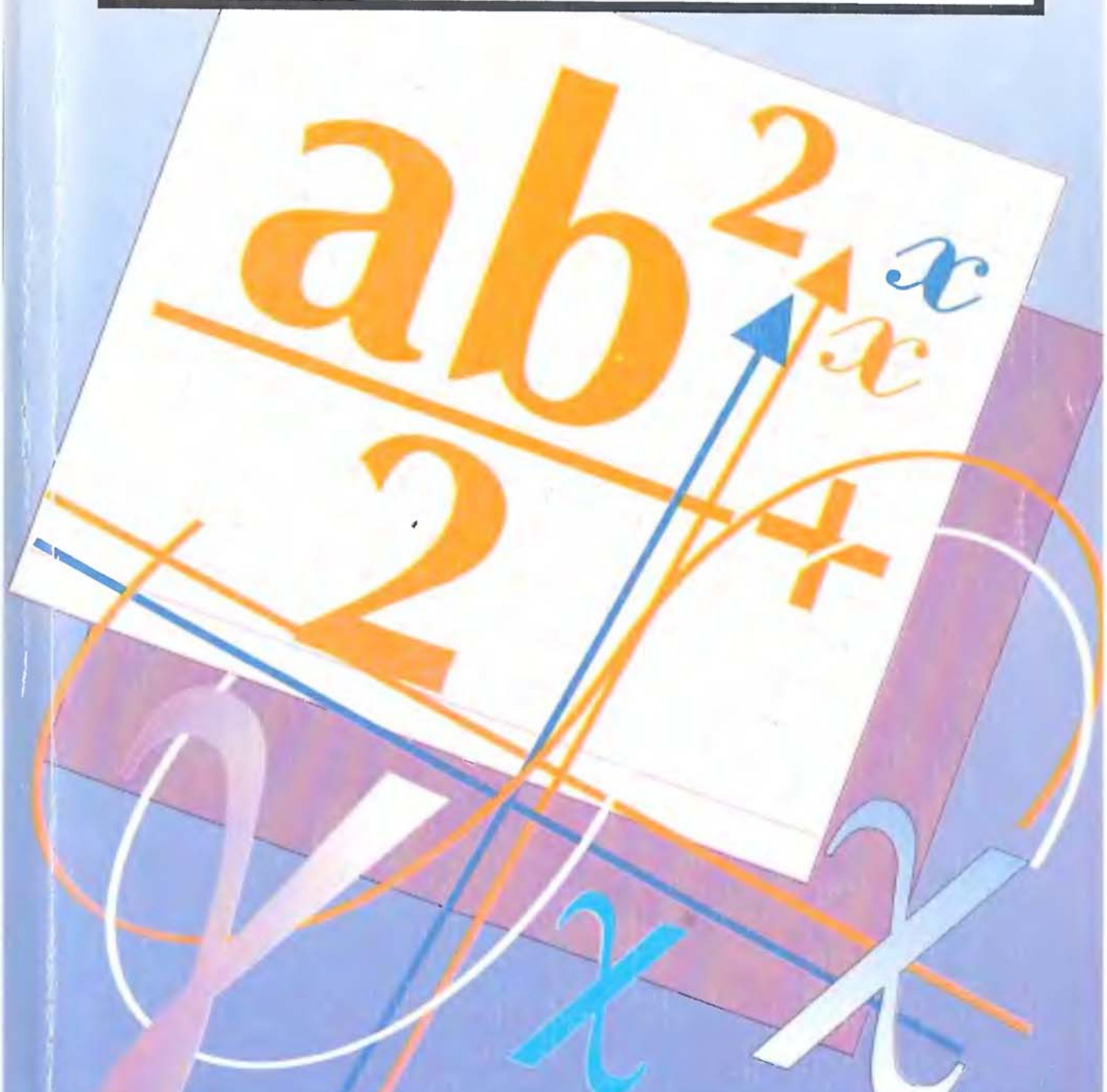
Кладовая школьной математики

П.И. ГОРНШТЕЙН, В.Б. ПОЛОНСКИЙ, М.С. ЯКИР

# ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ



П. И. Горнштейн
В. Б. Полонский
М. С. Якир

# Задачи с параметрами

*3-е издание,*
*дополненное и переработанное*

«ИЛЕКСА»
Москва
2005

ББК 22.17
Г69
УДК 51:37 (076)

*Под редакцией*
*доктора физико-математических наук,*
*профессора Г. В. Дорофеева*

**П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир**
Г69 Задачи с параметрами. 3-е издание, дополненное и переработанное.— М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2005,— 328 с.
ISBN 5-89237-021-6

**Книга содержит более 700 задач с параметрами, большинство из которых предлагалось на вступительных экзаменах в ведущие вузы. Материал пособия, помимо деления на главы и параграфы, разбит на пункты, посвященные определенным типам задач или приемам их решения. Ко всем упражнениям приведены ответы, наиболее сложные задачи снабжены подробными указаниями.**

**Для преподавателей математики, студентов педагогических вузов, слушателей подготовительных отделений, абитуриентов, старшеклассников.**

**ББК 22.17**



**ISBN 5-89237-021-6**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
От авторов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
Предисловие ко второму изданию . . . . . . . . . . . 10

*Глава I.* Знакомство с параметром . . . . . . . . . . . 11

*Глава II.* Аналитические и графические приемы решения задач с параметрами . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23

§1. Аналитические решения основных типов задач . . . . . 23
А. Параметр и поиск решений уравнений, неравенств и их систем ("ветвление") . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23
Б. Параметр и количество решений уравнений, неравенств и их систем . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32
В. Параметр и свойства решений уравнений, неравенств и их систем 41
Г. Параметр как равноправная переменная . . . . . . . . 55

§2. Свойства функций в задачах с параметрами . . . . . . . 64
А. Область значений функции . . . . . . . . . . . . . . 64
Б. Экстремальные свойства функций . . . . . . . . . . . 73
В. Монотонность . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 84
Г. Четность. Периодичность. Обратимость . . . . . . . . 90

§3. Графические приемы. Координатная плоскость $(x; y)$ . . . . . . . . . . . . . . 97
А. Параллельный перенос . . . . . . . . . . . . . . . . 99
Б. Поворот . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .113
В. Гомотетия. Сжатие к прямой . . . . . . . . . . . . .123
Г. Две прямые на плоскости . . . . . . . . . . . . . . .133

§4. Графические приемы. Координатная плоскость $(x; y)$ . . . . . . . . . . . . . .141

*Глава III.* Квадратичная функция . . . . . . . . . . . . . . . . . .159

§1. «Каркас» квадратичной функции . . . . . . . . . . . . . . .159
А. Дискриминант, старший коэффициент . . . . . . . . . . . . . . . .160
Б. Вершина параболы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .171

§2. Корни квадратичной функции . . . . . . . . . . . . . . .178
А. Теорема Виета . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .178
Б. Расположение корней квадратичной функции относительно заданных точек . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .186
В. Задачи, сводящиеся к исследованию расположения корней квадратичной функции . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .202

*Глава IV.* Аналитические и графические приемы (продолжение) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .213

§1. Применение производной . . . . . . . . . . . . . . . . . . .213
А. Касательная к кривой . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .213
Б. Критические точки . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .218
В. Монотонность . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .226
Г. Наибольшие и наименьшие значения функции. Оценки . . . . .231
Д. Построение графиков функций . . . . . . . . . . . . . . . . . . .238

§2. Методы поиска необходимых условий . . . . . . . . . . .244
А. Использование симметрии аналитических выражений . . . . . .245
Б. «Выгодная точка» . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .257
В. Разные приемы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .267

Ответы и указания . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .279

Список условных обозначений и принятых сокращений . . .324

Список использованной и рекомендуемой литературы . . .325

## Предисловие редактора

Читатель держит перед собой книгу, примечательную по крайней мере в двух отношениях. Эта книга показывает, прежде всего, что так называемая элементарная математика (а быть может, просто школьная математика) даже в ограниченном контексте — задачи с параметрами — представляет собой весьма широкое поле для полноценной математической деятельности — во всяком случае более широкое, чем многочисленные и зачастую вполне алгоритмические задачи на вычисление пределов, производных и интегралов, которыми наполнены практические занятия студентов по «высшей математике».

Оказывается, хотя это и не открытие авторов данной книги, что решение задач, а точнее, уравнений и неравенств с параметрами, открывает перед учащимися значительное число эвристических приемов общего характера, ценных для математического развития личности, применимых в исследованиях и на любом другом математическом материале. Это касается и идеи симметрии аналитических выражений, и применения свойств функций в неожиданных (для решающего) ситуациях (в том числе нестандартных для школьной математики применениях средств математического анализа), и освоения геометрических приемов решения задач как равноправных, по существу, с аналитическими методами и т.п.

В этом плане авторы собрали и систематизировали, как мне кажется, практически все, что могла предоставить практика конкурсных экзаменов в высшие учебные заведения в течение двух-трех последних десятилетий. Нельзя не подчеркнуть при этом, что основная систематизация проведена авторами не по конкретным, зачастую случайным особенностям задач, например по виду функций, входящих в уравнение или неравенство, но прежде всего по особенностям математической деятельности, необходимой для решения задачи. Конечно, это достоинство систематизации так же, как и охват огромного материала, имеет в качестве продолжения и определенные недостатки, но о недостатках во вступительном слове говорить не принято.

Эта книга показывает, кроме того, насколько далеко практика вступительных экзаменов оторвалась от школы, насколько велики “ножницы” между требованиями, которые предъявляет к своему выпускнику школа, и требованиями, которые предъявляет к своему поступающему вуз, особенно вуз высокого уровня. Когда школьник, особенно приехавший в какой-нибудь столичный вуз издалека и увидевший такого рода задачи только на вступительном экзамене или на предэкзаменационной консультации, должен был научиться их решеать, а точнее — освоить необходимые приемы рассуждений? Кто должен был ознакомить его с этими задачами и приемами рассуждений?

Очевидно, одним из способов устранения указанных “ножниц” может быть издание массовой литературы, посвященной трудным вопросам школьной математики, важным для поступления в вуз, но не рассматривающимся, по разным причинам, в школьном курсе. Настоящая книга и представляет собой издание соответствующего назначения.

К сожалению, однако, и она не дает ответа на вопрос, в какое время и как школьник должен осваивать содержащийся в ней материал, но если его освоит учитель, то он, разумеется, сумеет найти способы приобщения к нему и своих учеников. Конечно, многие учащиеся смогут осваивать последовательно материал этой книги, но, полагаю, это будет заведомо менее эффективно, чем работать под руководством учителя. Очень невредно будет, кстати, если книга станет пособием для студентов педагогических институтов, будущих учителей математики, у которых также задачи с параметрами вызывают, как минимум, робость.

Я уверен, что книга должна найти и найдет своего читателя...

Доктор физико-математических наук, профессор
*Г.В.Дорофеев*

## От авторов

Нередко после очередного сезона вступительных экзаменов со стороны «пострадавших» абитуриентов и их родителей звучат в адрес приемных комиссий различные упреки, в том числе и по содержанию конкурсного задания. Как правило, неудачники сетуют на то, что им «попалась» задача, которую в школе «не проходили».

На такие претензии у экзаменаторов зачастую заготовлен стандартный ответ: математическое содержание задачи не выходит за пределы программы для поступающих.

Не обобщая на все конкретные случаи, возьмем на себя смелость сказать, что в подобном ответе доля лукавсва есть: ни для кого не секрет, что вузы с большим курсом математики включают в билеты задачи, решить которые, как правило, можно, пройдя специальную целенаправленную подготовку (имеется в виду так называемая практика "пятых заданий"). И ничего предосудительного в этом нет. Хозяин — барин, т.е. каждый вуз предъявляет свои требования к уровню математической подготовки будущего студента. Вопрос лишь в том, насколько конкурсная задача повышенной сложности обладает диагностической ценностью. Иными словами, можно ли с помощью этой задачи проверить знание основных разделов школьной математики, уровень математического и логического мышления, первоначальные навыки исследовательской деятельности, а главное, перспективные возможности успешного овладения курсом математики данного вуза.

По-нашему мнению, такой диагностической и прогностической ценностью в полной мере обладают задачи с параметрами. И, по-видимому, далеко не случайно эти задачи стали неотъемлемым атрибутом экзаменационных билетов многих институтов.

Как известно, решению задач с параметрами в школе уделяется очень мало внимания. Поэтому трудно рассчитывать на то, что учащиеся, подготовка которых не содержала «параметрическую терапию», смогут в жесткой атмосфере конкурсного экзамена успешно справиться с подобными задачами.

Совершенно очевидно, что к «встрече» с такими задачами надо специально готовиться. Этому, возможно, поможет настоящее пособие.

Вместе с тем нам бы не хотелось, чтобы сказанное сформировало у читателя неверное представление о задачах с параметрами как об искусственной преграде на пути к поступлению в вуз. Даже если бы эти задачи не предлагались на вступительных экзаменах, то все равно в школьной математике, особенно в специализированных классах и школах, задачам с параметрами должно уделяться большое внимание. В этом авторы, школьные учителя, глубоко убеждены: ведь известно, какую роль играют данные задачи в формировании логического мышления и математической культуры у школьников. Поэтому учащиеся, владеющие методами решения задач с параметрами, успешно справляются (и опыт это подтверждает) с другими задачами. Этот факт позволяет авторам надеяться на широкую возможность использования настоящего пособия в работе школьного учителя.

Книга содержит более 700 задач, подавляющее большинство из которых предлагалось на вступительных экзаменах в ведущие вузы. Для таких задач в скобках указана аббревиатура соответствующего вуза. При этом нам нередко встречались одни и те же задачи, но в билетах различных вузов. В подобных ситуациях мы старались указывать тот источник, где эта задача предлагалась раньше. Однако по понятным причинам мы не исключаем возможность ошибки при ссылке на первоисточник, за что заранее просим извинения. Также отметим, что в условия некоторых задач мы внесли незначительные поправки.

Весь материал пособия помимо деления на главы и параграфы разбит на пункты. Каждый пункт посвящен определенному типу задач или приему их решения. Поэтому мы посчитали целесообразным упражнения для самостоятельной работы приводить сразу после соответствующего пункта. Ко всем упражнениям приведены ответы.

Поскольку книга уделяет большое внимание методам и приемам решения задач, то мы старались, где это представлялось уместным, приводить иное решение ранее разобранной задачи. Такие задачи снабжены двойной (а иногда и тройной) нумерацией.

Понятно, что в решении каждой задачи можно выделить идейную и техническую части. Уделяя особое внимание первой, признаемся, что степень подробности изложения второй ниже той, которой следовало бы придерживаться абитуриенту при оформлении работы. Но этот недостаток, вероятно, читатель сможет устранить самостоятельно.

## Предисловие ко второму изданию

Со времени выхода в свет первого издания мы получили немало откликов, содержащих в том числе некоторые предложения по улучшению настоящей книги. Учитывая эти полезные советы, в настоящем издании мы посчитали целесообразным наиболее трудные и поучительные упражнения снабдить подробными указаниями. Кроме того, в текст книги внесены незначительные дополнения и исправления.

В заключение хотелось бы выразить особую благодарность учителям математики А.Г. Мерзляку и А.В. Бедову, чья дружеская помощь в процессе работы над книгой во многом способствовала ее улучшению.

# Глава I

## ЗНАКОМСТВО С ПАРАМЕТРОМ

Эта небольшая по объему глава адресована в первую очередь читателям, имеющим минимальное представление о задачах с параметрами.

Известно, что в программах по математике для неспециализированных школ этим задачам отводится незначительное место. Поэтому, в первую очередь, укажем разделы общеобразовательной математики, в которых вообще присутствует сама идея параметра.

Так, с параметрами учащиеся встречаются при введении некоторых понятий. Не приводя подробных определений, рассмотрим в качестве примеров следующие объекты:

- функция прямая пропорциональность: $y = kx$ ($x$ и $y$ — переменные; $k$ — параметр, $k \neq 0$);
- линейная функция: $y = kx+b$ ($x$ и $y$ — переменные; $k$ и $b$ — параметры);
- линейное уравнение: $ax + b = 0$ ($x$ — переменная; $a$ и $b$ — параметры);
- уравнение первой степени: $ax + b = 0$ ($x$ — переменная; $a$ и $b$ — параметры, $a \neq 0$);
- квадратное уравнение: $ax^2 + bx + c = 0$ ($x$ — переменная; $a$, $b$ и $c$ — параметры, $a \neq 0$).

К задачам с параметрами, рассматриваемым в школьном курсе, можно отнести, например, поиск решений линейных и квадратных уравнений в общем виде, исследование количества их корней в зависимости от значений параметров.

Естественно, такой небольшой класс задач многим не позволяет усвоить главное: параметр, будучи фиксированным, но неизвестным числом, имеет как бы двойственную природу. Во-первых, предполагаемая известность позволяет «общаться» с параметром как с числом, а во-вторых, — степень свободы общения ограничивается его неизвестностью. Так, деление на выражение, содержащее параметр, извлечение корня четной степени из подобных выражений требуют предварительных исследований. Как правило, результаты этих исследований влияют и на решение, и на ответ.

Основное, что нужно усвоить при первом знакомстве с параметром, — это необходимость осторожного, даже, если хотите, деликатного обращения с фиксированным, но неизвестным числом. Этому, по нашему мнению, во многом будут способствовать примеры настоящей главы.

Необходимость аккуратного обращения с параметром хорошо видна на тех примерах, где замена параметра числом делает задачу банальной. К таким задачам, например, относятся: сравнить два числа, решить линейное или квадратное уравнение, неравенство и т.д.

Рассмотрим ряд примеров.

**I.1.** Сравнить $-a$ и $3a$.

*Решение.* Естественно рассмотреть три случая:

если $a < 0$, то $-a > 3a$;

если $a = 0$, то $-a = 3a$;

если $a > 0$, то $-a < 3a$.

**I.2.** Решить уравнение $ax = 1$.

*Решение.* На первый взгляд представляется возможным сразу дать ответ: $x = \frac{1}{a}$. Однако при $a = 0$ данное уравнение решений не имеет, и верный ответ выглядит так:

*Ответ.* Если $a = 0$, то нет решений; если $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$.

**I.3.** Решить уравнение $(a^2-1)x = a+1$.

*Решение.* Нетрудно сообразить, что при решении этого уравнения достаточно рассмотреть такие случаи:

1) $a = 1$; тогда уравнение принимает вид $0x = 2$ и не имеет решений;

2) $a = -1$; получаем $0x = 0$, и очевидно $x$ — любое.

3) $a \neq \pm 1$; имеем $x = \frac{1}{a-1}$.

Сделаем одно замечание. Существенным этапом решения задач с параметрами является запись ответа. Особенно это относится к тем примерам, где решение как бы «ветвится» в зависимости от значений параметра. В подобных случаях составление ответа — это сбор ранее полученных результатов. И здесь очень важно не забыть отразить в ответе все этапы решения.

В только что разобранном примере запись ответа практически повторяет решение. Тем не менее мы считаем целесообразным привести

*Ответ.* Если $a = -1$ , то $x$ – любое; если $a = 1$, то нет решений; если $a \neq \pm 1$ , то $x = \frac{1}{a-1}$.

**I.4.** Решить неравенство $ax < 1$.

*Решение.* Как и ранее, анализ трех возможностей $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$ позволяет получить следующий

*Ответ.* Если $a < 0$,то $x > \frac{1}{a}$; если $a = 0$, то $x$ — любое; если $a > 0$, то $x < \frac{1}{a}$.

В плане рассматриваемых вопросов полезно разобрать следующие два примера.

**I.5.** Решить неравенство $|x+3| > -a^2$.

*Решение.* Ясно, что при $a \neq 0$ правая часть неравенства отрицательна, и тогда при любом $x$ левая часть больше правой. В случае, когда $a = 0$, важно не упустить, что исходному неравенству удовлетворяют все действительные числа, кроме $x = -3$.

*Ответ.* Если $a \neq 0$, то $x$ — любое; если $a = 0$, то $x < -3$ или $x > -3$.

**I.6.** Решить уравнение $|x^2-1| + |a(x-1)| = 0$.

*Решение.* Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} |x^2-1| = 0, \\ |a(x-1)| = 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{cases} x^2-1 = 0, \\ a(x-1) = 0. \end{cases}$$

При $a \neq 0$ второе уравнение системы, а значит, и сама система, имеет единственное решение $x = 1$. Если же $a = 0$, то из второго уравнения получаем $x$ — любое. Следовательно, в этом случае система имеет два решения: $x = 1$ или $x = -1$.

*Ответ.* Если $a \neq 0$, то $x = 1$; если $a = 0$, то $x = \pm 1$.

Обратим внимание, что во всех решенных примерах областью допустимых значений как для переменной, так и для параметра являлось все множество действительных чисел. Разумеется, следует познакомиться с задачами иного рода.

**I.7.** Решить уравнение $\sqrt[3]{x} = a^{1/3}$.

*Решение.* Легко увидеть, что $x = a$ — единственный корень данного уравнения. Однако, этот результат — еще не ответ. Специфика задач с параметрами предполагает даже в таком тривиальном уравнении, как $x - a = 0$, отмечать, что $x = a$ — корень при любом $a$. Итак,

*Ответ.* Если $a \geq 0$ , то $x = a$; если $a < 0$, то нет решений.

**I.8.** Решить уравнение $\dfrac{x-a}{x-1} = 0$.

*Решение.* Как и в предыдущем примере, $x = a$ — единственный корень. Понятно, что условие $x \neq 1$ влечет за собой требование $a \neq 1$.

*Ответ.* Если $a \neq 1$, то $x = a$; если $a = 1$, то нет решений.

**I.9.** Решить неравенство $(a-1)\sqrt{x} \leq 0$.

*Решение.* Понятно, что ответ зависит от знака двучлена $a-1$ . При $a \leq 1$ очевидно данному неравенству удовлетворяет любое значение $x$ из области определения, т.е. $x \geq 0$. При $a > 1$ левая часть неравенства неотрицательна, поэтому в рассматриваемом случае $x = 0$ — единственное решение.

*Ответ.* Если $a \leq 1$, то $x \geq 0$; если $a > 1$, то $x = 0$.

**I.10.** Решить уравнение $(x-1)\sqrt{x-a} = 0$.

*Решение.* Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x \geq a, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = a. \end{array}\right. \end{cases}$$

Отсюда $x = a$ — корень исходного уравнения при любом $a$, а $x = 1$ — корень лишь при $a \leq 1$.

*Ответ.* Если $a < 1$, то $x = a$ или $x = 1$; если $a = 1$, то $x = 1$; если $a > 1$, то $x = a$.

Выскажем два соображения по поводу роли параметра в приведенных примерах I.1 — I.10. Во-первых, искомые значения $x$ выступали в роли зависимой переменной, а параметр — независимой. Отсюда и возникло «расслоение» решения с учетом определенных значений параметра. Во-вторых, условие задач отводило параметру скромное место, — не ясно было, повлияет ли его присутствие на ход решения.

Дальнейшее знакомство с параметром поведем в несколько ином направлении.

Выделим класс задач, где за счет параметра на переменную накладываются какие-либо искусственные ограничения. Для таких задач характерны следующие формулировки: *при каком значении параметра уравнение (неравенство, система) имеет одно решение, два, бесконечно много, ни одного; решением уравнения (неравенства, системы) является какое-то подмножество множества действительных чисел и др.*

Обратимся к конкретным примерам.

**I.11.** При каких $a$ неравенство $(x-a)(x-2) \leqslant 0$ имеет единственное решение?

*Решение.* Легко догадаться, что $a = 2$ удовлетворяет требованию задачи. Действительно, при $a = 2$ получаем неравенство $(x-2)^2 \leqslant 0$, имеющее единственное решение. Для случая, когда $a \neq 2$, решением неравенства очевидно будет отрезок.

*Ответ.* $a = 2$.

**I.12.** При каких $a$ решением неравенства $(x-a)^2(x-2)(x+3) \leqslant 0$ будет отрезок?

*Решение.* Так как $(x-a)^2 \geqslant 0$, то данное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}(x-2)(x+3) \leqslant 0,\\ x = a.\end{array}\right.$$

Решением неравенства совокупности будет отрезок $[-3; 2]$. Следовательно, при $a \in [-3; 2]$ решением совокупности также будет отрезок.

*Ответ.* $-3 \leqslant a \leqslant 2$.

**I.13.** При каких $a$ уравнение $ax^2-x+3 = 0$ имеет единственное решение?

*Решение.* Прежде всего обратим внимание на распространенную ошибку: считать исходное уравнение квадратным. На самом деле это уравнение степени не выше второй. Пользуясь этим соображением, естественно начать решение, рассмотрев случай, когда $a = 0$. Итак, если $a = 0$, то очевидно данное уравнение имеет единственное решение. Если же $a \neq 0$, то имеем дело с квадратным уравнением. Его дискриминант $1-12a$ принимает значение, равное нулю, при $a = \frac{1}{12}$.

*Ответ.* $a = 0$ или $a = \frac{1}{12}$.

**I.14.** При каких $a$ уравнение $(a-2)x^2 +(4-2a)x +3 = 0$ имеет единственное решение?

*Решение.* Понятно, что надо начинать со случая $a = 2$. Но при $a = 2$ исходное уравнение вообще не имеет решений. Если $a \neq 2$, то данное уравнение — квадратное, и, казалось бы, искомые значения параметра — это корни дискриминанта. Однако дискриминант обращается в нуль при $a = 2$ или $a = 5$. Поскольку мы установили, что $a = 2$ не подходит, то

*Ответ.* $a = 5$.

Вероятно, в двух последних примерах ничего сложного нет (тем более, если они уже решены). Однако, на наш взгляд, параметр в этих задачах проявляет свое «коварство», особенно для начинающих. Поэтому полезно рассмотреть еще несколько примеров, где параметр «расставляет ловушки».

**I.15.** При каких $a$ уравнение $ax^2- 4x+a+3 = 0$ имеет более одного корня?

*Решение.* При $a = 0$ уравнение имеет единственный корень, что не удовлетворяет условию. При $a \neq 0$ исходное уравнение, будучи квадратным, имеет два корня, если его дискриминант $16-4a^2-12a$ — положительный. Отсюда получаем $-4<a<1$. Однако в полученный промежуток $(-4; 1)$ входит число 0, которое, как мы уже проверили, неприемлемо.

*Ответ.* $-4<a<0$ или $0<a<1$.

