0 \notin \{x: |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}$ , тобто  $|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_k$ . Оскільки за умовою,  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , тоді  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x_0) = f(x_0)$ , що й треба було довести. ■

Отже, якщо розглядати послідовності вимірних функцій на множинах скінченної міри, найсильнішою з розглянутих збіжностей виявляється рівномірна збіжність. З неї впливає поточкова (або збіжність майже скрізь), з якої в свою чергу впливає найслабкіша збіжність за мірою. Але при виконанні певних умов можна «піднятися» від найслабкішої збіжності до рівномірної. Спочатку з послідовності, що збігається за мірою, треба вилучити підпослідовність, збіжну майже скрізь. А потім «зменшити» множину, на якій має місце збіжність майже скрізь, щоб на підмножині отримати рівномірну збіжність.

Вище було показано (теорема 4.5.8.), що будь-яка неперервна функція є вимірною. Але відомо, що існують розривні вимірні функції. Виявляється, що між неперервними та вимірними функціями, заданими на відрізку існують тісний зв'язок.

**Теорема 4.6.10. (Лузіна)** Для того, щоб функція  $f(x)$ , задана на відрізку  $[a, b]$ , була вимірною, необхідно та достатньо, щоб для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існувала така неперервна на  $[a, b]$  функція  $\varphi(x)$ , що  $\mu\{x: f(x) \neq \varphi(x)\} < \varepsilon$ .

Інакше кажучи, вимірна функція може бути зроблена неперервною на відрізку  $[a, b]$ , якщо її змінити на множині скільки завгодно малої міри. Про функцію на відрізку, яка може бути зроблена неперервною за допомогою такої «малої деформації», говорять, що вона володіє *C-властивістю*.

Питання для самоконтролю:

- дати означення та навести приклади різних систем множин (півкільце, кільце, алгебра,  $\sigma$ -алгебра).
- Дати означення вимірної за Дебегом множини.
- Навести приклад необмеженої множини нульової міри.
- Сформулювати основні властивості вимірних множин.
- Яка міра називається  $\sigma$ -адитивною?
- Які множини називаються борелевими?
- Що означає, що сукупність вимірних за Лебегом множин утворює  $\sigma$ -алгебру?
- Дати різні означення вимірної числової функції.
- Який зв'язок існує між вимірними та неперервними функціями?
- Навести приклад розривної вимірної функції.
- Які дії можна виконувати з вимірними функціями, щоб не втратити вимірність?
- Навести приклад еквівалентних функцій.
- Дати означення рівномірної збіжності, збіжності майже скрізь та збіжності за мірою послідовності вимірних функцій та встановити зв'язок між ними.

✎ Вправи:

- 4.1. Довести, що множина  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-10, \arctg n) \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{B}$  є борелевою та знайти її міру.
- 4.2. Довести, що множина  $A = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \in \mathcal{B}$  є борелевою та знайти її міру.
- 4.3. навести приклад півкільця підмножин множини  $A = \{1, 2, 3\}$ , яке не є кільцем.
- 4.4. Довести, що будь-яка монотонна числова функція є вимірною.
- 4.5. Довести вимірність функції  $f(x) = e^{[3 \sin x]}$  на числовій прямій.
- 4.6. Чи впливає з вимірності функції  $|f|$  вимірність функції  $f$ ?
- 4.7. Довести, що числова функція  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x|+n}$  є вимірною на числовій прямій.
- 4.8. Дослідити послідовність функцій  $f_n(x) = e^{-n|x^2-1|}$  на біжність майже скрізь та за мірою на числовій прямій  $\mathbb{R}$ .
- 4.9. Довести, що  $\chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x) \rightarrow 0$  майже скрізь на  $\mathbb{R}$ .

## Тема 5. Інтеграл Лебега та простори сумовних функцій.

**5.1. Інтеграл Лебега від простих функцій.** Поняття інтеграла Рімана, відоме з курсу математичного аналізу, застосовується лише для функцій, які мають «не дуже багато» точок розриву. Конструкція інтеграла Лебега дозволяє значно розширити клас інтегровних функцій. Ми будемо докладно розглядати інтеграл від числових функцій, але слід зауважити, що ця конструкція без змін переноситься на абстрактні функції, задані на деякій множині та вимірні відносно повної  $\sigma$ -адитивної міри, визначеній на  $\sigma$ -алгебрі множин з одиницею.

Спочатку визначимо інтеграл на простих функціях.

**Означення 5.1.1.** Функція  $f(x)$ , визначена на деякій множині  $X$  із заданою на ній мірою, називається *простою*, якщо вона вимірна і приймає не більше, ніж зліченне число значень.

Структура простих функцій характеризується наступним твердженням.

**Твердження 5.1.2.** Функція  $f(x)$ , яка має не більше ніж зліченну кількість різних значень  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  вимірна тоді та тільки тоді, коли всі множини  $A_n = \{x: f(x) = y_n\}$  вимірні.

