

## Змістовий модуль 8. Конспект лекцій.

### 5.11 Формула Тейлора для функції двох змінних

У п.4.4 розглянута формула Тейлора для функції однієї змінної (формула (4.11)). Згадаємо, що у випадку, коли функція однієї змінної  $F(t)$  має на відрізку  $[\alpha; \beta]$  неперервні похідні до  $(n+1)$ -го порядку включно, то справджується формула Тейлора:

$$F(t) = F(t_0) + \sum_{k=1}^n \frac{F^{(k)}(t_0)}{k!} (t-t_0)^k + \frac{F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t-t_0))}{(n+1)!} (t-t_0)^{n+1}, \quad (5.27)$$

де  $0 < \theta < 1$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ .

Нехай  $t - t_0 = \Delta t = dt$ ,  $F(t) - F(t_0) = \Delta F(t_0)$ , тоді

$$F^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k = F^{(k)}(t_0)dt^k = d^k F(t_0), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому формулу (5.27) можна записати у вигляді:

$$\Delta F(t_0) = \sum_{k=1}^n \frac{d^k F(t_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} F(t_0 + \theta \cdot \Delta t)}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (5.28)$$

В аналогічному вигляді формулу Тейлора можна отримати для функції кількох змінних.

Розглянемо випадок функції двох змінних. Нехай функція  $z = f(x, y)$  у області  $D$  має неперервні частинні похідні до  $(n+1)$ -го порядку включно. Візьмемо дві точки  $M_0(x_0, y_0)$  та  $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ , такі, щоб відрізок  $M_0M_1$  належав області  $D$ .

Введемо нову змінну  $t$ :

$$x = x_0 + t \cdot \Delta x, \quad y = y_0 + t \cdot \Delta y, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (5.29)$$

При  $t = 0$  за цими формулами отримаємо координати точки  $M_0$ , а при  $t = 1$  – координати точки  $M_1$ . Якщо  $t$  змінюватиметься на відрізку  $[0; 1]$  від 0 до 1, то точка  $M(x_0 + t \cdot \Delta x, y_0 + t \cdot \Delta y)$  опише весь відрізок  $M_0M_1$ . Тоді вздовж цього відрізка функція  $f(x, y)$  буде функцією однієї змінної  $t$ :

$$f(x, y) = f(x_0 + t \cdot \Delta x, y_0 + t \cdot \Delta y) = F(t). \quad (5.30)$$

Запишемо формулу (5.28) для функції (5.30) при  $t_0 = 0$ ,  $\Delta t = 1$ .

$$\Delta F(0) = dF(0) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k F(0)}{k!} + \frac{d^{n+1} F(\theta)}{(n+1)!}. \quad (5.31)$$

Обчислимо диференціали, що входять у формулу (5.31). З рівностей (5.29) та (5.30) маємо:

$$dF(t) = df(x, y) = f'_x dx + f'_y dy = f'_x(x, y) \Delta x \cdot dt + f'_y(x, y) \Delta y \cdot dt.$$

Оскільки  $dt = \Delta t = 1$ , то

$$dF(0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y = df(x_0, y_0). \quad (5.32)$$

Аналогічно

$$d^2F(t) = d^2f(x, y) = f''_{xx}(x, y)dx^2 + 2f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{yy}(x, y)dy^2, \\ d^2F(0) = \left( \frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y \right)^2 f(x_0, y_0) = d^2f(x_0, y_0). \quad (5.33)$$

Продовжуючи цей процес, знайдемо:

$$d^3F(0) = d^3f(x_0, y_0), \dots, d^nF(0) = d^nf(x_0, y_0), \quad (5.34)$$

$$d^{n+1}F(\theta) = d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y). \quad (5.35)$$

Приріст  $\Delta F(0)$  представимо у вигляді:

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0) = f(M_1) - f(M_0) = \Delta f(x_0, y_0). \quad (5.36)$$