**I.16.** При каких $a$ уравнение $a(a+3)x^2+(2a+6)x-3a-9 = 0$ имеет более одного корня?

*Решение.* Стандартный шаг — начать со случаев $a = 0$ и $a = -3$. При $a = 0$ уравнение имеет единственное решение. Любопытно, что при $a = -3$ решением уравнения служит любое действительное число. При $a \neq -3$ и $a \neq 0$, разделив обе части данного уравнения на $a + 3$, получим квадратное уравнение $ax^2 + 2x - 3 = 0$, дискриминант которого $4(1 + 3a)$ положителен при $a > -\frac{1}{3}$. Опыт предыдущих примеров подсказывает, что из промежутка $\left(-\frac{1}{3};\infty\right)$ надо исключить точку $a = 0$, а в ответ не забыть включить $a = -3$.

*Ответ.* $a = -3$, или $-\frac{1}{3} < a < 0$, или $a > 0$.

I.17. При каких $a$ уравнение$(\sqrt{x}-1)(x-a) = 0$ имеет единственное решение?

*Решение.* При любом $a$ $x = 1$ — корень данного уравнения, и требование единственности решения сводит задачу к поиску условий, при которых уравнению «запрещено» иметь корни, отличные от единицы. В то же время множитель $x - a$ как бы предлагает еще один корень $x = a$, и, на первый взгляд, значение $a = 1$ представляется достаточным для ответа. Но более внимательный анализ позволяет «отмести» $x = a$ за счет области определения уравнения: при $a < 0$ $x = a$ не является корнем.

*Ответ.* $a = 1$ или $a < 0$.

Заметим, что если начать решение с записи равносильной уравнению системы, а именно

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = a, \\ x = 1, \end{array}\right. \end{cases}$$

то, возможно, мы уменьшим вероятность того, что в ответ не войдет промежуток $(-\infty, 0)$.

Завершим рассматриваемый цикл задач еще одним поучительным примером.

I.18. При каких $a$ уравнение $\frac{x^2-ax+1}{x+3} = 0$ имеет единственное решение?

*Решение.* Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-ax+1= 0, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

Наличие квадратного уравнения и условие единственности решения, естественно, приведут к поиску корней дискриминанта. Вместе с тем условие $x \neq -3$ должно привлечь внимание. И «тонкий момент» заключается в том, что квадратное уравнение системы может иметь два корня! Но обязательно только один из них должен равняться $-3$. Имеем $D = a^2-4$, отсюда $D = 0$, если $a = \pm 2$; $x = -3$ — корень уравнения $x^2-ax+1 = 0$ при $a = -\frac{10}{3}$, причем при таком значении $a$ второй корень квадратного уравнения отличен от $-3$.

*Ответ.* $a = \pm 2$ или $a = -\frac{10}{3}$.

Как мы отмечали, в примерах I.11 — I.18, благодаря параметру регулировались свойства решений уравнений (неравенств). Продолжая эту тему, покажем, как параметр влияет на условия равносильности уравнений и неравенств.

**I.19.** При каких $a$ уравнения $x^2-a = 0$ и $\sqrt{x}-a = 0$ равносильны?

*Решение.* Очевидно, что при $a > 0$ первое уравнение имеет два различных корня, а второе — только один, и в этом случае о равносильности речь идти не может. Так же ясно, что при $a = 0$ решения уравнений совпадают. При $a < 0$ ни первое, ни второе уравнения решений не имеют. Однако, как известно, такие уравнения считаются равносильными.

*Ответ.* $a \leqslant 0$.

**I.20.** При каких $a$ уравнение $ax = a^2$ равносильно неравенству $|x-3| \geqslant a$?

*Решение.* При $a \neq 0$ уравнение имеет единственное решение, а неравенство – бесконечно много. Если $a = 0$, то решением как уравнения, так и неравенства является все множество действительных чисел. Следовательно, требованию задачи удовлетворяет только $a = 0$.

*Ответ.* $a = 0$.

**I.21.** При каких $a$ неравенство $2x+a > 0$ является следствием неравенства $x+1-3a > 0$?

*Решение.* Перепишем данные неравенства в виде $x > -\frac{a}{2}$ и $x > 3a-1$. Учитывая условие, отметим, что множество решений неравенства $x > -\frac{a}{2}$ должно содержать множество решений неравенства $x > 3a-1$. Это требование выполняется, если $-\frac{a}{2} \leqslant 3a-1$, т.е. $a \geqslant \frac{2}{7}$.

*Ответ.* $a \geq \frac{2}{7}$.

**I.22.** При каких $a$ неравенство $x > a$ является следствием неравенства $|x| < a$?

*Решение.* Нетрудно догадаться, что $a > 0$ не подходит. Действительно, при $a > 0$ рассматриваемые неравенства не имеют ни одного общего решения. При $a \leq 0$ неравенство $|x| < a$ не имеет решений. А это нас устраивает, так как неравенство $x > a$, играющее роль неравенства-следствия, имеет решения.

*Ответ.* $a \leq 0$.

Надеемся, что самостоятельное решение упражнений создаст неплохой задел для дальнейшей работы.

## Упражнения

Решить уравнения (I.23–I.53):

**I.23.** $(a^2 - 4)x = a + 2$.

**I.24.** $(a^2 - 6a + 5)x = a - 1$.

**I.25.** $ax = b$.

**I.26.** $\dfrac{x-2}{x+a} = 0$.

**I.27.** $\dfrac{x-a}{x+3} = 0$.

**I.28.** $\dfrac{x-a}{a-2} = 0$.

**I.29.** $\dfrac{x-7}{x^2-a^2} = 0$.

**I.30.** $\dfrac{x+2a}{x+a} = 0$.

**I.31.** $\dfrac{x-a}{x^2-4x+3} = 0$.

**I.32.** $\dfrac{x^2-4x+3}{x-a} = 0$.

**I.33.** $\dfrac{a(x-2)}{x-a} = 0$.

**I.34.** $\dfrac{a(x-a)}{x-2} = 0$.

**I.35.** $\sqrt{x-3} = a$.

I.36. $\sqrt{x} = -a$.

I.37. $a\sqrt{x} = 0$.

I.38. $(x - a)\sqrt{x - 1} = 0$.

I.39. $\dfrac{x - a}{\sqrt{x - 1}} = 0$.

I.40. $(x - 1)\sqrt{x + a} = 0$.

I.41. $\dfrac{x - 1}{\sqrt{x + a}} = 0$.

I.42. $\sqrt{x}\sqrt{x - a} = 0$.

I.43. $(x - a)\sqrt{x + a} = 0$.

I.44. $(x + a)\sqrt{x - a} = 0$.

I.45. $(x - a)\sqrt{x^2 - 1} = 0$.

I.46. $(x^2 - 1)\sqrt{x - a} = 0$.

I.47. $\sqrt{x} + \sqrt{x + a} = 0$.

I.48. $\sqrt{x - 1} + a^2\sqrt{x} = 0$.

I.49. $a^2\sqrt{x - 1} + \sqrt{x} = 0$.

I.50. $|x| = a$.

I.51. $|x - 3| + a^2|x| = 0$.

I.52. $\sqrt{x - 3} + a^2|x| = 0$.

I.53. $a^2\sqrt{x - 3} + |x| = 0$.

Решить неравенства (I.54.–I.76.):

I.54. $x(x - a) < 0$.

I.55. $(x - a)(x - 2a) < 0$.

I.56. $(x - a)^2(x - 2a) < 0$.

I.57. $(x - a)^2(x - 2a) \leqslant 0$.

I.58. $\sqrt{x} + a^2 \leqslant 0$.

I.59. $a\sqrt{x} > 0$.

I.60. $a\sqrt{x} \leqslant 0$.

I.61. $\sqrt{x} > a$.

I.62. $\sqrt{x} \leqslant a$.

I.63. $\sqrt{x} + \sqrt{x - a} > 0$.

I.64. $(x - a)\sqrt{x} \geqslant 0$.

I.65. $x\sqrt{x - a} \leqslant 0$.

I.66. $|x - 1|\sqrt{x + a} > 0$.

I.67. $\dfrac{\sqrt{x - a}}{|x - 2|} \geqslant 0$.

**I.68.** $|x-2|<a$.

**I.69.** $|x^2+a|\leqslant 0$.

**I.70.** $|x|(x+a)\leqslant 0$.

**I.71.** $|x|(x-a)>0$.

**I.72.** $(x-1)|x-a|\geqslant 0$.

**I.73.** $(x-2)|x+a|<0$.

**I.74.** $a2^x\leqslant a^2$.

**I.75.** $a^2 2^x>a$.

**I.76.** $x^2-2x+2^{|a|}>0$.

**I.77.** При каких $a$ система

$$\begin{cases} x>3,\\ x\leqslant a\end{cases}$$

не имеет решений?

**I.78.** При каких $a$ система

$$\begin{cases} x\geqslant 5,\\ x\leqslant 3-a\end{cases}$$

имеет единственное решение?

**I.79.** При каких $a$ существует ровно три целых числа, являющихся решением системы неравенств

$$\begin{cases} x\geqslant 2,\\ x<a?\end{cases}$$

**I.80.** При каких $a$ решением системы

$$\begin{cases} x>3,\\ x\geqslant a\end{cases}$$

является промежуток *а*) $(3;\ \infty)$; *б*) $[5;\ \infty)$?

**I.81.** При каких $a$ уравнение $(a+4)x^2+6x-1=0$ имеет единственное решение?

**I.82.** При каких $a$ уравнение $(2a+8)x^2-(a+4)x+3=0$ имеет единственное решение?

**I.83.** При каких $a$ уравнение

*а*) $(a+6)x^2-8x+a=0$;

*б*) $a(2a+4)x^2-(a+2)x-5a-10=0$

имеет более одного решения?

**I.84.** Найти все значения параметра $a$, при которых графики функций $y=(a+5)x^2-7$ и $y=(3a+15)x-4$ не имеют общих точек?

**I.85.** При каких $a$ неравенство $(x-a)\sqrt{x+3} \leqslant 0$ имеет единственное решение?

**I.86.** Найти все значения $a$, при которых уравнение

*а*) $(x-a)(\sqrt{x}-9)=0$,

*б*) $(x-a)\log_2 x=0$,

*в*) $(x-3)\log_2 a=0$,

*г*) $(x-a)\arccos(x+3)=0$,

*д*) $(x-1)\arccos a=0$

имеет единственное решение?

**I.87.** При каких $a$ решением неравенства $(x-a)^2(x+4) \geqslant 0$ является луч?

**I.88.** При каких $a$ неравенство $2x-a>0$ является следствием неравенства $x+2a-3>0$?

**I.89.** При каких $a$ из неравенства $0<x<1$ следует неравенство $x^2-a^2 \leqslant 0$?

**I.90.** Найти все значения $a$, при которых уравнение $(\sqrt{x}-1)\log_3(1-a)=0$ равносильно неравенству $a\sqrt{x} \leqslant 0$.

**I.91.** Найти все значения $a$, при которых уравнения $\sin x = a-3$ и $\sqrt{x+3}=2a+1$ равносильны.

**I.92.** (ЛГУ). При каких $a$ большее из двух чисел $5a-1$ и $|2a|$ равно квадрату меньшего?

# Глава II

# АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

## §1. Аналитические решения основных типов задач

Знакомиться с какой-либо задачей — это фактически знакомиться с методами ее решения. Так, в первой главе читатель, по сути дела, начал изучение аналитического метода решения задач с параметрами. В настоящем параграфе мы продолжим работу в этом направлении.

Прежде чем перейти непосредственно к задачам, сделаем ряд замечаний общего характера. Во-первых, вниманию читателя будут предложены более сложные примеры, что представляется естественным. Во-вторых, в соответствии с целью этой главы, мы попытаемся классифицировать задачи с позиций применения к ним аналитических методов исследования. Причем основой выбора примеров будет служить не внешняя их принадлежность к какому-либо разделу элементарной математики, а в первую очередь то, насколько наглядно они иллюстрируют метод решения.

### А. Параметр и поиск решений уравнений, неравенств и их систем (“ветвление”).

Примененный нами в гл. I нематематический термин «ветвление» в большой степени характеризует процесс решения тех задач, где параметр «управляет» поиском значений переменной. Сказанное в полной мере относится к уравнениям (неравенствам, системам), содержащим параметр. Действительно, поскольку уравнения с параметром — на самом деле целый класс уравнений, то решать надо сразу весь этот класс, что, естественно, влечет за собой необходимость разбора различных случаев в зависимости от определенных значений параметра (см. , например, I. 2 — I. 10).

II.1. (МИЭМ). Решить уравнение

$$1-\frac{3}{x+a-1}=\frac{5a}{(x+a-1)(x+1)}$$

*Решение.* Переходим к уравнению-следствию:

$$(x+a-1)(x+1)-3(x+1)=5a,$$
$$x^2+x(a-3)-4a-4=0.$$

Отсюда $x_1=4$, $x_2=-a-1$. Для того чтобы найденные значения перменной были корнями исходного уравнения, достаточно потребовать: $x_1 \neq 1-a$, $x_2 \neq -1$, $x_1 \neq -1$, $x_2 \neq 1-a$. Выполнение двух последних требований — очевидно. Если $x_1=1-a$, т.е. $4=1-a$, то $a=-3$. Следовательно, при $a=-3$ значение $x_1=4$ не является корнем данного уравнения. Здесь важно не сделать ошибочный вывод, что при $a=-3$ вообще нет корней. На самом деле, для $a=-3$ имеем $x_2=2$, и ничто не мешает $x_2=2$ быть корнем исходного уравнения.

Если $x_2=-1$ ,т.е. $-a-1=-1$, то $a=0$. Отсюда при $a=0$ $x_2$ — не корень, а $x_1$ — корень данного уравнения. Соберем полученные результаты в

*Ответ.* Если $a=-3$, то $x=2$; если $a=0$, то $x=4$; если $a \neq 0$ и $a \neq -3$, то $x=4$ или $x=-a-1$.

II.2. (МИФИ). Решить уравнение

$$\frac{2^x+3}{2^x-2}+\frac{2^x+7}{2^x-4}=\frac{2a}{4^x-6\cdot 2^x+8}.$$

*Решение.* Пусть $2^x=y$, где $y>0$. Получаем:

$$\frac{y+3}{y-2}+\frac{y+7}{y-4}=\frac{2a}{(y-2)(y-4)}. \qquad (*)$$

Запишем уравнение-следствие:

$$(y+3)(y-4)+(y+7)(y-2)=2a, \text{ или } y^2+2y-13-a=0.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения равен $4(14+a)$. Следовательно, при $a<-14$ исходное уравнение корней не имеет. Для $a \geqslant -14$ получаем $y_1 = -1 - \sqrt{14 + a}$, $y_2 = -1 + \sqrt{14 + a}$. Так как $y > 0$, то $y_1$ не подходит. Для $y_2$ получаем $-1 + \sqrt{14 + a} > 0$, откуда $a > -13$.

Очевидно $y_2$ — корень уравнения (*), если $y_2 \neq 2$ и $y_2 \neq 4$, т.е.

$$\begin{cases} \sqrt{14 + a} - 1 \neq 2, \\ \sqrt{14 + a} - 1 \neq 4. \end{cases}$$

Отсюда $a \neq 11$ и $a \neq -5$.

Итак, исходное уравнение при $a > -13$, $a \neq 11$, $a \neq -5$ равносильно уравнению $2^x = \sqrt{14 + a} - 1$. Получаем $x = \log_2(\sqrt{14 + a} - 1)$.

*Ответ.* Если $a > -13$, $a \neq 11$, $a \neq -5$, то $x = \log_2(\sqrt{14 + a} - 1)$; если $a \leqslant -13$, или $a = 11$, или $a = -5$, то уравнение корней не имеет.

В отличие от двух предыдущих, следующий пример примечателен тем, что параметр, заставив «ветвиться» решение, не участвует в его «технической» части.

**П.3.** (МАИ). Решить уравнение

$$m(\sin^2 x - 5\cos^2 x) = \cos x \sqrt{3m^2 + 5m^2 \operatorname{tg}^2 x}.$$

*Решение.* Имеем

$$m(\sin^2 x - 5\cos^2 x) = |m| \cos x \sqrt{3 + 5\operatorname{tg}^2 x}.$$

Достаточно рассмотреть три случая:

1) $m = 0$; в этом случае корнем уравнения будет любое значение переменной $x$ из области определения уравнения, т.е. $x$ — любое, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

2) $m > 0$; получаем $\sin^2 x - 5\cos^2 x = \cos x \sqrt{3 + 5\operatorname{tg}^2 x}$. Переходим к уравнению-следствию:

$$(\sin^2 x - 5\cos^2 x)^2 = 3\cos^2 x + 5\sin^2 x,$$

$$(1 - 6\cos^2 x)^2 = 5 - 2\cos^2 x,$$

$$18\cos^4 x - 5\cos^2 x - 2 = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos^2 x = -\frac{2}{9}, \\ \cos^2 x = \frac{1}{2}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Проверкой устанавливаем, что $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ не подходит. Итак, $x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$.

3) $m < 0$; тогда $5\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x\sqrt{3 + 5\operatorname{tg}^2 x}$. Предлагаем читателю самостоятельно убедиться, что $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$ — корни этого уравнения.

*Ответ.* Если $m = 0$, то $x$ — любое, кроме $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$; если $m > 0$, то $x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k$; если $m < 0$, то $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$.

Далее рассмотрим ряд примеров, решаемых методом равносильных переходов.

**П.4.** (МИФИ). Решить уравнение $\sqrt{4^x - 6\cdot 2^x + 1} = 2^x - a$.

*Решение.* Пусть $2^x = t$. Тогда достаточно решить систему

$$\left\{\begin{array}{l} t>0, \\ \sqrt{t^2 - 6t + 1} = t - a. \end{array}\right.$$

Переходим к равносильной системе

$$\left\{\begin{array}{l} t > 0, \\ t \geqslant a, \\ t^2 - 6t + 1 = t^2 - 2at + a^2; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} t > 0, \\ t \geqslant a, \\ 2t(a - 3) = a^2 - 1. \end{array}\right.$$

Очевидно при $a = 3$ уравнение системы не имеет решений. Если $a \neq 3$, имеем

$$\left\{\begin{array}{l} t > 0, \\ t \geqslant a, \\ t = \dfrac{a^2 - 1}{2(a - 3)}. \end{array}\right.$$

Следовательно, $t = \dfrac{a^2 - 1}{2(a - 3)}$ — решение первоначальной системы , если выполняются условия

$$\begin{cases} \dfrac{a^2 - 1}{2(a - 3)} > 0\,, \\ \dfrac{a^2 - 1}{2(a - 3)} \geqslant a\,. \end{cases}$$

Отсюда, решив систему, получим

$a \in (-1; 3 - 2\sqrt{2}\,] \cup (3; 3 + 2\sqrt{2}\,]$, а $x = \log_2 \dfrac{a^2 - 1}{2(a - 3)}$.

*Ответ.* Если $-1 < a \leqslant 3 - 2\sqrt{2}$ или $3 < a \leqslant 3 + 2\sqrt{2}$, то $x = \log_2 \dfrac{a^2 - 1}{2(a - 3)}$; при других $a$ решений нет.

II.5. (КПИ). Решить неравенство $\sqrt{x + a} \geqslant x + 1$.

*Решение.* Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 1 < 0, \\ x + a \geqslant 0; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x + 1 \geqslant 0, \\ x + a \geqslant x^2 + 2x + 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x < -1, \\ x \geqslant -a; \end{cases} & (1) \\ \\ \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x^2 + x + 1 - a \leqslant 0. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Очевидно первая система совокупности имеет решения, если $-a < -1$ , т.е. при $a > 1$. Для совместности второй системы необходимо, чтобы множество решений неравенства $x^2 + x + 1 - a \leqslant 0$ было непустым. Это означает, что дискриминант $4a - 3$ соответствующего квадратного трехчлена должен быть неотрицательным. Отсюда $a \geqslant \dfrac{3}{4}$.

Таким образом, естественно рассмотреть два случая: $\frac{3}{4} \leqslant a \leqslant 1$ и $a > 1$.

Если $\frac{3}{4} \leqslant a \leqslant 1$, то решением квадратичного неравенства будет отрезок $\left[\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}; \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right]$. Поэтому вопрос о решении системы (2) сводится к исследованию расположения числа $-1$ относительно полученного промежутка. Легко показать, что промежуток $\left[\frac{3}{4}; 1\right]$ — решение неравенства $-1 \leqslant \frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}$. Следовательно, в рассматриваемом случае полученный отрезок будет решениями и системы (2), и всей совокупности, поскольку система (1), как указано ранее, не имеет решений при $a \leqslant 1$.

Если $a > 1$, то имеем $\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2} < -1 < \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$, и решением системы (2) будет отрезок $\left[-1; \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right]$, а системе (1) удовлетворяет только промежуток $[-a; -1)$. Значит, в этом случае рассматриваемая совокупность имеет решением отрезок $\left[-a; \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right]$.

*Ответ.* Если $\frac{3}{4} \leqslant a \leqslant 1$, то $\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2} \leqslant x \leqslant$ $\leqslant \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$; если $a > 1$, то $-a \leqslant x \leqslant \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$; при других $a$ решений нет.

П.6. (МИФИ). Решить уравнение $\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = c - 1$.

*Решение.* Казалось бы, переход к уравнению $\frac{2 \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} - \frac{\operatorname{tg} 2x - 1}{\operatorname{tg} 2x + 1} = c - 1$ — шаг и естественный, и безобидный. Первое — да, вторая же оценка поверхностна. Более внимательный анализ показывает, что такой переход сужает область определения исходного уравнения ровно на множество корней уравнения $\cos 2x = 0$. Другими словами, возникает опасность потери корней : они могут содержаться среди чисел

$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. Поэтому, чтобы решение стало корректным, необходимо предварительно выяснить, имеет ли исходное уравнение корни указанного вида.

Имеем $\operatorname{tg}(\pi + 2\pi n) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{\pi}{4}\right) = c - 1$. Отсюда $c = 0$.

Несложно убедиться, что при $c = 0$ исходное уравнение не имеет других корней, кроме $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

В случае, когда $c \neq 0$, переходим к равносильному уравнению $\frac{2 \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} - \frac{\operatorname{tg} 2x - 1}{\operatorname{tg} 2x + 1} = c - 1$. Пусть $\operatorname{tg} 2x = t$. Получаем $\frac{2t}{1 - t^2} - \frac{t - 1}{t + 1} = c - 1$. Это уравнение в свою очередь равносильно системе

$$\begin{cases} t^2 \neq 1\,, \\ ct^2 = c - 2\,. \end{cases}$$

Так как в рассматриваемом случае $c \neq 0$, то $t^2 = \frac{c - 2}{c}$.

Очевидно $\frac{c - 2}{c} \neq 1$. Таким образом, для наличия решений у системы достаточно потребовать, чтобы $\frac{c - 2}{c} \geqslant 0$. Отсюда, если $c < 0$ или $c \geqslant 2$, то $t = \pm\sqrt{\frac{c - 2}{c}}$, а значит, $x = \pm$ $\pm\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{c - 2}{c}} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

*Ответ*. Если $c < 0$ или $c \geqslant 2$, то $x = \pm$ $\leqslant \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{c - 2}{c}} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; если $c = 0$, то $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; при других $c$ решений нет.

II.7. (ЛПИ). Решить неравенство

$$-\frac{3}{5} < a \ln x + (a \ln x)^2 + \ldots + (a \ln x)^n + \ldots < 1.$$

*Решение.* Наличие ряда с бесконечным числом слагаемых в первую очередь ставит вопрос о существовании его суммы, и если слагаемые — последовательные члены геометрической прогрессии со знаменателем $q$, то достаточно ограничиться требованием $|q| < 1$. После этого замечания, возможно, покажется, что идея решения лежит на поверхности: рассмотрев случай $|a \ln x| < 1$, перейти к суммированию. Такой шаг ведет к любопытной ситуации: математически «нечистое» решение может привести к верному результату. Поясним это. Последовательность $a \ln x, (a \ln x)^2, (a \ln x)^3, \ldots$ — геометрическая прогрессия лишь при $a \neq 0$, $x > 0$ и $x \neq 1$. Поэтому о сумме бесконечной геометрической прогрессии речь может идти только при указанных ограничениях. Но если случай $a = 0$ упустить, то необходимость его рассмотрения все равно возникнет в ходе дальнейшего решения и при этом $x = 1$ войдет в ответ. (Читатель может в этом убедиться самостоятельно.)

Итак, приведем верное решение. Прежде всего заметим, что $x = 1$ — решение при любом $a$.

Очевидно при $a = 0$ решением будет $x > 0$. Если $a \neq 0$, $x \neq 1$, то исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{5} < \dfrac{a \ln x}{1 - a \ln x} < 1, \\ -1 < a \ln x < 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{5}(1 - a \ln x) < a \ln x < 1 - a \ln x, \\ -1 < a \ln x < 1. \end{cases}$$

После несложных преобразований получим $-1 < a \ln x < \dfrac{1}{2}$.

Отсюда, если $a > 0$, то $e^{-\frac{1}{a}} < x < e^{\frac{1}{2a}}$, если $a < 0$, то $e^{\frac{1}{2a}} < x < e^{-\frac{1}{a}}$. Заметим, что и в первом, и во втором случаях единица принадлежит каждому из полученных промежутков.

*Ответ.* Если $a = 0$, то $x > 0$; если $a > 0$, то $e^{-\frac{1}{a}} < x < e^{\frac{1}{2a}}$; если $a < 0$, то $e^{\frac{1}{2a}} < x < e^{-\frac{1}{a}}$.