Доведення. Необхідність умови випливає з твердження 4.5.2. Достатність випливає з того, що множину  $\{f < c\}$  в умовах теореми можна подати у вигляді об'єднання не більше ніж зліченної сукупності вимірних множин вигляду  $\{f = y_n\}$ , де  $y_n < c: \{f < c\} = \bigcup_{y_n < c} A_n$ , тобто при будь-якому дійсному  $c$  множина  $\{f < c\}$  – вимірна. ■

Використання простих функцій у побудові інтеграла Лебега ґрунтується на наступному твердженні..

**Твердження 5.1.3.** Для вимірності функції  $f(x)$  необхідно та достатньо, щоб вона могла бути подана у вигляді границі рівномірно збіжної послідовності простих вимірних функцій.

Доведення. Достатність зрозуміла з теореми 4.5.14. Для доведення необхідності розглянемо довільну вимірну функцію  $f(x)$  і покладемо  $f_n(x) = m/n$ , якщо  $m/n \leq f(x) < (m+1)/n$  (тут  $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ ). Зрозуміло, що функції  $f_n(x)$  прості та при  $n \rightarrow \infty$  вони рівномірно збігаються до  $f(x)$ , оскільки  $|f(x) - f_n(x)| \leq 1/n$ , тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$ . ■

Нехай  $f$  – деяка проста функція, яка приймає значення  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ ;  $y_i \neq y_j$  при  $i \neq j$ , і нехай  $A$  – деяка вимірна підмножина множини  $X$  скінченної міри. Природно визначити інтеграл від функції  $f$  по множині  $A$  рівністю

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n), \text{ де } A_n = \{x \in A, f(x) = y_n\}, \quad (5.1)$$

якщо ряд справа збігається. Ми приходимо до наступного означення (в якому за відомими причинами завчасно постулюється абсолютна збіжність ряду).

**Означення 5.1.4.** Проста функція  $f$  називається *інтегрованою або сумовною* (по мірі  $\mu$ ) на множині  $A$ , якщо ряд (5.1) абсолютно збігається. Якщо  $f$  інтегровна, тоді сума ряду (5.1) називається *інтегралом від  $f$  по множині  $A$* .

В цьому означенні припускається, що всі  $y_n$  різні. Можна, проте, представити значення інтеграла від простої функції у вигляді суми добутків вигляду  $C_k \mu(B_k)$  і не припускаючи, що всі  $C_k$  різні. Це дозволяє зробити наступна лема.

**Лема 5.1.5.** Нехай  $A = \coprod_k B_k$ , та нехай на кожній множині  $B_k$  функція  $f$  приймає лише одне значення  $C_k$ ; тоді  $\int_A f(x) d\mu = \sum_k C_k \mu(B_k)$ , причому функція  $f$  інтегровна на  $A$  в тому і тільки в тому випадку, коли ряд абсолютно збігається.

Доведення. Легко побачити, що кожна множина  $A_n = \{x \in A, f(x) = y_n\}$  є об'єднанням тих  $B_k$ , для яких  $C_k = y_n$ . Тому

$$\sum_n y_n \mu(A_n) = \sum_n y_n \sum_{C_k=y_n} \mu(B_k) = \sum_k C_k \mu(B_k).$$

Оскільки міра невід'ємна, тоді

$$\sum_n |y_n| \mu(A_n) = \sum_n |y_n| \sum_{C_k=y_n} \mu(B_k) = \sum_k |C_k| \mu(B_k),$$

тобто ряди  $\sum_n y_n \mu(A_n)$  та  $\sum_k C_k \mu(B_k)$  абсолютно збігаються або розбігаються одночасно. Лему доведено. ■

Встановимо деякі властивості інтеграла Лебега від простих функцій:

$$\text{Л1)} \int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu,$$

причому з існування інтегралів в правій частині рівності випливає існування інтеграла в лівій.

Для доведення припустимо, що  $f$  приймає значення  $f_i$  на множинах  $F_i \subset A$ , а  $g$  – значення  $g_j$  на множинах  $G_j \subset A$ , тобто

$$J_1 = \int_A f(x) d\mu = \sum_i f_i \mu(F_i), \quad (5.2)$$

$$J_2 = \int_A g(x) d\mu = \sum_j g_j \mu(G_j). \quad (5.3)$$

тоді в силу леми 5.1.5.,

$$J = \int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \sum_i \sum_j (f_i + g_j) \mu(F_i \cap G_j) \quad (5.4)$$



Але  $\mu(F_i) = \sum_j \mu(F_i \cap G_j)$ ,  $\mu(G_j) = \sum_i \mu(F_i \cap G_j)$ , тому з абсолютної збіжності рядів (5.2) та (5.3) випливає і абсолютна збіжність ряду (5.4); при цьому  $J = J_1 + J_2$ .

**Л2)** Для будь-якого сталого  $k$   $\int_A kf(x) d\mu = k \int_A f(x) d\mu$ , причому з існування інтеграла в правій частині випливає існування інтеграла в лівій частині.

Дійсно, якщо в термінах властивості Л1 ряд (5.2) абсолютно збігається, тоді буде абсолютно збігатися ряд  $\sum_i kf_i \mu(F_i) = k \sum_i f_i \mu(F_i) = k \int_A f(x) d\mu$ .