Підставляючи вирази (5.32) – (5.36) у формулу (5.31), дістанемо:

$$\Delta f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{d^2f(x_0, y_0)}{2!} + \dots + \frac{d^nf(x_0, y_0)}{n!} + R_{n+1}, \quad (5.37)$$

$$R_{n+1} = \frac{d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (5.38)$$

**Означення 5.21.** Формулу (5.37) називають формулою Тейлора для функції двох змінних з залишковим членом  $R_{n+1}$  у формі Лагранжа (5.38). Цю формулу використовують для наближених обчислень. При різних значеннях  $n$  з формули (5.37) отримуємо формули різного порядку точності для наближеного обчислення значень функції  $f(x, y)$ . Абсолютну похибку цих наближених обчислень оцінюють через залишковий член (5.38).

## 5.12 Локальні екстремуми функції двох змінних

Нехай функція  $z = f(x, y)$  визначена у області  $D$ , а точка  $M_0(x_0, y_0) \in D$ .

**Означення 5.22.** Якщо існує окіл точки  $M_0$ , що належить області  $D$ , і для всіх відмінних від  $M_0$  точок  $M$  цього околу виконується нерівність  $f(M) < f(M_0)$  ( $f(M) > f(M_0)$ ), то точку  $M_0$  називають точкою локального максимуму (мінімуму) функції  $f(x, y)$ , а число  $f(M_0)$  – локальним максимумом (мінімумом) цієї функції. Точки локального максимуму та мінімуму функції називають точками її локального екстремуму.

Це означення можна сформулювати іншим чином. Нехай  $x = x_0 + \Delta x$ ,  $y = y_0 + \Delta y$ . Тоді

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f(x_0, y_0).$$

**Означення 5.23.** Якщо приріст функції  $\Delta f(x_0, y_0) < 0$  ( $\Delta f(x_0, y_0) > 0$ ) при всіх достатньо малих за абсолютною величиною приростах  $\Delta x$  і  $\Delta y$ , то функція

$f(x, y)$  у точці  $M_0(x_0, y_0)$  досягає локального максимуму (локального мінімуму).

Таким чином, у околі точки екстремуму прирости функції мають один і той же знак.

**Теорема 5.11 (необхідна умова екстремуму).** Якщо функція  $z = f(x, y)$  має у точці  $M_0(x_0, y_0)$  локальний екстремум, то у цій точці частинні похідні першого порядку цієї функції дорівнюють нулю або не існують.

**Доведення.** Нехай  $M_0(x_0, y_0)$  є точкою екстремуму. Розглянемо функцію  $f(x, y_0)$ , що є функцією однієї змінної  $x$ . Ця функція має екстремум у точці  $x = x_0$ , тому її похідна  $f'_x(x_0, y_0)$  дорівнює нулю, або не існує. Аналогічно, розглянувши функцію  $f(x_0, y)$  однієї змінної  $y$ , отримаємо, що  $f'_y(x_0, y_0)$  дорівнює нулю, або не існує. Теорему доведено.

Аналогічна теорема справедлива для функцій  $n$  змінних.

**Означення 5.24.** Точки, у яких частинні похідні першого порядку функції  $f(x, y)$  дорівнюють нулю, тобто  $f'_x = f'_y = 0$ , називають стаціонарними точками цієї функції. Стаціонарні точки функції  $f(x, y)$  та точки, у яких її частинні похідні не існують, називають критичними точками цієї функції.

Таким чином, аналогічно функціям однієї змінної, якщо функція кількох змінних у якій-небудь точці досягає екстремуму, то це може статися лише у критичній точці, проте не всяка критична точка є точкою екстремуму. Наприклад, частинні похідні функції  $z = x^2 - y^2$  дорівнюють нулю у точці  $(0, 0)$ ,  $z(0, 0) = 0$ , проте у цій точці вказана функція екстремуму не має, тому що у досить малому околі точки  $(0, 0)$  вона набуває як додатних (при  $|x| > |y|$ ), так і від'ємних (при  $|x| < |y|$ ) значень, тобто приріст функції у цій точці змінює знак.