## Упражнения

Решить уравнения (П.8—П.19):

П.8. (МАИ). $\dfrac{2b^2+x^2}{b^3-x^3}-\dfrac{2x}{bx+b^2+x^2}+\dfrac{1}{x-b}=0.$

П.9. (МИФИ). $\dfrac{3^x+5}{3^x-3}+\dfrac{3^x-7}{3^x+1}=\dfrac{2b}{9^x-2\cdot 3^x-3}.$

П.10. (МГУ). $144^{|x|}-2\cdot 12^{|x|}+a=0.$

П.11. (МАИ). $(a-2)\left(\dfrac{5}{3}\cdot 2^{2x}a+1\right)=2\sqrt{(a-2)^2(1-4^x a)}.$

П.12. (МАИ). $\sqrt{\left(\dfrac{a-1}{3^x}+9\right)a^2}=a\left(\dfrac{a-1+3^x}{3^x}\right).$

П.13. (УрГУ). $1+\log_a(1-x)\log_x a=\dfrac{2}{\log_a x}.$

П.14. (МГУ). $\log_3 x+3\log_a x+\log_9 x=5.$

П.15. (ЛГУ). $\dfrac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}=(a-1)\operatorname{tg}x.$

П.16. (ЛГУ). $(1+2\sin^2 x)\operatorname{tg}x+a=2a\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right).$

П.17. (УрГУ). $\sin 2x(\sin x+\cos x)=a(\sin^3 x+\cos^3 x).$

П.18. (МИФИ). $\sqrt{a^2-x\sqrt{x^2+a^2}}=a-x.$

П.19. (ЛГУ). $\sqrt[3]{a+x^3}-x=b.$

Решить системы уравнений (П. 20—П. 21):

П.20. (НГУ). $\begin{cases}\lg(x+y)=\lg x+\lg y,\\ \lg(x+ay)=\lg x+2\lg y.\end{cases}$

П.21. (МИФИ). $\begin{cases}y\sqrt{x^2+y^2}-2ay-3=0,\\ x\sqrt{x^2+y^2}=2ax.\end{cases}$

Решить неравенства (П. 22—П. 28):

П.22. (УрГУ). $ax^2-2ax+1>0.$

П.23. (УрГУ). $-\dfrac{x}{a}>\dfrac{1}{x^3}.$

П.24. (ЛГУ). $\log_a(x-1)+\log_a x>2.$

П.25. (ЛГУ). $\log_{1/a}(a^x-2)\geqslant x-2.$

П.26. (МАИ). $\log_a\sqrt{3{,}5x-1{,}5}\,\log_x a<1.$

П.27. (УрГУ). $\sqrt{5x^2+a^2}\geqslant -3x.$

П.28. (КПИ). $\sqrt{x-a}\geqslant 2x+1.$

## Б. Параметр и количество решений уравнений, неравенств и их систем.

Знакомство с этим классом задач состоялось в главе I(см. I.11—I. 19). Это позволяет непосредственно перейти к более сложным примерам.

**II.29.** (ЛЭТИ). При каких значениях $a$ уравнение $\sqrt{x+a}=x$ имеет два корня ?[1]

*Решение.* Переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x + a = x^2. \end{cases}$$

Полученное квадратное уравнение имеет два корня $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$ при $a > -\dfrac{1}{4}$. Понятно, что если меньший из этих корней неотрицательный, то и система имеет два решения. Запишем

$$\begin{cases} a > -\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1+4a}\right) \geqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда легко получить $-\dfrac{1}{4} < a \leqslant 0$.

*Ответ.* $-\dfrac{1}{4} < a \leqslant 0$.

**II.30.** (МФТИ). В зависимости от значений параметра $a$ найти число корней уравнения $x + \sqrt{x + \dfrac{1}{2} + \sqrt{x + \dfrac{1}{4}}} = a$.

*Решение.* Наличие сложного радикала наводит на мысль выделить квадрат двучлена под «внешним» корнем. Имеем

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}} = a,$$

$$x + \sqrt{\left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2} = a,$$

---

1 В задачах, связанных с определением количества корней, равные корни будем считать за один.

$$x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = a,$$

$$\left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2 = a.$$

Если $a < 0$, то уравнение не имеет решений. Если $a \geqslant 0$, то последнее уравнение равносильно такому:

$$\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = \sqrt{a},$$

$$\sqrt{x + \frac{1}{4}} = \sqrt{a} - \frac{1}{2}.$$

Это уравнение, а значит, и исходное имеют решения лишь при $\sqrt{a} - \frac{1}{2} \geqslant 0$, т.е. $a \geqslant \frac{1}{4}$. При указанных $a$ получаем $x + \frac{1}{4} = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2$, и очевидно это уравнение имеет только один корень.

*Ответ.* Если $a < \frac{1}{4}$, то нет решений; если $a \geqslant \frac{1}{4}$, то уравнение имеет единственное решение.

П.31.(КГУ). При каких $a$ промежуток $[0, a]$ содержит не менее трех корней уравнения $2\cos 2x - |1 + 2\sin x| = 1$?

*Решение.* Перепишем это уравнение в виде $(1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x) - |1 + 2\sin x| = 0$. Последнее равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{2}; \\ \left\{\begin{array}{l} \sin x > -\frac{1}{2}, \\ 1 - 2\sin x - 1 = 0; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \sin x < -\frac{1}{2}, \\ 1 - 2\sin x + 1 = 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{2}; \\ \begin{cases} \sin x > -\frac{1}{2}, \\ \sin x = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < -\frac{1}{2}, \\ \sin x = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Далее

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ \sin x = 0. \end{array}\right.$$

Указанный в условии промежуток вынуждает нас рассматривать лишь неотрицательные решения совокупности. Наименьший положительный корень первого уравнения совокупности равен $\frac{7\pi}{6}$. Заметим, что отрезок $\left[0;\frac{7\pi}{6}\right]$ уже содержит два неотрицательных корня уравнения $\sin x = 0$. Это 0 и $\pi$. Следовательно, $\left[0;\frac{7\pi}{6}\right]$ — промежуток наименьшей длины, удовлетворяющий требованию задачи. Отсюда

*Ответ.* $a \geqslant \frac{7\pi}{6}$.

В следующих двух задачах удобно перейти к уравнению-следствию. Причем регулировка требуемого числа корней осуществляется с помощью области определения исходного уравнения.

**П.32.** Найти все значения параметра $b$, при которых уравнение $\frac{x^2 - (3b-1)x + 2b^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = 0$ имеет одно решение.

*Решение.* $x^2 - (3b-1)x + 2b^2 - 2 = 0$ — уравнение-следствие. Его корни $x_1 = 2b - 2$, $x_2 = b + 1$.

Итак, следствие имеет два корня, а первоначальное уравнение должно иметь только один. Требование единственности можно достичь так.

Во-первых, полученные корни могут оказаться равными, т.е. $2b - 2 = b + 1$. Значит, при $b = 3$ $x_1 = x_2 = 4$. При этом важно не упустить, что $b = 3$ не подходит, так как $x = 4$ не входит в область определения исходного уравнения.

Во–вторых, $x_1$ и $x_2$ — корни, если $x_1 \neq 4$ и $x_1 \neq -1$ ,$x_2 \neq 4$ и $x_2 \neq -1$. Поэтому для единственности решения оставим лишь одно из значений $x_1$ или $x_2$ в области определения исходного уравнения. Получаем

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 \neq 4, \\ x_2 \neq -1, \end{cases} \text{или} \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 \neq -1, \\ x_2 \neq 4, \end{cases} \text{или} \begin{cases} x_2 = 4, \\ x_1 \neq 4, \\ x_1 \neq -1, \end{cases} \text{или} \begin{cases} x_2 = -1, \\ x_1 \neq -1, \\ x_1 \neq 4. \end{cases}$$

Легко установить, что первая и третья системы решений не имеют, а из второй и четвертой соответственно получаем $b = \frac{1}{2}$, $b = -2$.

*Ответ.* $b = \frac{1}{2}$ или $b = -2$.

II.33.(УрГУ). При каких значениях $a$ уравнение

$$\log_{\sqrt{2ax+4}}(2x^2 - x + 3) = 2\log_{2ax+4}(x^2 + 2x + 1)$$

имеет единственное решение?

*Решение.* Запишем равносильное уравнение

$$\log_{2ax+4}(2x^2 - x + 3) = \log_{2ax+4}(x^2 + 2x + 1).$$

Теперь перейдем к следствию $2x^2 - x + 3 = x^2 + 2x + 1$. Отсюда $x_1 = 1, x_2 = 2$. Возникла ситуация, близкая к рассмотренной в предыдущей задаче. Это дает нам возможность воспользоваться уже знакомым механизмом «просеивания» корней.

Область определения исходного уравнения найдем из условий

$$\begin{cases} 2x^2 - x + 1 > 0, \\ x^2 + 2x + 1 > 0, \\ 2ax + 4 > 0, \\ 2ax + 4 \neq 1. \end{cases}$$

Очевидно $x_1$ и $x_2$ удовлетворяют первым двум неравенствам системы. Тогда для единственности решения достаточно потребовать

$$\left\{\begin{array}{l}2ax_1+4>0,\\ 2ax_1+4\neq 1,\\ \left[\begin{array}{l}2ax_2+4\leqslant 0,\\ 2ax_2+4=1\end{array}\right.\end{array}\right. \text{ или } \left\{\begin{array}{l}2ax_2+4>0,\\ 2ax_2+4\neq 1,\\ \left[\begin{array}{l}2ax_1+4\leqslant 0,\\ 2ax_1+4=1.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Имеем

$$\left\{\begin{array}{l}2a+4>0,\\ 2a+4\neq 1,\\ \left[\begin{array}{l}4a+4\leqslant 0,\\ 4a+4=1\end{array}\right.\end{array}\right. \text{ или } \left\{\begin{array}{l}4a+4>0,\\ 4a+4\neq 0,\\ \left[\begin{array}{l}2a+4\leqslant 1,\\ 2a+4=1.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Решением первой системы является множество $\left(-2;\ -\frac{3}{2}\right) \cup$ $\cup \left(-\frac{3}{2};\ -1\right] \cup \left\{-\frac{3}{4}\right\}$. Вторая система решений не имеет.

*Ответ.* $-2 < a < -\frac{3}{2}$, или $-\frac{3}{2} < a \leqslant -1$, или $a = -\frac{3}{4}$.

**II.34.** (ЛЭТИ). При каких $a$ уравнение $x^3 - x = a(x^3 + x)$ имеет ровно три корня?

*Решение.* Данное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x^2-1=a(x^2+1).\end{array}\right.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x^2(a-1)=-a-1.\end{array}\right.$$

Если $a = 1$, то второе уравнение совокупности не имеет корней. Следовательно, в этом случае исходное уравнение имеет один корень, что не подходит. Если $a \neq 1$, то $x^2 = \frac{a+1}{1-a}$. Очевидно требование наличия трех корней достигается при $\frac{a+1}{1-a} > 0$, т.е. $-1 < a < 1$.

*Ответ.* $-1 < a < 1$.

Остановим внимание читателя на разобранной задаче. Выделяя характерное, отметим, что корни одного из уравнений совокупности не зависят от параметра. Поэтому при работе со вторым уравнением надо учитывать следующее: число его корней должно отличаться от данного в условии ровно на количество корней первого уравнения.

Рассмотрим несколько подобных задач.

II.35. (КГУ). Определить количество корней уравнения $\cos x \operatorname{ctg} x - \sin x = a \cos 2x$ на отрезке $[0; 2\pi]$.

*Решение.* После преобразования левой части получим:

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x} = a \cos 2x,$$

$$\frac{\cos 2x}{\sin x} = a \cos 2x.$$

Это уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned} &\cos 2x = 0\,, \\ &\frac{1}{\sin x} = a\,. \end{aligned}\right.$$

Первое уравнение на отрезке $[0; 2\pi]$ имеет четыре корня: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$. Второе уравнение при $|a| < 1$ вообще корней не имеет. Если $|a| = 1$, то очевидно на рассматриваемом отрезке уравнение $\frac{1}{\sin x} = a$ имеет только один корень. Если $|a| > 1$ ,то, перейдя к уравнению $\sin x = \frac{1}{a}$, получаем, что на отрезке $[0; 2\pi]$ оно имеет два корня. Итак,ответ... Но при этом следует не забыть, что при $a = \pm\sqrt{2}$ корни второго уравнения совокупности содержатся среди корней первого уравнения.

*Ответ.* Если $|a| < 1$ или $a = \pm\sqrt{2}$, то уравнение имеет четыре корня; если $|a| = 1$, то корней — пять; если $|a| > 1$ и $a \neq \pm\sqrt{2}$, то корней — шесть.

II.36. (МИЭМ). Определить число корней уравнения

$$\frac{a \sin x - 2}{a - 2\cos x} = \frac{a \cos x - 2}{a - 2 \sin x} \text{ на отрезке } [20\pi; 29\pi].$$

*Решение.* Запишем уравнение-следствие

$$a^2 \sin x - 2a - 2a \sin^2 x + 4 \sin x =$$

$$= a^2 \cos x - 2a - 2a \cos^2 x + 4 \cos x,$$

$$a^2(\sin x - \cos x) - 2a(\sin^2 x - \cos^2 x) + 4(\sin x - \cos x) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x - \cos x = 0\ ,\\ 2a\,(\sin x + \cos x\,) = a^2 + 4\ .\end{array}\right.$$

Рассмотрим второе уравнение совокупности. Очевидно при $a = 0$ оно решений не имеет. Тогда $\sin x + \cos x = \dfrac{a^2 + 4}{2a}$. Имеем $\left|\dfrac{a^2 + 4}{2a}\right| = \left|\dfrac{a}{2} + \dfrac{2}{a}\right| \geqslant 2$. Поэтому последнее уравнение корней не имеет, а значит, совокупность имеет только решения вида $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n\ , n \in Z$.

Выясним, при каких $a$ полученные значения переменной являются корнями одного из уравнений $a - 2\cos x = 0$ или $a - 2\sin x = 0$. Это удобно сделать, представив множество чисел $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$ в виде объединения $\{\ \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m\ \} \cup \{\ \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k\ \}$, $m \in Z$, $k \in Z$. Отсюда легко установить, что $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m$ — корни двух последних уравнений, если $a = \sqrt{2}$. Подставив $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k$, получаем $a = -\sqrt{2}$. Теперь непосредственной проверкой, которую и удобно, и достаточно провести на отрезке $[0;\ 9\pi\ ]$, устанавливаем

*Ответ*. Если $a = -\sqrt{2}$, то уравнение на отрезке $[20\pi;\ 29\pi\,]$ имеет пять корней; если $a = \sqrt{2}$, то корней ровно четыре; если $a \neq \pm\sqrt{2}$, то корней будет девять.

П.37. (МАИ). При каких значениях $a$ уравнение $4^x - (a + 3\,)\,2^x + 4a - 4 = 0$ имеет один корень ?

*Решение*. Рассматривая данное уравнение как квадратное относительно $2^x$, легко установить, что оно равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}2^x = a - 1\ ,\\ 2^x = 4\ .\end{array}\right.$$

Получили типичную ситуацию для рассматриваемого цикла задач (одно из уравнений совокупности не содержит параметр). Любопытная особенность этой же задачи состоит в том, что количество решений, требуемых в условии, в точности совпадает с числом корней одного из уравнений совокупности. Поэтому роль параметра в подобных примерах — не допустить появления новых корней. Напомним, что с задачами, близкими к разбираемой, мы уже знакомились (см. I.17, I.86).

Очевидно при $a = 5$ эта совокупность имеет одно решение. Однако следует не упустить, что при $a \leqslant 1$ первое уравнение совокупности не имеет решений, а второе при любом $a$ имеет единственное решение.

*Ответ.* $a \leqslant 1$ или $a = 5$.

Теперь рассмотрим более «тонкую» задачу.

**II.38.** (МИФИ). При каких значениях $a$ система

$$\begin{cases}(\operatorname{tg}x - \sqrt{3})(x - a) = 0, \\ 1 \leqslant x < 2\end{cases}$$

имеет только одно решение?

*Решение.* Легко установить, что уравнение $\operatorname{tg}x = \sqrt{3}$ имеет на промежутке $[1; 2)$ лишь один корень $x = \frac{\pi}{3}$. Следовательно, уравнение системы имеет не более двух различных корней на промежутке $[1; 2)$.

Задача свелась к тому, чтобы найти те значения $a$, которые «не «позволят» уравнению $x = a$ иметь корни, удовлетворяющие исходной системе, отличные от $x = \frac{\pi}{3}$. Понятно, что $a = \frac{\pi}{3}$ — одно из искомых значений. Далее, с учетом условия $1 \leqslant x < 2$ значение $x = a$ не будет являться решением системы, если $a < 1$ или $a \geqslant 2$.

На этом этапе важно не упустить, что найденные значения параметра не составляют окончательный ответ. В самом деле, область определения исходной системы — все числа, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. В силу этого замечания, если $a = \frac{\pi}{2}$, то $x = a$ не является решением системы.

*Ответ.* $a < 1$, или $a = \frac{\pi}{3}$, или $a = \frac{\pi}{2}$, или $a \geqslant 2$.

## Упражнения

**II.39.** При каких значениях параметра $a$ уравнение $x^3\sqrt[3]{x} - (a + 1)x^{5/3} + a = 0$ имеет единственное решение?

**П.40.** (МГУ). Найти все такие значения параметра $a$, при которых уравнение $(a^2 - 6a + 9)(2 + 2\sin x - \cos^2 x) + (12a - 18 - 2a^2)(1 + \sin x) + a + 3 = 0$ не имеет решений.

**П.41.** При каких значениях параметра $a$ уравнение $\dfrac{x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + 3a - 2}{x^2 - 6x + 5} = 0$ имеет единственное решение?

**П.42.** При каких значениях параметра $k$ уравнение $\dfrac{x^2 + (3 - 2k)x + 4k - 10}{\sqrt{2x^2 - 2x - 1}} = 0$ имеет единственное решение?

**П.43.** (МАИ). При каких значениях параметра $a$ уравнение $25^x - (a - 4)5^x - 2a^2 + 10a - 12 = 0$ не имеет действительных корней?

**П.44.** (МАИ). При каких значениях параметра $a$ уравнение $36^x + (a - 1)6^x + a - 2a^2 = 0$ имеет два действительных и различных корня?

**П.45.** (УрГУ). При каких значениях параметра $a$ уравнение $\log_{\sqrt{ax-6}}(2x^2 - 3x + 2) = 2\log_{ax-6}(x^2 + 2x - 4)$ имеет единственное решение?

**П.46.** (УрГУ). При каких значениях параметра $a$ уравнение $\log_{\sqrt{ax+6}}(2x^2 + 2x + 4) = 2\log_{ax+6}(x^2 - 3x - 2)$ имеет единственное решение?

**П.47.** (КГУ). При каких $a$ промежуток $[a; 0]$ содержит не менее трех корней уравнения $2\cos 2x - |2\cos x - 1| = -1$?

**П.48.** Найти $a$, при которых уравнение $\cos^2 4x - (a - 3)\cos 4x = 0$ имеет на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{8}; \dfrac{5\pi}{8}\right]$ ровно 4 корня.

**П.49.** (МИЭМ). Найти при $a = 1$ все решения уравнения $\sin(2(x - \pi)) - \sin(3x - \pi) = a\sin x$, расположенные на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, и выяснить, при каких $a$ данное уравнение имеет единственное решение на этом отрезке.

**П.50.** (МФТИ). Найти все значения параметра $a$, при которых уравнение $2\cos 2x + 2a\sin x + a - 1 = 0$ имеет единственное решение на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$.

П.51. (МФТИ). При каких значениях параметра $a$ уравнение $(1 - a)\mathrm{tg}^2 x - \frac{2}{\cos x} + 1 + 3a = 0$ имеет более одного решения на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

П.52. (МГУ). При каких значениях параметра $a$ уравнение $\sin^2 3x - \left(a + \frac{1}{2}\right)\sin 3x + \frac{a}{2} = 0$ имеет ровно три корня, расположенных на отрезке $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$?

П.53. (МГУ). При каких значениях параметра $a$ уравнение $\cos^2 3x + \left(2a^2 - \frac{7}{2}\right)\cos 3x + a^2 - 2 = 0$ имеет ровно пять корней, расположенных на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$?

П.54. (МИФИ). Найти все значения $b$, при которых система

$$\begin{cases} (\mathrm{ctg}x - 1)(x + b) = 0, \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$

имеет только одно решение.

П.55. (МИФИ). Найти все значения $c$, при которых система

$$\begin{cases} (\mathrm{ctg}x + \sqrt{3})(x + c) = 0, \\ 2 \leqslant x < 4 \end{cases}$$

имеет только одно решение.

П.56. (МИЭМ). Решить уравнение $\frac{a - 3\sin x}{a\cos x - 3} = \frac{a - 3\cos x}{a\sin x - 3}$ и определить число его корней на отрезке $[40\pi; 49\pi]$.

## В. Параметр и свойства решений уравнений, неравенств и их систем.

Несколько слов скажем по поводу названия этого пункта. Оно во многом условно, и, вероятно, требует пояснений. Однако мы не будем это делать сейчас, надеясь, что в ходе непосредственной работы с задачами станет понятным, какие примеры подпадают под этот пункт.

Начнем с задач, знакомым по главе I, в которых условие требует, чтобы ответ был каким-либо наперед заданным подмножеством множества действительных чисел (см., например, I.12, I.87).

П.57. (ВГУ). Найти рациональные решения уравнения

$$x + \sqrt{2} = x\sqrt{2} + a^2,$$

где $a$ — рациональный параметр.

*Решение.* Данное уравнение выгодно записать так:

$$x - a^2 = \sqrt{2}(x - 1).$$

В силу условия левая часть этого уравнения принимает только рациональные значения. Тогда структура правой части позволяет сделать вывод, что если исходное уравнение имеет рациональный корень, то он обязательно равен единице. Понятно, что при $x = 1$ получаем $a = \pm 1$. Легко установить справедливость обратного утверждения. Тогда

*Ответ.* Если $a = \pm 1$, то $x = 1$; при других рациональных $a$ данное уравнение рациональных корней не имеет.

**П.58.** (МАИ). При каких значениях $a$ все решения уравнения $\dfrac{a-1}{x+6} = \dfrac{2x+7}{(x+2)^2 - x - 22}$ неположительные?

*Решение.* Перепишем исходное уравнение в таком виде:

$$\frac{a-1}{x+6} = \frac{2x+7}{(x+6)(x-3)}.$$

Переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} x(a-3) = 3a + 4, \\ x \neq -6, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Ясно, что при $a = 3$ нет решений. Если $a \neq 3$, то $x = \dfrac{3a+4}{a-3}$.

Так как нас интересуют лишь неположительные решения, то искомые значения параметра $a$ найдем, решив систему

$$\begin{cases} \dfrac{4+3a}{a-3} \leq 0, \\ \dfrac{4+3a}{a-3} \neq -6. \end{cases}$$

*Ответ.* $-\dfrac{4}{3} \leq a < \dfrac{14}{9}$ или $\dfrac{14}{9} < a < 3$.

**П.59.** (МАИ). При каких $a$ уравнение

$$\left|\frac{(a-1)x - (2a-1)}{x-1}\right| + \left|x - |1 - a| + \frac{1}{2}\right| = 0$$

имеет лишь положительные решения?

*Решение.* Так как левая часть данного уравнения — сумма двух неотрицательных слагаемых, то это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{(a-1)x-(2a-1)}{x-1}=0, \\ x-\left|1-a\right|+\dfrac{1}{2}=0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} (a-1)x=2a-1, \\ x=\left|1-a\right|-\dfrac{1}{2}, \\ x\neq 1. \end{cases}$$

При $a=1$ система не имеет решений. Если $a\neq 1$, то переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} x=\dfrac{2a-1}{a-1}, \\ x=\left|1-a\right|-\dfrac{1}{2}, \\ x\neq 1. \end{cases}$$

Для того, чтобы эта система, а значит, и исходное уравнение имели положительные решения, достаточно потребовать

$$\begin{cases} \dfrac{2a-1}{a-1}=\left|1-a\right|-\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2a-1}{a-1}>0, \\ \dfrac{2a-1}{a-1}\neq 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dfrac{2a-1}{a-1}=\left|a-1\right|-\dfrac{1}{2}, \\ a<\dfrac{1}{2} \text{ или } a>1, \\ a\neq 0. \end{cases}$$

Переходим к равносильной совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a < \dfrac{1}{2}, \\ a \neq 0, \\ \dfrac{2a-1}{a-1} = 1 - a - \dfrac{1}{2}; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} a > 1, \\ \dfrac{2a-1}{a-1} = a - 1 - \dfrac{1}{2}. \end{cases}\end{array}\right.$$

Решив первую систему совокупности, получим $a = -1$, решение второй дает $a = \dfrac{9+\sqrt{41}}{4}$.

*Ответ.* $a = -1$ или $a = \dfrac{9+\sqrt{41}}{4}$.

**П.60.** (МАИ). При каких $a$ уравнение

$$a^2\left|a + \frac{x}{a^2}\right| + |1 + x| = 1 - a^3$$

имеет не менее четырех различных решений, являющихся целыми числами?

*Решение.* Преобразуем исходное уравнение к виду

$$|x + a^3| + |x + 1| = 1 - a^3.$$

Очевидно, что при $a = 0$ это уравнение не равносильно исходному. Однако для $a = 0$ последнее уравнение имеет вид

$$|x| + |x + 1| = 1,$$

и, как нетрудно установить, его решением служит отрезок $[-1; 0]$, содержащий лишь два целых числа, а не четыре, как требует условие. Поэтому для решения задачи достаточно исследовать полученное уравнение.

Понятно, что возможно «лобовое» решение: раскрыть модули, рассмотрев необходимые случаи. Мы же приведем решение, предложенное в [1]. Оно, как нам кажется, наиболее рациональное.

Вначале заметим, что $a^3 \leqslant 1$, так как левая часть уравнения неотрицательна. Теперь воспользуемся геометрической интерпретацией модуля. Тогда искомые значения переменной $x$ — это координаты точек числовой прямой, у которых сумма расстояний до точек $-a^3$ и $-1$ равна $1 - a^3$, т.е. длине отрезка

$\left[-1\,;-a^3\right]$. Следовательно, каждая точка отрезка $\left[-1\,;-a^3\right]$, и только она, есть решение уравнения. Для завершения решения задачи достаточно потребовать, чтобы отрезок содержал по крайней мере четыре целых числа. Ясно, что этими числами будут $-1, 0, 1, 2$. Отсюда получаем условие $2 \leqslant -a^3$ или $a \leqslant -\sqrt[3]{2}$.

*Ответ.* $a \leqslant -\sqrt[3]{2}$.

Продолжим работу, предложив серию примеров, близких к уже рассмотренным. Для этих задач характерно то, что их ответ должен содержать наперед заданное подмножество.

**П.61.** (МИТХТ). Найдите все значения $a$, при которых неравенство

$$(x-3a)(x-a-3)<0$$

выполняется при всех $x$, таких, что $1 \leqslant x \leqslant 3$.

*Решение.* Решением заданного неравенства является один из промежутков $(3a\,;\,a+3)$ или $(a+3\,;\,3a)$. Причем по условию каждый из этих промежутков должен содержать отрезок $[1\,;\,3\,]$. Поэтому искомые значения параметра—это решения следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3a<1,\\3<a+3,\end{cases}\\[2ex]\begin{cases}a+3<1,\\3<3a.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решив эту совокупность, получим $0<a<\dfrac{1}{3}$.

*Ответ.* $0<a<\dfrac{1}{3}$.

**П.62.** (МАИ). Найти все значения $a$, при которых всякое решение неравенства

$$(0{,}5)^{1/2(x-1)^2} \leqslant (0{,}25)^{1/(3-x)^2},$$

входит в область определения функции $f(x)=\lg\left(9-16a^4x^2\right)$.

*Решение.* Решим данное в условии неравенство. Имеем

$$(0{,}5)^{1/2(x-1)^2} \leqslant (0{,}5)^{2/(x-3)^2},$$

$$\frac{1}{2(x-1)^2} \geqslant \frac{2}{(x-3)^2},$$

$$\frac{3\left(x-\frac{5}{3}\right)(x+1)}{2(x-1)^2(x-3)^2} \leqslant 0.$$

Легко получить, что $-1 \leqslant x < 1$ или $1 < x \leqslant \frac{5}{3}$.

Область определения исходной функции задается неравенством $9 - 16a^4x^2 > 0$. Теперь условие задачи можно сформулировать так : при каких $a$ решение неравенства $9 - 16a^4x^2 > 0$ содержит множество $[-1\,;\,1) \cup \left(1\,;\,\frac{5}{3}\right]$?

Очевидно $a = 0$ входит в ответ (в этом случае решением неравенства является любое действительное число). При $a \neq 0$ получаем $x^2 < \frac{9}{16a^4}$ или $-\frac{3}{4a^2} < x < \frac{3}{4a^2}$. Понятно, что промежуток $\left(-\frac{3}{4a^2}\,;\,\frac{3}{4a^2}\right)$ будет содержать указанное множество, если

$$\begin{cases} -\frac{3}{4a^2} < -1, \\ \frac{5}{3} < \frac{3}{4a^2}. \end{cases}$$

Отсюда $a^2 < \frac{9}{20}$. Тогда

*Ответ.* $-\frac{3\sqrt{5}}{10} < a < \frac{3\sqrt{5}}{10}$.

**П.63.** (ЛГУ). При каких $a$ множество решений неравенства $x + \sqrt{x^2 - 2ax} > 1$ содержит промежуток $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$?

*Решение.* Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1 - x < 0, \\ x^2 - 2ax \geqslant 0;\end{cases} \\ \\ \begin{cases}1 - x \geqslant 0, \\ x^2 - 2ax > (1 - x)^2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ясно, что решение первой системы не может содержать отрезок $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ (условие $x > 1$ этого не допускает). Поэтому будем работать со второй системой, которую запишем так:

$$\begin{cases}x \leqslant 1, \\ x(1 - a) > \frac{1}{2}.\end{cases}$$

Очевидно при $a = 1$ система решений не имеет. Если $a < 1$, то имеем

$$\begin{cases}x \leqslant 1, \\ x > \dfrac{1}{2(1 - a)}.\end{cases}$$

Решение этой системы содержит заданный отрезок, если $\frac{1}{2(1 - a)} < \frac{1}{4}$, и с учетом условия $a < 1$ получим $a < -1$. Если $a > 1$, то получаем

$$\begin{cases}x \leqslant 1, \\ x < \dfrac{1}{2(1 - a)}.\end{cases}$$

Для этой системы требование задачи может реализоваться, если $\frac{1}{2(1 - a)} > 1$. Но при $a > 1$ это неравенство очевидно решений не имеет.

*Ответ.* $a < -1$.

П.64. (МАИ). При каких значениях $a$ множество решений неравенства

$$x(x - 4) + a^2(a + 4) \leqslant ax(a + 1)$$

содержит не более четырех целых значений $x$?

*Решение.* Преобразуем данное неравенство к виду

$$(x - a^2)(x - a - 4) \leqslant 0.$$

Рассмотрим первый случай, когда $a^2 \leqslant a + 4$. Тогда решением неравенства будет промежуток $[a^2 ; a + 4]$. Легко заметить, что при $a = 0$ и $a = 1$ этот отрезок содержит более четырех целых чисел. Если $a < 0$, то длина рассматриваемого отрезка меньше четырех, и он не может содержать больше четырех целых чисел. Обратимся к случаю $a > 0$ и $a \neq 1$. Пусть $k < a^2 \leqslant k + 1$, где $k$ – натуральное число или нуль. Нетрудно сообразить, что ограничение на количество целых решений вынуждает нас потребовать, чтобы $a + 4 < k + 5$. Покажем, что последнее неравенство следует из условия $a^2 \leqslant k + 1$. Действительно, так как $a > 0$, то $a \leqslant \sqrt{k+1}$. Для указанных $k$ имеем $\sqrt{k+1} \leqslant k + 1$, причем знак равенства достигается лишь при $k = 0$, но так как $a \neq 1$, то можем записать строгое неравенство $a < k + 1$. Отсюда $a + 4 < k + 5$. Таким образом, в первом случае условие задачи реализуется при $\dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \leqslant a \leqslant \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ (решение неравенства $a^2 \leqslant a + 4$), кроме $a = 0$ и $a = 1$.

Для второго случая $a^2 > a + 4$, и решением исходного неравенства будет промежуток $[a + 4 ; a^2]$. Пусть $k < a + 4 \leqslant k + 1$, где $k$ – целое. Указанный отрезок содержит не более четырех целых чисел, если $a^2 < k + 5$. Имеем

$$\begin{cases} k - 4 < a \leqslant k - 3 , \\ a^2 < k + 5 . \end{cases}$$

Очевидно эта система для неположительных $k$ решений не имеет. Непосредственным перебором устанавливаем, что подходят лишь натуральные значения $k$ от 1 до 7 включительно, причем в каждом из семи случаев получаем свой промежуток значений параметра $a$: $(-\sqrt{6} ; -2]$, $(-2 ; -1]$, $(-1 ; 0]$, $(0; 1]$, $(1; 2]$, $(2 ; 3]$,$(0 ; 1]$, $(1 ; 2]$, $(3 ; \sqrt{12})$. Важно подчеркнуть, что справедливо и обратное утверждение: если $a$ принадлежит одному из перечисленных промежутков, то можно подобрать такое целое значение $k$, что имеет место записанная выше система, а это в свою очередь дает возможность отрезку $[a + 4 ; a^2]$ содержать нужное количество целых чисел. Подключив условие $a^2 > a + 4$, получим $-\sqrt{6} < a < \frac{1-\sqrt{17}}{2}$ или $\frac{1+\sqrt{17}}{2} < a < \sqrt{12}$.

В ответе объединим результаты первого и второго случаев.

*Ответ.* $-\sqrt{6} < a < \sqrt{12}$, $a \neq 0$, $a \neq 1$.

К классу задач, в которых ответ должен являться наперед заданным подмножеством множества действительных чисел или содержать последнее, можно отнести примеры типа I.19—I.22. В самом деле, устанавливая связи равносильности и следствия между уравнениями и неравенствами, мы фактически предъявляем к множеству их решений упомянутые выше требования. Разберем несколько типичных примеров, иллюстрирующих сказанное.

**II.65.** При каких $a$ уравнение

$$|x - a| - |x + 1| = 2$$

является следствием неравенства

$$\sqrt{x^2 + 4x + 3} \geqslant -1 - x?$$

*Решение.* Решим неравенство. Имеем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1 - x < 0, \\ x^2 + 4x + 3 \geqslant 0;\end{cases} \\ \begin{cases}-1 - x \geqslant 0, \\ x^2 + 4x + 3 \geqslant (-1 - x)^2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Отсюда получим $x \geqslant -1$. Тогда исходное уравнение можно переписать так: $|x - a| = x + 3$. Теперь придадим условию форму рассматриваемого типа задач: при каких $a$ множество решений уравнения $|x - a| = x + 3$ содержит промежуток $[-1; \infty)$. Разумеется, это уравнение должно иметь бесконечно много решений. Его левая часть равна или $a - x$, или $x - a$. Очевидно в первом случае корней—не более одного. Во втором случае лишь при $a = -3$ имеем бесконечно много корней. Итак, при $a = -3$ получаем $|x + 3| = x + 3$. Решением этого уравнения является промежуток $[-3; \infty) \supset [-1; \infty)$.

*Ответ.* $a = -3$.

**II.66.** (МИСиС). При каких значениях $a$ уравнения

$$\sin 2x(\sin 2x - 1) = 0 \text{ и}$$

$$(a+3)\sin^2 2x - \sin 2x\cos 4x - (a+4)\sin 2x = 0$$

равносильны?

*Решение.* Первое уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \sin 2x = 1. \end{array}\right.$$

Легко преобразовать второе уравнение к виду

$$\sin 2x(\sin 2x - 1)\left(\sin 2x + \frac{a+5}{2}\right) = 0\,.$$

Оно в свою очередь равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \sin 2x = 1, \\ \sin 2x = -\dfrac{a+5}{2}\,. \end{array}\right.$$

Сравним полученные совокупности. Сразу заметно, что их равносильности «мешает» уравнение $\sin 2x = -\dfrac{a+5}{2}$ (напомним, что с похожей ситуацией, когда одно из уравнений совокупности становится как бы «лишним», мы уже встречались в задачах I.17, I.86, II.37, II.38). Следовательно, надо найти такие значения параметра $a$, при которых это уравнение или не дает новых корней, или вообще их не имеет. Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{a+5}{2} = 0, \\ -\dfrac{a+5}{2} = 1, \\ \left|-\dfrac{a+5}{2}\right| > 1. \end{array}\right.$$

*Ответ.* $a \leq -7$, или $a = -5$, или $a > -3$.

**II.67.** (МАИ). При каких $a$ из того, что $x$ является корнем уравнения

$$x^2 + \left(3 - \frac{a}{4}\right)x = (a-1)\left(\frac{3a}{4} + 2\right),$$

следует, что $|x-1| + |x+a| > |1+a|$?

*Решение.* Найдем корни данного в условии квадратного уравнения. Имеем $x_1 = a - 1$, $x_2 = -\dfrac{3a+8}{4}$. Далее решение возможно повести по такой схеме: подставить полученные значения $x_1$ и $x_2$ в исходное неравенство и решить его относительно $a$. Однако в силу особенностей этого неравенства можно выбрать иной, более рациональный, путь решения, уже известный по задаче **II.60**: множество его решений — это точки числовой прямой, у которых сумма расстояний до точек 1 и $-a$ больше длины отрезка с этими концами, т.е. ответ составляют координаты всех точек, лежащих вне указанного отрезка. Таким образом, данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 1,\\ x > -a;\end{cases}\\ \begin{cases}x < 1,\\ x < -a.\end{cases}\end{array}\right.$$

Для $x_1$ запишем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-1 > 1,\\ a-1 > -a;\end{cases}\\ \begin{cases}a-1 < 1,\\ a-1 < -a.\end{cases}\end{array}\right.$$

Отсюда $a < \frac{1}{2}$ или $a > 2$. Для $x_2$ имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{-3a-8}{4} > 1,\\ \dfrac{-3a-8}{4} > -a;\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{-3a-8}{4} < 1,\\ \dfrac{-3a-8}{4} < -a.\end{cases}\end{array}\right.$$

Отсюда $-4 < a < 8$. Следовательно, $x_1$ и $x_2$ — корни исходного неравенства, если

*Ответ.* $-4 < a < \frac{1}{2}$ или $2 < a < 8$.

В заключение рассмотрим еще две характерные для данного пункта задачи.

**II.68.** (МАИ). При каких значениях параметра $a$ произведение корней уравнения

$$(x+2a)(x^2-a^2-2a-1)=0$$

меньше наименьшего корня этого уравнения?

*Решение.* Нетрудно найти корни данного уравнения. Имеем $x_1 = -2a$, $x_2 = a + 1$, $x_3 = -(a + 1)$. Их произведение равно $2a(a + 1)^2$. Сравнивая полученные значения, устанавливаем, что $x_1$ является наименьшим корнем, если $a > 1$, $x_2$ — если $a < -1$, $x_3$ — если $-1 < a < 1$. Причем при $a = 1$ $x_1 = x_3$, при $a = -1$ $x_2 = x_3$.

Тогда искомые значения параметра найдем, решив совокупность трех систем:

а) $\begin{cases} a < -1, \\ 2a(a + 1)^2 < a + 1. \end{cases}$

Отсюда $a < -\dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

б) $\begin{cases} -1 \leqslant a < 1, \\ 2a(a + 1)^2 < -(a + 1). \end{cases}$

Эта система решений не имеет.

в) $\begin{cases} a \geqslant 1, \\ 2a(a + 1)^2 < -2a. \end{cases}$

Эта система также не имеет решений.

*Ответ.* $a < -\dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

**П.69.** (МГУ). При каких значениях параметра $p$ уравнение $(x - p)^2(p(x - p)^2 - p - 1) = -1$ имеет больше положительных корней, чем отрицательных?

*Решение.* Имеем

$$p(x - p)^4 - p(x - p)^2 - (x - p)^2 + 1 = 0,$$

$$p(x - p)^2((x - p)^2 - 1) - ((x - p)^2 - 1) = 0,$$

$$((x - p)^2 - 1)(p(x - p)^2 - 1) = 0.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} (x - p)^2 = 1, \\ p(x - p)^2 = 1. \end{array}\right.$$

Если $p \leqslant 0$, то второе уравнение совокупности решений не имеет. При этом первое уравнение имеет два корня: $x_1 = p + 1$, $x_2 = p - 1$. Очевидно для рассматриваемого случая ($p \leqslant 0$) условие задачи не выполняется.

Если $p > 0$, то исходное уравнение имеет четыре корня: $x_1 = p + 1$, $x_2 = p - 1$, $x_3 = p + \frac{1}{\sqrt{p}}$, $x_4 = p - \frac{1}{\sqrt{p}}$. При $0 < p < 1$ получаем поровну положительных и отрицательных корней $(x_2 < 0, x_4 < 0, x_1 > 0, x_3 > 0)$. Для $p \geqslant 1$ имеем $x_1 > 0, x_2 \geqslant 0, x_3 > 0, x_4 \geqslant 0$.

*Ответ.* $p \geqslant 1$.

## Упражнения

**II.70.** Найти $a$, при которых уравнение

$$ax^2 + 3x + 2a^2 - 3 = 0$$

имеет только целые корни.

**II.71.** (ЛГУ). В интервале $(0\,;\,1)$ найти подмножество тех $x$, для которых справедливо неравенство

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{8 + \log_a x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_a^2 x}.$$

**II.72.** (ЛГУ). Найти в интервале $(1\,;\,\infty)$ подмножество тех $x$, для которых справедливо неравенство

$$\lg(3\log_a x - \log_a^2 x + 4) > \lg(8 - 2\log_a x).$$

**II.73.** При каких значениях $a$ и $b$ множество решений неравенства

$$\sqrt{x - a} > \sqrt{2x - b}$$

совпадает с промежутком $[1\,;\,5)$?

**II.74.** (МГУ). Найти все значения $a$, при которых неравенство

$$\frac{x - \frac{a}{4}}{x - 2a} < 0$$

выполняется при всех $x$, таких, что $2 \leqslant x \leqslant 4$.

**II.75.** (МАИ). При каких действительных значениях $a$ из того, что $x$ является корнем уравнения

$$4x^2 - 2(4a - 1)x + 3(a + 2)(a - 1) = 0$$

вытекает, что $x$ не является корнем уравнения

$$|x - a| + |x - 3a| = 2|a|?$$

II.76. (МАИ). При каких $a$ множество решений неравенства

$$x^2 - (a + 1)ax + a^3 \leq 0$$

содержит не менее пяти целых значений $x$?

II.77. (МАИ). При каких действительных $a$ уравнение

$$a^3 + a^2 \left| a + x \right| + \left| a^2x + 1 \right| = 1$$

имеет не менее четырех решений, являющихся целыми числами?

II.78. (МГУ). Найти все значения $a$, при которых каждое решение неравенства

$$(0{,}36)^{\frac{1}{(3x+2)^2}} \leq (0{,}6)^{\frac{1}{(x+8)^2}}$$

является решением неравенства $25a^4x^2 - 4 \leq 0$.

II.79. (МИСиС). При каких значениях параметра $a$ уравнения

$$\sin^2 x = 1 \text{ и } a\cos x = \sin 2x$$

равносильны?

II.80. (МИСиС). Найти $a$, при которых уравнения

$$\sin x = 2\sin^2 x \text{ и } \sin 3x = (a + 1)\sin x - 2(a - 1)\sin^2 x$$

равносильны.

II.81. (МИСиС). Найти $a$, при которых уравнения

$$4\cos^2 x - \cos 3x = a\cos x - (a - 4)(1 + \cos 2x) \text{ и}$$

$$2\cos x \cdot \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$$

равносильны.

II.82. (УрГУ). Найти $a$, при которых каждое решение неравенства $\sqrt{x^2 + 4x + 7} \leq x + 3$ является решением уравнения $2^{x+2} - |2^{x+1} - a| = 2^{x+1} + 1$.

II.83. (МИФИ). При каких действительных $a$ множества решений уравнений

$$4\cos^2 x = a^2 - 6 \text{ и } 1 - \cos 2x = \frac{a}{6}$$

совпадают?

**II.84.** (МФТИ). Найти все значения параметра $a$, при которых расстояние между корнями уравнения $\log_a x + 8\log_{ax}^3 x - 3 = 0$ меньше $\frac{3}{2}$.

**II.85.** (ДПИ). Найти наибольший корень уравнения

$$2x^3 - ax^2 - 2(1-a)^2 x + a(1-a)^2 = 0.$$

**II.86.** (УрГУ). При каждом действительном значении параметра $a$ найти наименьший корень уравнения

$$x^3 + 2ax^2 - (a+1)^2 x = 2a(a+1)^2.$$

**II.87.** (МГУ). Найти все значения параметра $b$, при которых уравнение

$$((x-b)^2 - 2b - 4)(x-b)^2 = -2b - 3$$

имеет отрицательных корней больше, чем положительных.

**II.88.** (МГУ). Найти все значения параметра $c$, при каждом из которых уравнение

$$((x-c-1)^2 - 2)(x-c-1)^2 = c^2 - 1$$

имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

**II.89.** (МГУ). Найти все положительные числа $a$, при которых все различные неотрицательные значения $x$, удовлетворяющие уравнению

$$\cos((19a-7)x) = \cos((17a+13)x)$$

и расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.

**II.90.** (МГУ). Найти все значения параметра $b$, при которых система

$$\begin{cases} \cos(y-b) - 2\cos x = 0, \\ \log_2(by - y^2) = 2\log_4(-x) - \log_{\frac{1}{2}}(3y) \end{cases}$$

имеет нечетное число решений.

## Г. Параметр как равноправная переменная.

Напомним, что во всех разобранных задачах параметр рассматривался как фиксированное, но неизвестное число. Между тем с формальной точки зрения параметр — это переменная, причем «равноправная» с другими, присутствующими в задаче. К примеру, при таком взгляде на параметр формы $f(x\ ;\ a)$ задают функции не с одной (как ранее), а с двумя переменными. Подобная интерпретация, естественно, формирует еще один тип (а точнее метод решения, определяющий этот тип) задач с параметрами. В этом пункте, следуя целям настоящего параграфа, мы покажем несколько аналитических решений задач из указанного класса. Заметим, что графическому методу специально будет посвящен § 4.

II. 91. (МАИ). Найти все значения $a$, при которых уравнения $x^2 + x + 4a = 0$ и $a^2x^2 + ax + 4a = 0$ имеют общий действительный корень.

*Решение.* Рассмотрим систему двух уравнений с двумя переменными $x$ и $a$:

$$\begin{cases} x^2 + x + 4a = 0, \\ a^2x^2 + ax + 4a = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы будут пары вида $(x\ ;\ a)$, и очевидно значения вторых компонентов пар-решений будут составлять ответ данной задачи. Имеем

$$\begin{cases} x^2 + x - a^2x^2 - ax = 0, \\ x^2 + x + 4a = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a - 1)\,(x\,(1 + a) + 1)\,x = 0, \\ x^2 + x + 4a = 0. \end{cases}$$

Последняя система равносильна совокупности трех систем:

а) $\begin{cases} a = 1, \\ x^2 + x + 4a = 0. \end{cases}$

Эта система решений не имеет.

б) $\begin{cases} x = 0, \\ x^2 + x + 4a = 0. \end{cases}$

Отсюда

$$\begin{cases} x = 0, \\ a = 0. \end{cases}$$

в) $\begin{cases} x + xa + 1 = 0, \\ x^2 + x + 4a = 0. \end{cases}$

Очевидно при $a = -1$ эта система решений не имеет. Тогда

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{1+a}, \\ \left(\dfrac{1}{1+a}\right)^2 - \dfrac{1}{1+a} + 4a = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{1+a}, \\ a\,(4a^2 + 8a + 3) = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет три решения $(x\ ;\ a)$: $(-1\ ;\ 0)$, $\left(-2; -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(2\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right)$.

*Ответ.* $a = 0$, или $a = -\dfrac{1}{2}$, или $a = -\dfrac{3}{2}$.

**П. 92.** При каких $a$ и $b$ система

$$\begin{cases} 2a + \dfrac{2b^2}{a} = x\left(1 + \dfrac{b}{a}\right) + y\left(1 - \dfrac{b}{a}\right), \\ \dfrac{2a}{b} - 2ab = x\left(\dfrac{1}{b} - a\right) + y\left(\dfrac{1}{b} + a\right). \end{cases}$$

имеет решения ? Найти эти решения.

*Решение.* В этой линейной относительно $x$ и $y$ системе параметрам $a$ и $b$ выгодно дать более чем равные права с переменными: решим ее относительно $a$ и $b$. Умножив первое уравнение на $a^2$, второе на $b$, запишем равносильную систему:

$$\begin{cases} 2a^3 + 2b^2a = xa^2 + xba + ya^2 - yba, \\ 2a - 2ab^2 = x - xab + y + yab, \\ a \neq 0, b \neq 0. \end{cases}$$

Сложив уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} 2a\,(a^2 + 1) = x\,(a^2 + 1) + y\,(a^2 + 1), \\ 2a - 2ab^2 = x - xab + y + yab, \\ a \neq 0, b \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} a = \dfrac{x+y}{2}, \\ b = \dfrac{x-y}{2}. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} x = a + b\,, \\ y = a - b\,. \end{cases}$$

*Ответ.* Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $x = a + b$ и $y = a - b$ ; если $a = 0$ или $b = 0$, то система решений не имеет.

Разумеется, трудно рассчитывать, что решение уравнений (неравенств, систем) относительно параметров всякий раз будет результативным. Однако такие задачи существуют, и о методе их решения забывать не следует. Это иллюстрируют следующие примеры.

**П. 93.** (МГУ). Указать все значения $a$, для которых уравнение $\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$ имеет решения.

*Решение.* Обозначим $\sin x = t$. Исходное уравнение принимает вид $\sqrt{a + \sqrt{a + t}} = t$. С учетом условия $|t| \leqslant 1$это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} a + t = (t^2 - a)^2, \\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ t^2 \geqslant a. \end{cases}$$

Уравнение системы удобно представить как квадратное относительно параметра $a$. Имеем $a^2 - a(2t^2 + 1) + t^4 - t = 0$. Отсюда $a = t^2 + t + 1$ или $a = t^2 - t$ . Так как $t^2 \geqslant a$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $t^2 - a + t + 1 > 0$. Поэтому последняя система равносильна такой:

$$\begin{cases} a = t^2 - t\,, \\ 0 \leqslant t \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Заметим, что эта система учитывает требование $t^2 \geqslant a$. Рассмотрим функцию $y = t^2 - t$. Очевидно на отрезке $[0\,;1]$ ее область значений — весь промежуток $\left[-\frac{1}{4}\,;0\right]$. Отсюда

*Ответ.* $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0$.

**П. 94.** (МГУ). Для каждого неотрицательного значения параметра $a$ решить неравенство $a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 \geqslant 0$.

*Решение.* Понятно, что левую часть (обозначим ее $f(x\,;a)$) неравенства надо разложить на множители. Для этого попытаемся решить уравнение $f(x\,;a) = 0$. Однако (читатель может убедиться в этом самостоятельно) решить его как относительно $x$, так и относительно $a$ не так просто. Здесь нужна идея. Рассмотрим уравнение $a\,f(x\,;a) = 0$, т.е. $a^4x^4 + 6a^3x^2 - ax + {}$ $+ 9a^2 + 3a = 0$.

Пусть $ax = t$. Тогда имеем $t^4 + 6at^2 - t + 9a^2 + 3a = 0$. Рассмотрев последнее уравнение как квадратное относительно $a$, получим

$$\left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{t^2 + t + 1}{3}, \\ a = \dfrac{-t^2 + t}{3}. \end{array}\right.$$

Итак, идея решения найдена. Реализуем ее. Если $a = 0$, то данное неравенство имеет своим решением промежуток $(-\infty\,;3\,]$. Остается рассмотреть случай, когда $a > 0$. Умножим обе части исходного неравенства на $a$. Имеем $a^4x^4 + 6a^3x^2 - ax + 9a^2 + 3a \geq 0$, и с учетом ранее полученного раскладываем левую часть этого неравенства на множители: $(a^2x^2 + ax + 3a + 1)(a^2x^2 - ax + 3a) \geq 0$. Так как $a > 0$, то $(a^2x^2 + ax + 3a + 1)\,(ax^2 - x + 3) \geq 0$.

Дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в первых скобках, $D = -\,a^2(12a + 3)$. Очевидно для $a > 0$ $D < 0$. Следовательно, $a^2x^2 + ax + 3a + 1 > 0$ при всех $x$. Значит, при $a > 0$ исходное неравенство равносильно неравенству $ax^2 - x + 3 \geq 0$. Снова обратимся к дискриминанту, но уже квадратного трехчлена $ax^2 - x + 3$. Имеем $D = 1 - 12a$. Если $a \geq \frac{1}{12}$, то очевидно последнее неравенство выполняется для всех $x$. Если $0 < a < \frac{1}{12}$, то легко установить, что решением рассматриваемого неравенства есть объединение промежутков

$$\left(-\infty\,;\frac{1 - \sqrt{1 - 12a}}{2a}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{1 - 12a}}{2a}\,;\infty\right).$$

*Ответ.* Если $a = 0$, то $x \leq 3$; если $0 < a < \frac{1}{12}$, то $x \leq \dfrac{1 - \sqrt{1 - 12a}}{2a}$ или $x \geq \dfrac{1 + \sqrt{1 - 12a}}{2a}$; если $a \geq \frac{1}{12}$, то $x$ — любое.

Следующие две задачи лишь по форме отличаются от предыдущих.

II.95. (МГТУ). На плоскости $xy$ укажите все точки, через которые не проходит ни одна из кривых семейства $y = x^2 - 4px + 2p^2 - 3$ , где $p$ — параметр.

*Решение.* Если $(x_0 ; y_0)$ — точка, через которую не проходит ни одна из кривых заданного семейства, то координаты этой точки не удовлетворяют исходному уравнению. Следовательно, задача свелась к тому, чтобы найти зависимость между $x$ и $y$, при которой данное в условии уравнение не имело бы решений. Нужную зависимость несложно получить, сосредоточив внимание не на переменных $x$ и $y$ , а на параметре $p$. В этом случае возникает продуктивная, но уже не новая идея: рассмотреть данное уравнение как квадратное относительно $p$. Имеем $2p^2 - 4px + x^2 - y - 3 = 0$. Дискриминант $D = 8x^2 + 8y + 24$ должен быть отрицательным. Отсюда получаем $y < -x^2 - 3$. Следовательно, искомое множество — это все точки координатной плоскости, лежащие «под» параболой $y = -x^2 - 3$.

*Ответ.* $y < -x^2 - 3$.

II.96. Один из корней уравнения $x^{12} - abx + a^2 = 0$ больше двух. Найти все $a$, при которых $|b| > 64$.

*Решение.* Пусть $x_0$ — корень, о котором говорится в условии, т.е. $x_0 > 2$. Тогда существуют такие значения параметров $a$ и $b$, что имеет место равенство $x_0^{12} - abx_0 + a^2 = 0$. Если на это равенство «посмотреть» как на квадратное относительно $a$, то его справедливость достигается требованием неотрицательности дискриминанта. Итак, $D = b^2x_0^2 - 4x_0^{12} \geq 0$. Отсюда $b^2 \geq 4x_0^{10}$, $|b| \geq 2x_0^5$. Значит, $|b| > 64$ при любых значениях $a$.

*Ответ.* $a$ — любое.

II.97. Решить уравнение $\sqrt{5 - x} = x^2 - 5$.

*Решение.* Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 5 - x = (x^2 - 5)^2, \\ x^2 \geq 5. \end{cases}$$

Представим уравнение системы в виде квадратного... относительно 5. Получаем $5^2 - 5(1 + 2x^2) + x + x^4 = 0$. Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} 5 = \dfrac{(1 + 2x^2) + (1 - 2x)}{2}, \\ 5 = \dfrac{(1 + 2x^2) - (1 - 2x)}{2}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + x - 5 = 0, \\ x^2 - x - 4 = 0. \end{array}\right.$$

Непосредственной проверкой устанавливаем, что системе удовлетворяют лишь два корня $x = \dfrac{-1 - \sqrt{21}}{2}$ и $x = \dfrac{1 + \sqrt{17}}{2}$.

У читателя могут возникнуть вопросы. Во-первых, законно ли представление уравнения как квадратного относительно какого-то числа? Сразу скажем, что в таком подходе «криминала» нет. Действительно, ведь никто не сомневается в существовании квадратного трехчлена относительно букв (символов, знаков) $a$, $b$, $x$, $y$, $\alpha$, $\beta$ и т.д. Так почему же нельзя рассматривать квадратный трехчлен относительно какого-то другого символа, например, «5». Понятно, что можно. Во-вторых, какое отношение имеет решенное уравнение к задачам с параметрами? Формально—никакого. Однако попробуем осветить этот вопрос с другой стороны. Описанную идею решения, по правде говоря, естественной (стандартной) не назовешь. Поэтому, чтобы ее найти, надо проявить немалую изобретательность, даже изощренность. Но если «параметризировать» исходное уравнение, т.е. записать его в виде $\sqrt{a - x} = x^2 - a$, то «увидеть» квадратный трехчлен относительно $a$ при соответствующем опыте не так уж сложно. Таким образом, привлечение параметра в этой задаче и ей подобных оправдано, как и оправдан наш выбор.

## Упражнения

II.98. (МАИ). Найти все такие значения $a$, при которых уравнения

$$x^2 - \frac{x}{2} + a = 0 \text{ и } 4a^2x^2 - ax + a = 0$$

имеют общий действительный корень.

II.99. (МФТИ). Найти все значения $\alpha$, при которых уравнения

$$2x^4 - 5x^3 - 16\alpha x^2 + 25x - 10 = 0,$$

$$2x^4 + 2ax^3 - 11x^2 - 5x + 5 = 0$$

имеют общие корни. Найти эти корни.

**II.100.** (МФТИ). Найти все значения $a$, при которых уравнения

$$22x^4 + 33x^3 - 16ax^2 - 3x + 2 = 0,$$

$$11x^4 + 33x^3 + 21x^2 - 2ax - 2 = 0$$

имеют общие корни. Найти эти корни.

**II.101.** (НГУ). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (y + z) = (b + c)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right), \\ (x + z) = (a + c)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right), \\ (x + y) = (a + b)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right), \end{cases}$$

где $b + c \neq 0$, $a + c \neq 0$, $a + b \neq 0$.

**II.102.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} - \dfrac{b}{z} + xz = c, \\ \dfrac{b}{y} - \dfrac{c}{x} + xy = a, \\ \dfrac{c}{z} - \dfrac{a}{y} + yz = b. \end{cases}$$

**II.103.** Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = bx + ay - cz, \\ y^2 + z^2 = -ax + cy + bz, \\ z^2 + x^2 = cx - by + az. \end{cases}$$

**II.104.** (ЛГУ). Решить уравнение

$$(8a^2 + 1)\sin^3 x - (4a^2 + 1)\sin x + 2a\cos^3 x = 0.$$

**II.105.** (МГУ). Для каждого неотрицательного значения параметра $a$ решить неравенство

$$4a^3x^4 + 4a^2x^2 + 32x + a + 8 \geqslant 0.$$

**II.106.** (МГУ). Для каждого неотрицательного значения параметра $a$ решить неравенство

$$a^3x^4 + 2a^2x^2 - 8x + a + 4 \geq 0.$$

**П.107.**(МГТУ). На плоскости $xy$ укажите все точки, через которые не проходит ни одна из кривых семейства

$$y = p^2 + (4 - 2p)\,x - x^2\,.$$

**П.108.**(МГТУ). На плоскости $xy$ укажите все точки, через которые не проходит ни одна из кривых семейства

$$y = p^2 + (2p - 1)x + 2x^2.$$

**П.109.**(ЛПИ). Какая часть плоскости покрыта всевозможными кругами вида $(x - a)^2 + (y - a)^2 \leq 2 + a^2$?

**П.110.** Решить уравнения:

а) $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0;$

б) $x^3 - (\sqrt{2} + 1)x^2 + 2 = 0.$

## § 2. Свойства функций в задачах с параметрами

С каждым уравнением (неравенством, системой) связаны конструирующие их аналитические выражения. Последние в свою очередь могут задавать функции одной или нескольких переменных. С этой точки зрения, например, уравнение $f(x) = g(x)$ мы можем рассматривать как задачу о нахождении значений аргумента $x$, при которых равны значения функций $f$ и $g$. Такие, казалось бы, тривиальные рассуждения нередко дают возможность найти результативный путь решения многих задач. Кратко основную идею можно сформулировать так: ключ решения — свойства функций.

По существу, в немалом числе ранее решенных примеров мы использовали свойства функций. Но при этом, выделяя идею решения, иначе расставляли акценты. В настоящем параграфе будем отдавать предпочтение функциональному подходу, суть которого достаточно ясно раскрывается на следующем простом примере.

Требуется решить неравенство $\sqrt{x} > 2$.С одной стороны, используя свойства числовых неравенств (возведение обеих частей в четную степень), можно показать, что неравенство $\sqrt{x} > 2$ равносильно $x > 4$. С другой стороны, функциональный взгляд позволяет рассуждать так: перепишем исходное неравенство в виде $\sqrt{x} > \sqrt{4}$. Далее, учитывая характер монотонности функции $y = \sqrt{x}$, получаем $x > 4$.

Прежде чем непосредственно приступить к изучению вопроса, отметим, что пункты этого параграфа, за малым исключением, соответствуют стандартной схеме исследования функции.

И последнее. Мы посчитали нецелесообразным посвящать отдельный пункт области определения функции, что понятно, так как, работая с уравнением,неравенством, системой, почти всегда приходится учитывать их области определения.

### А. Область значений функции.

Вначале обратимся к задачам, в условии которых непосредственно содержится требование поиска области значения функции.

**II.111.** (МАИ). Найти все $a$, при которых множество значений функции $f(x) = (1/3)^{x^2+2x+a^2-3a}$ не пересекается с промежутком $[3\,;\,\infty)$.

*Решение.* Имеем $(1/3)^{x^2+2x+a^2-3a} = (1/3)^{(x+1)^2} \times (1/3)^{a^2-3a-1}$. Очевидно $0 < (1/3)^{(x+1)^2} \leqslant 1$. Отсюда $0 < f(x) \leqslant (1/3)^{a^2-3a-1}$. Следовательно, область значений функции $f$ — промежуток $\left(0\,;\,(1/3)^{a^2-3a-1}\right]$. Полученный промежуток не должен иметь общих точек с лучом $[3\,;\,\infty)$. Понятно, что для этого достаточно потребовать $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{a^2-3a-1} < 3$. Отсюда $a^2 - 3a - 1 > -1$, т.е. $a < 0$ или $a > 3$.

*Ответ.* $a < 0$ или $a > 3$.

**II.112.** (МАИ). При каких $a > 0$ область значений функции $y = \dfrac{a^{x-1} + 5}{a^x + 3a}$ не содержит ни одного целого четного числа ?

*Решение.* Для нахождения области значений данной функции удобно воспользоваться известным приемом. Рассмотрим равенство $y = \dfrac{a^{x-1} + 5}{a^x + 3a}$ как уравнение с параметрами $y$, $a$ и переменной $x$. Теперь поставим следующую задачу: найти все значения параметра $y$, при которых найдется такое $a > 0$, что указанное уравнение имеет хотя бы одно решение.

Так как $a > 0$, то переходим к равносильному уравнению $y\,a\,a^x + 3a^2y = a^x + 5a$. Отсюда $a^x(y\,a - 1) = 5a - 3a^2y$. Проверка показывает, что при $y = \dfrac{1}{a}$ это уравнение не имеет решений. Следовательно, $a^x = \dfrac{3\left(\dfrac{5}{3a} - y\right)a}{y - \dfrac{1}{a}}$. Ясно, что это уравнение имеет решение, если $\dfrac{\dfrac{5}{3a} - y}{y - \dfrac{1}{a}} > 0$. С учетом $a > 0$

получаем $\frac{1}{a} < y < \frac{5}{3a}$. Значит, область значений данной функции — промежуток $\left(\frac{1}{a}\,;\,\frac{5}{3a}\right)$. Полученный интервал не содержит ни одного четного числа, если он полностью «помещается» в отрезке $[2k-2\,;\,2k\,]$, где $k \in N$. Для выполнения этого условия достаточно потребовать

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} \geqslant 2k-2\,, \\ \dfrac{5}{3a} \leqslant 2k\,. \end{cases}$$

Перепишем эту систему в таком виде:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} \geqslant 2k-2\,, \\ \dfrac{1}{a} \leqslant \dfrac{6k}{5}\,. \end{cases}$$

Понятно, что она имеет решения, если $2k-2 \leqslant \frac{6k}{5}$, т.е. $k \leqslant \frac{5}{2}$. Отсюда возможны два случая: $k=1$ и $k=2$. Без труда устанавливаем, что в первом случае $a \geqslant \frac{5}{6}$, во втором — $\frac{5}{12} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$.

*Ответ.* $a \geqslant \frac{5}{6}$ или $\frac{5}{12} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$.

**П.113.** (МАИ). Найти все значения параметра $a$, для которых отрезок $[1\,;\,2\,]$ принадлежит области значений функции $y = \dfrac{x+1}{4x^2-a}$.

*Решение.* Пусть $y = b$ — одно из значений данной функции. Переформулируем условие задачи: найти все $a$ такие, что для любого $b \in [1\,;\,2\,]$ уравнение $b = \dfrac{x+1}{4x^2-a}$ имеет решения.

Прежде всего заметим, что при $b \in [1\,;\,2\,]$ $x = -1$ не корень этого уравнения. Теперь запишем систему, равносильную рассматриваемому уравнению:

$$\begin{cases} b\,(4x^2-a) = x+1\,, \\ x^2 \neq \dfrac{a}{4}\,. \end{cases}$$

Отсюда так как $x \neq -1$, то $4x^2 - a \neq 0$. Следовательно, при $b \in [1\,;2\,]$ условие $x^2 \neq \frac{a}{4}$ выполняется «автоматически». Осталось выяснить, при каких $a$ система

$$\begin{cases} b \in [1\,;2\,], \\ b\,(4x^2 - a\,) = x + 1 \end{cases}$$

имеет решения. Понятно, что дискриминант квадратного уравнения системы должен быть неотрицательным, т.е. $1 + 16ab^2 + 16b \geqslant 0$. Получаем $-16\,a \leqslant \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b}$. Пусть $\frac{1}{b} = c$. Тогда $c \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$. Рассмотрим квадратичную функцию $f\,(c\,) = c^2 + 16c$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$. Для неотрицательности дискриминанта достаточно потребовать, чтобы $-16a$ не превосходило наименьшего значения функции $f$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$. Так как рассматриваемая функция на указанном отрезке возрастает, то $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} f\,(c\,) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{33}{4}$. Итак, $-16\,a \leqslant \frac{33}{4}$,

$a \geqslant -\frac{33}{64}$.

*Ответ.* $a \geqslant -\frac{33}{64}$.

Условие следующих двух задач не содержит прямой подсказки использовать область значений функции. Такая необходимость возникает в ходе решения.

**П.114.** (МАИ). При каких значениях $a$ найдутся такие $b$, что числа $4 + 25^b$, $a$, $5^{-b}$ будут являться последовательными членами геометрической прогрессии?

*Решение.* По свойству членов геометрической прогрессии $a^2 = \frac{5^{2b} + 4}{5^b}$. Пусть $5^b = t$, где $t > 0$. Рассмотрим функцию $f\,(t\,) = \frac{t^2 + 4}{t}$ с областью определения $(\,0\,;\infty)$. Имеем $\frac{t^2 + 4}{t} = t + \frac{4}{t} \geqslant 4$, так как $t > 0$. Заметим, что $f\,(2) = 4$, и в силу непрерывности и неограниченности сверху функции $f$ ее область значений в указанной области определения — это промежуток $[4\ ;\ \infty)$. Следовательно, найдутся такие $b$, что $a^2 = \dfrac{5^{2b}+4}{5^b} \geqslant 4.$ Отсюда $|a| \geqslant 2$.

*Ответ.* $|a| \geqslant 2$.

**II.115.** (МИФИ). Решить систему

$$\begin{cases} 2\operatorname{arctg} x + y - e^z = 3\,, \\ 4\operatorname{arctg} x - y - 2e^z = 0\,, \\ \operatorname{arctg} x + y + e^z = 3a + 1\,. \end{cases}$$

*Решение.* Напрашивается замена $\operatorname{arctg} x = u$, $e^z = t$, где $-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$, $t > 0$. Имеем

$$\begin{cases} 2u + y - t = 3\,, \\ 4u - y - 2t = 0\,, \\ u + y + t = 3a + 1\,. \end{cases}$$

Отсюда легко получить

$$\begin{cases} u = a\,, \\ t = 2a - 1\,, \\ y = 2\,. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \operatorname{arctg} x = a\,, \\ e^z = 2a - 1\,, \\ y = 2\,. \end{cases}$$

Учитывая области значений функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = e^z$, записываем систему, определяющую область допустимых значений параметра $a$:

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < a < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ 2a - 1 > 0\,. \end{cases}$$

Отсюда $\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{\pi}{2}$. При таких $a$ имеем

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} a\,, \\ y = 2\,, \\ z = \ln\,(2a - 1)\,. \end{cases}$$

*Ответ.* Если $\frac{1}{2} < a < \frac{\pi}{2}$, то $x = \operatorname{tg} a$, $y = 2$, $z = \ln\ (2a - 1)$; при других $a$ решений нет.

В последнем примере идея замены довольно прозрачна. Однако подобная ситуация встречается отнюдь не всегда.

Ниже рассмотрим тип задач, в которых область значений функций помогает найти далеко не очевидную замену. Вначале изложим суть вопроса в общем виде.

Пусть в задаче фигурирует переменная $x$, область допустимых значений которой множество $M$. Если существует такая функция $y = f(t)$ с той же областью значений $M$, то при необходимости возможно провести замену $x = f(t)$. Подобные замены порой существенно упрощают решение. Например, из условия задачи следует, что переменная $x$ пробегает все значения из отрезка $[-1; 1]$ и только эти. Тогда допустимы следующие замены: $x = \sin\alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ или $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$, причем какую из них выбрать, зависит от конкретной ситуации. В случаях, когда переменная может принимать любые значения, используются замены $x = \operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ или $x = \operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha \in (0; \pi)$. Реже $x = r\cos\alpha$ или $x = r\sin\alpha$, где $r \in R$, $r \geqslant 0$, а выбор значений $\alpha$ опять-таки зависит от конкретной задачи. Такие замены будем называть тригонометрическими подстановками. Ими нам и предстоит заниматься.

И последнее замечание. Реализовать такую подстановку не так уж трудно (в этом читатель сможет убедиться). Главное и, наверное, самое сложное — суметь ее увидеть. Возможно, следующие примеры помогут научиться распознавать «приметы» тригонометрических подстановок.

**II.116.**(КПИ). При каких $a$ неравенство $\sqrt{1 - x^2} > a - x$ имеет решения?

*Решение.* В данном неравенстве $|x| \leqslant 1$. Полагая $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$, приходим к неравенству $\sqrt{1 - \cos^2\alpha} > a - \cos\alpha$, или $|\sin\alpha| > a - \cos\alpha$. Но в нашем случае $\sin\alpha \geqslant 0$, так что $a < \sin\alpha + \cos\alpha$. Отсюда $a < \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$. Это неравенство имеет решения, если $a$ меньше наибольшего значения выражения $\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$. Так как $\alpha \in [0\,;\pi\,]$, то $\max \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$ Значит, исходное неравенство имеет решение при $a < \sqrt{2}$.

*Ответ.* $a < \sqrt{2}$.

**II.117.** Решить уравнение $x(2x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2} = a$.

*Решение.* Поскольку $|x| \leqslant 1$, то, как и в предыдущем примере, $x = \cos\alpha$, где $\alpha \in [0\,;\pi\,]$. Выполняя подстановку и учитывая, что $\sin\alpha \geqslant 0$, получаем уравнение $\cos\alpha \cos 2\alpha \sin\alpha = a$. Отсюда $\sin 4\alpha = 4a$. Очевидно это уравнение имеет решение при $|a| \leqslant \frac{1}{4}$. Найдем его корни на отрезке $[0\,;\pi\,]$. Имеем $\alpha = \; = (-1)^k \frac{1}{4}\arcsin 4a + \frac{\pi k}{4}$. Рассмотрим три случая. Если $-\frac{1}{4} \leqslant a < 0$, то непосредственным перебором устанавливаем, что $\alpha \in [0\,;\pi\,]$ лишь при $k = 1, 2, 3, 4$. Если $a = 0$, то $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Если $0 < a \leqslant \frac{1}{4}$, то $k = 0, 1, 2, 3$.

*Ответ.* Если $-\frac{1}{4} \leqslant a < 0$, то $x = \cos\left((-1)^k \frac{1}{4}\arcsin 4a + \frac{\pi k}{4}\right)$, где $k = 1, 2, 3, 4$; если $a = 0$, то $x = \cos\frac{\pi k}{4}$, где $k = 0, 1, 2, 3, 4$; если $0 < a \leqslant \frac{1}{4}$, то $x = \cos\left((-1)^k \frac{1}{4}\arcsin 4a + \frac{\pi k}{4}\right)$, где $k = 0, 1, 2, 3$.

**II.118.** При каких $a$ и $b$ система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ ax + by = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

*Решение.* Стремление увидеть тригонометрическую подстановку заставляет нас обратиться к первому уравнению системы.

Так как $|x| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 1$, то возможна замена $x = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, где $\alpha \in [0\,;2\pi\,)$. Теперь достаточно выяснить, при каких $a$ и $b$ уравнение $a\sin\alpha + b\cos\alpha = 1$, где $\alpha \in [0\,;2\pi\,)$, имеет единственное решение. Воспользуемся известным из тригонометрии методом преобразования левой части этого уравнения.

Так как случай $a^2 + b^2 = 0$ нас не устраивает, то имеем $\sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos\alpha\right) = 1$. Отсюда $\sin(\alpha + \varphi) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, где $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
Заметим, что функция $f(\alpha) = \sin(\alpha + \varphi)$ на отрезке $[0\,;2\pi)$ каждое свое значение, кроме 1 и $-1$, принимает более одного раза. Поэтому условие единственности решения достигается при $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$.

*Ответ.* $a^2 + b^2 = 1$.

**II.119.** При каких $a$ неравенство $3xy - 4x^2 < a\left(x^2 + y^2\right)$ имеет решения?

*Решение.* В этом примере идея тригонометрической подстановки наиболее замаскирована. И вряд ли нам удастся убедить читателя в том, что задача «пахнет» тригонометрической заменой. Скорее всего эта идея может возникнуть у того, кто на нее настроен, т.е. у нас с Вами, читатель.

Пусть $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, где $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$. Нужно сразу же отметить, что такая замена законна. (Тот, кто знаком с полярной системой координат, не нуждается в следующих пояснениях.) Действительно, для любых $x$ и $y$ существует такое $r \geqslant 0$, что $x^2 + y^2 = r^2$. При $r \neq 0$ имеем $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$ (случай, когда $r = 0$ — тривиален). Этого равенства уже достаточно для подтверждения корректности предложенной замены.

Имеем $3r^2\sin\alpha\cos\alpha - 4r^2\cos^2\alpha < ar^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$. Если $r = 0$, то очевидно неравенство не имеет решений ни при каких $a$. Тогда $\frac{3}{2}\sin2\alpha - 4\cos^2\alpha < a$. Отсюда $a > \frac{3}{2}\sin2\alpha - 2\cos2\alpha - 2$.

Легко получить следующее неравенство: $a > \frac{5}{2}\sin(2\alpha - \varphi) - 2$, где $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Это неравенство очевидно имеет решения, если $a$ больше наименьшего значения, которого может достичь правая часть, т.е. $a > -\frac{9}{2}$.

*Ответ.* $a > -\frac{9}{2}$.

## Упражнения

**II.120.** (МАИ). Найти все положительные значения $a$, при которых область значений функции $f(x) = \dfrac{a^{x+1} - 2a^2 - 2a}{a^{x-1} - 2}$ содержит все четные целые числа.

**II.121.**(МАИ). При каких $a > 0$ и $a \neq 1$ область значений функции $f(x) = \dfrac{a^{x+2} + a^2 - a}{a^x + 1}$ не содержит ни одного целого числа, делящегося на 3?

**II.122.**(МАИ). Найти все целые значения $a$, при которых множество значений функции $f(x) = 3^{x^2 - 2x + a^2 + a - 6}$ имеет общие точки с отрезком $\left[0\,;\,\dfrac{1}{9}\right]$.

**II.123.**(МАИ). Найти все целые значения параметра $a$, при каждом из которых множество значений функции $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2 - 2ax + 2a^2 + a - 2}$ имеет общие точки с отрезком $[1\,;\,2\,]$.

**II.124.**(МГУ). Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых область значений функции $y = \dfrac{a - \cos x}{2a + \sin^2 x - 1}$ содержит отрезок $\left[\dfrac{1}{5}\,;\,\dfrac{1}{3}\right]$.

**II.125.**(МАИ). При каких значениях $a$ функция $f(y) = \lg\left(y^2 - 3y + 3a - 1\right)$ определена при всех действительных $y$ из области значений функции $y = \dfrac{x^2 + 2x - a}{x}$?

**II.126.**(МАИ). При каких значениях $a \in R$ найдутся такие значения $b \in R$, что числа $4 + 25^b + 25^{-b}$, $5^b + 5^{-b}$, $a$ будут являться последовательными членами геометрической прогрессии?

**II.127.**(МИФИ). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3\cdot 2^x + 2y - 3\arcsin z = 7, \\ 2^x - y - \arcsin z = -6, \\ 5\cdot 2^x - y + \arcsin z = 6a + 2. \end{cases}$$

**П.128.** Решить уравнение $\sqrt{p-x} + \sqrt{p+x} = x$.

**П.129.** (ЕТМ). При каких значениях $a$ система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy\left(2x^2 - a^2\right) = 1 \end{cases}$$

имеет решение?

## Б. Экстремальные свойства функций.

В этом пункте, равно как и в предыдущем, идея поиска области значения функции будет ключевой. Но сейчас наше внимание будет привлекать не все множество значений,а лишь некоторые (характерные) его элементы. Как правило, ими будут наибольшие и наименьшие значения функции. Обратимся к примерам.

**П.130.** (МГУ). Определить, при каких целых $k$ система

$$\begin{cases} (\operatorname{arctg} x)^2 + (\arccos y)^2 = \pi^2 k, \\ \operatorname{arctg} x + \arccos y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

имеет решения. Найти эти решения.

*Решение.* Имеем $0 \leq (\operatorname{arctg} x)^2 < \frac{\pi^2}{4}, 0 \leq (\arccos y)^2 \leq \pi^2$. Отсюда $(\operatorname{arctg} x)^2 + (\arccos y)^2 \leq \frac{5\pi^2}{4}$. Тогда $0 \leq \pi^2 k \leq \frac{5\pi^2}{4}$. Значит, для $k$ допустимы значения 0 и 1.

При $k = 0$ исходная система очевидно решений не имеет. Если $k = 1$, то

$$\begin{cases} (\operatorname{arctg} x)^2 + (\arccos y)^2 = \pi^2, \\ \operatorname{arctg} x + \arccos y = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Пусть $\operatorname{arctg} x = t$. Тогда $t^2 + \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2 = \pi^2$. Отсюда $t_1 = \frac{\pi(1-\sqrt{7})}{4}$, $t_2 = \frac{\pi(1+\sqrt{7})}{4}$. Из этих двух значений подходит лишь $t_1$ $\left(t_2 > \frac{\pi}{2}\right)$. Итак,

$$\begin{cases} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}(1-\sqrt{7}), \\ \arccos y = \frac{\pi}{4}(1+\sqrt{7}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(1-\sqrt{7}), \\ y = \cos\frac{\pi}{4}(1+\sqrt{7}). \end{cases}$$

*Ответ.* Если $k = 1$, то $x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(1-\sqrt{7})$, $y = \cos\frac{\pi}{4}(1+\sqrt{7})$; при других целых $k$ решений нет.

**II.131.**(ЛГУ). При каких $a > 0$ неравенство $\left|\left|\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right| \leq a$ выполняется для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$?

*Решение.* Если $x$ пробегает все значения из промежутка $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$, тогда имеем $-\frac{\sqrt{3}}{3} < \operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$. Отсюда $-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} < \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$. Тогда $\left|\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}\right| < \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2} \leq \left|\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3}$. Окончательно получаем $\left|\left|\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right| < \frac{\sqrt{3}}{3}$. Следовательно, для $a \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ исходное неравенство выполняется для всех указанных значений $x$.

*Ответ.* $a \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

**II.132.**(МГУ). Найти все значения параметра $a$, при которых неравенство $-5 + 5a + \sin^2 x + a(3-\cos x)^3 > 0$ выполняется при всех $x$.

*Решение.* При решении этого примера надо придерживаться схемы, уже знакомой читателю по задачам **II.116, II.118, II.119**: представить исходное неравенство в виде $a > f(x)$ ($a < f(x)$) ("изолировать" параметр), затем исследовать функцию $f$ на наибольшее (наименьшее) значение.

Перепишем данное неравенство в следующем виде: $a((3 - \cos x)^3 + 5) > 5 - \sin^2 x$. Поскольку $(3 - \cos x)^3 + 5 > 0$ для всех $x$, то запишем неравенство, равносильное исходному:

$a > \dfrac{5-\sin^2 x}{(3-\cos x)^3+5}$. Это неравенство выполняется при всех $x$, если значения параметра $a$ будут больше наибольшего значения функции $f(x) = \dfrac{5-\sin^2 x}{(3-\cos x)^3+5}$. Заметим, что в полученной дроби при $\cos x = 1$ числитель принимает наибольшее значение, а знаменатель — наименьшее. Тогда $f(x) \leqslant \dfrac{5}{2^3+5} = \dfrac{5}{13}$. Знак равенства достигается при $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, искомые значения $a$ определяются неравенством $a > \dfrac{5}{13}$.

*Ответ.* $a > \dfrac{5}{13}$.

**II.133.** (МГУ). Найдите наибольшее значение величины $b$, при котором неравенство

$$\sqrt{b^5}\,(8x - x^2 - 16) + \frac{\sqrt{b}}{8x - x^2 - 16} \geqslant -\frac{2}{3}\,b\,|\cos \pi x|$$

имеет хотя бы одно решение.

*Решение.* Совершенно очевидно, что при $b = 0$ данное неравенство имеет хотя бы одно решение. Поэтому дальше будем полагать, что $b > 0$. Перепишем неравенство в виде

$$\sqrt{b^5}\,(x-4)^2 + \frac{\sqrt{b}}{(x-4)^2} \leqslant \frac{2}{3}b\,|\cos \pi x|.$$

Напомним, (II.119.), что для существования хотя бы одного решения правая часть этого неравенства должна быть не меньше наименьшего значения левой части.

Оценку левой части удобно произвести с помощью известного неравенства Коши $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$. Получаем $\sqrt{b^5}(x-4)^2 + \dfrac{\sqrt{b}}{(x-4)^2} \geqslant 2\sqrt{b^3}$. Заметим, что равенство достигается при $x = 4 + \dfrac{\sqrt{b}}{b}$. Следовательно, исходное неравенство имеет хотя бы одно решение, если $2\sqrt{b^3} \leqslant \dfrac{2}{3}\,b\,|\cos \pi x|$.

Теперь, как и в предыдущих двух примерах, попытаемся «изолировать» параметр $b$. Получаем $b^3 \leqslant \dfrac{1}{9}b^2\cos^2 \pi x$. Поскольку

$b > 0$, то $b \leq \frac{1}{9}\cos^2\pi x$. Последнее неравенство имеет решения при $b \leq \frac{1}{9}$. Легко убедиться, что при $b = \frac{1}{9}$ исходное неравенство имеет решение, например $x = 7$. Следовательно, искомое значение $b = \frac{1}{9}$.

*Ответ.* $b = \frac{1}{9}$.

**II.134.** (ЛГУ). Найти все $b$, при которых неравенство $(a^2 - 9)\cos x + 6a\sin x \leq ab$ имеет решение при любом $a$.

*Решение.* Разумеется, нужна идея. Попытаемся ее найти, обобщив опыт предыдущих примеров. Все они характеризуются тем,что в ходе решения выделялась функция, экстремальные значения которой находились легко. Попробуем и в этом примере сконструировать подобную функцию. Структура левой части неравенства (форма $m\sin\alpha + n\cos\alpha$) подсказывает, как это сделать:

$$(a^2 - 9)\cos x + 6a\sin x = \sqrt{(a^2 - 9)^2 + 36a^2}\left(\frac{a^2 - 9}{a^2 + 9}\cos x + \right.$$

$$\left. + \frac{6a}{a^2 + 9}\sin x\right) = (a^2 + 9)\cos(x - \alpha),$$

где $\cos\alpha = \frac{a^2 - 9}{a^2 + 9}$, $\sin\alpha = \frac{6a}{a^2 + 9}$. Теперь исходное неравенство запишем так: $\frac{ab}{a^2 + 9} \geq \cos(x - \alpha)$. Таким образом, цель достигнута — найдена «хорошая» функция $y = \cos(x - \alpha)$. Последнее неравенство очевидно имеет решение, если $\frac{ab}{a^2 + 9} \geq -1$, т.е. $a^2 + ab + 9 \geq 0$. Осталось выяснить, при каких $b$ это неравенство выполняется при любом $a$. Имеем квадратный относительно $a$ трехчлен $a^2 + ab + 9$. Он принимает неотрицательные значения при любом $a$, если его дискриминант $D \leq 0$, т.е. $b^2 - 36 \leq 0$. Отсюда $-6 \leq b \leq 6$.

*Ответ.* $-6 \leq b \leq 6$.

**II.135.** (МГУ). Найти все значения параметра $a$, при которых неравенство $\left|3\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + \cos^2 x + a\right| \leqslant 3$ выполняется при любых значениях $x$.

*Решение.* Ясно, что это неравенство выполняется при всех $x$, если наибольшее значение левой части не превосходит 3. Попробуем применить знакомый метод, а именно: найти «удобную» функцию для оценки левой части неравенства.

Имеем $\left|3\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + \cos^2 x + a\right| = \left|a\sin 2x - \cos 2x + a + 2\right| = \left|\sqrt{a^2+1}\sin(2x-\alpha) + 2 + a\right|$, где $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$; $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$.

Предостережем читателя от возможной ошибки. Два предыдущих примера могут сформировать стереотип, в результате которого знак модуля не будет учтен, и поиск наибольшего значения ограничится требованием $\sin(2x-\alpha) = 1$. Но понятно, что исследуемое выражение может достичь своего наибольшего значения и при $\sin(2x-\alpha) = -1$. Таким образом, надо рассматривать два случая, записав систему

$$\begin{cases} \left|\sqrt{a^2+1} + 2 + a\right| \leqslant 3, \\ \left|2 + a - \sqrt{a^2+1}\right| \leqslant 3. \end{cases}$$

Можно, однако, рассуждать иначе. Наибольшее значение модуля суммы — сумма модулей слагаемых. Отсюда $\left|\sqrt{a^2+1}\sin(2x-\alpha) + 2 + a\right| \leqslant \sqrt{a^2+1}\left|\sin(2x-\alpha)\right| + \left|2+a\right| \leqslant \sqrt{a^2+1} + \left|2+a\right|$. Следовательно, искомые значения параметра получим, решив неравенство $\sqrt{a^2+1} + |a+2| \leqslant 3$. Предоставим возможность читателю сделать это самостоятельно.

*Ответ.* $-\dfrac{12}{5} \leqslant a \leqslant 0$.

**II.136.** (МГУ). При каких значениях параметра $p$ система

$$\begin{cases} x^2 + 2px + 4p^2 - 5p + 3 \leqslant 4\sin y - 3\cos y, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi \end{cases}$$

имеет единственное решение?

*Решение.* Легко оценить левую и правую части первого неравенства системы. Квадратичная функция от $x$, расположенная в левой части неравенства, достигает своего наименьшего значения $3p^2 - 5p + 3$ при $x = -p$. Вместе с тем правая часть задает функцию вида $f(y) = 5\sin(y - \alpha)$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Для этой функции на отрезке $[0; 2\pi]$ (длиной в период) наибольшее значение, равное 5, достигается лишь в одной точке (здесь существенно, что $\alpha$ — острый угол).

Условие единственности решения будет получено тогда и только тогда, когда $3p^2 - 5p + 3 = 5$. Отсюда $p = -\frac{1}{3}$ или $p = 2$.

*Ответ.* $p = -\frac{1}{3}$ или $p = 2$.

П.137.(МГУ). Для всех действительных значений $a$ решить уравнение $(3a - 2)^2\log_3(-4x - 4x^2) = -(a + 1)^2\log_7(1 - 2x^2)$.

*Решение.* Область определения уравнения найдем, решив систему

$$\begin{cases} -4x - 4x^2 > 0, \\ 1 - 2x^2 > 0. \end{cases}$$

Отсюда $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$. Для полученных значений $x$ имеем $-4x - 4x^2 = 1 - (2x + 1)^2 \leqslant 1$ и $1 - 2x^2 < 1$. Следовательно, $\log_3(-4x - 4x^2) \leqslant 0$ и $\log_7(1 - 2x^2) < 0$. Таким образом, левая часть уравнения неположительна, в то время как правая — неотрицательна. Значит, для существования корней необходимо и достаточно, чтобы и правая, и левая части одновременно принимали нулевые значения. Итак, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (3a - 2)^2\log_3(-4x - 4x^2) = 0, \\ (a + 1)^2\log_7(1 - 2x^2) = 0. \end{cases}$$

Поскольку $\log_7(1 - 2x^2) < 0$, то из второго уравнения системы получаем $a = -1$. Подставляя найденное значение для $a$ в первое уравнение, устанавливаем, что $x = -\frac{1}{2}$.

*Ответ.* Если $a = -1$, то $x = -\frac{1}{2}$; если $a \neq -1$, то решений нет.

Идею решения только что разобранного примера можно несколько обобщить. Дано уравнение $f(x) = g(x)$, которое надо решить. Пусть в ходе исследования экстремальных свойств функций $f$ и $g$ установлено, что, например, $f(x) \leq A$, $g(x) \geq A$, т.е. области значений этих функций имеют лишь одну общую точку. Тогда уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Заметим, что для примера II.137 $f(x) = (3a-2)^2 \times \log_3(-4x-4x^2)$, $g(x) = -(a+1)^2\log_7(1-2x)^2$, $A = 0$.

Вернемся к задачам.

**II.138.** (ГГУ). Найти все целые $k$, при которых уравнение

$$\cos kx = 1 + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

имеет решения. Найти эти решения.

*Решение.* Легко заметить, что $\cos kx \leq 1$, тогда как $1 + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \geq 1$. Следовательно, можно записать систему, равносильную исходному уравнению:

$$\begin{cases} \cos kx = 1, \\ 1 + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} kx = 2\pi n, \\ \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \text{ и } n \text{ — целые.} \end{cases}$$

Отсюда $k\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right) = 2\pi n$, $k(1 + 4m) = 4n$. Так как $k$ — целое, а $1 + 4m$ не делится нацело на 4, то остается $k = 4l$, где $l$ — целое.

*Ответ.* Если $k = 4l$, $l \in \mathbb{Z}$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; при других $k$ решений нет.

**II.135.** (МГУ). Найти все значения $\alpha$, которые удовлетворяют условию $2 < \alpha < 5$ и при которых уравнение

$$\log_2(3 - |\sin \alpha x|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $2 \leqslant x \leqslant 3$.

*Решение.* Из того, что $|\sin ax| \leqslant 1$, получаем $3 - |\sin ax| \geqslant 2$. Тогда $\log_2(3 - |\sin ax|) \geqslant 1$. Но $\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) \leqslant 1$. Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} |\sin ax| = 1, \\ \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) = 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} ax = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{1}{6} + 2k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Напомним, что по условию $2 \leqslant x \leqslant 3$. Легко установить из второго уравнения системы, что это требование выполняется только при $k = 1$. Значит, $x = \frac{13}{6}$. Подставив найденное значение переменной $x$ в первое уравнение системы, получим $\frac{13}{6}a = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Но $2 < a < 5$. Следовательно, для $n$ возможны лишь два значения $n = 1$ или $n = 2$. Этим значениям соответствуют $a = \frac{9\pi}{13}$ или $a = \frac{15\pi}{13}$.

*Ответ.* $a = \frac{9\pi}{13}$ или $a = \frac{15\pi}{13}$.

**II.140.** (МГУ). Решить уравнение

$$4\cos x \sin a + 2\sin x \cos a - 3\cos a = 2\sqrt{7}.$$

*Решение.* И в данном уравнении мы попытаемся сделать оценку левой части. Но скорее всего на эту идею наводят не внешние признаки задачи, а ее принадлежность к настоящему пункту. Впрочем, безуспешные попытки решить это уравнение традиционными методами увеличивают вероятность использования нестандартных приемов.

Применим уже знакомый по задачам **II. 134, II. 135** метод оценки. Имеем

$$4\cos x \sin a + 2\sin x \cos a - 3\cos a = 4\cos x \sin a +$$

$$+ (2\sin x - 3)\cos a = \sqrt{16\cos^2 x + (2\sin x - 3)^2} \times$$

$$\times \sin(a + \alpha) \leqslant \sqrt{16\cos^2 x + (2\sin x - 3)^2} =$$

$$= \sqrt{28 - 12\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2} \leqslant \sqrt{28} = 2\sqrt{7},$$

$$\text{где } \cos\alpha = \frac{4\cos x}{\sqrt{16\cos^2 x + (2\sin x - 3)^2}},$$

$$\sin\alpha = \frac{2\sin x - 3}{\sqrt{16\cos^2 x + (2\sin x - 3)^2}}.$$

Следовательно, наибольшее значение левой части исходного уравнения равно $2\sqrt{7}$ и достигается при $\sin x = -\frac{1}{2}$ и $\sin(a + \alpha) = 1$. Отсюда имеем

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n \text{ и } a = -\alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Найдем значение $\alpha$. Для этого значения $x$ удобно представить в виде объединения двух множеств

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m \text{ и } x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m,$$

где $m$ — целое. Если $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, то $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ и $\alpha = -\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$. Если $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, то $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}} + \pi$.

*Ответ.* Если $a = \operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m$; если $a = -\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, то $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, где $m$ и $k$ — целые; при других $a$ решений нет.

## Упражнения

**II.141.** (ЛГУ). Найти все значения $a$, для которых неравенство $\left|\left|\sin x - \frac{1}{3}\right| - \frac{1}{3}\right| \leqslant a$ выполняется при всех $x$ таких, что $0 \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$.

**П.142.** Найти все целые $a$, при которых уравнение

$$1 + a\cos x = (a + 1)^2$$

имеет решения.

**П.143.** (МГУ). Найти все целые $k$, при каждом из которых уравнение $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2\frac{x}{2} = 3k$ имеет решения.

**П.144.**(МГУ). Найти все значения $a$, при каждом из которых выполняется неравенство $a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0$ для всех $x$.

**П.145.**(МГУ). Найти все значения параметра $\alpha$, для которых неравенство $1 + \log_5(x^2 + 1) \geqslant \log_5(\alpha x^2 + 4x + \alpha)$ справедливо при всех $x \in R$.

**П.146.**(МГУ). Определить, при каких целых $k$ система

$$\begin{cases} \arccos x + (\arcsin y)^2 = \dfrac{k\pi^2}{4}, \\ \arccos x\,(\arcsin y)^2 = \dfrac{\pi^4}{16} \end{cases}$$

имеет решения и найти эти решения.

**П.147.**(МАИ). Найти все действительные значения $a$, при которых область определения функции

$$f(x) = \sqrt{1 - \log_{5 + 4a - a^2}(5 - a) - \log_{5 + 4a - a^2}(4 + \sin x)}$$

совпадает с множеством всех действительных чисел.

**П.148.** Найти наибольшее значение $b$, при котором неравенство $|a|\ d\sin x \leqslant a^2 + 1$ выполняется для любого $a$ при всех $x$.

**П.149.**(МГУ). Найти наибольшее значение величины $a$, при котором неравенство

$$a\sqrt{a}(x^2 - 2x + 1) + \frac{\sqrt{a}}{x^2 - 2x + 1} \leqslant \sqrt[4]{a^3}\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$$

имеет хотя бы одно решение.

**П.150.**(МГУ). Найти наименьшее значение величины $a$, при котором неравенство

$$\sqrt{a}(20x - 5x^2 - 20) + \frac{1}{\sqrt{a^3}(20x - 5x^2 - 20)} \geqslant -10\sqrt{a}\,|\cos 5\pi x|$$

имеет хотя бы одно решение.

II.151. (МГУ). Найти все значения параметра $a$, при которых неравенство

$$\left|\sin^2 x - 2(a-1)\sin x\cos x + 3\cos^2 x - a + 1\right| \leqslant 3$$

выполняется для любых значений $x$.

II.152. При каких $a > 0$ уравнение $4^x + 2 = a2^x \sin \pi x$ имеет ровно одно решение?

II.153. (МГУ). При каких значениях параметра $p$ система

$$\begin{cases} x^2 + 2px + 4p^2 + 2p + 4 \leqslant 4\sin y + 3\cos y, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi \end{cases}$$

имеет единственное решение?

II.154. (МГУ). Для каждого значения параметра $a$ найти все значения $x$, удовлетворяющие равенству

$$\left(1 + (3a+4)^2\right)\log_2(-2x - x^2) + \left(1 + (a-2)^2\right)\log_7\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) =$$
$$= \log_7\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) + \log_2(-2x - x^2).$$

II.155. (КПИ). Решить уравнение $\sin x + 2\cos ax = 3$.

II.156. (МИФИ). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6\cdot 7^{\sin x} + 7\cdot 8^{-\cos\frac{y}{3}} = \dfrac{97}{56}, \\ 3\cdot 7^{\sin x} - 4\cdot 8^{-\cos\frac{y}{3}} = a. \end{cases}$$

II.157. (МИФИ). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (a^2 - a)\sin\dfrac{x}{2} + 2\cos y = a + 5, \\ 3\sin\dfrac{x}{2} + \cos y = 4. \end{cases}$$

II.158. (МГУ). Найти все значения $\alpha$, которые удовлетворяют условию $5 < \alpha < 16$ и при которых уравнение

$$1 + \cos^2\left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos\pi x - \sin\pi x|}$$

относительно $x$ имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $1 \leqslant x \leqslant 2$.

II.159. (МГУ). При каждом значении параметра $a$ решить уравнение $3\cos x\sin a - \sin x\cos a - 4\cos a = 3\sqrt{3}$.

**II.160.**(МГУ). Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений

$$\begin{cases} \left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}} - 5\right| - \left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}} - 7\right| + \left|24\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}} + 13\right| = \\ = 11 - \sqrt{\sin\frac{\pi(x - 2y - 1)}{3}}, \\ 2\left(x^2 + (y - a)^2\right) - 1 = 2\sqrt{x^2 + (y - a)^2 - \frac{3}{4}}. \end{cases}$$

## В. Монотонность.

Напомним читателю некоторые свойства монотонных функций, которые нам понадобятся в этом пункте:

1) Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ возрастают (убывают) на множестве $M$, то функция $y = f(x) + g(x)$ также возрастает (убывает) на множестве $M$;

2) Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ возрастают (убывают) на множестве $M$, причем $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$ при всех допустимых $x$, то функция $y = f(x)\,g(x)$ возрастает (убывает) на множестве $M$;

3) Если функция $y = f(x)$ монотонная, то уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня; другими словами, монотонная функция принимает каждое свое значение только один раз.

Перейдем к задачам.

**II.161.**(НГУ). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + a} - \sqrt{y + b} = 1, \\ \sqrt{y + a} - \sqrt{x + b} = 1. \end{cases}$$

*Решение.* Вычтем из первого уравнения второе. Получим $\sqrt{x + a} + \sqrt{x + b} = \sqrt{y + a} + \sqrt{y + b}.$

Рассмотрим функцию $f(t) = \sqrt{t + a} + \sqrt{t + b}$. Она возрастающая. Имеем $f(x) = f(y)$. Следовательно, $x = y$. Отсюда $\sqrt{x + a} - \sqrt{x + b} = 1$. Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x \geqslant -a, \\ x \geqslant -b, \\ x + a = 1 + 2\sqrt{x + b} + x + b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant -a, \\ x \geqslant -b, \\ 2\sqrt{x+b} = a - b - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geqslant b + 1, \\ x \geqslant -b, \\ x = \dfrac{(a-b-1)^2}{4} - b. \end{cases}$$

Очевидно, что $x = \dfrac{(a-b-1)^2}{4} - b \geqslant -b$.

*Ответ.* Если $a \geqslant b + 1$, то $x = y = \dfrac{(a-b-1)^2}{4} - b$; если $a < b + 1$, то решений нет.

**II.162.** (МГУ). При каких $a$ уравнение $4^{-|x-a|} \cdot \log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-(x^2-2x)} \cdot \log_{1/3}(2|x-a| + 2) = 0$ имеет ровно три корня?

*Решение.* Возможно, присутствие в данном уравнении повторяющихся выражений (имеется в виду $|x-a|$, $x^2 - 2x$) послужит подсказкой для следующих преобразований:

$$2^{-2|x-a|} \cdot 2\log_3(x^2 - 2x + 3) = 2^{-x^2+2x} \cdot \log_3(2|x-a| + 2),$$

$$2^{x^2-2x+3} \cdot \log_3(x^2 - 2x + 3) = 2^{2|x-a|+2} \cdot \log_3(2|x-a| + 2).$$

Это уравнение следует «прочесть» так: левая и правая части — значения возрастающей функции $y = 2^t \log_3 t$ соответственно при $t = x^2 - 2x + 3$ и $t = 2|x-a| + 2$. (Функцию $y = 2^t \log_3 t$ мы рассматриваем на области определения $[2; \infty)$, т.е. на промежутке возрастания). Отсюда $x^2 - 2x + 3 = 2|x-a| + 2$, $(x-1)^2 = 2|x-a|$.

Последнее уравнение должно иметь три корня. Искомое значение параметра можно получить, проведя дальнейшее исследование аналитически. Однако графический подход приведет к результату много быстрее. Поэтому мы прервем решение этой задачи и вернемся к нему в § 3.

Полезно обратить внимание на то, что задачи II.161, II.162 позволяют говорить о следующем приеме: преобразовать данное в условии уравнение к виду $f(x_1) = f(x_2)$, где $f$ — монотонная функция, далее записать результат $x_1 = x_2$.

Рассмотрим еще один аналогичный пример.

**П.163.** Для $0 < a < \frac{1}{4}$ решить уравнение $x^2 + 2ax + \frac{1}{16} =$ $= -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}$.

*Решение.* Перепишем данное уравнение в виде

$$(x+a)^2 + \frac{1}{16} - a^2 = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}.$$

Пусть $\sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}} = t$, $t \geq 0$. Отсюда $x - t^2 = \frac{1}{16} - a^2$. Тогда исходное уравнение становится таким:

$$(x+a)^2 + x - t^2 = -a + t,$$

$$(x+a)^2 + x + a = t^2 + t.$$

Понятно, что надо рассмотреть функцию $f(y) = y^2 + y$. Очевидно эта функция монотонной не является. Однако она является возрастающей на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; \infty\right)$. Поскольку $x \geq \frac{1}{16} - a^2$ и $0 < a < \frac{1}{4}$, то $x + a > 0$. Таким образом, аргументы $x + a$ и $t$ принадлежат промежутку монотонности функции $f$. Следовательно, имея $f(x+a) = f(t)$, получаем $x + a = t$, т.е. $\sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}} = x + a$. Отсюда $x = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}$. Сопоставив это уравнение с исходным, запишем $x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = x$. Заметим, что в этом уравнении требование $x \geq \frac{1}{16} - a^2$ «обыграно». Для $0 < a < \frac{1}{4}$ полученное квадратное уравнение имеет положительный дискриминант. Его корни $x = \dfrac{1 - 2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a + \frac{3}{4}}}{2}$.

*Ответ.* $x = \frac{1}{4}\left(2 - 4a \pm \sqrt{16a^2 - 16a + 3}\right)$.

В связи с разобранными задачами еще раз подчеркнем, что в основе их решения лежало сформулированное в начале настоящего пункта свойство 3). Вместе с тем бывает удобно это же свойство применить в несколько ином варианте. Если для уравнения $f(x) = a$, где $f$—монотонная функция, удалось угадать (подобрать) корень—уравнение решено.

Начнем с простого примера.

**II.164.** Решить уравнение $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x-a} = \sqrt[3]{a}$.

*Решение.* Заметим, что функция (от $x$), расположенная в левой части уравнения, возрастающая. Значение правой части фиксировано. Следовательно, данное уравнение имеет не более одного корня. Легко заметить, что $x = a$—корень.

*Ответ.* $x = a$.

Идея решения этой задачи фигурирует в следующих двух примерах.

**II.165.** Определить число корней уравнения $\sqrt{3x-5} = b - \sqrt{3x+11}$.

*Решение.* Имеем $\sqrt{3x-5} + \sqrt{3x+11} = b$. Функция $f(x) = \sqrt{3x-5} + \sqrt{3x+11}$ возрастает на $D(f) = \left[\frac{5}{3}; \infty\right)$. Тогда $f(x) \geq f\left(\frac{5}{3}\right) = 4$ и $E(f) = [4; \infty)$. Исходное уравнение имеет не более одного корня. При $b \geq 4$ он единственен.

*Ответ.* Если $b \geq 4$, то уравнение имеет единственный корень; если $b < 4$, то корней нет.

**II.166.** (МГУ). Найти все такие значения $k$, для каждого из которых число решений относительно $x$ уравнения $2x^3 + 6x = \left(3^{6k} - 9\right)\sqrt{2^{8k} - \frac{1}{6}} - (3k-1)^2 \cdot 12^x$ не меньше числа решений относительно $y$ уравнения $3\left(5y^2 - k^4\right) - 2y = 2k^2(6y-1)$.

*Решение.* Первое уравнение выгодно представить так: $2x^3 + 6x + (3k-1)^2 \cdot 12^x = \left(3^{6k} - 9\right)\sqrt{2^{8k} - \frac{1}{6}}$. Используя знакомые по задаче **II.164** рассуждения, устанавливаем, что это уравнение имеет не более одного корня. Тогда, в силу условия, количество корней уравнения $15y^2 - 2y\left(1 + 6k^2\right) - 3k^4 + 2k^2 = 0$ не превосходит единицы. Дискриминант этого уравнения равен $4\left(9k^2 - 1\right)^2$. Следовательно, остается потребовать выполнения условия $9k^2 - 1 = 0$, т.е. $k = \pm\frac{1}{3}$. Сразу же отметим, что полученные значения параметра всего лишь «кандидаты» для ответа. Действительно, мы ведь не знаем сколько корней имеет первое (в условии) уравнение при полученных значениях $k$. Необходимо сделать проверку. Итак, если $k = -\frac{1}{3}$, то $2^{8k} - \frac{1}{6} = \frac{1}{\sqrt[3]{256}} - \frac{1}{6} < 0$, и исследуемое уравнение не имеет смысла. Если $k = \frac{1}{3}$, получаем $2x^3 + 6x = 0$. Это уравнение имеет ровно один корень $x = 0$.

*Ответ.* $k = \frac{1}{3}$.

В заключение рассмотрим еще одну характерную для данного пункта задачу.

II.167. (МГУ). Найти все значения параметра $a$, при которых неравенство

$\log_{1/a}(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1)\log_5(x^2 + ax + 6) + \log_a 3 \geq$ $\geq 0$ имеет одно решение.

*Решение.* Произведем необходимые преобразования левой части неравенства:

$$-\frac{\log_3(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1)\log_5(x^2 + ax + 6)}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_3 a} \geq 0.$$

Рассмотрим два случая.

Если $0 < a < 1$, то исходное неравенство равносильно неравенству $\log_3(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1)\log_5(x^2 + ax + 6) \geq 1$. «Устройство» левой части подсказывает обратиться к функции $f(t) = \log_3(\sqrt{t} + 1)\log_5(t + 1)$. Заметим, что $1 = \log_3 3 \cdot \log_5 5 = f(4)$. Тогда на полученное неравенство можно смотреть так: $f(x^2 + ax + 5) \geq f(4)$. Функция $f$ является возрастающей (см. свойство 2) ). Следовательно, $x^2 + ax + 5 \geq 4$, $x^2 + ax + 1 \geq 0$. Однако это неравенство не может иметь единственного решения ни при каких $a$.

Если $a > 1$, то получаем $\log_3\left(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1\right) \times$ $\times \log_5\left(x^2 + ax + 6\right) \leq 1$.

Придерживаясь схемы рассуждений первого случая, легко установить, что это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + ax + 5 \geq 0, \\ x^2 + ax + 1 \leq 0. \end{cases}$$

Для того чтобы эта система имела решение, дискриминант $a^2 - 4$ второго неравенства системы должен быть неотрицательным. Если он положительный, то существуют такие $x_1 \neq x_2$, что $x_1^2 + ax_1 + 1 = 0$ и $x_2^2 + ax_2 + 1 = 0$. Для $x = x_1$ или $x = x_2$ имеем $x^2 + ax + 5 = x^2 + ax + 1 + 4 > 0$. Следовательно, полученная система имеет по крайней мере два решения $x_1$ и $x_2$, что нас не устраивает. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда $a^2 - 4 = 0$, а с учетом $a > 1$ достаточно проверить $a = 2$. Подставив $a = 2$, получим систему, имеющую одно решение.

*Ответ.* $a = 2$.

## Упражнения

**П.168.** (МАИ). При всех значениях $a > 3$ решить уравнение $\sqrt{2a - 3\sqrt{x}} = \sqrt{x - 2}$.

**П.169.** Определить число корней уравнения $\sqrt{2x + 8} - a = \sqrt{2x + 3}$.

**П.170.** Решить уравнение $\sqrt[5]{a + x} - \sqrt[5]{a - x} = \sqrt[5]{2a}$.

**П.171.** Решить уравнение $\sqrt[7]{x} - \sqrt[3]{a - x} = \sqrt[7]{a}$.

**П.172.** Решить уравнение $\sqrt{a^2 - x} + \sqrt{b^2 - x} = a + b$.

**П.173.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y + 2a = 3^y - 9^a \cdot 3^x, \\ y = x^2 + x. \end{cases}$$

**П.174.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y + a = \log_3(y - 2a) - \log_3(x - a), \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

**П.175.** При $a > 1$ решить неравенство $\log_a\left(2x^2 - 4x + 2 + a^{x^2 - 2x + 5}\right) \leq 4$.

II.176. (МГУ). Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $9^{a^2}\log_2(|x^2-4x+3|+1)+$ $+\,3^{3a-|x^2-4x+3|}\log_2\left(\dfrac{1}{1+3a-2a^2}\right)=0$ имеет три корня.

II.177. (МГУ). Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых неравенство $\log_a 5+\log_{1/3}\left(\sqrt{ax^2+2x+6}+1\right)\times$ $\times\log_a\left(ax^2+2x+7\right)\leqslant 0$ имеет одно решение.

II.178. (МГУ). Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых число решений уравнения $3\left(x^2+a^2\right)=$ $=1-\left(9a^2-2\right)x$ не превосходит числа решений уравнения $x+(3a-2)^2\,3^x=\left(8^a-4\right)\log_3\left(3^a-\frac{1}{2}\right)-3x^3$.

## Г. Четность. Периодичность. Обратимость.

II.179. (ЛЭТИ). Дана функция $y=f(x)$, где $f(x)=$ $=5^x+\dfrac{25}{5^x}$. При каком значении $a$ функция $y=f(x+a)$ является четной?

*Решение.* Поскольку область определения функции $y=f(x+a)$ — все действительные числа, то для ее четности достаточно потребовать выполнения равенства $f(x+a)=$ $=f(-x+a)$ при всех $x$. Имеем

$$5^{x+a}+\frac{25}{5^{x+a}}=5^{-x+a}+\frac{25}{5^{-x+a}},$$

$$5^x\cdot 5^a+5^{2-x-a}=5^{-x}\cdot 5^a+5^{2+x-a},$$

$$5^x\left(5^a-5^{2-a}\right)+5^{-x}\left(5^{2-a}-5^a\right)=0,$$

$$\left(5^x-5^{-x}\right)\left(5^a-5^{2-a}\right)=0.$$

Решением последнего уравнения будет любое действительное число тогда и только тогда, когда $5^a-5^{2-a}=0$, т.е. при $a=1$.

*Ответ.* $a=1$.

II.180. (МГИ). Найти наименьшее положительное значение параметра $a$, при котором функция $f(x)=3ax^3-2\sin\dfrac{8\pi a-x}{5}$ является нечетной.

*Решение.* Понятно, что надо найти те значения $a$, при которых равенство $f(-x) = -f(x)$ выполняется для всех $x$. Имеем $-3ax^3 - 2\sin\frac{8\pi a + x}{5} = -3ax^3 + 2\sin\frac{8\pi a - x}{5}$. Отсюда $\sin\frac{8\pi a}{5}\cos\frac{x}{5} = 0$. Это равенство справедливо при всех $x$, если $\sin\frac{8\pi a}{5} = 0$, т.е. $a = \frac{5k}{8}$, $k \in Z$. Тогда наименьшим положительным значением $a$ будет $\frac{5}{8}$.

*Ответ.* $a = \frac{5}{8}$.

**II.181.** (МИЭМ). При каких значениях параметра $a$ график функции $f(x) = x^4 + 2ax^3 - 2x^2 - 6ax$ имеет вертикальную ось симметрии?

*Решение.* Прежде всего заметим, что если график функции $y = f(x)$ имеет вертикальную ось симметрии $x = b$, то график функции $y = f(x + b)$ имеет своей осью симметрии ось ординат. Значит, функция $y = f(x + b)$ является четной. Далее остается повторить ход решения задачи II.179.

Имеем $f(x + b) = f(-x + b)$ при всех допустимых $x$. Рассмотрим многочлен $f(x + b) = (x + b)^4 + 2a(x + b)^3 - 2(x + b)^2 - 6a(x + b)$. Его значения не изменятся при замене $x$ на $-x$. Следовательно, коэффициенты этого многочлена при нечетных степенях равны нулю. Читатель, взявший на себя труд проделать необходимые вычисления, получит следующий

*Ответ.* $a = -2$, или $a = 0$, или $a = 2$.

**II.182.** (ЛЭТИ). При каких $a$ число $\pi$ является периодом функции $f(x) = \frac{\sin x}{a - \cos x}$?

*Решение.* Для того чтобы число $\pi$ являлось периодом функции $f$, необходимо выполнение равенства $f(x) = f(x + \pi)$ при всех допустимых $x$.

Имеем $\frac{\sin x}{a - \cos x} = \frac{\sin(x + \pi)}{a - \cos(x + \pi)}$, $\frac{\sin x}{a - \cos x} = \frac{\sin x}{-a - \cos x}$. Последнее равенство становится тождеством только при $a = 0$. Следовательно, функция $f$ приобретает вид

$f(x) = -\operatorname{tg} x$. Перед тем как записать ответ, заметим, что если $x \in D(f)$, то $(x+\pi) \in D(f)$ и $(x-\pi) \in D(f)$.

*Ответ.* $a = 0$.

**П.183.** (ЛГУ). При каких значениях параметра $a$ функция

$$f(x) = \frac{a^2-1}{(a+3)^2}\cos\frac{3x}{2} + \left(a^3+a^2-4a-4\right)\cdot\frac{x^2+a-5}{x^2-2a+1}$$

является периодической и имеет наименьший положительный период $\frac{4\pi}{3}$?

*Решение.* Рассмотрим функцию $g(x) = \dfrac{a^2-1}{(a+3)^2}\cos\dfrac{3x}{2}$.

Если $a^2 = 1$, то эта функция периодическая, но основного периода не имеет. Вместе с тем при $a = 1$ функция $f$ становится дробно-рациональной, но не константой, следовательно, непериодической. Если же $a = -1$, то $f(x) \equiv 0$, т.е. функция $f$ периодическая. Дальнейшие рассуждения будем строить для случая $a^2 \neq 1$.

Вернемся к функции $g$. Она периодическая с основным периодом $\frac{4\pi}{3}$. Такой же период должна иметь функция $f$. Для этого необходимо, чтобы функция $h(x) = (a+1) \times (a^2-4)\dfrac{x^2+a-5}{x^2-2a+1}$ была периодической. Нетрудно заметить, что искомые значения $a$ должны удовлетворять неравенству $a < \frac{1}{2}$. Иначе уравнение $x^2 - 2a + 1 = 0$ имело бы корни, а значит, функция $h$ не была бы периодической. Далее, если $a^2 - 4 \neq 0$, то $h$ — дробно-рациональная функция, опять-таки отличная от константы. Остается проверить значение $a = -2$. Проверка дает положительный результат.

*Ответ.* Если $a = -1$, то функция $f$ периодическая, но основного периода не имеет; если $a = -2$, то основным периодом функции $f$ будет $\frac{4\pi}{3}$; при остальных $a$ функция $f$ непериодическая.

**П.184.** (КПИ). При каких значениях параметра $a$ уравнение $2\cos ax - 3\operatorname{tg}^2 x - 2 = 0$ имеет единственное решение?

*Решение.* Легко заметить, что $x = 0$ — корень этого уравнения при любом $a$. Следовательно, данное уравнение не должно иметь больше корней. Сразу отметим, что $a \neq 0$. В противном случае корней бесконечно много.

Рассмотрим функции $f(x) = 2\cos ax$ и $g(x) = -3\,\mathrm{tg}^2 x - 2$. Эти функции имеют основные периоды. Если функция $y = f(x) + g(x)$ будет периодической, то исходное уравнение имеет бесконечно много корней (ведь один корень $x = 0$ уже есть). Поэтому мы вынуждены потребовать от функции $y = f(x) + g(x)$ быть непериодической. А это возможно лишь тогда, когда функции $f$ и $g$ имеют несоизмеримые периоды, что в свою очередь влечет за собой иррациональность $a$. Несомненно, этот вывод — ключевой. Однако важно понимать, что решение не завершено, поскольку нами еще не установлено, сколько корней имеет исходное уравнение для иррациональных $a$. Перепишем данное уравнение в таком виде: $2\cos ax = 3\,\mathrm{tg}^2 x + 2$. Этот шаг приносит заметную пользу — левую и правую части уравнения легко оценить. Переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} \cos ax = 1\,, \\ \mathrm{tg} x = 0\,, \end{cases}$$

отсюда

$$\begin{cases} ax = 2\pi k\,, \\ x = \pi n\,, \quad k \text{ и } n \text{ — целые.} \end{cases}$$

Если $x \neq 0$, то $a = \dfrac{2k}{n}$, что противоречит выводу об иррациональности $a$. Таким образом, полученная система, а следовательно, и исходное уравнение при иррациональных $a$ не может иметь решений, отличных от $x = 0$.

*Ответ.* $a$ — любое иррациональное число.

П.185. (МАИ). Найти все рациональные значения параметра $a$, при которых функции $f(x) = \cos\dfrac{2x}{\sqrt{5} + a^2}$ и $g(x) = \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{\sqrt{125} - 4a + 1}$ имеют одинаковые периоды.

*Решение.* Требование соизмеримости периодов функций $f$ и $g$ равносильно требованию задачи.

Периоды функций $f$ и $g$ соответственно $T_1 = \dfrac{2\pi}{\dfrac{2}{\sqrt{5} + a^2}}$,

$T_2 = \dfrac{\pi}{\dfrac{1}{\sqrt{125} - 4a + 1}}$. Имеем $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{\sqrt{5} + a^2}{\sqrt{125} - 4a + 1} = \dfrac{m}{n}$, где $m$ и

$n$ — целые числа, $m \neq 0$, $n \neq 0$. Отсюда $n\sqrt{5} + a^2 n = 5\sqrt{5}m - 4am + m$, $a^2 n + 4am - m = \sqrt{5}(5m - n)$. Левая часть последнего равенства принимает только рациональные значения. Значит, равенство возможно лишь при $n = 5m$. Тогда получаем $5ma^2 + 4am - m = 0$. Поскольку $m \neq 0$, переходим к равенству $5a^2 + 4a - 1 = 0$. Отсюда $a = -1$ или $a = \dfrac{1}{5}$.

*Ответ.* $a = -1$ или $a = \dfrac{1}{5}$.

**II.186.(II.93.).** Указать все значения параметра $a$, для которых уравнение $\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$ имеет решения.

*Решение.* Поскольку эта задача знакома читателю, предложим иной путь ее решения сразу после записи системы

$$\begin{cases} \sqrt{a + t} = t^2 - a, \\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $y = t^2 - a$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Отметим, что эта функция на рассматриваемом промежутке обратима. Обратной для нее будет функция $y = \sqrt{t + a}$. Таким образом, в левой и правой частях уравнения системы стоят взаимно обратные на промежутке $[0; 1]$ функции. Так как они возрастают на указанном промежутке, то общие точки их графиков (если они существуют) лежат на прямой $y = t$ (обратим внимание читателя на обязательность условия возрастания: функции $y = -x^3$ и $y = -\sqrt[3]{x}$, например, взаимно обратные, однако не все точки пересечения их графиков лежат на прямой $y = x$). Этот вывод позволяет записать равносильную систему

$$\begin{cases} t^2 - a = t, \\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Дальнейшее решение в **II.93.**

**II.187.** **(II.163.).** Для $0 < a < \frac{1}{4}$ решить уравнение $x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}$.

*Решение.* Очевидно $x \geqslant \frac{1}{16} - a^2$. Так как $0 < a < \frac{1}{4}$, то $x > 0$. Рассмотрим функцию $y = x^2 + 2ax + \frac{1}{16}$. Она возрастает на $[-a; \infty)$. Следовательно, при $x \geqslant \frac{1}{16} - a^2$ эта функция обратима, причем функция $y = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}$ является для нее обратной. Как и в предыдущем примере, учитывая, что рассматриваемые функции возрастают на области определения исходного уравнения, можно записать $-a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}} = x$. Заметим, что мы использовали функцию, стоящую в правой части уравнения, потому что такой выбор не изменяет область определения первоначального уравнения. Решение завершено в II.163.

**II.188.** Решить уравнение $a^5 + x = \sqrt[5]{a - x}$.

*Решение.* Специфическая конструкция данного уравнения возможно послужит подсказкой обратиться за идеей в п. Г § 1: рассмотрим левую и правую части уравнения как функции от переменной $a$. Имеем $f(a) = a^5 + x$, $g(a) = \sqrt[5]{a - x}$. Легко установить, что функции $f$ и $g$ — взаимнообратные и возрастающие. Тогда уравнение $a^5 + x = a$ равносильно исходному. Отсюда

*Ответ.* $x = a - a^5$.

## Упражнения

**II.189.** (ЛЭТИ). Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 3^x - \frac{27}{3^x}$. При каких значениях параметра $a$ функция $y = f(x + a)$ является нечетной?

**II.190.** (МИЭМ). При каких значениях $a$ график функции $y = ax^3 - 6x^2 + (a - 2)x$ имеет центр симметрии, принадлежащий оси абсцисс?

П.191. (ЛЭТИ). При каких значениях параметра $a$ число $\frac{\pi}{2}$ является периодом функции $y = \frac{\cos 2x}{3a + \sin 2x}$?

П.192. (МГУ). При каких $a$ уравнение $1 + \sin^2 ax = \cos x$ имеет единственное решение?

П.193. (БГУ). При каких $a$ уравнение $\cos^2 ax + \cos x = 2(\cos ax + \cos x - 1)$ имеет единственное решение?

П.194. При каких значениях $b$ функция $y = \cos x + \cos bx$ периодическая?

П.195. (ЛГУ). При каких $a$ функция $f(x) = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \sin \frac{5x}{2} + (a^3 - a^2 - 9a + 9)\frac{x^2 + a + 1}{x^2 + 3a + 5}$ является периодической и имеет наименьший положительный период $\frac{4\pi}{5}$?

П.196. (МАИ). Найти все рациональные значения параметра $a$, при которых функции $f(x) = \sin \frac{2ax}{a^2 + \sqrt{12}}$ и $g(x) = \operatorname{tg} \frac{2x}{1 - 2a + \sqrt{108}}$ имеют одинаковый период.

П.197. (МГУ). Найти $a$, при которых уравнение $\sqrt{3a + \sqrt{3a + 2x - x^2}} = 2x - x^2$ имеет решение.

## § 3. Графические приемы. Координатная плоскость ($x$; $y$)

Естественным продолжением знакомства с основными приемами и методами решений задач с параметрами будет обращение к наглядно-графическим интерпретациям.

В зависимости от того какая роль параметру отводится в задаче (неравноправная или равноправная с переменной), можно соответственно выделить два основных графических приема: первый — построение графического образа на координатной плоскости ($x$ ; $y$), второй — на ($x$ ; $a$). Первому из перечисленных методов посвящен настоящий параграф. Схематично опишем его структуру.

На плоскости ($x$ ; $y$) функция $y = f(x ; a)$ задает семейство кривых, зависящих от параметра $a$. Понятно, что каждое семейство $f$ обладает определенными свойствами. Нас же в первую очередь будет интересовать, с помощью какого преобразования плоскости (параллельный перенос, поворот и т. д.) можно перейти от одной кривой семейства к какой-либо другой. Каждому из таких преобразований будет посвящен отдельный пункт. Как нам кажется, подобная классификация облегчает решающему поиск необходимого графического образа. Отметим, что при таком подходе идейная часть решения не зависит от того, какая фигура (прямая, окружность, парабола и т. п.) будет являться членом семейства кривых.

Разумеется, не всегда графический образ семейства $y = f(x ; a)$ описывается простым преобразованием. Поэтому в подобных ситуациях полезно сосредоточить внимание не на том, как связаны кривые одного семейства, а на самих кривых. Иными словами можно выделить еще один тип задач, в которых идея решения прежде всего основана на свойствах конкретных геометрических фигур, а не семейства в целом. Какие же фигуры (точнее семейства этих фигур) нас будут интересовать в первую очередь? Это прямые и параболы. Такой выбор обусловлен особым (основным) положением линейной и квадратичной функций в школьной математике. Пункт Г настоящего параграфа посвящен задачам, связанным с уравнением прямой. В силу масштабности темы «Квадратичная функция» ей будет отведена отдельная глава.

Говоря о графических методах, невозможно обойти одну проблему, «рожденную» практикой конкурсного экзамена. Мы имеем в виду вопрос о строгости, а следовательно, о законности решения, основанного на графических соображениях. Несомненно, с формальной точки зрения результат, снятый с «картинки», не подкрепленный аналитически, получен нестрого. Однако кем, когда и где определен уровень строгости, которого следует придерживаться абитуриенту? По нашему мнению, требования к уровню математической строгости для школьника должны определяться здравым смыслом. Мы понимаем степень субъективности такой точки зрения. Более того, графический метод — всего лишь одно из средств наглядности. А наглядность может быть обманчивой. Так, для графиков функций $y = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ и $y = \log_{1/16} x$ «картинка» скорее всего покажет одну общую точку. На самом деле их три. Таких примеров можно привести немало. Но, с нашей точки зрения, каждый из них свидетельствует только о том, что при использовании графических методов решения, впрочем как и аналитических, может быть допущена ошибка. Поэтому в тех случаях, когда результат, «прочитанный» с рисунка, вызывает сомнения, мы советуем подкрепить выводы аналитически. Это следует сделать в первую очередь не для того, чтобы удовлетворить требования придирчивого экзаменатора, а для подтверждения правоты выбранного пути решения. Таким образом, по отношению к школьнику «планка» математической строгости должна находиться в пределах разумной достаточности.

Надеемся, что мы не злоупотребим назидательностью, дав читателю еще один совет. Настоящее пособие не преследует цель сформировать основы графической культуры, иными словами научить строить графики функций или уравнений. Чаще всего мы будем предлагать уже готовую картинку без описания процесса построения. Поэтому советуем читателю активизировать (если в этом есть необходимость) свои умения в построении графических образов, обратив особое внимание на построение графиков $y = f(x+a)$, $y = f(x)+a$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, $y = f(kx)$, $y = kf(x)$ путем преобразований графика $y = f(x)$.

И последнее. Как нам кажется, в предлагаемых задачах ответ, полученный графически, требует затрат, по крайней мере, не больше, чем соответствующее аналитическое решение.

## А. Параллельный перенос.

Начнем с задач, где членами семейства $y = f(x\,;\,a)$ будут прямые.

**П.198.**(КГУ). Найти все значения параметра $b$, при которых уравнение
$\lg 2\,|x| + \lg(2-x) - \lg(\lg b) = 0$
имеет единственное решение.

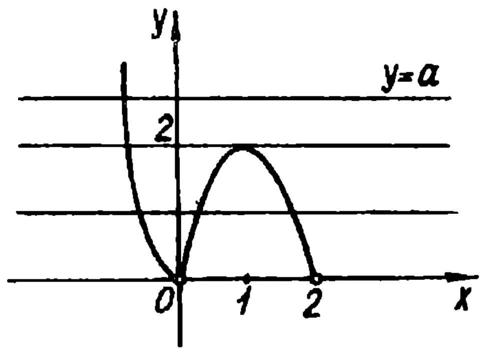



Рис. 1

*Решение.* Для удобства обозначим $\lg b = a$. Запишем уравнение, равносильное исходному: $\lg(2|x|(2-x)) = \lg a$. Переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} 2\,|x|(2-x) = a, \\ x < 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Строим график функции $y = 2\,|x|(2-x)$ с областью определения $x < 2$ и $x \neq 0$ (рис. 1). Полученный график семейство прямых $y = a$ должно пересекать только в одной точке. Из рисунка видно, что это требование выполняется лишь при $a > 2$, т. е. $\lg b > 2$, $b > 100$.

*Ответ.* $b > 100$.

**П.199.**(**П.116.**) При каких значениях параметра $a$ неравенство $\sqrt{1-x^2} > a-x$ имеет решения?

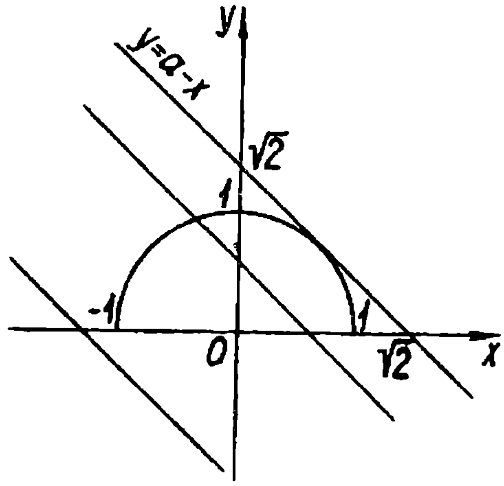



Рис. 2

*Решение.* Графиком функции $y = \sqrt{1-x^2}$ является полокружность с центром (0; 0) и радиусом 1 (рис. 2). Функция $y = a-x$ для каждого фиксированного значения параметра задает прямую, т.е. уравнение $y = a-x$ на координатной плоскости $(x\,;\,y)$ порождает систему параллельных прямых.

Нам надо определить те значения параметра, при которых найдутся точки полуокружности, расположенные выше соответствующих точек прямой. Понятно, что такие точки появятся после того, как прямая $y = a-x$ займет положение слева от касательной. Легко определить, что моменту касания соответствует $a = \sqrt{2}$. Следовательно, при $a < \sqrt{2}$ данное неравенство имеет решения.

Читателю осталось определить для себя, какое из двух предложенных решений — это или ранее приведенное — ему ближе (естественней).

В следующих двух задачах нам предстоит иметь дело уже не с одним семейством графиков, а сразу с двумя.