**Л3)** Обмежена на множині  $A$  проста функція  $f$  інтегровна на  $A$ , причому якщо  $|f(x)| \leq M$  на  $A$ , тоді  $|\int_A f(x) d\mu| \leq M\mu(A)$ .

Дійсно, якщо  $|f(x)| \leq M$  на  $A$ , тоді  $\forall i \quad |f_i| \leq M$ , тобто  $\sum_i |f_i| \mu(F_i) \leq M \sum_i \mu(F_i) = M\mu(A)$ , що означає абсолютну збіжність ряду та оцінку  $|\int_A f(x) d\mu| \leq M\mu(A)$ .

## 5.2. Інтеграл Лебга від довільної функції на множині скінченної міри.

**Означення 5.2.1.** Назвемо функцію  $f$  інтегровою (сумовною) на множині  $A$ , якщо існує послідовність простих інтегровних на  $A$  функцій  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ , яка збігається рівномірно до  $f$ . Границю

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu \quad (5.5)$$

позначимо

$$\int_A f(x) d\mu$$

і назвемо інтегралом від функції  $f$  по множині  $A$ .

Це означення коректне, якщо виконано наступні умови:

1. Границя (5.5) існує для будь-якої послідовності простих інтегровних на  $A$  функцій, що рівномірно збігається до  $f$ .

2. Ця границя при заданій функції  $f$  не залежить від вибору послідовності  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

3. Для простих функцій означення інтегровності та інтеграла рівносильне даному в означенні 5.1.4.

Покажемо, що ці умови дійсно виконані. Для доведення першої умови достатньо помітити, що в силу властивостей Л1-Л3) інтеграла від простих функцій,

$$\left| \int_A f_n(x) d\mu - \int_A f_m(x) d\mu \right| \leq \mu(A) \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)|,$$

тобто послідовність інтегралів від простих функцій фундаментальна, отже, збігається. Для доведення другої умови розглянемо дві послідовності,  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  та  $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ , які збігаються до  $f$ . Якби границя (5.5) для цих двох послідовностей приймала різні значення, то для послідовності, яка отримана об'єднанням цих двох послідовностей, границі (5.5) не існувало би, а це суперечить першій умові, оскільки ця «змішана» послідовність також збігається до  $f$ . Нарешті, для доведення третьої умови достатньо розглянути послідовність, у якій  $f_n$  дорівнює  $f$  для усіх  $n$ .

Встановимо основні властивості інтеграла Лебега. Безпосередньо з означення випливає, що  $\int_A 1 \cdot d\mu = \mu(A)$ .

**Твердження 5.2.2.** Для будь-якого постійного  $k$

$$\int_A kf(x) d\mu = k \int_A f(x) d\mu,$$

причому з існування інтеграла в правій частині випливає існування інтеграла в лівій.

Доведення. Ця властивість виконується для інтегралів від простих функцій. Нехай  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  – послідовність простих інтегровних функцій, які рівномірно збігаються до  $f$ , тоді  $\int_A kf_n(x) d\mu = k \int_A f_n(x) d\mu$ . Перейдемо до границі:

$$\int_A kf(x) d\mu = \lim_n \int_A kf_n(x) d\mu = k \lim_n \int_A f_n(x) d\mu = k \int_A f(x) d\mu,$$

що й потрібно було довести. ■

**Твердження 5.2.3. (адитивність інтеграла):**

$$\int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu,$$

причому з існування інтегралів у правій частині випливає існування інтегралу в лівій.

Доведення. Ця властивість виконується для інтегралів від простих функцій. Нехай  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  – послідовність простих інтегровних функцій, які рівномірно збігаються до  $f$ ,  $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$  – послідовність простих інтегровних функцій, які рівномірно збігаються до  $g$ , тоді

$$\int_A (f_n(x) + g_n(x)) d\mu = \int_A f_n(x) d\mu + \int_A g_n(x) d\mu.$$

Перейдемо до границі:

$$\begin{aligned} & \int_A [f(x) + g(x)] d\mu \lim_n \int_A (f_n(x) + g_n(x)) d\mu = \\ & = \lim_n \int_A f_n(x) d\mu + \lim_n \int_A g_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести. ■

**Твердження 5.2.4.** Обмежена на множині скінченної міри  $A$  функція  $f$  інтегровна на  $A$ .

Доведення. З твердження 5.1.3. випливає, що функцію  $f$  можна подати у вигляді рівномірної границі простих обмежених вимірних функцій. Оскільки кожна проста вимірна функція є інтегровою (властивість ЛЗ),  $f$  подається у вигляді рівномірної границі простих інтегрованих функцій, тобто є функцією інтегровою. ■

**Твердження 5.2.5. (монотонність інтеграла)** Якщо  $f$  – інтегровна на  $A$  та для всіх  $x \in A$   $f(x) \geq 0$ , тоді  $\int_A f(x) d\mu \geq 0$ .