**Приклад 5.22.** Відкритий прямокутний басейн повинен мати об'єм  $V$ . Знайти розміри басейну, за яких на його облицювання піде найменша кількість матеріалу.

**Розв'язання.** Нехай  $x$  – довжина,  $y$  – ширина,  $z$  – глибина басейну.

Оскільки  $V = xyz$ , то  $z = \frac{V}{xy}$ .

Кількість матеріалу, необхідного для облицювання басейну, визначається формулою  $S = xy + 2yz + 2xz$  або  $S = S(x, y) = xy + 2V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ . Треба знайти мінімум функції  $S(x, y)$  при  $x > 0$ ,  $y > 0$ . Знайдемо стаціонарні точки функції  $S(x, y)$ . Її частинні похідні  $S'_x = y - \frac{2V}{x^2}$ ,  $S'_y = x - \frac{2V}{y^2}$ . Прирівнюючи їх до нуля, отримуємо систему:

$$\begin{cases} y - \frac{2V}{x^2} = 0, \\ x - \frac{2V}{y^2} = 0. \end{cases}$$

Звідси знаходимо  $x = y = \sqrt[3]{2V}$ . Отже, функція  $S(x, y)$  має стаціонарну точку  $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ . З умови задачі випливає наявність точки мінімуму, тому у стаціонарній точці ця функція досягає мінімуму. Глибина басейну  $z = \frac{V}{xy} = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$ . Таким чином, мінімальна кількість матеріалу буде витрачена при розмірах басейну  $x = y = \sqrt[3]{2V}$ ,  $z = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$ .

**Теорема 5.12. (достатня умова екстремуму функції двох змінних).** Нехай у стаціонарній точці  $M_0(x_0, y_0)$  і у деякому її околі функція  $f(x, y)$  має неперервні частинні похідні другого порядку. Нехай  $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$ ,  $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$ ,  $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$ . Тоді, якщо значення  $\Delta = AC - B^2 > 0$ , то у точці  $M_0$  функція  $f(x, y)$  має екстремум, причому він є максимумом, якщо  $A < 0$  і мінімумом – при  $A > 0$ . При  $\Delta < 0$  функція  $f(x, y)$  у точці  $M_0$  екстремуму не має.

**Доведення.** Формула Тейлора (5.37) для функції двох змінних при  $n = 1$  після розкриття виразів для диференціалів набуває вигляду:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \frac{1}{2}(f''_{xx}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y^2).$$

Для стаціонарної точки  $M_0(x_0, y_0)$   $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$ , тому остання формула у околі точки  $M_0$  має вигляд:

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(f''_{xx}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y^2).$$

У випадку мінімуму для довільних достатньо малих значень  $|\Delta x|$  та  $|\Delta y|$  права частина цієї рівності повинна бути додатною, а у випадку максимуму – від'ємною. Внаслідок неперервності других частинних похідних для цього достатньо, щоб диференціал другого порядку у точці  $M_0$  зберігав свій знак для малих значень  $|\Delta x|$  та  $|\Delta y|$ . Запишемо вираз для цього диференціала:

$$d^2F(M_0) = f''_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2.$$

Нехай  $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$ ,  $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$ ,  $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$ ,  $\Delta = AC - B^2$ . Позначимо через  $\varphi$  кут між віссю  $Ox$  та відрізком  $M_0M$  довжиною  $\rho$ , де  $M$  –

точка з координатами  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ . Тоді  $\Delta x = \rho \cos \varphi$ ,  $\Delta y = \rho \sin \varphi$ , тому при  $A \neq 0$  маємо:

$$\begin{aligned} d^2 f(M_0) &= A\rho^2 \cos^2 \varphi + 2B\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi + C\rho^2 \sin^2 \varphi = \\ &= \frac{\rho^2}{A} \left[ (A \cos \varphi + B \sin \varphi)^2 + (AC - B^2) \sin^2 \varphi \right] = \\ &= \frac{\rho^2}{A} \left[ (A \cos \varphi + B \sin \varphi)^2 + \Delta \cdot \sin^2 \varphi \right]. \end{aligned}$$

Розглянемо тепер п'ять можливих випадків.

