

тобто $\rho(f, g) \leq \rho(f, \varphi) + \rho(\varphi, g)$.

А для виконання аксіоми M1 як раз і потрібно ототожнити функції, які мають однакові інтеграли:

$$\rho(f, g) = \sqrt[p]{\int_{[a,b]} |f(x) - g(x)|^p d\mu} = 0 \Leftrightarrow \int_{[a,b]} |f(x) - g(x)|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ м. с. на } [a, b] \text{ (це випливає з наслідку 5.2.15.)}$$

Отже, простір сумовних функцій є метричним.

Твердження 5.6.2. Простори $L_p[a, b]$ при $1 \leq p < \infty$ – повні метричні простори.

Питання для самоконтролю:

- Дати означення інтеграла Лебега від простої функції.
- Сформулювати означення інтегрованої за Лебегом функції.
- Сформулювати основні властивості інтеграла Лебега.
- Сформулювати властивості інтеграла Лебега як функції множини.
- Встановити зв'язок між інтегралами Рімана та Лебега.
- Як визначається інтеграл Лебега на множині нескінченної міри?
- Дати означення та описати основні властивості простору $L_p[a, b]$ при

$$1 \leq p < \infty.$$

✎ Вправа:

5.1. Обчислити інтеграли Лебега від простої функції: $\int_{[0, \sqrt{6}]} (-1)^{[x^2]} d\mu$; $\int_{[-2, 2]} [x|x|] d\mu$.

5.2. Обчислити інтеграл Лебега $\int_{[0, 1]} f(x) d\mu$, якщо $f(x) = \begin{cases} x^2, \sin x \in \mathbb{Q} \\ \sin^2 x, \sin x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

5.3. Обчислити інтеграл Лебега $\int_{[0, +\infty)} 2^{-x} d\mu$.

5.4. З'ясувати, чи належить функція $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ просторів $L_1[0, 1]$? $L_2[0, 1]$?

Тема 6. Лінійні нормовані простори.

6.1. Норма та нормовані простори. На відміну від метрики, поняття норми вводиться лише на лінійних просторах, тобто на множинах, на яких задано операції додавання елементів та множення їх на скаляри. В залежності від того, на дійсні чи комплексні скаляри відбувається множення, розглядають дійсні або комплексні лінійні простори. Домовимося у подальшому розглядати лише дійсні простори.

📁 **Означення 6.1.1.** Нехай X – дійсний лінійний простір. Функція $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ називається *нормою*, якщо для неї виконуються наступні аксіоми:

- Н1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
 Н2) $\forall x \in X \forall \lambda \in \mathbb{R} \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
 Н3) $\forall x, y \in X \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ – аксіома трикутника.

При цьому пара $(X, \|\cdot\|)$ називається *лінійним нормованим простором* або просто *нормованим простором*.

Зрозуміло, що норма є функцією, яка приймає дійсні невід'ємні значення, і фактично є узагальненням поняття довжини вектора. Зауважимо, що метричні та нормовані простори тісно пов'язані між собою.

Твердження 6.1.2. Кожний лінійний нормований простір є метричним, метрика в якому задається формулою $\rho(x, y) = \|x - y\|$.


Доведення. Перевіримо, що функція $\rho(x, y) = \|x - y\|$ дійсно задає метрику. Зрозуміло, що значення функції ρ дійсні та невід'ємні. Покажемо виконання аксіом метрики:

Аксіома М1: $\rho(x, y) = \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Аксіома М2: $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \rho(y, x)$.

Аксіома М3: $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$. ■

Отже, кожен нормований простір є метричним простором, тобто в нормованих просторах можна розглядати всі поняття та об'єкти, які уведено в метричних просторах. Зокрема, це поняття збіжності послідовності.

 **Означення 6.1.3.** Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів нормованого простору X збігається до елемента $x_0 \in X$, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$. При цьому елемент x_0 називається *границею послідовності* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.
що ця функція є неперервною.

Твердження 6.1.4. Норма є неперервною функцією, тобто якщо $x_n \rightarrow x_0$ в просторі X , тоді $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$.

Доведення. Спочатку отримаємо другу нерівність трикутника у нормованому просторі. Нехай $x, y \in X$, тоді $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, тобто $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Навпаки, $\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|x - y\| + \|x\|$, тобто $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$. З цих двох нерівностей випливає друга нерівність трикутника:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

З цієї нерівності й випливає неперервність норми: якщо $x_n \rightarrow x_0$, тоді $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$, але $|\|x_n\| - \|x_0\|| \leq \|x_n - x_0\|$, тобто $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$. ■

👉 **Зауваження 6.1.5.** Не кожен метричний простір є нормованим (для метрики лінійність простору не є необхідною). Але якщо у метричному просторі можна задати норму, з метрикою вона буде пов'язана співвідношенням $\|x\| = \rho(x, 0)$.

В якості прикладів нормованих просторів ми можемо розглядати відомі нам метричні простори. Зауважимо, що в кожному з цих просторів числові значення $\rho(x, y)$ та $\|x - y\|$ будуть однаковими.

□ **Приклад 6.1.6.**

1. Простір дійсних чисел \mathbb{R} , де норма задається формулою $\|x\| = |x|$.

2. Простір послідовностей l_p , $1 \leq p < \infty$ з нормою елемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

3. Простір обмежених послідовностей $l_{\infty} = m < \infty$ з нормою елемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$

$$\|x\| = \sup_i |x_i|.$$

4. Арифметичний m -вимірний простір \mathbb{R}_p^m , $1 \leq p \leq \infty$ з нормою елемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ в залежності від параметра p :

$$\text{при } 1 \leq p < \infty \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p},$$

$$\text{при } p = \infty \quad \|x\| = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|.$$

5. Простір $C[a, b]$ з нормою функції $x(t)$

$$\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|.$$

6. Простори неперервних функцій $C_1[a, b], C_2[a, b]$ з нормами

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt,$$


$$\|x\| = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt},$$


відповідно.

7. Простори сумовних функцій $L_p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$ з нормою


$$\|x\| = \left(\int_{[a, b]} |x(t)|^p d\mu \right)^{1/p}.$$


Зупинимось окремо на понятті підпростору нормованого простору. Підпростором метричного простору ми називали будь-яку підмножину метричного простору з тією ж метрикою. В нормованих просторах цього замало. Підпростір має не лише сам утворювати лінійний простір, але й бути замкненим.

 **Означення 6.1.7.** Лінійним підпростором нормованого простору називається підмножина, яка сама утворює лінійний простір, тобто разом з двома елементами містить також їх лінійну комбінацію.

 **Означення 6.1.8.** Підпростором нормованого простору називається замкнений лінійний підпростір.

Серед нормованих просторів виділимо клас повних нормованих просторів, тобто таких, в яких будь-яка фундаментальна послідовність збігається.

 **Вправа.** Запишіть означення фундаментальної послідовності у нормованому просторі.


 **Означення 6.1.9.** Повний лінійний нормований простір називається банаховим простором.

Ця назва – на честь видатного математика Стефана Банаха, який започаткував дослідження таких просторів та, без перебільшення, став одним із засновників сучасного функціонального аналізу. Про його яскраве життя можна прочитати тут:

<http://history.lviv.ua/index.php/ru/znamenitye-lvovyane/69-stefan-banakh>

Зрозуміло, що прикладами банахових просторів будуть простори $\mathbb{R}, \mathbb{R}^m, l_p, m, C[a, b], L_p[a, b]$ з прикладу 6.1.6.

6.2. Евклідові та гільбертові простори. На лінійному просторі можна також задати операцію скалярного добутку, що надасть можливість розглянути ще один клас просторів.

 **Означення 6.2.1.** Нехай X – дійсний лінійний простір. Функція $(\cdot, \cdot): X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ називається *скалярним добутком*, якщо для неї виконуються наступні аксіоми:

- C1) $(x, x) \geq 0; (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
- C2) $\forall x, y \in X \quad (x, y) = (y, x)$ – аксіома симетрії;
- C3) $\forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda x, y) = \lambda(x, y);$
- C4) $\forall x, y, z \in X \quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z).$

При цьому простір з заданим на ньому скалярним добутком, називається *евклідовим простором*.

Поняття скалярного добутку та евклідового простору вивчалось у курсі лінійної алгебри та геометрії, тому зупинимось лише на основних результатах.

Твердження 6.2.2. Кожний евклідів простір є нормованим простором, в якому норма задається формулою $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

✎ **Вправа.** Доведіть твердження 6.2.2. самостійно. Для цього знадобиться відома нерівність Коші-Буняковського $|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$.

Зрозуміло, що зворотнє твердження не є вірним, тобто не на кожному нормованому просторі можна задати скалярний добуток, який би узгоджувався з нормою за формулою $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Критерієм такої можливості є тотожність паралелограма, а саме наступне твердження.

Теорема 6.2.3. (Характеристична властивість евклідових просторів)
Для того, щоб нормований простір був евклідовим, необхідно та достатньо, щоб для довільних елементів x, y з цього простору виконувалася тотожність паралелограма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (6.1)$$

При цьому скалярний добуток буде задаватися формулою

$$(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2). \quad (6.2)$$

Ця теорема дає можливість перевірити, в якому просторі можна задати скалярний добуток.

□ **Приклад 6.2.4.** Розглянемо простори l_p , $1 \leq p < \infty$ та з'ясуємо, при яких значеннях p норма задовольняє тотожність (6.1). Нехай $x = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$, $y = (0, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$, тоді $x + y = (1, 1, 0, \dots, 0, \dots)$, $y = (1, -1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$, тобто

$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} = 2 \cdot 2^{\frac{2}{p}}$; $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 2$. Отже, рівність (6.1) перетворюється на $2 \cdot 2^{\frac{2}{p}} = 2 \cdot 2$, яка виконується лише при $p = 2$. Це означає, що жодний простір класу l_p при $p \neq 2$ не може бути евклідовим. Перевіримо, що у l_2 можна задати скалярний добуток. Нехай $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots)$, тоді

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2 = 2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \right) = \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Тотожність (6.1) виконується, отже, скалярний добуток у просторі l_2 можна задати формулою (6.2):

$$(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2 \right) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot y_i$$

Записуючи замість рядів скінченні суми, легко показати, що серед просторів \mathbb{R}_p^m , $1 \leq p < \infty$ евклідовим буде лише простір \mathbb{R}_2^m зі скалярним добутком елементів $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^m x_i \cdot y_i.$$

□ **Приклад 6.2.5.** Розглянемо простір неперервних функцій $C[0,1]$. Нехай $x(t) = t$, $y(t) = t^2$. Тоді $\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |t| = 1$, $\|y\| = \max_{t \in [0,1]} |t^2| = 1$, $\|x + y\| = \max_{t \in [0,1]} |t + t^2| = 2$, $\|x - y\| = \max_{t \in [0,1]} |t - t^2| = \frac{1}{4}$. Це означає, що $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \frac{65}{16} \neq 4 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, тобто простір $C[0,1]$ не є евклідовим.