Доведення. Для простих функцій це твердження випливає із означення. У загальному випадку оскільки  $f$  – вимірна, її, згідно твердження 5.1.3., знайдеться рівномірно збіжна до неї послідовність  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  простих невід’ємних функцій. Оскільки  $\int_A f_n(x) d\mu \geq 0$ ,

$$\int_A f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu \geq 0. \blacksquare$$

З останньої властивості одразу випливає, що якщо для двох інтегровних функцій виконується нерівність  $f(x) \geq g(x)$ , тоді

$$\int_A f(x) d\mu \geq \int_A g(x) d\mu,$$

а тому, якщо  $m \leq f(x) \leq M$  для всіх (або майже всіх)  $x \in A$ , тоді

$$m\mu(A) \leq \int_A f(x) d\mu \leq M\mu(A).$$

**Твердження 5.2.6.** Якщо  $\mu(A) = 0$ , то  $\int_A f(x) d\mu = 0$ .

Це твердження безпосередньо випливає з означення інтеграла Лебега.

**Твердження 5.2.7.** Якщо  $f(x) = g(x)$  майже скрізь на  $A$ , тоді

$$\int_A f(x) d\mu = \int_A g(x) d\mu,$$

причому обидва інтеграли існують або не існують одночасно.

Доведення. Позначимо  $A' = \{f \neq g\}$ , тоді  $f = f \cdot \chi_{A \setminus A'}(x) + f \cdot \chi_{A'}(x)$ . Обчислимо інтеграл

$$\begin{aligned} \int_A f(x) d\mu &= \int_A f \chi_{A \setminus A'}(x) d\mu + \int_A f \chi_{A'}(x) d\mu = \int_{A \setminus A'} f d\mu + \int_{A'} f d\mu = \int_{A \setminus A'} f d\mu = \\ &= \int_{A \setminus A'} g d\mu = \int_{A \setminus A'} g d\mu + \int_{A'} g d\mu = \int_A g \cdot \chi_{A \setminus A'}(x) d\mu + \int_A g \cdot \chi_{A'}(x) d\mu = \int_A g d\mu, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести. ■

☞ **Зауваження 5.2.8.** В процесі доведення твердження 5.2.7. було показано, що  $\int_A f(x) d\mu = \int_{A \setminus A'} f d\mu$ , тобто при обчисленні інтеграла можна знехтувати множиною нульової міри.

**Твердження 5.2.9.** Якщо функція  $\varphi$  інтегровна на  $A$  і майже скрізь  $|f(x)| \leq \varphi(x)$ , тоді  $f$  також інтегровна на  $A$ .

Доведення. Спочатку покажемо, що твердження вірно для простих функцій. Дійсно, якщо  $f$  та  $\varphi$  – прості функції, то видаливши з множини  $A$  деяку множину міри нуль, множину  $A'$ , яка залишилася, можна подати у вигляді об'єднання скінченної або зліченної кількості множин, на кожній з яких  $f$  та  $\varphi$  стали:  $f(x) = a_n, \varphi(x) = b_n$ , причому  $|a_n| \leq b_n$ . З інтегровності  $\varphi$  випливає, що

$$\sum_n |a_n| \mu(A_n) \leq \sum_n b_n \mu(A_n) = \int_{A'} \varphi(x) d\mu = \int_A \varphi(x) d\mu.$$

Тому  $f$  також інтегровна, і  $\left| \int_A f(x) d\mu \right| = \left| \int_{A'} f(x) d\mu \right| = \left| \sum_n a_n \mu(A_n) \right| \leq \sum_n |a_n| \mu(A_n) = \int_{A'} |f(x)| d\mu \leq \int_A \varphi(x) d\mu$ .

У загальному випадку це твердження доводиться граничним переходом із застосуванням твердження 5.1.3. ■

**Твердження 5.2.10.** Інтеграли  $I_1 = \int_A f(x) d\mu$ ,  $I_2 = \int_A |f(x)| d\mu$  існують або не існують одночасно.

Доведення. Справді, з існування інтеграла  $I_2$  випливає існування  $I_1$  в силу твердження 5.2.9.

Нехай тепер існує інтеграл  $I_1$ , тобто функцію  $f$  можна подати у вигляді рівномірної границі послідовності простих інтегровних функцій  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Оскільки  $|f_n| - |f| \leq |f_n - f|$ ,  $|f_n| \Rightarrow |f|$ , тобто функція  $|f|$  також інтегровна (інтеграл  $I_2$  існує). ■

Ця властивість істотно відрізняє інтеграл Лебега від інтеграла Рімана, оскільки для інтегралів Рімана лише з існування інтеграла від модуля функції впливає інтегровність самої функції, але не навпаки.

Ми сформулювали властивості інтеграла Лебега по фіксованій множині. Тепер будемо розглядати інтеграл Лебега як функцію множини

$$F(A) = \int_A f(x) d\mu,$$

яка визначена на сукупності вимірних множин при фіксованій функції  $f(x)$ : Виявляється (це буде доведено у наступних твердженнях), що ця функція є  $\sigma$ -адитивною.

**Твердження 5.2.11.** Якщо  $A = \coprod_n A_n$ , тоді

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x) d\mu,$$

причому з існування інтеграла в лівій частині впливає існування інтегралів та абсолютна збіжність ряду у правій частині.

Доведення. Спочатку перевіримо твердження для простої функції  $f$ , яка приймає значення  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ .

Нехай  $B_k = \{x: x \in A, f(x) = y_k\}$ ,  $B_{nk} = \{x: x \in A_n, f(x) = y_k\}$ . Тоді  $\int_A f(x) d\mu = \sum_k y_k \mu(B_k) = \sum_k y_k \sum_n \mu(B_{nk}) = \sum_n \sum_k y_k \mu(B_{nk}) = \sum_n \int_{A_n} f(x) d\mu$ .

Оскільки ряд  $\sum y_k \mu(B_k)$ , в припущенні інтегровності функції  $f$  на  $A$ , абсолютно збігається, а міри усіх множин невід'ємні, тоді абсолютно збігаються і усі інші ряди у цьому ланцюжку рівностей. Тобто для простої функції твердження доведено.

Нехай тепер  $f$  – довільна інтегровна функція. Тоді  $\forall \varepsilon > 0$  існує проста інтегровна на  $A$  функція  $g$ , яка задовольняє умову  $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ .

Для простої функції  $g$  маємо

$$\int_A g(x) d\mu = \sum_n \int_{A_n} g(x) d\mu,$$

причому  $g$  інтегровна на кожній множині  $A_n$  і ряд інтегралів абсолютно збігається. З цієї останньої обставини та з оцінки  $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$  впливає, що  $f$  також інтегровна на кожній  $A_n$  та  $\sum_n \left| \int_{A_n} f(x) d\mu - \int_{A_n} g(x) d\mu \right| \leq \sum_n \varepsilon \mu(A_n) = \varepsilon \mu(A)$ ,  $\left| \int_A f(x) d\mu - \int_A g(x) d\mu \right| \leq \varepsilon \mu(A)$ , що, по-перше, призводить до абсолютної збіжності ряду  $\sum_n \int_{A_n} f(x) d\mu$ , а по-друге, дає оцінку

$$\left| \sum_n \int_{A_n} f(x) d\mu - \int_A f(x) d\mu \right| \leq 2\varepsilon \mu(A).$$

Оскільки  $\varepsilon > 0$  – довільне, отримана оцінка означає, що

$$\sum_n \int_{A_n} f(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu. \blacksquare$$

**Наслідок 5.2.12.** Якщо  $f$  інтегровна на  $A$ , тоді  $f$  інтегровна і на будь-якій вимірній множині  $A' \subset A$ .

Ми показали, що з інтегровності функції  $f$  на множині  $A$  випливає, що за умови  $A = \coprod_n A_n$   $f$  інтегровна на кожній множині  $A_n$  та інтеграл по  $A$  дорівнює сумі інтегралів по множинам  $A_n$ . Це твердження може бути в деякому сенсі обернено.

**Твердження 5.2.13.** Якщо  $A = \coprod_n A_n$ , та ряд  $\sum_n \int_{A_n} |f(x)| d\mu$  збігається, тоді функція  $f$  інтегровна на  $A$  та

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x) d\mu. \quad (5.6)$$

Доведення. Порівняно з попередньою теоремою, новим є твердження, що із збіжності ряду випливає інтегровність  $f$  на множині  $A$ .

Спочатку проведемо доведення для випадку простої функції  $f$ , яка приймає значення  $f_i$ . Покладемо  $B_i = \{x: x \in A, f(x) = f_i\}$ ,  $A_{ni} = A_n \cap B_i$ , тоді маємо

$$\bigcup_n A_{ni} = B_i \text{ та } \int_{A_n} |f(x)| d\mu = \sum_i |f_i| \mu(A_{ni}).$$

Із збіжності ряду (5.6) випливає, що збігаються ряди

$$\sum_n \sum_i |f_i| \mu(A_{ni}) = \sum_i |f_i| \mu(B_i).$$

Збіжність останнього ряду й означає, що існує інтеграл

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_i f_i \mu(B_i).$$

У загальному випадку апроксимуємо  $f$  простою функцією  $\tilde{f}$  так, що при довільному додатному  $\varepsilon$   $|f(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon$ . Тоді  $|\tilde{f}(x)| \leq |f(x)| + \varepsilon$ , тобто

$$\int_{A_n} |\tilde{f}(x)| d\mu \leq \int_{A_n} |f(x)| d\mu + \varepsilon \mu(A_n),$$

і оскільки ряд  $\sum_n \mu(A_n) = \mu(A)$  збігається, із збіжності ряду (5.6) випливає збіжність ряду

$$\sum_n \int_{A_n} |\tilde{f}(x)| d\mu,$$

тобто за доведеним вище, інтегровність на  $A$  простої функції  $\tilde{f}$ . Але тоді в силу апроксимації функція  $f$  також інтегровна на  $A$ . ■

**Твердження 5.2.14. (нерівність Чебишева).** Якщо  $\varphi(x) \geq 0$  на  $A$  та  $c > 0$ , тоді

$$\mu\{x: x \in A, \varphi(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c} \int_A \varphi(x) d\mu.$$

Доведення. Дійсно, нехай  $A' = \{x: x \in A, \varphi(x) \geq c\}$ . Тоді

$$\int_A \varphi(x) d\mu = \int_{A'} \varphi(x) d\mu + \int_{A \setminus A'} \varphi(x) d\mu \geq \int_{A'} \varphi(x) d\mu \geq c\mu(A')$$

або  $\mu(A') \leq \frac{1}{c} \int_A \varphi(x) d\mu$ . ■

З нерівності Чебишева випливає дуже корисний наслідок, який стверджує, що якщо інтеграл від деякої невід'ємної функції дорівнює нулю, тоді сама функція майже скрізь дорівнює нулю.