1. Нехай  $\Delta > 0$  і  $A < 0$ . Тоді  $d^2 f(M_0) < 0$ , тому при досить малих значеннях  $\rho = M_0 M = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$  приріст  $\Delta f(x_0, y_0) < 0$ , тобто, згідно з означенням (5.23) у точці  $M_0$  функція  $f(x, y)$  має локальний максимум.
2. Аналогічно можна довести, що коли  $\Delta > 0$  і  $A > 0$ , то функція  $f(x, y)$  має у точці  $M_0$  локальний мінімум.
3. Нехай  $\Delta < 0$  і  $A > 0$ . Якщо з точки  $M_0$  рухатися вздовж променя  $\varphi = 0$ , то  $d^2 f(M_0) = \rho^2 A > 0$ . Якщо вибрати кут  $\varphi$  таким, що  $A \cos \varphi + B \sin \varphi = 0$ , наприклад  $\varphi = -\arctg \frac{A}{B}$ , то отримаємо, що  $d^2 f(M_0) = \frac{\rho^2}{A} \Delta \sin^2 \varphi < 0$ . Отже, при малих значеннях  $\rho$  приріст  $\Delta f(x_0, y_0)$  у околі точки  $M_0$  не зберігає знак, тому ця точка не є точкою екстремуму функції  $f(x, y)$ .
4. Аналогічно визначаємо, що при  $\Delta < 0$  і  $A < 0$  функція  $f(x, y)$  у точці  $M_0$  також не має екстремуму.
5. Нехай  $\Delta < 0$  і  $A = 0$ . Тоді  $B \neq 0$ ,  $d^2 f(M_0) = \rho^2 \sin \varphi (2B \cos \varphi + C \sin \varphi)$  і знак  $d^2 f(M_0)$  визначається величиною кута  $\varphi$ , тобто знак приросту  $\Delta f(x_0, y_0)$  не зберігається у околі точки  $M_0$ , тому екстремум у цій точці відсутній.

Теорему доведено. Зауважимо, що при  $\Delta = 0$  функція  $f(x, y)$  потребує додаткового дослідження.

З доведення теореми 5.12 випливає друга достатня умова екстремуму, що загалом справедлива для функції довільного числа змінних: функція  $f(M)$  має мінімум у стаціонарній точці  $M_0$ , якщо диференціал другого порядку цієї функції у точці  $M_0$  додатний, і максимум – якщо цей диференціал від'ємний.

З теорем 5.11 та 5.12 випливає наступне правило дослідження диференційовних функцій двох змінних на екстремум.

1. Знайти стаціонарні точки функції з системи рівнянь 
$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

2. У кожній стаціонарній точці обчислити значення  $A, B, C, \Delta$ . Згідно з теоремою 5.12 зробити висновок про наявність та тип екстремуму у кожній стаціонарній точці.

**Приклад 5.23.** Знайти екстремуми функції

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

**Розв'язання.** Знайдемо стаціонарні точки функції  $f(x, y)$ , для чого складемо систему рівнянь 
$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Знайдемо частинні похідні.  $f'_x = 4(x^3 - x + y), \quad f'_y = 4(y^3 + x - y)$ .