□ **Приклад 6.2.6.** Розглянемо простір $C_2[a, b]$ та покажемо, що для довільних неперервних функцій $x(t)$, $y(t)$ виконується тотожність (6.1):

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \int_a^b |x(t) + y(t)|^2 dt + \int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt = \\ &= 2 \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt + \int_a^b |y(t)|^2 dt \right) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Отже, простір $C_2[a, b]$ є евклідовим зі скалярним добутком

$$\begin{aligned} (x, y) &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{4} \left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^2 dt - \int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right) = \\ &= \int_a^b x(t) \cdot y(t) dt. \end{aligned}$$

✎ **Вправа.** Перевірити, що серед просторів $L_p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$ евклідовим буде лише $L_2[a, b]$ зі скалярним добутком

$$(x, y) = \int_{[a,b]} x(t) \cdot y(t) d\mu.$$

Означення 6.2.7. Лінійний простір називається *нескінченновимірним*, якщо в ньому для довільного $n \in \mathbb{N}$ існують n лінійно незалежних елементів.

В протилежному випадку простір називається *скінченновимірним*. Зауважимо, що серед просторів, розглянутих у прикладі 6.1.5. скінченновимірним буде лише простір \mathbb{R}_p^m (цей факт добре відомий з курсу лінійної алгебри). Решта просторів мають нескінченну вимірність. Так, у просторах l_p , $1 \leq p < \infty$ систему лінійно незалежних елементів будуть утворювати послідовності $e_n = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots \right)$. А у просторах неперервних функцій та $L_p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$ лінійно незалежними будуть степеневі функції $x_n(t) = t^n$.

Означення 6.2.8. Повний нескінченновимірний евклідов простір називається *гільбертовим простором*.

Серед розглянутих вище евклідових просторів $l_2, \mathbb{R}_2^m, C_2[a, b], L_2[a, b]$ простір \mathbb{R}_2^m не є нескінченновимірним, а простір $C_2[a, b]$ не є повним, отже прикладами гільбертових просторів є простори $l_2, \mathbb{R}_2^m, L_2[a, b]$. Насправді, існує теорема про те, що будь-які сепарабельні гільбертові простори ізоморфні між собою, тобто між ними можна встановити таку бієкцію, яка буде зберігати операції додавання, множення на скаляр та скалярного добутку. Фактично, це означає, що з точністю до ізоморфізму існує лише один сепарабельний гільбертів простір. В якості такого простору найчастіше розглядають саме простір l_2 як «координатну» реалізацію гільбертового простору.

В гільбертових просторах особливого значення набуває поняття ортогональності.

Означення 6.2.9. Два елемента $x, y \in H$ називаються *ортогональними* ($x \perp y$), якщо $(x, y) = 0$.

Означення 6.2.10. Елемент $x \in H$ називається *ортогональним* множині $M \subset H$, якщо $(x, y) = 0$ для всіх $y \in M$.

Означення 6.2.11. *Ортогональним доповненням* до множини M називається множина елементів простору, ортогональних множині M :

$$M^\perp = \{x \in H: (x, y) = 0 \ \forall y \in M\}.$$

Без доведення наведемо корисну теорему, яка стосується ортогональних доповнень.

Теорема 6.2.12. [7, с.185] Якщо M – (замкнений!) лінійний підпростір гільбертового простору H , тоді будь-який елемент $h \in H$ однозначно подається у вигляді $h = y + x$, де $y \in M$, $x \in M^\perp$.

Це означає можливість подання $H = M \oplus M^\perp$.

Питання для самоконтролю:

- Дати означення норми.
- Встановити зв'язок між метричними та нормованими просторами.
- Дати означення збіжної послідовності у нормованому просторі.
- Дати означення та навести приклади банахових просторів.
- Дати означення евклідових та гільбертових просторів.
- Встановити зв'язок між різними класами просторів.
- Навести приклади гільбертових просторів.

Вправи:

6.1. Чи буде нормою на множині неперервних функцій $C[a, b]$ функція $\varphi(x) = \max_{a \leq t \leq \frac{a+b}{2}} |x(t)|$?

6.2. Дослідити послідовність $x_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, & t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & t \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$ на збіжність у


просторі $L_2[0, 1]$.

6.3. Нехай H – гільбертів простір, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$. Довести, що з умови $(x_n, y_n) \rightarrow 1$ випливає умова $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$, і з умови $\|x_n + y_n\| \rightarrow 2$ випливає умова $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$.

Тема 7. Лінійні неперервні оператори.

7.1. Означення та властивості лінійних неперервних операторів.

Одним із найважливіших класів відображень нормованих просторів є клас лінійних неперервних операторів.

 **Означення 7.1.1.** Нехай X, Y – лінійні нормовані простори. Відображення $A: X \rightarrow Y$ називається *лінійним оператором*, якщо $\forall x, y \in X$ та $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконується умова $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$.

Прикладами лінійних операторів є наступні відображення:

1. $A: l_2 \rightarrow l_2$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, $Ax = (a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_i x_i, \dots)$, де $\lim_n a_n = 0$.
2. $A: C[a; b] \rightarrow C[a; b]$, $(Ax)(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds$, де $K(t, s) \in C[a; b] \times [a; b]$. Лінійність такого відображення випливає з властивостей визначеного інтеграла.

Нелінійними будуть, наприклад, наступні відображення $A: l_2 \rightarrow l_2$, $Ax = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_i^2, \dots)$, або $A: C[a; b] \rightarrow C[a; b]$, $(Ax)(t) = x(t) + 1$.

Якщо не сказано протилежне, будемо вважати, що $D(A) = X$, тобто що оператор задано на всьому просторі. Нагадаємо, що означення області визначення та області значень довільного відображення наведені в п. 1.1.

Зауважимо, що з лінійності оператора випливає, що $A0 = A(x - x) = Ax - Ax = 0$. Цю умову можна вважати необхідною умовою лінійності оператора.

Означення 7.1.2. Оператор A називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо він є неперервним відображенням, тобто якщо

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X: x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow Ax_n \rightarrow Ax_0.$$

Твердження 7.1.3. Якщо лінійний оператор A неперервний в одній точці, він буде неперервним на всьому просторі.

Доведення. Нехай A неперервний в деякій точці $x_0 \in X$. Покажемо, що він буде неперервним у довільній точці $x \neq x_0$. Візьмемо довільну послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X: x_n \rightarrow x$. Тоді послідовність $x_n - x + x_0 \rightarrow x_0$, тобто $A(x_n - x + x_0) \rightarrow A(x_0)$. Але в силу лінійності оператора, з умови $Ax_n - Ax + Ax_0 \rightarrow A(x_0)$ випливає, що $Ax_n \rightarrow Ax$, тобто що оператор неперервний в точці x . ■

Якщо оператор неперервний на всьому просторі, будемо називати його просто *неперервним*.

Зрозуміло, що для неперервних операторів виконується умова

$$A\left(\lim_n x_n\right) = \lim_n Ax_n.$$

Означення 7.1.4. Лінійний оператор A називається *обмеженим*, якщо $\exists c > 0 \quad \forall x \in X \quad \|Ax\| \leq c\|x\|$.

Теорема 7.1.5. Лінійний оператор є неперервним тоді та тільки тоді, коли він обмежений.

Доведення. Необхідність. Припустимо супротивне: оператор неперервний, але не є обмеженим. Це означає, що $\forall c > 0 \quad \exists x \in X: \|Ax\| > c\|x\|$. В якості c будемо вибирати натуральні числа n , тобто $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in X: \|Ax_n\| > n\|x_n\|$. Побудуємо тепер послідовність $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. Зрозуміло, що $\|y_n\| = \left\|\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right\| = \frac{1}{n}$, тобто $y_n \rightarrow 0$. Оскільки оператор A неперервний, $Ay_n \rightarrow A0 = 0$, тобто $\|Ay_n\| \rightarrow 0$. Але це заперечує тому, що $\|Ay_n\| = \left\|A\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right\| = \frac{\|Ax_n\|}{n\|x_n\|} > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1$.

Достатність. Нехай лінійний оператор обмежений, тобто $\exists c > 0 \quad \forall x \in X \quad \|Ax\| \leq c\|x\|$. Це означає, що якщо $x_n \rightarrow 0$, тоді $\|Ax_n\| \leq c\|x_n\|$, тобто $Ax_n \rightarrow 0 = A0$. Отже, оператор A неперервний в нулі, а значить, і на всьому просторі. ■

Ця теорема дає можливість перевіряти обмеженість лінійного оператора замість його неперервності, що інколи буває значно простіше.

Означення 7.1.6. Нормою лінійного неперервного оператора $A: X \rightarrow Y$ називається число

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \quad (7.1)$$

З цього означення випливає, що

$$\forall x \in X \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|. \quad (7.2)$$

Більше того, $\|A\|$ – це інфімум констант c , для яких нерівність $\|Ax\| \leq c\|x\|$ виконується при всіх $x \in X$. Дійсно, якщо припустити, що існує таке число $\varepsilon > 0$, що нерівність $\|Ax\| \leq (\|A\| - \varepsilon) \cdot \|x\|$ виконується при всіх $x \in X$, тоді при $x \neq 0$ $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| - \varepsilon$, що б суперечувало тому, що $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. Таким чином, можна дати інше означення норми лінійного неперервного оператора.

Означення 7.1.7. Нормою лінійного неперервного оператора $A: X \rightarrow Y$ називається число

$$\|A\| = \inf\{c > 0: \forall x \in X \quad \|Ax\| \leq c \cdot \|x\|\}.$$

Приклад 7.1.8. Перевірити лінійність, неперервність оператора $A: X \rightarrow X$ та знайти його норму.

$$а) A: l_2 \rightarrow l_2, x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots), Ax = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \dots, \frac{x_i}{2^i}, \dots\right).$$

По-перше, доведемо, що $A: l_2 \rightarrow l_2$, тобто, якщо $x \in l_2$, то $Ax \in l_2$. Для цього треба показати, що ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \left|\frac{x_i}{2^i}\right|^2$ збігається. Дійсно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|\frac{x_i}{2^i}\right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \cdot \frac{1}{4^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty,$$

тому що $x \in l_2$. Отже, $\forall x \in l_2 \quad Ax \in l_2$.