**Наслідок 5.2.15.** Якщо  $\int_A |f(x)| d\mu = 0$ , тоді  $f(x) = 0$  майже скрізь.

Доведення. Справді, в силу нерівності Чебишева, маємо

$$\mu\left\{x: x \in A, |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\} \leq n \int_A |f(x)| d\mu = 0$$

для всіх  $n$ . Тому

$$\mu\{x: x \in A, f(x) \neq 0\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left\{x: x \in A, |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\} = 0. \blacksquare$$

Доведемо це одну властивість інтеграла Лебега як функції множини.

**Твердження 5.2.16. (абсолютна неперервність інтеграла Лебега).**

Якщо  $f(x)$  – інтегровна на множині  $A$  функція, тоді для кожного  $\varepsilon > 0$  існує таке  $\delta > 0$ , що для кожної вимірної множини  $e \subset A$  такого, що  $\mu(e) < \delta$

$$\left| \int_e f(x) d\mu \right| < \varepsilon.$$

Доведення. Насамперед зазначимо, наше твердження очевидне, якщо  $f$  обмежена: якщо  $|f(x)| \leq M$ , тоді  $\left| \int_e f(x) d\mu \right| \leq \int_e |f(x)| d\mu \leq M\mu(e)$ . Тобто в якості множини  $e \subset A$  можна вибрати довільну множину з мірою  $\mu(e) < 1/M$ .

Нехай тепер  $f$  – довільна інтегровна функція. Покладемо  $A_n = \{x: x \in A, n \leq |f(x)| < n+1\}$  і  $B_N = \bigcup_{n=0}^N A_n, C_N = A \setminus B_N$ .

Тоді, за твердженням 5.2.11.,

$$\int_A |f(x)| d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)| d\mu.$$

Виберемо  $N$  так, щоб  $\sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)| d\mu = \int_{C_N} |f(x)| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$  і нехай  $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}$ .

Якщо тепер  $\mu(e) < \delta$ , тоді

$$\left| \int_e f(x) d\mu \right| \leq \int_e |f(x)| d\mu = \int_{e \cap B_N} |f(x)| d\mu + \int_{e \cap C_N} |f(x)| d\mu.$$

Оцінімо кожний з інтегралів справа:

$$\begin{aligned} \int_{e \cap B_N} |f(x)| d\mu &= \int_{e \cap (\bigcup_{n=0}^N A_n)} |f(x)| d\mu \leq (N+1) \mu(e) < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \int_{e \cap C_N} |f(x)| d\mu &\leq \int_{C_N} |f(x)| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо  $\int_e |f(x)| d\mu < \varepsilon$ , що й потрібно було довести. ■

Доведені властивості інтеграла як функції множини призводять до висновку, що інтеграл Лебега від невід'ємної функції можна розглядати як деяку  $\sigma$ -адитивну міру, визначену на вимірних підмножинах множини  $A$ .

**5.3. Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.** В деяких задачах виникає необхідність почленно інтегрувати збіжний ряд. Це питання безпосередньо пов'язане з можливістю граничного переходу під знаком інтеграла. Наведемо без доведення основні результати, які стосуються цього питання.

✍ **Вправа.** Самостійно ознайомтеся з доведенням наступних теорем [7, с.346-350]

**Теорема 5.3.1. (Лебега).** Якщо послідовність  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  на множині  $A$  збігається до  $f$  і при всіх  $n$   $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ , де  $\varphi$  інтегровна на  $A$ , тоді гранична функція  $f$  інтегровна на  $A$  і

$$\int_A f_n(x) d\mu \rightarrow \int_A f(x) d\mu.$$

**Теорема 5.3.2. (Б. Леві).** Нехай на множині  $A$

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots,$$

причому функції  $f_n$  інтегровні та їх границі обмежені в сукупності  $\int_A f_n(x) d\mu \leq K$ . Тоді майже скрізь на  $A$  існує (скінченна) границя  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , функція  $f$  інтегровна на  $A$  та



$$\int_A f_n(x) d\mu \rightarrow \int_A f(x) d\mu.$$


При цьому на множині, на якій границя послідовності не існує, функцію  $f$  можна задати довільно, наприклад, прийнявши на цій множині  $f(x) = 0$ .

Умову монотонного не спадання послідовності функцій  $f_n(x)$  можна замінити умовою її монотонного не зростання.

**Наслідок 5.3.3.** Якщо  $\psi_n(x) \geq 0$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x) d\mu < \infty$ , тоді майже скрізь на  $A$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$  збігається і його можна почленно інтегрувати  $\int_A (\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x) d\mu$ .