Прирівнявши ці частинні похідні до нуля, отримаємо:

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0; \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Додаючи рівняння цієї системи, знаходимо, що  $x^3 + y^3 = 0$ , звідки  $y = -x$ . Підставляючи  $y = -x$  у перше рівняння системи, знаходимо, що  $x^3 - 2x = 0$ , тобто  $x(x^2 - 2) = 0$ . Звідси знаходимо стаціонарні точки:  $x_1 = y_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{2}, \quad y_2 = -x_2 = -\sqrt{2}, \quad x_3 = -\sqrt{2}, \quad y_3 = -x_3 = \sqrt{2}$ .

Отже, функція має три стаціонарні точки:  $O(0,0), \quad A_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad A_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . Для кожної з цих точок визначимо величину  $A = f''_{xx} = 12x^2 - 4, \quad B = f''_{xy} = 4, \quad C = f''_{yy} = 12y^2 - 4, \quad \Delta = AC - B^2$ .

Для стаціонарної точки  $O(0,0)$  маємо  $A = -4 = C, \quad B = 4, \quad \Delta = 0$ . Оскільки  $\Delta = 0$ , то у точці  $O$  теорему 5.12 застосувати не можна. Переконаємось, що у цій точці екстремум відсутній. Нехай  $y = 0$ . Тоді  $f(x, y) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$ . У околі точки  $O(0,0)$   $f(x, y) < 0$ . Тепер візьмемо  $y = x, \quad f(x, y) = 2x^4 > 0$ . Отримали, що  $f(O) = 0$ , а у околі цієї точки функція має різні знаки, тому екстремум у точці  $O$  відсутній.

У точках  $A_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  та  $A_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  знаходимо значення коефіцієнтів  $A = 12 \cdot 2 - 4 = 20, \quad B = 4, \quad C = 12 \cdot 2 - 4 = 20, \quad \Delta = 20 \cdot 20 - 4^2 = 384 > 0$ . У цих точках наявний екстремум. Оскільки для кожної з точок  $A_1$  та  $A_2$  коефіцієнт  $A$  додатний, то ці точки є точками мінімуму. При цьому  $f_{min} = f(A_1) = f(A_2) = -8$ .

### 5.13 Найбільше та найменше значення функції

Відомо, що функція  $z = f(x, y)$ , що задана та неперервна у замкненій обмеженій області  $D$ , досягає в цій області найбільшого та найменшого значень. У внутрішніх точках області диференційовна функція може набувати цих значень лише у точках локального екстремуму. Тому треба знайти всі стаціонарні точки функції, які належать області  $D$ , розв'язавши систему рівнянь  $f'_x(x, y) = 0$ ,  $f'_y(x, y) = 0$  і обчислити значення функції у цих точках. Потім потрібно дослідити функцію на екстремум на межі області  $D$ , використовуючи рівняння межі, цю задачу зводять до знаходження абсолютного екстремуму функції однієї змінної. Серед здобутих таким чином значень функції всередині і на межі області вибирають найбільше та найменше значення.

**Приклад 5.24.** Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = x^2 y(2 - x - y)$  в замкненій області  $D$ , обмеженій прямими  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 6$ .

**Розв'язання.** Знайдемо стаціонарні точки функції. Для цього знайдемо її частинні похідні.  $z'_x = xy(4 - 3x - 2y)$ ,  $z'_y = x^2(2 - x - 2y)$ . Вибираємо стаціонарні точки, що лежать всередині області  $D$ . Тут  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ , тому

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0, \\ 2 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, отримуємо  $x = 1$ ,  $y = \frac{1}{2}$ . Точка  $M(1, \frac{1}{2})$  лежить всередині області  $D$ , тому обчислюємо значення функції у цій точці:  $z(M) = z(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ .

Знайдемо найбільше та найменше значення функції на межі області  $D$  – трикутника  $OAB$ , де  $O(0, 0)$  – початок координат, точка  $A$  – точка перетину прямої  $x + y = 6$  з віссю  $Ox$ ,  $A(6, 0)$ , точка  $B$  – точка перетину цієї прямої з віссю  $Oy$ ,  $B(0, 6)$ . Рівняннями сторін  $OB$  та  $OA$  трикутника  $OAB$  є відповідно  $x = 0$  та  $y = 0$ , тому значення функції  $z = x^2 y(2 - x - y)$  на цих сторонах дорівнюють нулю, зокрема,  $z(O) = z(A) = z(B) = 0$ .

Знайдемо найбільше та найменше значення функції  $z(x, y)$  на стороні  $AB$ . Тут  $y = 6 - x$ ,  $z = x^2(6 - x)(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x)$ ,  $0 \leq x \leq 6$ . Знаходимо стаціонарні точки отриманої функції однієї змінної:  $z'_x = -48x + 12x^2 = 0$ . Звідси знаходимо  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 4$ . Оскільки  $y = 6 - x$ , то  $y_1 = 6$ ,  $y_2 = 2$ . Отримали точки  $B(0, 6)$  та  $C(4, 2)$ . Знаходимо  $z(C) = z(4, 2) = -128$ . Порівнюючи значення функції у точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $O$ ,  $M$ . Знаходимо  $z_{\max} = z(M) = \frac{1}{4}$ ,  $z_{\min} = z(C) = -128$ .

## 5.14. Умовний екстремум

Нехай в області  $D$  задано функцію  $z = f(x, y)$  і лінію  $S$ , яка визначається рівнянням  $\varphi(x, y) = 0$  та лежить у цій області. На цій лінії потрібно знайти точку  $M(x, y)$ , у якій значення функції  $f(x, y)$  є найбільшим або найменшим порівняно із значеннями цієї функції в інших точках кривої  $S$ . Такі точки називають точками умовного екстремуму функції  $f(x, y)$  на кривій  $S$ . На відміну від звичайного екстремуму значення функції в точці умовного екстремуму порівнюються з значеннями функції не в усіх точках області  $D$  чи деякого околу точки  $M$ , а лише в точках, що лежать на кривій  $S$ , тобто змінні  $x$  та  $y$  не є незалежними, а пов'язані додатковою умовою  $\varphi(x, y) = 0$ .

Рівняння  $\varphi(x, y) = 0$  називають рівнянням зв'язку. Якщо це рівняння можна розв'язати відносно однієї змінної, наприклад,  $y$ , тобто отримати рівняння  $y = \psi(x)$ , то, підставляючи замість  $y$  вираз  $\psi(x)$  у функцію  $z = f(x, y)$ , отримаємо функцію однієї змінної  $z = f(x, \psi(x))$ . Оскільки умова зв'язку врахована, то задача знаходження умовного екстремуму зводиться до задачі на звичайний екстремум функції однієї змінної. Проте розв'язати рівняння зв'язку відносно змінної  $y$  чи  $x$  вдається не завжди. Тоді задачу на умовний екстремум розв'язують наступним чином.

Розглянемо функцію  $z = f(x, y)$ , де змінну  $y$  вважаємо функцією змінної  $x$  ( $y = \psi(x)$ ), як складену функцію. З необхідної умови екстремуму  $\frac{dz}{dx} = 0$  випливає, що у точках екстремуму

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

У цьому випадку  $\frac{dy}{dx}$  означає похідну неявної функції  $y$ , заданої рівнянням зв'язку  $\varphi(x, y) = 0$ , тобто  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$ . Тому отримуємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \left( -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} \right) = 0.$$

Звідси отримуємо, що  $\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y}$ . Позначимо ці співвідношення через  $-\lambda$ , де  $\lambda \neq 0$ . Знак “-” тут взято для зручності, а саме число  $\lambda$  може мати довільний знак. Отже, у точці умовного екстремуму повинні виконуватися рівності

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y} = -\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x + \lambda \varphi'_x = 0, \\ f'_y + \lambda \varphi'_y = 0. \end{cases}$$

Отже, стаціонарні точки умовного екстремуму повинні задовольняти систему рівнянь:



$$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (5.39)$$

Досліджуючи цю систему, помічаємо, що знаходження умовного екстремуму функції  $z = f(x, y)$  звелось до знаходження звичайного екстремуму функції

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y). \quad (5.40)$$

Функцію (5.40) називають функцією Лагранжа, а множник  $\lambda$  – множником Лагранжа.

