

Локальний екстремум функції багатьох змінних

Наведемо алгоритм, за яким будемо досліджувати функцію двох змінних на екстремум.

Щоб дослідити функцію двох змінних $u = f(x, y)$ на екстремум, треба:

1. Визначити стаціонарні точки M_i функції, в яких вона може досягати екстремуму. Для цього потрібно розв'язати систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

2. Визначити другі частинні похідні:

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

3. Скласти вираз $\Delta = AC - B^2$ та обчислити його значення у кожній стаціонарній точці. Якщо

а) $\Delta(M_i) > 0$, то в цій точці функція досягає екстремум, і якщо $A(M_i) > 0$, то функція в точці M_i досягає мінімум, а якщо $A(M_i) < 0$ – максимум;

б) $\Delta(M_i) < 0$, то екстремуму в даній стаціонарній точці немає;

в) $\Delta(M_i) = 0$, то маємо сумнівний випадок, який потребує додаткових досліджень.

Приклад 1. Дослідити функцію $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 4$ на екстремум.

Розв'язання. 1. Визначаємо стаціонарні точки функції, для цього спочатку знайдемо частинні похідні функції першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 36y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 - 36x.$$

Розв'язуємо систему

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 36y = 0, \\ 6y^2 - 36x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{6}, \\ y^2 - 6x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{6}, \\ \frac{x^4}{36} - 6x = 0, \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{6}, \\ x(x^3 - 216) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{6}, \\ x(x - 6)(x^2 + 6x + 36) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{6}, \\ x_1 = 0, x_2 = 6. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } y_1 = \frac{x_1^2}{6} = \frac{0^2}{6} = 0, \quad y_2 = \frac{x_2^2}{6} = \frac{6^2}{6} = 6.$$

Отже, маємо дві стаціонарні точки $M_1(0; 0)$ та $M_2(6; 6)$.

2. Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x, \quad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -36, \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y.$$

3. Складаємо вираз

$$\Delta = AC - B^2 = 12x \cdot 12y - (-36)^2 = 144xy - 1296.$$

Знаходимо значення Δ в кожній стаціонарній точці. Для точки M_1 маємо:

$$\Delta(M_1) = 144 \cdot 0 \cdot 0 - 1296 = -1296 < 0.$$

Робимо висновок, що в цій точці екстремум не досягається.

У точці M_2

$$\Delta(M_2) = 144 \cdot 6 \cdot 6 - 1296 = 5184 - 1296 = 3888 > 0,$$

тобто екстремум є, $A(M_2) = 72 > 0$, тому в цій точці досягається мінімум, причому $z_{\min} = z(M_2) = z(6; 6) = -428$.

Відповідь. $z_{\min} = z(M_2) = z(6; 6) = -428$.

Для того, щоб знайти найбільше та найменше значення функції у замкненій області, треба:

1. Знайти стаціонарні точки функції, які належать заданій області. Для цього потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

2. Обчислити у стаціонарних точках, які належать заданій області, значення функції.

3. Знайти найбільше та найменше значення функції на кожній лінії, що обмежує область.

4. Порівняти всі отримані значення, найбільше з них буде найбільшим, а найменше – найменшим значенням функції у замкненій області.

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ в замкненому трикутнику, який обмежений осями координат та прямою $x + y + 5 = 0$.

Розв'язання. Зобразимо задану область $D: x = 0, y = 0, x + y + 5 = 0$ (рис. 1.3).

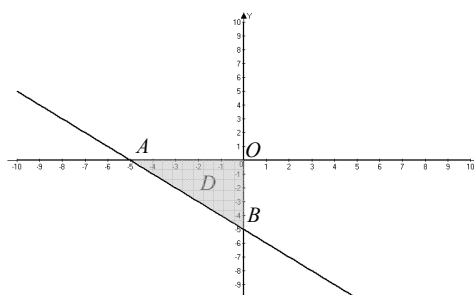


Рис. 1.3

1. Знаходимо стаціонарні точки функції:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 4y + 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = -1. \end{cases}$$

Отже, маємо точку $M(-2; -1) \in D$.

2. Обчислюємо значення функції в цій точці:

$$z_1 = z(M) = z(-2; -1) = -3.$$

3. Дослідимо тепер функцію на границях області. За умовою границя складається з відрізка вісі Ox , відрізка вісі Oy та відрізка прямої AB . Знайдемо координати точок A та B як точок перетину відповідних прямих:

$$\begin{cases} y = 0, \\ x + y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-5; 0),$$
$$\begin{cases} x = 0, \\ x + y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow B(0; -5).$$

а) На вісі Ox $y = 0$, а задана функція при $y = 0$ приймає вигляд:

$$z = x^2 + 3x + 1, x \in [-5; 0].$$

Ця функція – функція однієї незалежної змінної. Оскільки на відріжку $[-5; 0]$ функція z неперервна, то вона досягає на ньому своїх найбільшого та найменшого значень. Ці значення можуть досягатися або в стаціонарних точках (тобто в точках, в яких $\frac{dz}{dx} = 0$), або на кінцях відрізка, що розглядається.

Визначимо стаціонарні точки:

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \in [-5; 0].$$

Отже, маємо стаціонарну точку $M_1\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$. Обчислимо значення функції в цій точці та на кінцях відрізка:

$$z_2 = z(M_1) = z\left(-\frac{3}{2}; 0\right) = -\frac{5}{4},$$

$$z_3 = z(-5; 0) = 11,$$

$$z_4 = z(0; 0) = 1.$$

б) На вісі Oy $x = 0$, а задана функція при $x = 0$ запишеться так:

$$z = 2y^2 + 2y + 1, y \in [-5; 0].$$

Отримана функція є неперервною, тому вона досягає на відріжку $[-5; 0]$ своїх найбільшого та найменшого значень. Спочатку знайдемо стаціонарні точки функції:

$$\frac{dz}{dy} = 4y + 2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \in [-5; 0].$$

Визначаємо значення функції в точці $M_2\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ та на кінцях відрізка:

$$z_5 = z(M_2) = z\left(0; -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$z_6 = z(0; -5) = 41.$$

в) Досліджуємо функцію на відрізку прямої AB . Оскільки за умовою рівняння цієї прямої $x + y + 5 = 0$, то на ній $y = -x - 5$. Підставляючи це значення в задану функцію, отримаємо:

$$z = x^2 - x \cdot (-x - 5) + 2 \cdot (-x - 5)^2 + 3x + 2 \cdot (-x - 5) + 1 = 4x^2 + 26x + 41.$$

Знайдемо найбільше та найменше значення цієї функції за умови, що $x \in [-5; 0]$. Знаходимо похідну:

$$z' = 8x + 26.$$

Похідна рівна нулю при $x = -\frac{13}{4}$. Для цього x значення $y = -\left(-\frac{13}{4}\right) - 5 = -\frac{7}{4}$.

Значення функції в точці $M_3\left(-\frac{13}{4}; -\frac{7}{4}\right)$

$$z_7 = z(M_3) = z\left(-\frac{13}{4}; -\frac{7}{4}\right) = -\frac{5}{4}.$$

На кінцях відрізка, що розглядається, значення функції було вже обчислено вище.

Порівнюючи тепер усі отримані значення функції z_1, \dots, z_7 , обираємо з них найбільше та найменше. Отже, остаточно маємо, що

$$z_{\max_D} = z_6 = z(B) = z(0; -5) = 41,$$

$$z_{\min_D} = z_1 = z(M) = z(-2; -1) = -3.$$

Відповідь. $z_{\min_D} = z(-2; -1) = -3$, $z_{\max_D} = z(0; -5) = 41$.

Умовний екстремум

Нехай в області D задано функцію $z = f(x, y)$ і лінію S , яка визначається рівнянням $\varphi(x, y) = 0$ та лежить у цій області. На цій лінії потрібно знайти точку $M(x, y)$, у якій значення функції $f(x, y)$ є найбільшим або найменшим порівняно із значеннями цієї функції в інших точках кривої S . Такі точки називають точками умовного екстремуму функції $f(x, y)$ на кривій S . На відміну від звичайного екстремуму значення функції в точці умовного екстремуму порівнюються з значеннями функції не в усіх точках області D чи

деякого околу точки M , а лише в точках, що лежать на кривій S , тобто змінні x та y не є незалежними, а пов'язані додатковою умовою $\varphi(x, y) = 0$.

Рівняння $\varphi(x, y) = 0$ називають рівнянням зв'язку. Якщо це рівняння можна розв'язати відносно однієї змінної, наприклад, y , тобто отримати рівняння $y = \psi(x)$, то, підставляючи замість y вираз $\psi(x)$ у функцію $z = f(x, y)$, отримаємо функцію однієї змінної $z = f(x, \psi(x))$. Оскільки умова зв'язку врахована, то задача знаходження умовного екстремуму зводиться до задачі на звичайний екстремум функції однієї змінної. Проте розв'язати рівняння зв'язку відносно змінної y чи x вдається не завжди. Тоді задачу на умовний екстремум розв'язують наступним чином.

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, де змінну y вважаємо функцією змінної x ($y = \psi(x)$), як складену функцію. З необхідної умови екстремуму $\frac{dz}{dx} = 0$ випливає, що у точках екстремуму

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

У цьому випадку $\frac{dy}{dx}$ означає похідну неявної функції y , заданої рівнянням зв'язку $\varphi(x, y) = 0$, тобто $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$. Тому отримуємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} \right) = 0.$$

Звідси отримуємо, що $\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y}$. Позначимо ці співвідношення через $-\lambda$, де

$\lambda \neq 0$. Знак “ $-$ ” тут взято для зручності, а саме число λ може мати довільний знак. Отже, у точці умовного екстремуму повинні виконуватися рівності

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y} = -\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x + \lambda \varphi'_x = 0, \\ f'_y + \lambda \varphi'_y = 0. \end{cases}$$

Отже, стаціонарні точки умовного екстремуму повинні задовольняти систему рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (5.39)$$

Досліджуючи цю систему, помічаємо, що знаходження умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ звелось до знаходження звичайного екстремуму функції

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y). \quad (5.40)$$

Функцію (5.40) називають функцією Лагранжа, а множник λ – множником Лагранжа.