**Теорема 5.3.4. (Фату).** Якщо послідовність вимірних невід'ємних функцій  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  збігається майже скрізь на  $A$  до функції  $f$  і  $\int_A f_n(x) d\mu \leq K$ , тоді  $f$  інтегровна на  $A$  і  $\int_A f(x) d\mu \leq K$ .

**5.4. Інтеграл Лебега по множині нескінченної міри.** Розповсюдимо тепер поняття інтеграла Лебега на множини нескінченної міри. Припустимо, що множину  $X$  можна подати у вигляді об'єднання зліченної сукупності вимірних скінченної міри  $X = \bigcup_n X_n$ ,  $\mu(X_n) < \infty$  (в такому випадку міра називається  $\sigma$ -скінченною). Якщо послідовність  $\{X_n\}$  монотонно зростає, назвемо її вичерпною послідовністю. Наприклад, якщо в якості  $X$  вибрати множину дійсних чисел, тоді вичерпну послідовність будуть утворювати вкладені інтервали  $(-n; n)$ .

 **Означення 5.4.1.** Вимірна функція  $f$ , визначена на множині  $X$  з  $\sigma$ -скінченною мірою  $\mu$ , називається *сумовною* на  $X$ , якщо вона сумовна на кожній вимірній підмножині  $A \subset X$  скінченної міри і якщо для кожної вичерпної послідовності  $\{X_n\}$  границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_n} f(x) d\mu$  існує і не залежить від вибору цієї послідовності. Ця границя називається *інтегралом від  $f$  на множині  $X$*  і позначається символом

$$\int_X f(x) d\mu.$$

Зрозуміло, що якщо функція  $f$  дорівнює нулю за межами деякої множини скінченної міри, то для неї сформульоване означення інтеграла рівносильне тому, яке було розглянуто у п.5.2.

Означення інтеграла від простої функції, що дано у п. 5.1, можна перенести на випадок нескінченної міри. Зрозуміло, що для сумування простої функції необхідно, щоб кожне відмінне від нуля значення вона приймала тільки на множині скінченної міри. Означення інтегровності, що розглядалось у п. 5.2., істотно пов'язане з припущенням скінченності міри множини. Якщо  $\mu(X) = \infty$ , то із рівномірної збіжності послідовності простих інтегровних функцій не впливає збіжність послідовності їх інтегралів.

Результати, викладені в п. 5.2. для випадку скінченної міри, в основному переносяться на інтеграли по множині нескінченної міри. Істотна відмінність полягає в тому, що у випадку  $\mu(X) = \infty$  обмежена вимірна функція не зобов'язана бути інтегровною. Зокрема, якщо  $\mu(X) = \infty$ , то жодна відмінна від нуля стала не інтегровна на  $X$ .

**5.5. Порівняння інтеграла Лебега з інтегралом Рімана.** З'ясуємо зв'язок між інтегралами Лебега та Рімана. При цьому обмежимося найпростішим випадком лінійної міри Лебега на прямій.

**Теорема 5.5.1.** Якщо існує інтеграл Рімана

$$I = (R) \int_a^b f(x) dx,$$

то  $f$  інтегровна на  $[a, b]$  за Лебегом і

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu = I.$$

Доведення. Розглянемо розбиття відрізка  $[a, b]$  на  $2^n$  частин точками  $x_k = a + \frac{k}{2^n}(b - a)$  та відповідні суми Дарбу:

$$\Omega_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} M_{nk}, \quad \omega_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} m_{nk},$$

де  $M_{nk}$  – верхня межа  $f$  на відрізку  $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ , а  $m_{nk}$  – нижня межа  $f$  на цьому ж відрізку. За означенням інтеграла Рімана,

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n.$$

Нехай  $\overline{f}_n(x) = M_{nk}$  якщо  $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ ,  $\underline{f}_n(x) = m_{nk}$  якщо  $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ . В точці  $x = b$  функції  $\overline{f}_n$  та  $\underline{f}_n$  можна довизначити довільно. Легко обчислити, що

$$\int_{[a,b]} \overline{f}_n(x) d\mu = \Omega_n, \quad \int_{[a,b]} \underline{f}_n(x) d\mu = \omega_n.$$

Оскільки послідовність  $\{\overline{f}_n\}$  не зростає, послідовність  $\{\underline{f}_n\}$  не спадає, тоді майже скрізь  $\overline{f}_n(x) \rightarrow \overline{f}(x) \geq f(x)$ ,  $\underline{f}_n(x) \rightarrow \underline{f}(x) \leq f(x)$ .

За теоремою 5.3.2. Б.Леві

$$\int_{[a,b]} \overline{f}(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = I = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \int_{[a,b]} \underline{f}(x) d\mu.$$

Звідси,

$$\int_{[a,b]} |\overline{f_n}(x) - \underline{f_n}(x)| d\mu - \int_{[a,b]} (\overline{f_n}(x) - \underline{f_n}(x)) d\mu = 0.$$

Отже, майже скрізь  $\overline{f}(x) - \underline{f}(x) = 0$ , тобто  $\overline{f}(x) - \underline{f}(x) = f(x)$  і

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu = I. \blacksquare$$

□ **Приклад 5.5.2.** Оскільки обмеженість є достатньою умовою інтегровності за Лебегом на довільному відрізку та лише необхідною умовою інтегровності за Ріманом, легко навести приклади функцій, що інтегруються за Лебегом, але не інтегруються за Ріманом. Такою буде функція Діріхле на відрізку  $[0,1]$ :  $\varphi(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ .

Довільна функція  $f(x) \geq 0$ , для якої інтеграл Рімана  $\int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$  існує для кожного  $\varepsilon > 0$  і має скінченну границю  $I$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (тобто для функції  $f$  існує невластний інтеграл другого роду) інтегрується за Лебегом на  $[a,b]$  причому  $\int_{[a,b]} f(x) d\mu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ .

Інтеграл  $\int_{[a,b]} f(x) d\mu$  у випадку коли  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b |f(x)| dx = \infty$ , не існує за Лебегом, оскільки, згідно твердження 5.2.10., функції  $f(x)$  та  $|f(x)|$  інтегровні одночасно.

**5.6. Простори сумовних функцій  $L_p[a,b]$ ,  $1 \leq p < \infty$ .** Нехай на відрізку  $[a,b]$  задано  $\sigma$  – алгебру вимірних підмножин цього відрізка та  $\mu$  – це міра Лебега.

📁 **Означення 5.6.1.** Простором  $L_p[a,b]$  при  $1 \leq p < \infty$  називається сукупність класів еквівалентних функцій, для яких існує інтеграл  $\int_{[a,b]} |f(x)|^p d\mu$  (такі функції називаються сумовними з  $p$ -м степенем).

Зауважимо, що елементами цього простору є не окремі функції, а саме класи функцій, які майже скрізь рівні. Це пояснюється тим, що інтеграли від функцій одного класу дорівнюють одному й тому ж числу.

Метрика в просторі  $L_p[a,b]$  уводиться таким чином:  $\rho(f, g) = \sqrt[p]{\int_{[a,b]} |f(x) - g(x)|^p d\mu}$ . Покажемо, що аксіоми метрики дійсно виконуються. Очевидно, що  $\forall f, g \in L_p[a,b] \rho(f, g) = \rho(g, f)$ . Нерівність трикутника фактично є інтегральною нерівністю Мінковського:  $\forall f, g, \varphi \in L_p[a,b]$

$$\sqrt[p]{\int_{[a,b]} |f(x) - g(x)|^p d\mu} \leq \sqrt[p]{\int_{[a,b]} |f(x) - \varphi(x)|^p d\mu} + \sqrt[p]{\int_{[a,b]} |\varphi(x) - g(x)|^p d\mu},$$

тобто  $\rho(f, g) \leq \rho(f, \varphi) + \rho(\varphi, g)$ .

А для виконання аксіоми M1 як раз і потрібно ототожнити функції, які мають однакові інтеграли:

$$\rho(f, g) = \sqrt[p]{\int_{[a,b]} |f(x) - g(x)|^p d\mu} = 0 \Leftrightarrow \int_{[a,b]} |f(x) - g(x)|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ м. с. на } [a, b] \text{ (це випливає з наслідку 5.2.15.)}$$

Отже, простір сумовних функцій є метричним.

**Твердження 5.6.2.** Простори  $L_p[a, b]$  при  $1 \leq p < \infty$  – повні метричні простори.

Питання для самоконтролю:

- Дати означення інтеграла Лебега від простої функції.
- Сформулювати означення інтегрованої за Лебегом функції.
- Сформулювати основні властивості інтеграла Лебега.
- Сформулювати властивості інтеграла Лебега як функції множини.
- Встановити зв'язок між інтегралами Рімана та Лебега.
- Як визначається інтеграл Лебега на множині нескінченної міри?
- Дати означення та описати основні властивості простору  $L_p[a, b]$  при

$$1 \leq p < \infty.$$

✍ Вправа:

5.1. Обчислити інтеграли Лебега від простої функції:  $\int_{[0, \sqrt{6}]} (-1)^{[x^2]} d\mu$  ;  $\int_{[-2, 2]} [x|x|] d\mu$ .

5.2. Обчислити інтеграл Лебега  $\int_{[0, 1]} f(x) d\mu$ , якщо  $f(x) = \begin{cases} x^2, \sin x \in \mathbb{Q} \\ \sin^2 x, \sin x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ .

5.3. Обчислити інтеграл Лебега  $\int_{[0, +\infty)} 2^{-x} d\mu$ .

5.4. З'ясувати, чи належить функція  $f(x) = \frac{\cos x}{x}$  просторів  $L_1[0, 1]$ ?  $L_2[0, 1]$ ?

## Тема 6. Лінійні нормовані простори.

**6.1. Норма та нормовані простори.** На відміну від метрики, поняття норми вводиться лише на лінійних просторах, тобто на множинах, на яких задано операції додавання елементів та множення їх на скаляри. В залежності від того, на дійсні чи комплексні скаляри відбувається множення, розглядають дійсні або комплексні лінійні простори. Домовимося у подальшому розглядати лише дійсні простори.

📁 **Означення 6.1.1.** Нехай  $X$  – дійсний лінійний простір. Функція  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}^+$  називається *нормою*, якщо для неї виконуються наступні аксіоми: