

Похідні та диференціали функцій кількох змінних

Приклад 1. Для функції $z = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$ знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y - 1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -3x - 8y + 2$.

Приклад 2. Для функції $z = e^{x^2+y^2}$ знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}$.

Приклад 3. Для функції $\rho = u^4 \cos^2 \varphi$ знайти частинні похідні $\frac{\partial \rho}{\partial u}$ та $\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}$.

Розв'язання. $\frac{\partial \rho}{\partial u} = 4u^3 \cos^2 \varphi$, $\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = u^4 \cdot 2 \cos \varphi \cdot (-\sin \varphi) = -u^4 \sin 2\varphi$.

Приклад 4. Для функції $z = x^y$ знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \ln x \cdot x^y$.

Приклад 5. Показати, що функція $z = y \ln(x^2 - y^2)$ задовольняє рівняння

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}.$$

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y}{x^2 - y^2}, \quad \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y} \cdot \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y}{x^2 - y^2}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{2y}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y} \cdot \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y}{x^2 - y^2} = \\ &= \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y} = \frac{z}{y^2}. \end{aligned}$$

Приклад 6. Знайти повний диференціал функції $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}$.

Розв'язання. Повний диференціал має вигляд: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$. Знайдемо частинні

похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{x-y-x-y}{(x-y)^2} = -\frac{2y}{(x-y)^2 + (x+y)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{x-y+x+y}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2 + (x+y)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

$$dz = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Приклад 7. Знайти du , якщо $u = \frac{x}{y} + z^2 - 2x + 3y - 4z$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} - 2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + 3$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 4$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \left(\frac{1}{y} - 2 \right) dx + \left(-\frac{x}{y^2} + 3 \right) dy + (2z - 4) dz.$$

Приклад 8. Знайти другі частинні похідні функції $z = xy \ln \frac{x}{y}$.

Розв'язання. Знайдемо перші частинні похідні. $\frac{\partial z}{\partial x} = y \ln \frac{x}{y} + xy \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y} = y \ln \frac{x}{y} + y$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \ln \frac{x}{y} + xy \cdot \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) = x \ln \frac{x}{y} - x.$$

Диференціюючи перші частинні похідні по відповідним змінним, знаходимо другі частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(y \ln \frac{x}{y} + y \right) = y \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(x \ln \frac{x}{y} - x \right) = x \cdot \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(y \ln \frac{x}{y} + y \right) = \ln \frac{x}{y} + y \cdot \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) + 1 = \ln \frac{x}{y}.$$

Приклад 9. Перевірити, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, якщо $z = \sin x \cdot \operatorname{tg} y$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \cdot \operatorname{tg} y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\cos x \cdot \operatorname{tg} y) = \frac{\cos x}{\cos^2 y}.$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 y} \right) = \frac{\cos x}{\cos^2 y}.$$

Приклад 10. Для функції $u = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 6y^2$ знайти $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

Розв'язання. $\frac{\partial u}{\partial x} = 12x^2 + 6xy + 3y^2$. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (12x^2 + 6xy + 3y^2) = 6x + 6y = 6(x + y)$.

Приклад 11. Для функції $z = x^3y^2$ знайти d^2z .

Розв'язання. $d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2, \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3.$$

$$d^2z = 6xy^2 dx^2 + 12x^2y dx dy + 2x^3 dy^2.$$

Приклад 12. Для функції $z = \cos(2x + e^y)$ знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = -2 \sin(x + e^y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2e^y \cos(x + e^y), \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 2e^{2y} \sin(x + e^y).$