Перевіримо тепер лінійність цього оператора за означенням: нехай $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) \in l_2$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots) \in l_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тоді

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \left(\frac{\alpha x_1 + \beta y_1}{2}, \frac{\alpha x_2 + \beta y_2}{2^2}, \dots, \frac{\alpha x_i + \beta y_i}{2^i}, \dots\right) = \alpha \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \dots, \frac{x_i}{2^i}, \dots\right) + \\ &+ \beta \left(\frac{y_1}{2}, \frac{y_2}{2^2}, \dots, \frac{y_i}{2^i}, \dots\right) = \alpha Ax + \beta Ay, \end{aligned}$$

тобто оператор A – лінійний, отже, замість неперервності можна перевіряти його обмеженість. Нехай $x \in l_2$, тоді

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left|\frac{x_i}{2^i}\right|^2} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2} = \frac{1}{2} \|x\|,$$

тобто $\|Ax\| \leq \frac{1}{2} \|x\|$, що означає обмеженість оператора та дає оцінку для його норми : $\|A\| \leq \frac{1}{2}$ (ця оцінка випливає з означення 7.1.7.).

З нерівності (7.2) випливає що для лінійного обмеженого оператора A вірна нерівність

$$\forall x \in l_2 \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|.$$

Виберемо $x_0 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$. Для нього також

$$\|Ax_0\| \leq \|A\| \cdot \|x_0\|.$$

Але $\|x_0\| = 1$, $Ax_0 = \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \dots\right)$ тобто $\|Ax_0\| = \frac{1}{2}$, значить, $\frac{1}{2} \leq \|A\| \cdot 1$.

Таким чином, одночасно виконуються дві нерівності: $\frac{1}{2} \leq \|A\|$ та $\frac{1}{2} \geq \|A\|$, тобто $\|A\| = \frac{1}{2}$.

$$\text{б) } A: C[0,1] \rightarrow C[0,1], (Ax)(t) = \int_0^1 t \cdot s \cdot x(s) ds.$$

Якщо $x(s)$ – неперервна на $[0,1]$ функція, тоді $s \cdot x(s)$ також неперервна, тобто інтегровна на відрізку $[0,1]$. Значить, функція $(Ax)(t) = t \cdot \int_0^1 s \cdot x(s) ds$ також неперервна на $[0,1]$, тобто належить $C[0,1]$. Отже, оператор A дійсно діє у просторі $C[0,1]$. Перевіримо його лінійність: нехай $x(t), y(t) \in C[0,1]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тоді

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \int_0^1 t \cdot s \cdot (\alpha x(s) + \beta y(s)) ds = \alpha \int_0^1 t s x(s) ds + \beta \int_0^1 t s y(s) ds = \\ &= \alpha Ax + \beta Ay, \end{aligned}$$

тобто оператор A – лінійний.

Замість доведення неперервності оператора A доведемо його обмеженість: нехай $x(t) \in C[0,1]$, тоді

$$\|Ax(t)\| = \max_{t \in [0,1]} \left| \int_0^1 t \cdot s \cdot x(s) ds \right| = \left| \int_0^1 s \cdot x(s) ds \right| \leq \int_0^1 s \max_{t \in [0,1]} |x(t)| ds =$$

$$= \|x\| \int_0^1 s ds = \frac{1}{2} \|x\|,$$

тобто оператор A обмежений, та $\|A\| \leq \frac{1}{2}$.

Для оператора A виконується нерівність $\forall x \in C[0,1] \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

Виберемо $x_0(t) \equiv 1 \in C[0,1]$, тоді $\|(Ax_0)(t)\| \leq \|A\| \cdot \|x_0(t)\|$.

Але $\|x_0(t)\| = \max_{t \in [0,1]} |x_0(t)| = 1$, $(Ax_0)(t) = \int_0^1 t \cdot s ds = t \cdot \int_0^1 s ds = \frac{1}{2} t$,
 $\|Ax_0(t)\| = \max_{t \in [0,1]} \frac{1}{2} t = \frac{1}{2}$. Отже, $\frac{1}{2} \leq \|A\| \cdot 1$.

З цієї нерівності та з того, що $\|A\| \leq \frac{1}{2}$, випливає що $\|A\| = \frac{1}{2}$.

7.2. Простір лінійних неперервних операторів. Сукупність лінійних неперервних (обмежених) операторів, що діють між просторами X, Y , будемо позначати символом $\mathcal{L}(X, Y)$. Якщо $X = Y$, тоді $\mathcal{L}(X, X) = \mathcal{L}(X)$. На цій множині задамо лінійні операції додавання та множення на дійсний скаляр. Для довільних $x \in X$ та $\alpha \in \mathbb{R}$ покладемо

$$(A + B)x = Ax + Bx, (\alpha A)x = \alpha Ax.$$

Зрозуміло, що оскільки Y – лінійний простір, аксіоми лінійного простору будуть виконуватися і для заданих операцій. В якості нульового елемента множини $\mathcal{L}(X, Y)$ виберемо нульовий оператор $0: x \rightarrow 0$, а в якості протилежного елемента – оператор $(-A)x = -Ax$. Отже, множина $\mathcal{L}(X, Y)$ буде утворювати лінійний простір.

✎ **Вправа.** Перевірити виконання аксіом лінійного простору для заданих операцій додавання та множення на скаляр.

Твердження 7.2.1. Норма лінійного оператора (7.1) є нормою на множині $\mathcal{L}(X, Y)$, тобто множина $\mathcal{L}(X, Y)$ є лінійним нормованим простором.

Доведення. Перевіримо виконання аксіом норми.

$$H1) \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \Leftrightarrow \forall x \quad \|Ax\| = 0 \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow A = 0;$$

$$H2) \quad \forall A \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(\lambda A)x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda Ax\|}{\|x\|} = \\ = |\lambda| \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \|A\|;$$

$$H3) \quad \forall A, B \quad \|A + B\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|Ax\| + \|Bx\|}{\|x\|} \right) \leq \\ \leq \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right) + \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|Bx\|}{\|x\|} \right) = \|A\| + \|B\|.$$

Отже, аксіоми Н1-Н3 виконуються, і формула (7.1) перетворює множину $\mathcal{L}(X, Y)$ на лінійний простір. ■

Зауважимо, що простір $\mathcal{L}(X, Y)$ при виконанні певних умов буде повним. А саме, має місце наступний результат.

Теорема 7.2.2. Якщо простір Y – банаховий, тоді простір $\mathcal{L}(X, Y)$ також банаховий.

Доведення. Нехай $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ – довільна фундаментальна послідовність. Зафіксуємо довільний елемент $x \in X$ та покажемо, що послідовність $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ буде фундаментальною у просторі Y . Дійсно, фундаментальність послідовності операторів означає, що $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0: \forall n, m \geq n_0 \|A_n - A_m\| < \varepsilon$. Тоді з нерівності (7.2) випливає, що $\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\|$, тобто послідовність $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, а, отже, і збігається у просторі Y . Тобто для довільного $x \in X$ існує границя $\lim_n A_n x$, ми позначимо через Ax . Таким чином, ми означили оператор $A: X \rightarrow Y$, що діє за правилом $Ax = \lim_n A_n x$.

Завдяки єдності границі, оператор задано коректно. Покажемо, що він лінійний. Нехай $x, y \in X$ та $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тоді

$$A(\alpha x + \beta y) = \lim_n A_n(\alpha x + \beta y) = \lim_n (\alpha A_n x + \beta A_n y) = \alpha \lim_n A_n x + \beta \lim_n A_n y = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Перевіримо тепер обмеженість оператора A . Оскільки послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{L}(X, Y)$ фундаментальна, вона обмежена (див. твердження 1.10.2.), тобто існує така константа $c > 0$, що для довільного n $\|A_n\| \leq c$. Це означає, що при будь-якому $x \in X$ та всіх n виконується нерівність $\|A_n x\| \leq c \|x\|$. Завдяки неперервності норми (див. твердження 6.1.4.), можемо перейти в останній нерівності до границі за n : $\lim_n \|A_n x\| = \|Ax\| \leq c \|x\|$. Ця умова означає обмеженість (неперервність) побудованого оператора, тобто ми можемо стверджувати, що $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Покажемо тепер, що $A_n \rightarrow A$ в просторі $\mathcal{L}(X, Y)$, тобто що $\|A_n - A\| \rightarrow 0$. В умові фундаментальності послідовності $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0: \forall n, m \geq n_0 \|A_n - A_m\| < \varepsilon$ перейдемо до границі за n :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0: \forall n \geq n_0 \|A_n - A\| < \varepsilon,$$

що й означає збіжність $A_n \rightarrow A$. Отже, будь-яка фундаментальна послідовність операторів з $\mathcal{L}(X, Y)$ збігається, тобто простір $\mathcal{L}(X, Y)$ повний. ■

Оскільки простір $\mathcal{L}(X, Y)$, в ньому можна розглянути поняття збіжності послідовності лінійних неперервних операторів. Збіжність за нормою цього простору називають рівномірною.

Означення 7.2.3. Говорять, що послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ *рівномірно збігається* до оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$.

□ **Приклад 7.2.4.** Дослідимо послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(l_2)$ на рівномірну збіжність, якщо

$x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, $A_n x = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots \right)$. Зрозуміло, що при $n \rightarrow \infty$ $A_n x \rightarrow (0, 0, \dots, 0, \dots)$, тобто послідовність збігається до нульового оператора. Знайдемо

$$\|A_n - 0\| = \|A_n\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A_n x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(0, 0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\|}{\|(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)\|}.$$

Оскільки $\|(0, 0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\| \leq \|(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)\|$, $\|A_n\| \leq 1$. Але при $x = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, \dots \right)$ $\|A_n x\| = \|x\| = 1$, тобто $\|A_n\| = 1$, отже, рівномірно послідовність не збігається.

Розглянемо тепер іншу послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(l_2)$, де $A_n x = \left(\frac{x_n}{n}, \frac{x_{n+1}}{n+1}, \frac{x_{n+2}}{n+2}, \dots \right)$. Оскільки $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) \in l_2$, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ збігається, тобто при $n \rightarrow \infty$ $x_n \rightarrow 0$, отже, $A_n x \rightarrow 0$, тобто послідовність збігається до нульового оператора. Знайдемо

$$\|A_n - 0\| = \|A_n\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A_n x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\left\| \left(\frac{x_n}{n}, \frac{x_{n+1}}{n+1}, \frac{x_{n+2}}{n+2}, \dots \right) \right\|}{\|(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)\|}.$$

Оскільки $\left\| \left(\frac{x_n}{n}, \frac{x_{n+1}}{n+1}, \frac{x_{n+2}}{n+2}, \dots \right) \right\| \leq \frac{1}{n} \|(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\| \leq \frac{1}{n} \|(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)\|$, $\|A_n\| \leq \frac{1}{n}$. Але при $x = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, \dots \right)$ $\|A_n x\| = \frac{1}{n}$, тобто $\|A_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, отже, послідовність операторів збігається рівномірно.