Умови (5.39) є лише необхідними. Вони дають змогу знайти стаціонарні точки умовного екстремуму. Наявність та характер умовного екстремуму, як і у випадку відсутності обмежень, можна встановити за знаком диференціала другого порядку функції Лагранжа. Якщо у стаціонарній точці $d^2L > 0$ ($d^2L < 0$), то ця точка є точкою умовного мінімуму (максимуму).

Для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ з рівняннями зв'язку $\varphi_1(x, y, z) = 0$, $\varphi_2(x, y, z) = 0$ функцію Лагранжа записують у вигляді:

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z). \quad (5.41)$$

Стаціонарні точки умовного екстремуму у цьому випадку визначаються з системи рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0, \\ \varphi_2(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (5.42)$$

Достатні умови існування умовного екстремуму у цьому випадку також визначаються знаком d^2L .

Розглянутий метод можна поширити на дослідження умовного екстремуму функції довільного числа змінних.

Приклад 3. Знайти найбільше значення функції $z = xy$, якщо $x > 0$, $y > 0$,

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0.$$

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа (5.40).

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda \left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right).$$

Запишемо систему (5.39):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0, \\ y + \frac{\lambda x}{4} = 0, \\ x + \lambda y = 0, \\ x > 0, y > 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знаходимо $x=2$, $y=1$, $\lambda=-2$. Маємо стаціонарну точку $M(2,1)$ при $\lambda=-2$. Щоб визначити наявність та тип умовного екстремуму, запишемо другий диференціал функції Лагранжа. З врахуванням того, що це диференціал складеної функції (у розглядаємо як функцію x), формула для другого диференціалу має вигляд (п.5.7):

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial L}{\partial x} d^2x + \frac{\partial L}{\partial y} d^2y.$$

Тут $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{4} = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \lambda = -2$. З рівняння зв'язку знаходимо

зв'язок між диференціалами dy та dx : $\frac{xdx}{4} + ydy = 0$.

Звідси знаходимо $dy = -\frac{x}{4y} dx$, $d^2y = -\frac{1}{4} \frac{ydx - xdy}{y^2} - \frac{1}{4} \frac{x}{y} d^2x$. У точці

$M(2,1)$ $dy = -\frac{dx}{2}$. Оскільки x – незалежна змінна, то $d^2x = 0$. Підставивши у формулу для d^2L значення частинних похідних та вирази для dy і d^2y , отримуємо:

$$d^2L = -\frac{1}{2} dx^2 + 2dx \left(-\frac{1}{2} dx \right) - 2 \left(-\frac{1}{2} dx \right)^2 = -2dx^2 < 0.$$

Оскільки $d^2L < 0$, то точка $M(2,1)$ є точкою умовного максимуму функції $z = xy$. При цьому $z_{\max} = 2 \cdot 1 = 2$.

Цей же результат можна отримати іншим способом: виразити з рівняння зв'язку $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$ y через x (оскільки $y > 0$, то $y = \sqrt{2 - \frac{x^2}{4}}$), а потім дослідити на звичайний безумовний екстремум функцію $z = xy = x\sqrt{2 - \frac{x^2}{4}}$.

Дотична площина та нормаль до поверхні

Приклад 4. Записати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = x^2 + 3y^2$ в точці, абсциса якої $x_0 = 1$, ордината $y_0 = 1$.

Розв’язання. Поверхню задано у явному вигляді. Для побудови рівнянь спочатку знайдемо аплікату точки дотику:

$$z_0 = z(1; 1) = 1^2 + 3 \cdot 1^2 = 4.$$

Отже, точка дотику $M(1; 1; 4)$.

Знаходимо значення частинних похідних у точці M :

$$z'_x = 2x, \quad z'_x(M) = 2 \cdot 1 = 2,$$

$$z'_y = 6y, \quad z'_y(M) = 6.$$

Підставляючи отримані значення та координати точки дотику у рівняння дотичної площини, маємо:

$$2(x-1) + 6(y-1) - (z-4) = 0$$

або після спрощення

$$2x + 6y - z - 4 = 0;$$

та нормалі:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-4}{-1}.$$

Відповідь. Рівняння дотичної площини – $2x + 6y - z - 4 = 0$, нормалі – $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-4}{-1}$.

Приклад 5. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1 = 0$ в точці $M(1; 2; 2)$.

Розв’язання. Позначимо ліву частину рівняння поверхні через $f(x, y, z)$, тобто

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1.$$

Знайдемо значення частинних похідних цієї функції в точці дотику:

$$f'_x = 2x - 4, \quad f'_x(M) = -2,$$

$$f'_y = 2y + 6, \quad f'_y(M) = 10,$$

$$f'_z = 2z - 8, \quad f'_z(M) = -4.$$

Тоді рівняння дотичної площини

$$-2(x-1) + 10(y-2) - 4(z-2) = 0$$

або

$$x - 5y + 2z + 5 = 0;$$

нормаль:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-2}{2}.$$

Відповідь. $x - 5y + 2z + 5 = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-2}{2}$.