Умови (5.39) є лише необхідними. Вони дають змогу знайти стаціонарні точки умовного екстремуму. Наявність та характер умовного екстремуму, як і у випадку відсутності обмежень, можна встановити за знаком диференціала другого порядку функції Лагранжа. Якщо у стаціонарній точці  $d^2L > 0$  ( $d^2L < 0$ ), то ця точка є точкою умовного мінімуму (максимуму).

Для функції трьох змінних  $u = f(x, y, z)$  з рівняннями зв'язку  $\varphi_1(x, y, z) = 0$ ,  $\varphi_2(x, y, z) = 0$  функцію Лагранжа записують у вигляді:

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z). \quad (5.41)$$

Стаціонарні точки умовного екстремуму у цьому випадку визначаються з системи рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0, \\ \varphi_2(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (5.42)$$

Достатні умови існування умовного екстремуму у цьому випадку також визначаються знаком  $d^2L$ .

Розглянутий метод можна поширити на дослідження умовного екстремуму функції довільного числа змінних.

**Приклад 5.25.** Знайти найбільше значення функції  $z = xy$ , якщо  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$ .

**Розв'язання.** Складемо функцію Лагранжа (5.40).

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda \left( \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right).$$

Запишемо систему (5.39):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0, \\ y + \frac{\lambda x}{4} = 0, \\ x + \lambda y = 0, \\ x > 0, y > 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знаходимо  $x = 2$ ,  $y = 1$ ,  $\lambda = -2$ . Маємо стаціонарну точку  $M(2,1)$  при  $\lambda = -2$ . Щоб визначити наявність та тип умовного екстремуму, запишемо другий диференціал функції Лагранжа. З врахуванням того, що це диференціал складеної функції (у розглядаємо як функцію  $x$ ), формула для другого диференціалу має вигляд (п.5.7):

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial L}{\partial x} d^2x + \frac{\partial L}{\partial y} d^2y.$$

Тут  $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{4} = -\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1$ ,  $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \lambda = -2$ . З рівняння зв'язку знаходимо

зв'язок між диференціалами  $dy$  та  $dx$ :  $\frac{xdx}{4} + ydy = 0$ .

Звідси знаходимо  $dy = -\frac{x}{4y} dx$ ,  $d^2y = -\frac{1}{4} \frac{ydx - xdy}{y^2} - \frac{1}{4} \frac{x}{y} d^2x$ . У точці

$M(2,1)$   $dy = -\frac{dx}{2}$ . Оскільки  $x$  – незалежна змінна, то  $d^2x = 0$ . Підставивши у формулу для  $d^2L$  значення частинних похідних та вирази для  $dy$  і  $d^2y$ , отримуємо:

$$d^2L = -\frac{1}{2} dx^2 + 2dx \left( -\frac{1}{2} dx \right) - 2 \left( -\frac{1}{2} dx \right)^2 = -2dx^2 < 0.$$

Оскільки  $d^2L < 0$ , то точка  $M(2,1)$  є точкою умовного максимуму функції  $z = xy$ . При цьому  $z_{\max} = 2 \cdot 1 = 2$ .

Цей же результат можна отримати іншим способом: виразити з рівняння зв'язку  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$   $y$  через  $x$  (оскільки  $y > 0$ , то  $y = \sqrt{2 - \frac{x^2}{4}}$ ), а потім дослідити на звичайний безумовний екстремум функцію  $z = xy = x \sqrt{2 - \frac{x^2}{4}}$ .