Зауважимо, що разом з рівномірною можна розглядати «поточкову» збіжність послідовності лінійних неперервних операторів, тобто збіжність на кожному елементі $x \in X$.

📁 **Означення 7.2.5.** Говорять, що послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ *сильно (поточно) збігається* до оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, якщо

$$\forall x \in X \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x - A x\| = 0.$$

Оскільки $\forall x \in X \quad \|A_n x - A x\| \leq \|A_n - A\| \cdot \|x\|$, з рівномірної збіжності послідовності випливає сильна збіжність. Це дає нам можливість зробити висновок, що друга послідовність з прикладу 7.2.4. збігається також сильно.

Розглянемо тепер першу послідовність $A_n x = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots \right)$.

Оскільки $\|A_n x\| = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2}$ – це залишок збіжного числового ряду, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| = 0 \quad \forall x \in X$, тобто послідовність збігається до нульового оператора сильно, але нерівномірно.

□ **Приклад 7.2.6.** Розглянемо ще одну послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(l_2)$, де $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, $A_n x = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, x_1, 0, 0, \dots \right)$. Знову при $n \rightarrow \infty$ $A_n x \rightarrow (0, 0, \dots, 0, \dots)$, тобто послідовність збігається до нульового оператора. Але $\|A_n x\| = |x_1|$, тобто не при кожному $x \in l_2$ $\|A_n x\| \rightarrow 0$. В якості такого x можна вибрати елемент $x = (1, 0, \dots, 0, \dots)$, для якого $\|A_n x\| = 1$. Отже, розглянута послідовність операторів не збігається сильно та не збігається рівномірно.

Питання для самоконтролю:

- Який оператор називається лінійним?
- Дати означення неперервного та обмеженого оператора. Як пов'язані між собою ці поняття для лінійних операторів?
- Дати означення норми лінійного неперервного оператора.
- Якою нормою наділений простір лінійних неперервних операторів?
- Дати означення рівномірної збіжності послідовності лінійних неперервних операторів.

Вправи:

7.1. Довести, що ядро лінійного неперервного оператора завжди замкнене.

7.2. Нехай $A: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$. $Ax(t) = p(t)x(t)$. Для яких функцій $p(t)$ оператор A неперервний? Знайдіть його норму, якщо він неперервний.

7.3. Дослідити послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(L_2[0, 1])$ операторів на рівномірну та сильну збіжності, якщо $(A_n x)(t) = \int_{[0, 1]} t^n s^n x(s) d\mu$.

Тема 8. Оборотно́ість лінійних неперервних операторів.

Існування оберненого відображення – це питання, на якому ґрунтується можливість розв'язання різноманітних рівнянь (диференціальних, інтегральних, тощо). Розглянемо це питання для лінійних неперервних операторів.

8.1. Оборотно́ість лінійних неперервних операторів.

📁 **Означення 8.1.1.** Нехай $A: X \rightarrow Y, B: Y \rightarrow Z$. Добутком операторів B та A називається оператор $BA: X \rightarrow Z$ за правилом $(BA)x = B(Ax)$.

✍ **Вправа.** Показати, що якщо B та A – лінійні оператори, тоді їх добуток також буде лінійним оператором.

👆 **Зауваження 8.1.2.** Зауважимо, крім того, що добуток двох неперервних операторів є неперервним оператором як композиція неперервних відображень. Отже, якщо $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$, тоді $BA \in \mathcal{L}(X, Z)$. Неперервність добутку можна встановити іншим чином: для довільного $x \in X$

$$\|(BA)x\| \leq \|B\| \|Ax\| \leq \|B\| \|A\| \|x\|.$$

З цього випливає, по-перше, що оператор BA є обмеженим (неперервним), та, по-друге, оцінка $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$.

Зрозуміло, що операція множення не є комутативною, тобто у загальному випадку $BA \neq AB$. У просторі $\mathcal{L}(X)$ будемо розглядати одиничний (тотожний) оператор $I: x \rightarrow x$.

📁 **Означення 8.1.3.** Алгебраїчним оберненим до оператора $A: X \rightarrow Y$ називається оператор $A^{-1}: Y \rightarrow X$, який здійснює обернене відображення, тобто такий, що $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Відомо, що для існування оберненого відображення, заданого на множині $R(A)$ (див. означення 1.1.3.), необхідно та достатньо, щоб оператор A був ін'єкцією.

Твердження 8.1.4. Лінійний оператор $A: X \rightarrow Y$ є ін'єктивним (у нього існує алгебраїчний обернений) тоді та тільки тоді, коли його ядро $\text{Ker } A = \{x \in X: Ax = 0\}$ нульове, тобто $\text{Ker } A = \{0\}$.

Доведення. Зауважимо, що для лінійних операторів $A0 = 0$, тобто $0 \in \text{Ker } A$.

Необхідність. Нехай A – ін'єкція, тоді якщо $x \neq 0$, тоді й $Ax \neq A0 = 0$, тобто жоден ненульовий елемент не може належати ядру, значить, ядро нульове.

Достатність. Нехай $\text{Ker } A = \{0\}$. Розглянемо $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$. Тоді $x_1 - x_2 \neq 0$, тобто $x_1 - x_2 \notin \text{Ker } A$, що означає, що $A(x_1 - x_2) \neq 0$ або $Ax_1 \neq Ax_2$ і оператор A є ін'єктивним. ■

Отже, нульове ядро є критерієм існування алгебраїчного оберненого відображення A^{-1} . Навіть коли оператор має алгебраїчний обернений, він може бути заданий лише на множині значень оператора A , а не на всьому просторі Y . Згідно цього, виникає нове поняття.

📁 **Означення 8.1.5.** Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ називається *оборотним*, якщо він має алгебраїчний обернений оператор A^{-1} , який задано на всьому просторі Y . При цьому оператор A^{-1} називається *оберненим* оператором.

Оскільки існування алгебраїчного оберненого оператора рівносильне ін'єктивності, а задання оберненого відображення на всьому просторі Y – сюр'єктивності оператора A , оборотність оператора рівносильна його бієктивності. Тобто можна говорити, що оператор називається оборотним, якщо він є бієктивним, або якщо $\text{Ker } A = \{0\}$ та $R(A) = Y$.

Твердження 8.1.6. Оператор, обернений до лінійного, лінійний. Інакше кажучи, якщо A – лінійний оборотний оператор, тоді обернений оператор A^{-1} також лінійний.

Доведення. Нехай $A: X \rightarrow Y$ та $\forall x_1, x_2 \in X$ та $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконується умова $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2$. Якщо позначити $A x_1 = y_1$, $A x_2 = y_2$, тоді $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$ або


$$\alpha x_1 + \beta x_2 = A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2). \quad (8.1)$$

Оскільки $A x_1 = y_1$, $A x_2 = y_2$, тоді $x_1 = A^{-1} y_1$, $x_2 = A^{-1} y_2$. Домножимо ці рівності на константи $\alpha x_1 = \alpha A^{-1} y_1$, $\beta x_2 = \beta A^{-1} y_2$ та додамо почленно:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha A^{-1} y_1 + \beta A^{-1} y_2. \quad (8.2)$$

Порівнюючи праві частини виразів (8.1) та (8.2), отримаємо умову лінійності оператора A^{-1} : $A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^{-1} y_1 + \beta A^{-1} y_2$. ■

Отже, властивість лінійності зберігається для оберненого оператора. Натомість неперервність (обмеженість) оберненого оператора має місце не завжди.

 **Означення 8.1.7.** Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ називається *неперервно оборотним*, якщо він оборотний та обернений оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ є неперервним, тобто якщо $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Твердження 8.1.8. (критерій неперервної оборотності оператора) Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ з $R(A) = Y$ неперервно оборотний тоді та тільки тоді, коли $\exists m > 0 \forall x \in X \quad \|Ax\| \geq m\|x\|$.

Доведення. Необхідність. Нехай існує обернений оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. Тоді $\forall u \in Y \quad \|A^{-1}u\| \leq \|A^{-1}\|\|u\|$. Оскільки A – бієкція, для кожного $u \in Y$ існує єдиний елемент $x \in X$, що $u = Ax$. Підставимо цей елемент в останню нерівність та отримаємо потрібну умову: $\|A^{-1}Ax\| \leq \|A^{-1}\|\|Ax\|$ або $\|A^{-1}\|^{-1}\|x\| \leq \|Ax\|$ з константою $m = \|A^{-1}\|^{-1}$.

Достатність. З умови $\|Ax\| \geq m\|x\|$ випливає, що при $Ax = 0$ $x = 0$, тобто ядро оператора A – нульове. Отже, існує алгебраїчний обернений оператор A^{-1} . Оскільки $R(A) = Y$, оператор A – оборотний. Підставимо в умову твердження $x = A^{-1}u$: $\|AA^{-1}u\| \geq m\|A^{-1}u\|$ або $\frac{1}{m}\|u\| \geq \|A^{-1}u\|$, що означає неперервність оберненого оператора та доводить достатність твердження. ■

8.2. Теорема Банаха про обернений оператор. Зауважимо, що поняття оборотності та неперервної оборотності не еквівалентні. Обернений оператор

може існувати. Але не бути неперервним. Але є клас просторів, в яких ці два поняття збігаються, тобто оборотність оператора гарантує його неперервну оборотність. Відповідний результат встановлює наступна теорема.

Теорема 8.2.1. (теорема Банаха про обернений оператор) Нехай X, Y – банахові простори. Якщо оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ – бієктивним, він неперервно оборотний. Інакше кажучи, з оборотності лінійного неперервного оператора, який діє між банаховими просторами, випливає його неперервна оборотність.

Доведення. З умови теореми випливає існування оберненого оператора $A^{-1}: Y \rightarrow X$. Необхідно довести лише його обмеженість. Розглянемо множини $Y_n = \{y \in Y: \|A^{-1}y\| \leq n\|y\|\}$. Зрозуміло, що $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, оскільки кожен ненульовий елемент $y \in Y$ потрапляє в деяку множину Y_n , де в якості n вибирається найменше натуральне число, яке перебільшує $\|A^{-1}y\|/\|y\|$. Оскільки простір Y – банаховий (повний), з теореми 2.3.1. (Бера) випливає, що принаймні одна з множин Y_n є всюди щільною в Y . Позначимо її через Y_m . Отже, Y_m – всюди щільна в Y .

Виберемо $y \in Y$. Нехай $\|y\| = r$. Оскільки множина $B_r[0] \cap Y_m$ є всюди щільною підмножиною кулі $B_r[0]$, в цій множині знайдеться такий елемент y_1 ($y_1 \in Y_m$, $\|y_1\| \leq r$), що $\|y - y_1\| < \frac{r}{2}$. Множина $B_{\frac{r}{2}}[0] \cap Y_m$ є всюди щільною підмножиною кулі $B_{\frac{r}{2}}[0]$, значить, в цій множині знайдеться такий елемент y_2 ($y_2 \in Y_m$, $\|y_2\| \leq \frac{r}{2}$), що $\|(y - y_1) - y_2\| < \frac{r}{2^2}$. Продовжуючи цей процес, побудуємо послідовність $\{y_k\} \subset Y_m$, для якої $\|y_k\| \leq \frac{r}{2^{k-1}}$ та $\|y - (y_1 + y_2 + \dots + y_k)\| < \frac{r}{2^k}$.

Таким чином, отримуємо, що $y = \lim_n \sum_{k=1}^n y_k$. Покладемо $x_k = A^{-1}y_k$. Тоді $\|x_k\| \leq \|A^{-1}y_k\| \leq m\|y_k\| \leq \frac{mr}{2^{k-1}}$. Це означає, що послідовність $\sum_{k=1}^n x_k$ збігається до деякого елемента x у просторі X .

Дійсно, оскільки

$$\left\| \sum_{k=1}^{n+p} x_k - \sum_{k=1}^n x_k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{mr}{2^{k-1}} < \frac{mr}{2^{n-1}},$$

послідовність $\{\sum_{k=1}^n x_k\}$ є фундаментальною. Але простір X – банаховий, тобто в X існує $x = \lim_n \sum_{k=1}^n x_k$. Оскільки оператор A – лінійний та неперервний,

$$Ax = A(\lim_n \sum_{k=1}^n x_k) = \lim_n \sum_{k=1}^n Ax_k = \lim_n \sum_{k=1}^n y_k = y.$$

Звідси випливає, що

$$\|A^{-1}y\| = \|x\| = \lim_n \|\sum_{k=1}^n x_k\| \leq \lim_n \sum_{k=1}^n \|x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{mr}{2^{k-1}} = 2mr = 2m\|y\|.$$

Оскільки y – довільний елемент простору Y , обмеженість (неперервність) оператора A доведено. ■

□ **Приклад 8.2.2.** Розглянемо існування неперервного оберненого оператора до оператора оператор $A \in \mathcal{L}(l_2)$, якщо:

$$\text{а) } x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots), Ax = (x_1 + x_2, x_2, x_3, \dots);$$

$$\text{б) } x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots), Ax = (0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots).$$

а) Перевіримо, чи здійснює оператор A ін'єктивне відображення. Для цього знайдемо ядро оператора, тобто розв'яжемо рівняння $Ax = 0$:

$$(x_1 + x_2, x_2, x_3, \dots) = (0, 0, 0, \dots).$$

Це рівняння рівносильне нескінченній системі рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_n = 0, n \geq 2 \end{cases}$$

Зрозуміло, що ця система має тільки нульовий розв'язок, тобто $\forall n \ x_n = 0$ або $x = 0$. Отже, $\text{Ker } A = \{0\}$.

Перевіримо, чи буде оператор A сюр'єктивним, тобто чи дорівнює образ простору l_2 всьому l_2 . Інакше кажучи, треба перевірити, чи має рівняння $Ax = y$ розв'язок у просторі l_2 при будь-якій правій частині $y \in l_2$.

Нехай $y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ – довільний елемент простору l_2 . Рівняння $Ax = y$ буде рівносильним нескінченній системі рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_n = y_n, n \geq 2 \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи буде елемент

$$x_0 = (y_1 - y_2, y_2, y_3, \dots).$$

Доведемо, що цей x_0 дійсно належить просторові l_2 :

$$(y_1 - y_2)^2 + \sum_{i=2}^{\infty} y_i^2 < \infty, \text{ тому що } y \in l_2.$$

Отже, $R(A) = l_2$ тобто A є бієктивним оператором. Відомо, що простір l_2 є банаховим, тобто до оператора A можна застосувати теорему Банаха про обернений оператор та стверджувати, що A є неперервно оборотним оператором.

При цьому оператор A^{-1} було отримано при розв'язанні рівняння $Ax = y$, яке рівносильне рівнянню $x = A^{-1}y$, тобто обернений оператор діє так:

$$A^{-1}y = (y_1 - y_2, y_2, y_3, \dots).$$

б) Доведемо, що цей оператор не є сюр'єктивним відображенням. Дійсно, розв'яжемо рівняння $Ax = y$, де y – довільний елемент з простору l_2 .

Це рівняння перепишемо у вигляді:

$$(0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) = (y_1, y_2, y_3, \dots).$$

Зрозуміло, що воно буде мати розв'язок тоді та тільки тоді, коли $y_1 = 0$. Але y – довільний елемент простору l_2 , тобто перша координата y_1 може бути будь-яким дійсним числом. З цього випливає, що ті елементи $y \in l_2$, у яких перша координата ненульова, не належать образу $R(A)$, тобто $R(A)$ є підпростором простору l_2 , але $R(A) \neq l_2$. Дійсно, ніякий елемент $x \in l_2$ під дією оператора A не перейде в елемент, наприклад, $y = (1, 0, 0, \dots)$. Отже, A не є сюр'єкцією, тобто не існує оберненого відображення $A^{-1}: l_2 \rightarrow l_2$ та оператор A не має оберненого оператора.

Твердження 8.2.3. Нехай $A: l_2 \rightarrow l_2$, де $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \dots)$, де $\sup_k |\alpha_k| < \infty$. Оператор A має неперервний обернений тоді та тільки тоді, коли $\inf_k |\alpha_k| > 0$.

Доведення. Необхідність. Припустимо супротивне, тобто що $\inf_k |\alpha_k| = 0$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 \exists k: |\alpha_k| < \varepsilon$. В якості числа $\varepsilon > 0$ будемо вибирати числа вигляду $\varepsilon = \frac{1}{m}$, тоді $\forall m \exists k: |\alpha_{k_m}| < \frac{1}{m}$. Інакше кажучи, ми вибрали нескінченно малу підпослідовність послідовності $\{\alpha_k\}$. Оскільки, за умовою, оператор має неперервний обернений, рівняння $Ax = y$ має єдиний розв'язок у просторі l_2 при довільній правій частині $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in l_2$. Це означає, що для кожного елемента $y \in l_2$ існує елемент $x = \left(\frac{y_1}{\alpha_1}, \frac{y_2}{\alpha_2}, \frac{y_3}{\alpha_3}, \dots\right) \in l_2$, тобто такий, для якого $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} < \infty$. Виберемо в якості $y \in l_2$ елемент, у якого на k_m -х місцях будуть стояти числа $\frac{1}{m}$, а на усіх інших місцях – нулі: $y = \left(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots, 0, \frac{1}{m}, 0, \dots\right) \in l_2$. Тоді відповідний елемент x буде мати вигляд: $x = \left(0, \dots, 0, \frac{1}{\alpha_{k_1}}, 0, \dots, 0, \frac{1}{\alpha_{k_2}}, 0, \dots, 0, \frac{1}{\alpha_{k_3}}, 0, \dots, 0, \frac{1}{\alpha_{k_m}}, 0, \dots\right)$. Але ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 \alpha_{k_m}^2}$ буде розбіжним, оскільки, завдяки вибору $|\alpha_{k_m}| < \frac{1}{m}$, загальний член цього ряду буде більшим за 1. Це означає, що x не належить просторові l_2 , тобто заперечує оборотності оператора A .

Достатність. Нехай $\inf_k |\alpha_k| > 0$. Це означає, що $\forall k \alpha_k \neq 0$. Оскільки простір l_2 , в якому діє оператор, є банаховим, для неперервної оборотності оператора достатньо довести його бієктивність. Зрозуміло, що ядро оператора A буде нульовим, оскільки умова $Ax = 0$ рівносильна системі рівнянь $\alpha_k x_k = 0 \forall k$, тобто $x_k = 0 \forall k$ (оскільки $\alpha_k \neq 0$). Це означає ін'єктивність оператора A .

Покажемо його сюр'єктивність, тобто покажемо, що рівняння $Ax = y$ має єдиний розв'язок у просторі l_2 при довільній правій частині $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in l_2$. Зрозуміло, що розв'язком такого рівняння буде елемент $x = \left(\frac{y_1}{\alpha_1}, \frac{y_2}{\alpha_2}, \frac{y_3}{\alpha_3}, \dots\right)$. Позначимо $\inf_k |\alpha_k| = \alpha > 0$, тобто $\alpha_k \geq \alpha \quad \forall k$. Тоді $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty$, оскільки $y \in l_2$. Отже, оператор A здійснює бієктивне відображення та є неперервно оборотним, що й потрібно було довести. ■

Окремо слід зауважити, що в цьому прикладі мається на увазі, що $\sup_k |\alpha_k| < \infty$, інакше оператор не буде задано на всьому l_2 .

Твердження 8.2.3. дає дуже зручний критерій неперервної оберненості великого класу операторів, заданих у просторі l_2 . Наприклад, оператор $Ax = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots, (-1)^k x_k, \dots)$, буде неперервно оборотним, тому що $\inf_k |\alpha_k| = \inf_k |(-1)^k| = 1 > 0$. А оператор $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_k}{k}, \dots\right)$ не буде неперервно оборотним, тому що $\inf_k \frac{1}{k} = 0$.

Питання для самоконтролю:

- Дати означення алгебраїчної оборотності оператора та її критерій.
- Який оператор називається оборотним.
- Дати означення неперервно оборотного оператора.
- Сформулювати теорему Банаха про обернений оператор.

Вправи:

8.1. Нехай $A \in \mathcal{L}(C[0,1])$, $(Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds$. Довести, що $\text{Ker } A = \{0\}$, $R(A) \neq C[0,1]$, A не має неперервного оберненого оператора.

8.2. Нехай $C_0^1[0,1]$ – простір неперервно диференційованих на $[0,1]$ функцій $x(t)$, для яких $x(0) = 0$ з нормою $\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |x'(t)|$. Довести, що існує неперервний обернений до оператора $A: C[0,1] \rightarrow C_0^1[0,1]$ та знайти його, якщо $(Ax)(t) = x'(t) - 3t^2 x(t)$.

8.3. В банаховому просторі $C[0,1]$ задано оператори $(Ax)(t) = (t+1)x(t)$, $(Bx)(t) = x(t^2)$. Знайти $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$.

Тема 9. Лінійні неперервні функціонали.

9.1. Означення та властивості лінійних неперервних функціоналів.

Познайомимося тепер з одним з найважливіших прикладів лінійних неперервних операторів – лінійними неперервними функціоналами, які мають чисельні застосування в математиці. Зауважимо, що функціонал – це частковий

випадок оператора, тому основні означення та факти, які стосуються операторів, без суттєвих змін переносяться на функціонали.

Означення 9.1.1. Нехай X – лінійні нормовані простори. Функціоналом називається довільне відображення $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Означення 9.1.2. Функціонал $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ називається *лінійним функціоналом*, якщо $\forall x, y \in X$ та $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконується умова $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Прикладами лінійних функціоналів є наступні відображення:

1. $f: l_2 \rightarrow \mathbb{R}, x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots), f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2$.
2. $f: C[a; b] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_a^b x(t) dt; f(x) = x(a)$.

Нагадаємо, що означення області визначення та області значень довільного відображення наведені в п. 1.1.

Означення 9.1.3. Функціонал f називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо він є неперервним відображенням, тобто якщо

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X: x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0).$$

Як і для операторів, з неперервності лінійного функціонала в одній точці випливає його неперервність на всьому просторі. Якщо функціонал неперервний на всьому просторі, будемо називати його просто *неперервним*.

Зрозуміло, що для неперервних функціоналів також виконується умова

$$f\left(\lim_n x_n\right) = \lim_n f(x_n).$$

Означення 9.1.4. Лінійний функціонал f називається *обмеженим*, якщо $\exists c > 0 \quad \forall x \in X \quad |f(x)| \leq c \|x\|$.

Зауважимо, що оскільки норма в просторі \mathbb{R} задається як модуль, це означення є частковим випадком означення 7.1.4. норми лінійного неперервного оператора.

Теорема 9.1.5. Лінійний функціонал є неперервним тоді та тільки тоді, коли він обмежений.

✎ **Вправа.** Доведення цієї теореми повторює доведення теореми 7.1.5. для операторів. Проведіть його самостійно.

Означення 9.1.6. *Нормою* лінійного неперервного функціонала f називається число

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}. \quad (9.1)$$

З цього означення випливає, що

$$\forall x \in X \quad |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|. \quad (9.2)$$

Більше того, $\|f\|$ – це інфімум констант c , для яких нерівність $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$ виконується при всіх $x \in X$. Таким чином, можна дати інше означення норми лінійного неперервного функціонала.

Означення 9.1.7. Нормою лінійного неперервного функціонала f називається число

$$\|f\| = \inf\{c > 0: \forall x \in X \quad |f(x)| \leq c \cdot \|x\|\}.$$

Приклад 9.1.8. Перевірити лінійність, неперервність функціонала f та знайти його норму.

а) $X = l_1, x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots), f(x) = x_1 + x_2.$

Перевіримо лінійність цього функціонала за означенням: нехай $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) \in l_2, y = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots) \in l_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тоді $f(\alpha x + \beta y) = \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \beta y_1 + \beta y_2 = \alpha f(x) + \beta f(y),$

тобто функціонал f – лінійний, отже, замість неперервності можна перевіряти його обмеженість. Нехай $x \in l_1$, тоді

$$|f(x)| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \|x\|,$$

тобто $|f(x)| \leq \|x\|$, що означає обмеженість функціонала та дає оцінку для його норми: $\|f\| \leq 1$.

З нерівності (9.2) випливає що для лінійного обмеженого функціонала f вірна нерівність

$$\forall x \in l_2 \quad |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|.$$

Виберемо $x_0 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$. Для нього також

$$|f(x_0)| \leq \|f\| \cdot \|x_0\|.$$

Але $\|x_0\| = 1, f(x_0) = 1$ тобто $|f(x_0)| = 1$, значить, $1 \leq \|f\| \cdot 1$.

Таким чином, одночасно виконуються дві нерівності: $1 \leq \|f\|$ та $\|f\| \leq 1$, тобто $\|f\| = 1$.

б) Розглянемо тепер той же самий функціонал, але в іншому просторі $X = l_2$, та покажемо, що його норма буде іншою.

Нехай $x \in l_2$, тоді, користуючись нерівністю Коші-Буняковського $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |x_1 + x_2| = |(1, 1, 0, 0, \dots), (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)| \leq \\ &\leq \|(1, 1, 0, 0, \dots)\| \|(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)\| = \sqrt{2} \|x\|, \end{aligned}$$

тобто $|f(x)| \leq \sqrt{2} \|x\|$, що означає обмеженість функціонала та дає оцінку для його норми: $\|f\| \leq \sqrt{2}$.

В нерівності $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$ виберемо $x_0 = (1, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$. Для нього також

$$|f(x_0)| \leq \|f\| \cdot \|x_0\|.$$

Але $\|x_0\| = \sqrt{2}$, $f(x_0) = 1 + 1 = 2$ тобто $2 \leq \|f\| \cdot \sqrt{2}$.

Таким чином, одночасно виконуються дві нерівності: $\sqrt{2} \leq \|f\|$ та $\|f\| \leq \sqrt{2}$, тобто $\|f\| = \sqrt{2}$.

$$\text{в) } X = C[0,1], f(x) = \int_0^1 (t+1)x(t)dt.$$

Перевіримо його лінійність: нехай $x(t), y(t) \in C[0,1]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тоді

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \int_0^1 (t+1)(\alpha x(t) + \beta y(t))dt = \alpha \int_0^1 (t+1)x(t)dt + \\ &+ \beta \int_0^1 (t+1)y(t)ds = \alpha f(x) + \beta f(y), \end{aligned}$$

тобто функціонал f – лінійний.

Замість доведення неперервності функціонала f доведемо його обмеженість: нехай $x(t) \in C[0,1]$, тоді

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_0^1 (t+1)x(t)dt \right| \leq \int_0^1 (t+1)|x(t)|dt \leq \int_0^1 (t+1) \max_{s \in [0,1]} |x(s)|dt = \\ &= \|x\| \int_0^1 (t+1)dt = \frac{3}{2} \|x\|, \end{aligned}$$

тобто функціонал f обмежений, та $\|f\| \leq \frac{3}{2}$.

Для функціонала f виконується нерівність $\forall x \in C[0,1] \quad |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$. Виберемо $x_0(t) \equiv 1 \in C[0,1]$, тоді $|f(x_0)| \leq \|f\| \cdot \|x_0\|$.

Але $\|x_0(t)\| = \max_{t \in [0,1]} |x_0(t)| = 1$, $f(x_0) = \int_0^1 (t+1)dt = \frac{3}{2}$. Отже, $\frac{3}{2} \leq \|f\| \cdot 1$.

З цієї нерівності та з того, що $\|f\| \leq \frac{3}{2}$, випливає що $\|f\| = \frac{3}{2}$.

Як і випадку лінійних неперервних операторів, ядром лінійного неперервного функціонали називають множину $\text{Ker } f = \{x \in X: f(x) = 0\}$. Розглянемо деякі властивості ядра.

Твердження 9.1.8. Ядро лінійного неперервного функціонала утворює підпростір нормованого простору X .


Доведення. Оскільки функціонал лінійний, $\forall x, y \in \text{Ker } f$ та $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконується умова $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0$, тобто $\alpha x + \beta y \in \text{Ker } f$ і ядро утворює лінійний підпростір X . Покажемо його замкненість. Нехай x_0 – точка дотикання ядра, тоді, згідно з критерієм точки дотикання 1.7.3., існує послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів ядра, яка збігається до x_0 : $x_n \rightarrow x_0$. З неперервності функціонала випливає, що $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Але $x_n \in \text{Ker } f$, тобто $f(x_n) = 0$, з чого випливає, що $f(x_0) = 0$. Це означає, що точка дотикання ядра належить ядру, тобто воно є замкненою множиною. ■

Нехай $e \notin \text{Ker } f$ та $\|e\| = 1$. Для довільного $x \in X$ покладемо $\lambda = \frac{f(x)}{f(e)}$ та розглянемо елемент $g = x - \lambda e$. Оскільки

$$f(g) = f(x) - \lambda f(e) = f(x) - \frac{f(x)}{f(e)} f(e) = 0,$$

елемент $g \in \text{Ker } f$, тобто будь-який елемент x простору X можна подати у вигляді $x = g + \lambda e$, де $g \in \text{Ker } f, \lambda \in \mathbb{R}$. У випадку гільбертового простору це означає, що $H = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } f^{\perp}$ (див. теорему 6.2.12.), причому простір $\text{Ker } f^{\perp}$ є одновимірним.

9.2. Спряжений простір. Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів у деяких просторах. Нагадаємо, що символом $\mathcal{L}(X, Y)$ ми позначаємо сукупність лінійних неперервних (обмежених) операторів, що діють між просторами X, Y . У випадку $Y = \mathbb{R}$ простір $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ позначається X^* та називається простором, спряженим до X .

 **Означення 9.2.1.** Спряженим до простору X називається простір лінійних неперервних функціоналів, заданих на X .

Оскільки спряжений простір X^* є частковим випадком простору $\mathcal{L}(X, Y)$, він також є нормованим простором з нормою, що задається формулою (9.1). Більше того, оскільки простір дійсних чисел \mathbb{R} є банаховим, з теореми 7.2.2. випливає наступний результат.

Теорема 9.2.2. Спряжений простір X^* до нормованого простору X є банаховим простором.

Зауважимо, що для багатьох нормованих просторів спряжені до них простори добре відомі та докладно описані. Отже, відомий і загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів у таких нормованих просторах. Ми докладно зупинимося лише на просторах послідовностей та гільбертовому просторі. Спочатку познайомимося з поняттям базису Шаудера у нормованому просторі.

Означення 9.2.3. Нехай X – дійсний банаховий простір, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність елементів X . Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ називають збіжним, якщо збігається послідовність $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ його часткових сум, де $S_n = x_1 + \dots + x_n, \dots$. В цьому випадку елемент $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ називають *сумою ряду* і пишуть $S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

Означення 9.2.4. Послідовність $\{e_1, e_2, \dots\} \subset X$ називається базисом Шаудера банахового простору X , якщо будь-який елемент $x \in X$ можна єдиним чином подати у вигляді суми ряду

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k, x_k \in \mathbb{R}.$$

Теорема 9.2.5. У просторі $l_p (1 \leq p < \infty)$ послідовність векторів $e_1 = (1, 0, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots), e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots), \dots$ є базисом Шаудера. Інакше кажучи, будь-який елемент $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_p$ однозначно подається у вигляді суми збіжного в l_p ряду за системою $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, а саме, у вигляді $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$.

Доведення. Покладемо $S_n = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ та покажемо, що послідовність $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. При $n > m$ маємо:

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \|\sum_{k=1}^n x_k e_k - \sum_{k=1}^m x_k e_k\| = \|(0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n, 0, \dots)\| = \\ &= (\sum_{k=m+1}^n |x_k|^p)^{1/p} \end{aligned}$$

і фундаментальність послідовності $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ впливає зі збіжності числового ряду $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$. Отже, в силу повноти простору l_p , ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ збігається до деякого елемента простору l_p . Покажемо, що він збігається саме до x , тобто що $x = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Дійсно,

$$\|x - S_n\| = \left\| x - \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\| = \|(0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p},$$

тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - S_n\| = 0$ як залишок збіжного ряду. ■

до $l_p (1 < p < \infty)$

Теорема 9.2.6. Нехай $p > 1$ і $1/p + 1/q = 1$. Тоді $l_p^* = l_q$.

Інакше кажучи, для будь-якого лінійного неперервного функціонала f , заданого на l_p , існує такий елемент $(f_1, f_2, \dots, f_k, \dots) \in l_q$, що для довільного $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in l_p$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k. \quad (9.3)$$

Вірно й зворотнє: для будь-якого елемента $(f_1, f_2, \dots, f_k, \dots) \in l_q$ формула (9.3) визначає функціонал $f \in l_p^*$. При цьому $\|f\| = (\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q)^{1/q}$.

Доведення. Нехай $(f_1, f_2, \dots, f_k, \dots) \in l_q$. Покажемо, що функціонал f , який визначається формулою (9.3), належить l_p^* . Перевіримо лінійність цього функціонала: нехай $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in l_p$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots) \in l_p$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тоді

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} f_k y_k = \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y), \end{aligned}$$

тобто функціонал лінійний.

В силу нерівності Гельдера (1.1), маємо

$$|f(x)| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q \right)^{1/q} \|x\| < +\infty.$$

Звідси випливає обмеженість функціонала f і нерівність $\|f\| \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q)^{1/q}$. Отже, показано, що $l_q \subseteq l_p^*$.

Нехай тепер $f \in l_p^*$. Покажемо, що цей функціонал можна подати у вигляді (9.3). В силу теореми 9.2.5. та неперервності функціонала f маємо:

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k. \end{aligned}$$

Покажемо тепер, що елемент $(f_1, f_2, \dots, f_k, \dots) \in l_q$ – це й буде означати, що $l_p^* \subseteq l_q$. Для цього при будь-якому фіксованому $n \in \mathbb{N}$ розглянемо елемент $x_0 \in l_p$, який визначається наступним чином:

$$x_0 = (\text{sign} f_1 \cdot |f_1|^{q-1}, \text{sign} f_2 \cdot |f_2|^{q-1}, \dots, \text{sign} f_k \cdot |f_k|^{q-1}, 0, 0, \dots).$$

Тоді

$$f(x_0) = \sum_{k=1}^n f_k \cdot \text{sign} f_k \cdot |f_k|^{q-1} = \sum_{k=1}^n |f_k|^q. \quad (9.4)$$

З обмеженості функціонала випливає, що

$$|f(x_0)| \leq \|f\| \|x_0\| = \|f\| (\sum_{k=1}^n |f_k|^{p(q-1)})^{1/p} = \|f\| (\sum_{k=1}^n |f_k|^q)^{1/p} \quad (9.5)$$

Тут ми скористались тим, що $p(q-1) = q$. Порівнюючи (9.4) і (9.5), отримаємо $\sum_{k=1}^n |f_k|^q \leq \|f\| (\sum_{k=1}^n |f_k|^q)^{1/p}$, звідки знаходимо, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ $(\sum_{k=1}^n |f_k|^q)^{1/q} \leq \|f\|$. Переходячи до границі за n , отримуємо $(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q)^{1/q} \leq \|f\|$.

З останньої нерівності випливає, що $(f_1, f_2, \dots, f_k, \dots) \in l_q$ і $(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q)^{1/q} \leq \|f\|$. Оскільки вище було отримано нерівність $\|f\| \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q)^{1/q}$, то $\|f\| = (\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q)^{1/q}$. ■

✍ **Вправа.** Ознайомтеся самостійно з доведенням того факту, що $l_1^* = m$. [1, с.211]

З теореми 9.2.6. випливає, що $l_2^* = l_2$, тобто простір l_2 збігається зі своїм спряженим. Це не випадково, такий результат має місце для будь-якого гільбертового простору.

Теорема 9.2.7. (Ріса). Нехай H — гільбертів простір. Тоді для будь-якого функціонала $f \in H^*$ існує єдиний елемент $u \in H$ такий, що $\forall x \in H$

$$f(x) = (x, u). \quad (9.5)$$

При цьому $\|f\| = \|u\|$. Зворотно, для будь-якого $u \in H$ формула (9.5) визначає функціонал f з нормою $\|f\| = \|u\|$.

Доведення. З властивостей скалярного добутку безпосередньо випливає, що при будь-якому $u \in H$ формула (9.5) визначає лінійний неперервний функціонал на H : нехай $x, y \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тоді

$$f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y, u) = \alpha(x, u) + \beta(y, u) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

При цьому в силу нерівності Коші-Буняковського $|f(x)| = |(x, u)| \leq \|x\| \|u\|$, звідки $\|f\| \leq \|u\|$.

Крім того, з (9.5) при $x = u$ отримуємо $\|u\|^2 = f(u) \leq \|f\| \|u\|$, звідки $\|u\| \leq \|f\|$. Отже, якщо функціонал задається формулою (9.5), тоді $\|f\| = \|u\|$.

Доведемо тепер, що довільний функціонал $f \in H^*$ можна подати у вигляді (9.5). З результатів п. 9.1. випливає, що $H = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } f^\perp$ та вимірність простору $\text{Ker } f^\perp$ дорівнює одиниці. Нехай $e \in \text{Ker } f^\perp$ та $\|e\| = 1$. Тоді довільний елемент $x \in H$ подається у вигляді $x = g + \lambda e$, де $g \in \text{Ker } f$, $\lambda \in \mathbb{R}$. При цьому $(g, e) = 0$ та $(x, e) = (g + \lambda e, e) = (g, e) + \lambda(e, e) = \lambda$.

Звідси випливає, що

$f(x) = f(g + \lambda e) = f(g) + \lambda f(e) = \lambda f(e) = (x, e) f(e) = (x, f(e)e)$ і для отримання подання (9.5) достатньо покласти $u = f(e)e$. Якщо маємо представлення (9.5), рівність $\|f\| = \|u\|$ вже було доведено.

Залишається довести єдиність елемента u , який відповідає даному функціоналу f . Припустимо, що таких елементів два, тобто існує такий $v \in H$, що $\forall x \in H$ $f(x) = (x, v)$ та $f(x) = (x, u)$. Тоді при всіх $x \in H$ $(x, u) = (x, v)$, звідки $(x, u - v) = 0$. Якщо вибрати тепер $x = u - v$, отримаємо $\|u - v\| = 0$, тобто $u = v$. ■

Ця теорема фактично дозволяє ототожнити гільбертів простір та спряжений до нього.

□ **Приклад 9.2.8.** Перевірити лінійність, неперервність функціонала f та знайти його норму, якщо $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in l_2$, $f(x) = x_1 + 3x_2 - x_4$. Оскільки l_2 — гільбертів простір, застосуємо теорему Рісса, тобто подамо заданий функціонал у вигляді скалярного добутку $f(x) = 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + (-1) \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + \dots = (x, u)$, де $u = (1, 3, 0, -1, 0, 0, \dots)$. Зрозуміло, що

$u \in l_2$. Отже, функціонал є лінійним та неперервним, а його норму знаходиться за формулою $\|f\| = \|u\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$.

□ **Приклад 9.2.9.** Перевірити лінійність, неперервність функціонала f та знайти його норму, якщо $x(t) \in L_2[0,1]$, $f(x) = \int_{[0, \frac{1}{2}]} x(t)(t+1)d\mu$. Знову застосуємо теорему Рісса та подамо функціонал у вигляді скалярного добутку

$$f(x) = (x, u), \text{ де } u(t) = \begin{cases} t+1, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & t \notin [0, \frac{1}{2}] \end{cases}. \text{ Оскільки функція } u(t) \text{ майже скрізь}$$

неперервна, вона належить просторові $L_2[0,1]$, тобто заданий функціонал є лінійним та неперервним. А його норма дорівнює

$$\|f\| = \|u\| = \sqrt{\int_{[0, \frac{1}{2}]} (t+1)^2 d\mu} = \sqrt{\int_0^{\frac{1}{2}} (t+1)^2 dt} = \sqrt{\frac{19}{24}}.$$

Нехай X – лінійний нормований простір, X^* – спряжений простір, тобто простір лінійних неперервних функціоналів на X . Оскільки X^* – банаховий, для нього також визначений спряжений простір $(X^*)^* = X^{**}$, що відповідно називають *другим спряженням* для E . Елементами цього простору є лінійні неперервні функціонали, які задані на просторі лінійних неперервних функціоналів, заданих на X . Виявляється, що другий спряжений простір безпосередньо пов'язаний з нормованим простором X .

Теорема 9.2.10. Якщо X – лінійний нормований простір, то $X \subseteq X^{**}$. При цьому

$$\forall x \in X \quad \|x\|_X = \|x\|_{X^{**}}.$$

Отже, нормований простір вкладений в другий спряжений. Для деяких просторів (вони носять назву *рефлексивних*) нормований простір збігається з другим спряженням (точніше кажучи, ці простори ізоморфні та зберігають норму елементів). Наприклад, $H^* = H$, тобто $H^{**} = H$.

9.3. Основні принципи функціонального аналізу. Наведемо дві теореми, які разом із теоремою Банаха про обернений оператор вважаються основними принципами функціонального аналізу. Ці терми пов'язані з функціоналами. Теорему Банаха-Штейнгауза, наведену нижче, часто називають принципом рівномірної обмеженості, оскільки вона стверджує, що з поточної обмеженості послідовності лінійних неперервних функціоналів випливає її рівномірність.

Теорема 9.3.1. (Банаха — Штейнгауза). Нехай X — банаховий простір, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — послідовність функціоналів з X^* . Якщо ця послідовність обмежена в кожній точці, тобто

$$\forall x \in X \exists c_x > 0: \forall n \in \mathbb{N} |f_n(x)| \leq c_x, \quad (9.6)$$

тоді послідовність їх норм обмежена, тобто $\exists c > 0: \forall n \in \mathbb{N} \|f_n\| \leq c$.

Доведення. Нехай послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє умов у теоремі. Покажемо, що тоді існує замкнена куля $B_r[a]$, в якій множина $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена. Припустимо супротивне, тобто що множина $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не є обмеженою в жодній замкненій кулі, відповідно, в жодній відкритій кулі. Візьмемо довільну кулю $B_{r_0}(x_0)$. Оскільки у відкритій кулі $B_{r_0}(x_0)$ множина $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не обмежена, знайдуться такі $x_1 \in B_{r_0}(x_0)$ і $n_1 \in \mathbb{N}$, для яких $|f_{n_1}(x_1)| > 1$. Завдяки неперервності функціонала f_{n_1} , нерівність $|f_{n_1}(x)| > 1$ буде виконуватися і в деякому околі точки x_1 , тобто в деякій замкненій кулі $B_{r_1}[x_1] \subset B_{r_0}(x_0)$. При цьому можна вважати, що $r_1 \leq r_0 / 2$. Оскільки в кулі $B_{r_1}(x_1)$ множина $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не обмежена, знову знайдуться такі $x_2 \in B_{r_1}(x_1)$ і номер $n_2 > n_1$, що $|f_{n_2}(x_2)| > 2$. Завдяки неперервності функціонала f_{n_2} , нерівність $|f_{n_2}(x)| > 2$ виконується в деякій кулі $B_{r_2}[x_2]$, причому можна вважати, що $r_2 \leq r_0 / 2^2$.

Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність вкладених замкнених куль $B_{r_0}[x_0] \supset B_{r_1}[x_1] \supset B_{r_2}[x_2] \supset \dots (r_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty)$ і натуральні числа $n_1 < n_2 < \dots$ такі, що $|f_{n_k}(x)| > k$ при $x \in B_{r_k}[x_k]$. За теоремою 2.2.1. про вкладені кулі, в повному метричному просторі існує точка x^* , яка належить усім вибраним кулям ($x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$). Тому $|f_{n_k}(x^*)| > k$ при будь-якому k , що заперечує умові (9.6). Отримане заперечення доводить існування кулі $B_r[a]$, на якій множина $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена:

$$\exists c' > 0 \forall x \in B_r[a] \forall n \in \mathbb{N} |f_n(x)| \leq c'.$$

Оскільки для будь-якого лінійного неперервного функціонала $\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| = \sup_{y \in B_1[0]} |f(y)| = \sup_{y \in B_1[0]} |f(y)|$, то для доведення теореми достатньо показати, що множина $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена на одиничній кулі $B_1[0]$. Для будь-якого $x \in B_1[0]$ положимо $x' = rx + a$, тоді $x = \frac{1}{r}(x' - a)$. Оскільки $\|x' - a\| = \|rx\| \leq r\|x\| \leq r$, зрозуміло, що $x' \in B_r[a]$, тому $|f_n(x')| \leq c'$.

Отже,

$$|f_n(x)| = \left| f_n\left(\frac{1}{r}(x' - a)\right) \right| = \frac{1}{r} |f_n(x') - f_n(a)| \leq \frac{1}{r} (|f_n(x')| + |f_n(a)|) \leq \frac{c' + c_a}{r},$$

що і доводить обмеженість $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на одиничному шарі. ■

Наступна теорема пов'язана з поняттям продовження лінійного функціонала. Ми розглянемо це питання лише для дійсних нормованих просторів.

Означення 9.3.2. Нехай X_0 – лінійний підпростір нормованого простору X , на якому задано лінійний неперервний функціонал f . Функціонал F називається *продовженням* функціонала f на весь простір X , якщо F задано на X та $\forall x \in X_0 \ F(x) = f(x)$.

З означення норми зрозуміло, що норма продовження F не може бути меншою за норму самого функціонала f . Найбільшу цікавість викликають функціонали, які продовжуються на весь простір без збільшення норми. Існування таких функціоналів стверджує наступна теорема. Ми наводимо її без доведення, з яким можна ознайомитися самостійно [Бер,с.201]. Теорема формулюється для нормованих просторів.

Теорема 9.3.3. (Гана-Банаха) Нехай X – лінійний нормований простір, X_0 – підпростір нормованого простору X . Тоді для довільного неперервного функціонала f , заданого на X_0 , існує лінійний неперервний функціонал F , який є продовженням f на весь простір X та при цьому $\|F\| = \|f\|$.

9.4. Слабка збіжність у нормованих просторах. Існування лінійних неперервних функціоналів дозволяє розглянути поняття слабкої збіжності у нормованому просторі.

Означення 9.4.1. Нехай X – лінійний нормований простір. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ називається *слабко збіжною* до елемента $x_0 \in X$, якщо для будь-якого $f \in X^*$ $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Слабку збіжність послідовності позначають таким чином: $x_n \xrightarrow{\omega} x_0$. На відміну від слабкої, збіжність за нормою простору називають *сильною збіжністю*. Це легко пояснити, оскільки зі збіжності за нормою випливає слабка збіжність, тобто збіжність за нормою є «сильнішою»:

$$|f(x_n) - f(x_0)| \leq \|f\| \|x_n - x_0\|.$$

Теорема 9.4.1. (необхідна умова слабкої збіжності) Якщо $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — слабка збіжна послідовність у нормованому просторі, тоді існує таке число C , що для всіх n $\|x_n\| \leq C$. Інакше кажучи, будь-яка слабка збіжна послідовність у нормованому просторі обмежена.

Доведення. Розглянемо в X^* множини $A_{kn} = \{f: |f(x_n)| \leq k\}$, $k, n = 1, 2, 3, \dots$. Ці множини замкнені, оскільки якщо $f_i \in A_{kn}$ та $f_i \rightarrow f$, тоді $|f_i(x_n)| \leq k$ та $|f(x_n)| \leq k$, тобто $f \in A_{kn}$. Отже, замкненою (як перетин замкнених множин) буде і множина

$$A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{kn}.$$

В силу слабкої збіжності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, послідовність $f(x_n)$ обмежена для кожного $f \in E^*$, тому

$$X^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Оскільки простір X^* повний, тоді за теоремою Бера 2.3.1. хоча б одна з множин A_k , наприклад, A_{k_0} , має бути щільною в деякій кулі $B_\varepsilon[f_0]$, а оскільки множина A_{k_0} замкнена, тоді $B_\varepsilon[f_0] \subset A_{k_0}$. Це означає, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ обмежена на кулі $B_\varepsilon[f_0]$, а отже, і на будь-якій кулі в X^* , зокрема на одиничній кулі цього простору. Таким чином, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ обмежена як послідовність елементів з X^{**} . Але в силу теореми 9.2.10. про вкладення нормованого простору у другий спряжений, це означає обмеженість $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ і в X . ■

Наступна теорема часто буває корисна для фактичної перевірки слабкої збіжності тієї чи іншої послідовності.

Теорема 9.4.2. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ елементів нормованого простору X слабо збігається до $x \in X$, якщо:

- 1) $\|x_n\|$ обмежені в сукупності деякою константою M ;
- 2) $f(x_n) \rightarrow f(x)$ для всякого $f \in \Delta$, де Δ — деяка множина, лінійна оболонка якої всюди щільна в X^* .

Доведення. З умови 2) і означення дій над лінійними функціоналами випливає, що якщо φ — лінійна комбінація функціоналів з Δ , то $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$. Нехай тепер φ — довільний елемент з X^* і $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — збіжна до φ послідовність лінійних комбінацій елементів з Δ . Покажемо, що $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$. Це й буде означати слабку збіжність послідовності $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ за означенням.

Нехай M — така константа, що $\forall n \ \|x_n\| \leq M$ і $\|\varphi\| \leq M$. Оцінимо різницю $|\varphi(x_n) - \varphi(x)|$. Оскільки $\varphi_k \rightarrow \varphi$, тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке K , що $\|\varphi - \varphi_k\| < \varepsilon$ для всіх $k \geq K$.

Тому

$$\begin{aligned} |\varphi(x_n) - \varphi(x)| &\leq |\varphi(x_n) - \varphi_k(x_n)| + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)| + |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \leq \\ &\leq \|\varphi - \varphi_k\| \|x_n\| + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)| + \|\varphi - \varphi_k\| \|x\| < \\ &< \varepsilon M + \varepsilon M + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)|. \end{aligned}$$

Але, за умовою, $\varphi_k(x_n) \rightarrow \varphi_k(x)$ при $n \rightarrow \infty$, тобто при достатньо великих n $|\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)| < \varepsilon M$. Отже, $|\varphi(x_n) - \varphi(x)| < 3\varepsilon$, тобто $\varphi(x_n) - \varphi(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для будь-якого $\varphi \in X^*$. ■

Таким чином, для перевірки слабкої збіжності послідовності достатньо перевірити її обмеженість та збіжність $f(x_n) \rightarrow f(x)$ не для всіх функціоналів f , а лише для тих, які утворюють всюди щільний лінійний підпростір простору X^* . Ця теорема дає можливість сформулювати умови слабкої збіжності послідовності у конкретних нормованих просторах.

Розглянемо зміст поняття слабкої збіжності в деяких конкретних просторах. У скінченновимірному просторі \mathbb{R}_p^m слабка збіжність збігається з сильною. Дійсно, нехай послідовність $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm})$ слабо збігається до елемента $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m})$. Розглянемо так звані координатні функціонали $f_i(x) = \xi_i$ де $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Тоді $f_i(x_n) = x_{ni}$, $f_i(x_0) = x_{0i}$ і з означення слабкої збіжності випливає, що $f_i(x_n) = x_{ni} \rightarrow f_i(x_0) = x_{0i}$. Це означає покоординатну збіжність послідовності, яка, як відомо з п.1.8., є збіжністю за нормою у скінченновимірному просторі.

Аналогічно можна показати, що у просторах l_2 слабка збіжність збігається з покоординатною. Для цього також треба розглянути координатні функціонали $f_i(x) = \xi_i = (x, e_i)$ де $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots)$ $e_i = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots \right)$.

За теоремою Рісса, кожний функціонал однозначно визначається елементом $e_i = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots \right) \in l_2 = l_2^*$. Лінійні комбінації елементів e_i є всюди щільними в l_2 (див. теорему 9.2.5.). Отже, за теоремою 9.4.2., слабка збіжність у просторі l_2 – це покоординатна збіжність обмеженої послідовності.

Але слабка збіжність не збігається з сильною. Прикладом послідовності, яка збігається слабо, але не збігається сильно, є послідовність елементів $e_n = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, \dots \right)$. Покоординатно вона збігається до нуля, але за нормою не збігається, оскільки $\|e_n\| = 1 \nrightarrow 0$.

Питання для самоконтролю:

- Дати означення лінійного неперервного та лінійного обмеженого функціонала.
- Який простір називається спряженим? Як задається норма у спряженому просторі?
- Сформулювати теорему Рісса про загальний вигляд лінійного неперервного функціонала у гільбертовому просторі.
- Сформулювати теореми Банаха-Штейнгауза та Гана-Банаха.
- Дати означення слабкої збіжності послідовності у нормованому просторі. Сформулювати умови слабкої збіжності.

Вправи:

9.1. Знайти норму функціонала $f \in l_2$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in l_2$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_k + x_{k+1}}{2^k}$.

9.2. Дослідити послідовність $x_n = \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots \right)$ на слабку збіжність у l_2 .