**II.200.**(МАИ). При каких значениях параметра $a$ корни уравнения $|x-a^2| = -a^2+2a+3$ имеют одинаковые знаки?

*Решение.* Первое семейство $y = |x-a^2|$ задает систему «уголков», стороны которых образуют углы по 45° с осью абсцисс. Что касается вершин, то они находятся на оси $x$, причем справа от начала координат ($a = 0$ нас не устраивает, так как в этом случае исходное уравнение очевидно имеет корни разных знаков).

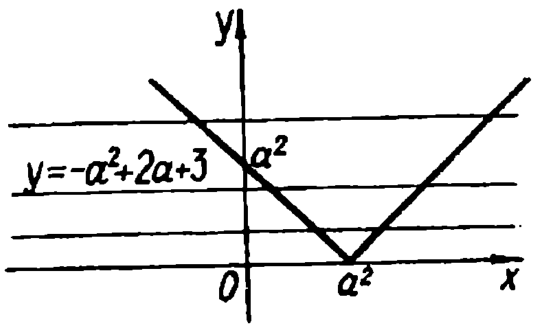



Рис. 3

Второе семейство $y = -a^2+2a+3$ представляет собой множество прямых, параллельных оси абсцисс. Эти прямые должны пересекать «уголки» в точках, абсциссы которых имеют одинаковые знаки. По рис. 3 легко получить условие для параметра, удовлетворяющее требованию задачи. Имеем

$$\begin{cases} -a^2+2a+3 < a^2, \\ -a^2+2a+3 > 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

*Ответ.* $-1 < a < \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$ или $\dfrac{1+\sqrt{7}}{2} < a < 3$.

**П.201.**(МГУ). Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $x-a = 2\left|2|x|-a^2\right|$ имеет три различных корня.

*Решение.* График функции $y = 2\left|2|x|-a^2\right|$ для $a \neq 0$ изображен на рис. 4. (Советуем читателю построить график этой функции самостоятельно, выполнив, например, необходимые преобразования графика $y = |x|$.)

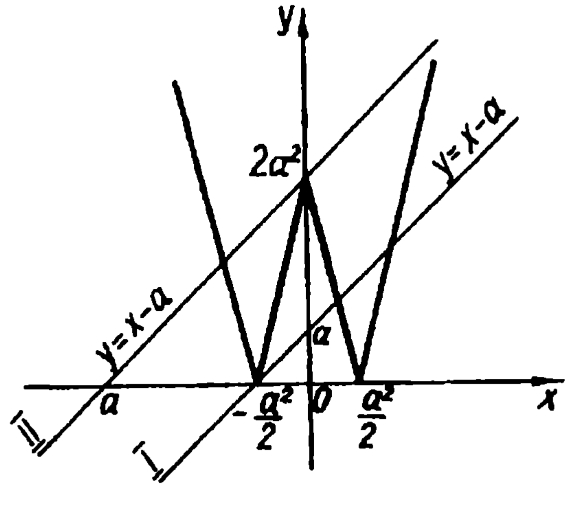



Рис. 4

Сразу заметим, что при $a = 0$ уравнение имеет единственный корень.

Из семейства параллельных прямых $y = x-a$ нас интересуют только те, которые пересекают построенный график в трех точках. Очевидно таких прямых только две. Они и построены на рисунке. Для прямой $I$ имеем $a = -\frac{a^2}{2}$, а для прямой $II$: $-a = 2a^2$. Поскольку $a \neq 0$, то получаем

*Ответ.* $a = -2$ или $a = -\frac{1}{2}$.

Перейдем к новой серии задач. Будем рассматривать семейства кривых, задаваемые уравнениями $y = \sqrt{x+a}$ или $y = (x-a)^2$, $x \geqslant a$. Членами этих семейств будут «полупараболы».

**П.202.**(П.5). Решить неравенство $\sqrt{x+a} \geqslant x+1$.

*Решение.* Построим прямую $y = x+1$ (рис. 5). Если «полупарабола» $y = \sqrt{x+a}$ расположена ниже прямой, то очевидно неравенство решений не имеет (рис. 5, положение I). Решения появятся только с момента касания (положение II). Значение параметра, соответствующее касанию, можно найти, потребовав от системы

$$\begin{cases} y^2 = x + a, \\ y = x + 1 \end{cases}$$

иметь одно решение, что равносильно для уравнения $(x+1)^2 = x+$ $+ a$ иметь один корень. Отсюда получаем $a = \frac{3}{4}$. Значит, при $a < \frac{3}{4}$ исходное неравенство решений не имеет. Заметим, что тот, кто знаком с производной, может получить этот результат иначе.

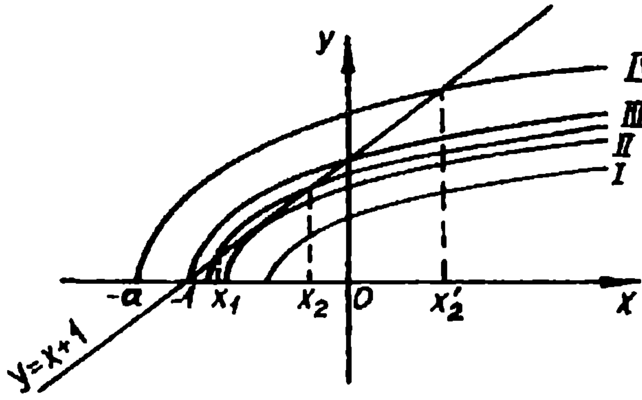



Рис. 5

Далее, смещая «полупараболу» влево, зафиксируем последний момент, когда графики $y = x + 1$ и $y = \sqrt{x + a}$ имеют две общие точки (положение III). Такое расположение обеспечивается требованием $a = 1$.

Ясно, что при $\frac{3}{4} \leqslant a \leqslant 1$ отрезок $[x_1 ; x_2]$, где $x_1$ и $x_2$ — абсциссы точек пересечения графиков, будет решением исходного неравенства. Решив записанное выше уравнение, получим $x_1 = \frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$. Следовательно, если $\frac{3}{4} \leqslant a \leqslant 1$, то $\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$.

Когда « полупарабола» и прямая пересекаются только в одной точке (это соответствует случаю $a > 1$), то решением будет отрезок $[-a ; x_2']$, где $x_2'$ – больший из корней $x_1$ и $x_2$ (положение IV).

Итак, мы привели два решения этой задачи. Третье решение читатель найдет в § 4.

**II.203.** Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x+a} = \log_{\frac{1}{3}} (x-2a)$ в зависимости от значений параметра $a$?

*Решение.* Заметим, что, введя функции $y = \sqrt{x+a}$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} (x-2a)$, мы получаем сразу два семейства кривых. В этом случае поиск общих точек затрудняется. Однако задачу можно облегчить, применив замену $x-2a = t$. Отсюда получаем $\sqrt{t+3a} = \log_{\frac{1}{3}} t$.

Рассмотрим функции $y=\sqrt{t+3a}$ и $y=\log_{1/3} t$. Среди них лишь одна задает семейство кривых. Теперь мы видим, что произведенная замена приносит несомненную пользу. Параллельно отметим, что в предыдущей задаче аналогичной заменой можно заставить двигаться не «полупараболу», а прямую. Рекомендуем читателю запомнить этот эффективный прием, ассоциирующийся с принципом относительности движения в кинематике.

Обратимся к рис. 6. Очевидно, если абсцисса вершины «полупараболы» больше единицы, т.е. $-3a>1$, $a<-\frac{1}{3}$, то уравнение корней не имеет.

Если $a \geqslant -\frac{1}{3}$, то по рисунку видно, что рассматриваемые графики пересекаются, причем только в одной точке, поскольку функции $y=\sqrt{t+3a}$ и $y=\log_{1/3} t$ имеют разный характер монотонности.

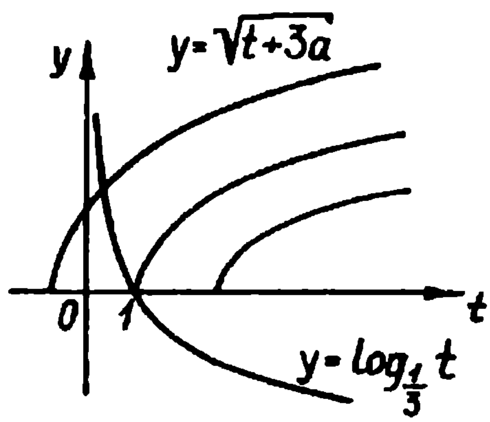


Рис. 6

*Ответ.* Если $a \geqslant -\frac{1}{3}$, то уравнение имеет один корень; если $a<-\frac{1}{3}$, то корней нет.

**П.204.** (МВТУ). Найти все значения параметра $a$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x=a+\sqrt{y}, \\ y^2-x^2-2x+4y+3=0 \end{cases}$$

имеет решения.

*Решение.* Из первого уравнения системы получим $y=(x-a)^2$ при $x \geqslant a$. Следовательно, это уравнение опять-таки задает семейство «полупарабол» (параболы $y=(x-a)^2$ «скользят» вершинами по оси абсцисс, причем мы рассматриваем только правую ветвь).

Левую часть второго уравнения системы разложим на множители. Имеем

$y^2-x^2-2x+4y+3 = (y^2+4y+4)-(x^2+2x+1) = (y+x+3)(y-x+1)$.

Тогда графиком второго уравнения является объединение двух прямых $y = -x-3$ и $y = x-1$.

Выясним, при каких значениях параметра $a$ семейство «полупарабол» имеет хотя бы одну общую точку с одной из полученных прямых.

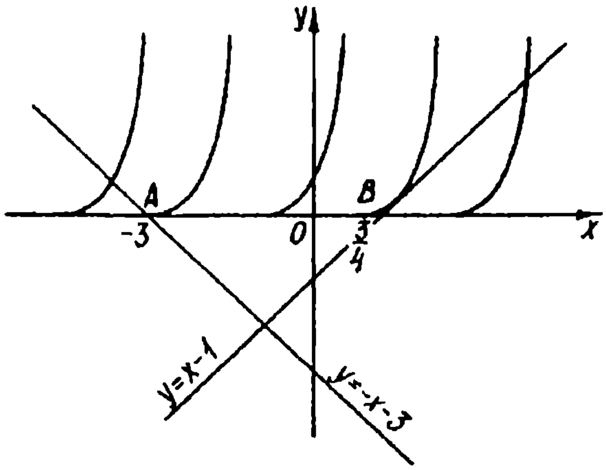


Рис. 7

Воспользуемся рис. 7. Если вершины «полупарабол» находятся правее точки $A$, но левее точки $B$ (точка $B$ соответствует положению вершины в момент касания «полупараболы» с прямой $y = x-1$), то очевидно рассматриваемые графики общих точек не имеют. Если вершина расположена в точке A, то очевидно $a = -3$. Случай касания «поймаем», потребовав от системы

$$\begin{cases} y = x-1, \\ y = (x-a)^2 \end{cases}$$

иметь одно решение, что в свою очередь заставляет уравнение $x-1 = (x-a)^2$ иметь один корень. Отсюда легко получить $a = \frac{3}{4}$.

Таким образом, исходная система не имеет решений, если $-3 < a < \frac{3}{4}$ и соответственно имеет решения, если $a \leqslant -3$ или $a \geqslant \frac{3}{4}$.

*Ответ.* $a \leqslant -3$ или $a \geqslant \frac{3}{4}$.

В следующих двух задачах семейства кривых будут образовывать окружности и полуокружности.

II.205.(КГУ). Найти наименьшее $c$, при котором система

$$\begin{cases}(x-c\sqrt{3})^2+y^2-2y=0,\\ \sqrt{3}\,|x|-y=4\end{cases}$$

имеет одно решение.

*Решение.* Первое уравнение системы удобно представить в виде $(x-c\sqrt{3})^2+(y-1)^2=1$. Это уравнение задает семейство окружностей постоянного радиуса, равного 1, причем центры окружностей лежат на прямой $y=1$.

Построим график функции $y=\sqrt{3}\,|x|-4$ (рис. 8). На этом же рисунке показано четыре положения окружности, при которых исходная система имеет единственное решение. Каждой из отмеченных окружностей соответствует определенное значение параметра $c$. Поскольку условие задачи требует, чтобы $c$ было наименьшим, то из четырех окружностей надо выбрать ту, абсцисса центра которой принимает наименьшее значение. Очевидно это будет окружность с центром в точке $O_1$.

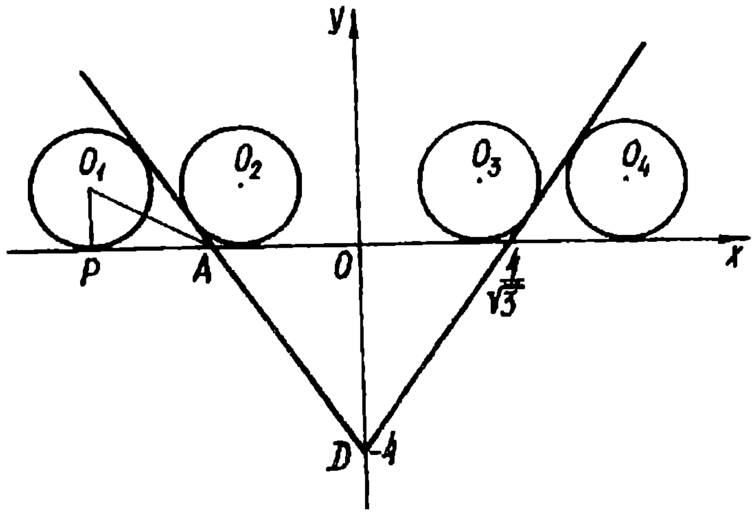



Рис. 8

Имеем $|c\sqrt{3}|=AP+AO=AP+\frac{4}{\sqrt{3}}$. Из $\Delta AOD$ $\operatorname{tg}\angle OAD=\sqrt{3}$. Отсюда $\angle O_1AP=\frac{1}{2}\angle DAO=30°$. Тогда из $\Delta O_1PA$ $PA=O_1P\operatorname{ctg}30°=\sqrt{3}$. Итак, $|c\sqrt{3}|=\sqrt{3}+\frac{4}{\sqrt{3}}$. Поскольку положению центра $O_1$ соответствует $c<0$, то получаем

*Ответ.* $c=-\frac{7}{3}$.

**П.206.** (МИЭМ). При каких $a$ множеством решений неравенства $\sqrt{1-(x+2a)^2}\geq\frac{4}{3}x$ является отрезок длины $\frac{9}{5}$?

*Решение.* Графиком функции $y=\sqrt{1-(x+2a)^2}$ является полуокружность с радиусом, равным 1, «плывущая» своим центром по оси абсцисс. Данное неравенство будет иметь решение тогда, когда точки полуокружности будут выше соответствующих точек прямой $y=\frac{4}{3}x$. На рис. 9 показано одно из возможных положений полуокружности. Для этого случая решением исходного неравенства будет отрезок $[x_1; x_2]$. Условие требует, чтобы $x_2-x_1=\frac{9}{5}$.

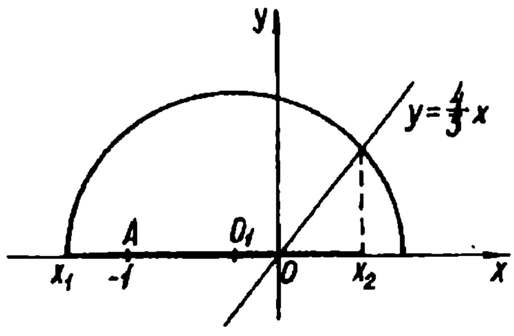



Рис. 9

Легко сообразить, что если центр $O_1$ совпадает с точкой $A(-1;0)$ или расположен левее, то решением неравенства будет отрезок длиной, равной 2. Вместе с тем, если $O_1$ совпадает с точкой $O(0;0)$ или находится правее, то решением неравенства будет отрезок длины меньшей, чем $\frac{9}{5}$, или вообще решений не будет. Действительно, если $O_1$ совпадет с $O$, то $x_1=-1$, а $x_2$ — корень уравнения $\sqrt{1-x^2}=\frac{4}{3}x$. Отсюда $x_2=\frac{3}{5}$ и $x_2-x_1=\frac{8}{5}$. Таким образом, требуемое положение центра $O_1$ определяется условием $-1<-2a<0$, т. е. $0<a<\frac{1}{2}$.

Найдем значения $x_1$ и $x_2$. Очевидно $x_1$ — наименьший корень уравнения $\sqrt{1-(x+2a)^2}=0$. Отсюда $x_1=-1-2a$. В то же время $x_2$ — корень уравнения $\sqrt{1-(x+2a)^2}=\frac{4}{3}x$. Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 25x^2+36ax+36a^2-9=0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Полученное уравнение при $0 < a < \frac{1}{2}$ имеет только один неотрицательный корень, т. е. $x_2 = \frac{-18a+\sqrt{225-576a^2}}{25}$.

По условию $\frac{-18a+\sqrt{225-576a^2}}{25}+1+2a = \frac{9}{5}$. Решив это уравнение, получим $a_1 = \frac{5}{8}$, $a_2 = \frac{7}{40}$. Поскольку $0 < a < \frac{1}{2}$, то

*Ответ.* $a = \frac{7}{40}$.

Обратим внимание читателя на то, что в последней задаче замена $x+2a = t$ заставляет двигаться прямую, фиксируя при этом полуокружность. Причем такой шаг облегчает техническую часть решения (в этом читатель может убедиться самостоятельно). Наш же выбор сделан исключительно ради удобства в последовательности изложения.

Разберем несколько задач, в которых присутствует знакомое по задаче **II.200** семейство «уголков».

**II.207.** (НГУ). Найти все значения параметра $a$, при которых уравнение $|2x-a|+1 = |x+3|$ имеет единственное решение.

*Решение.* Представим данное уравнение в виде $|2x-a| = |x+3|-1$. Правая часть этого уравнения задает неподвижный «уголок», левая — «уголок», вершина которого двигается по оси абсцисс (рис. 10). Очевидно данное уравнение будет иметь единственное решение, если вершина движущегося «уголка» попадет или точку $A$, или в точку $B$.

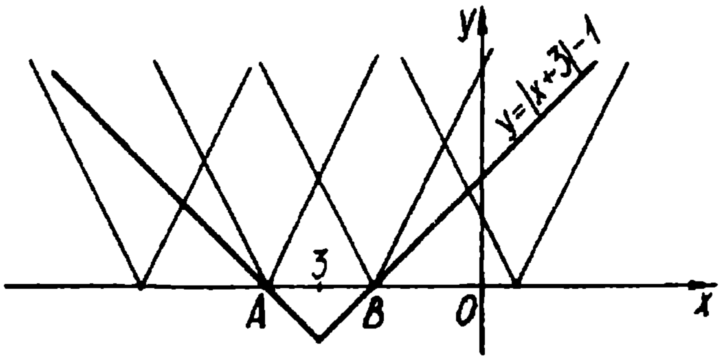


Рис. 10

Имеем $A(-4;0)$, $B(-2;0)$, и координаты этих точек удовлетворяют уравнению $y = |2x-a|$. Тогда $|-8-a| = 0$ или $|-4-a| = 0$. Отсюда

*Ответ.* $a = -8$ или $a = -4$.

**П.208.** (МФТИ). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = |x-a|$ на отрезке $[1;2]$, если $a \neq 1$, $a \neq 2$.

*Решение.* Эта задача примечательна тем, что графическая интерпретация ее решения, как нам кажется, довольно очевидна. Поэтому мы воздержимся от каких-либо описаний решения, а предлагаем, «читая» соответствующую картинку, перейти к записи *Ответа*:

если $a < 1$, то $\min\limits_{[1;2]} f(x) = f(1) = 1-a$, $\max\limits_{[1;2]} f(x) = f(2) = 2-a$, (рис. 11); если $a > 2$, то $\min\limits_{[1;2]} f(x) = f(2) = a-2$, $\max\limits_{[1;2]} f(x) = f(1) =$ $= a-1$ (рис. 11); если $1 < a < \frac{3}{2}$, то $\min\limits_{[1;2]} f(x) = f(a) = 0$, $\max\limits_{[1;2]} f(x) =$

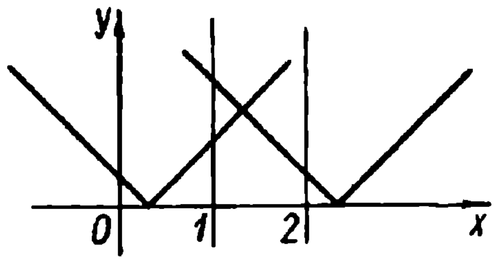



Рис. 11

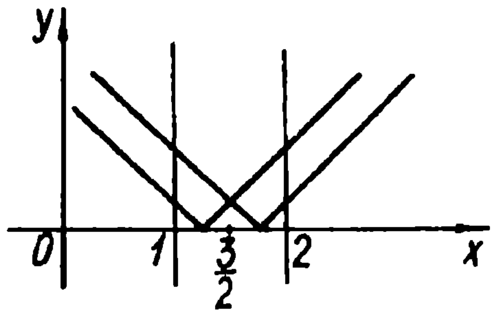



Рис. 12

$= f(2) = 2-a$ (рис. 12); если $\frac{3}{2} < a < 2$, то $\min\limits_{[1;2]} f(x) = f(a) = 0$, $\max\limits_{[1;2]} f(x) = f(1) = a-1$ (рис. 12); если $a = \frac{3}{2}$, то $\min\limits_{[1;2]} f(x) = f(a) = 0$, $\max\limits_{[1;2]} f(x) = f(1) = f(2) = 0{,}5$.

**П.209.** Найти все значения параметра $a$, для которых наименьшее значение функции $y = x^2 + 2x - 1 + |x-a|$ больше 2.

*Решение.* Понятно, что данная функция не задает семейство «уголков». И вообще, предложенная формулировка условия задачи не позволяет применить рассматриваемый нами метод. Естественно, эту задачу можно решить аналитически (аналитическое решение подобного примера смотрите в [21, с. 123]).

Все же попытаемся иначе взглянуть на условие. Ведь сказанное там означает, что следует искать значения параметра, при которых неравенство $x^2 + 2x - 1 + |x-a| - 2 > 0$ выполняется при любых $x$. Это и есть формулировка, равносильная данной.

Теперь ясно, что полученное неравенство следует переписать так: $|x-a| > -x^2-2x+3$.

Перейдем на графический язык. «Уголок» $y = |x-a|$ должен располагаться так, чтобы на параболе $y = -x^2-2x+3$ не нашлось ни одной точки, лежащей выше соответственных точек «уголка» или даже на самом «уголке». Для этого вершина «уголка» не должна принадлежать отрезку $[a_1; a_2]$ (рис. 13). Абсциссы $a_1$ и $a_2$ соответствуют моменту касания. Таким образом, искомые значения параметра определяются совокупностью неравенств $a < a_1$ или $a > a_2$. Осталось найти $a_1$ и $a_2$. Значения $a_1$ и $a_2$ получим, потребовав соответственно от уравнений $x-a_1 = -x^2-2x+3$ и $a_2-x = -x^2-2x+3$ иметь единственный корень. Отсюда $a_1 = -\frac{21}{4}$, $a_2 = \frac{13}{4}$.

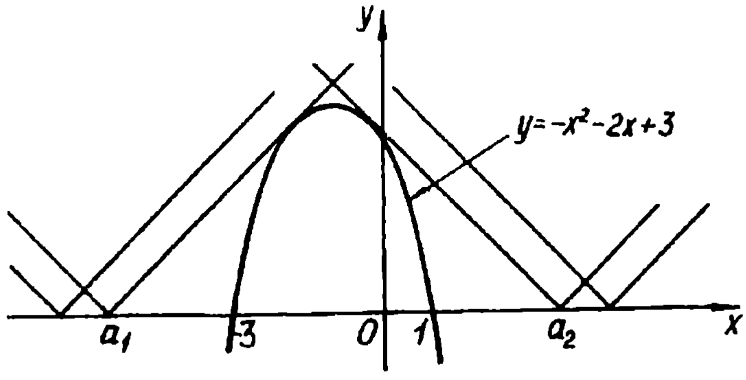


Рис. 13

*Ответ.* $a < -\frac{21}{4}$ или $a > \frac{13}{4}$.

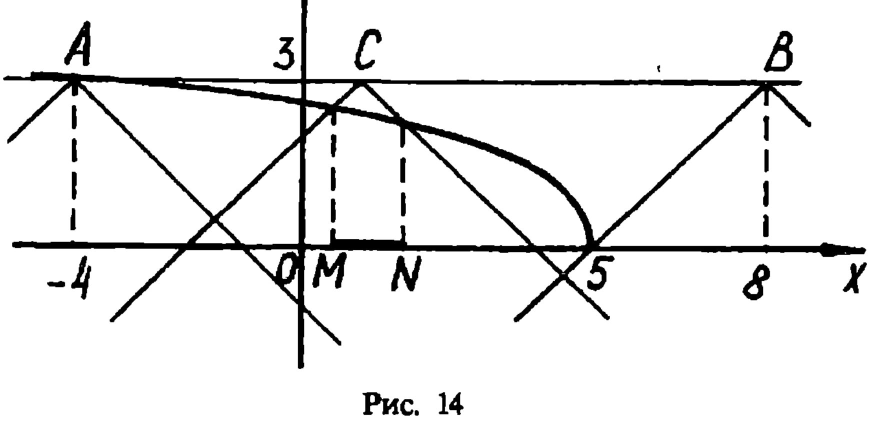


Рис. 14

II.210. (МАИ). При каких $a$ множеством решений неравенства $\sqrt{5-x}+\sqrt{x^2+2ax+a^2} \leq 3$ является отрезок числовой прямой ?

*Решение.* Имеем $\sqrt{5-x} \leq 3-|x+a|$. Правая часть этого неравенства задает семейство «уголков», вершины которых лежат на прямой $y=3$ (рис. 14). Если вершина «уголка» находится между точками $A$ и $B$, то обязательно найдутся промежутки области определения, на которых график левой части неравенства не выше графика правой части. На рис. 14 показано одно из промежуточных положений «уголка» с вершиной $C$. В этом случае решением исходного неравенства будут все точки отрезка $MN$.

Легко показать (это видно по рисунку), что при $a \in (-8;4)$ вершина «уголка» находится между точками $A$ и $B$, и возникает желание считать промежуток $(-8; 4)$ искомым ответом. Но условие задачи требует, чтобы решением неравенства был отрезок числовой прямой. А если вершина « уголка» совпадает с любой из точек отрезка $EF$, включая $E$ и не включая $F$ (рис. 15, точка $F$ соответствует моменту касания), то решением неравенства будет или отрезок и точка, или два отрезка.

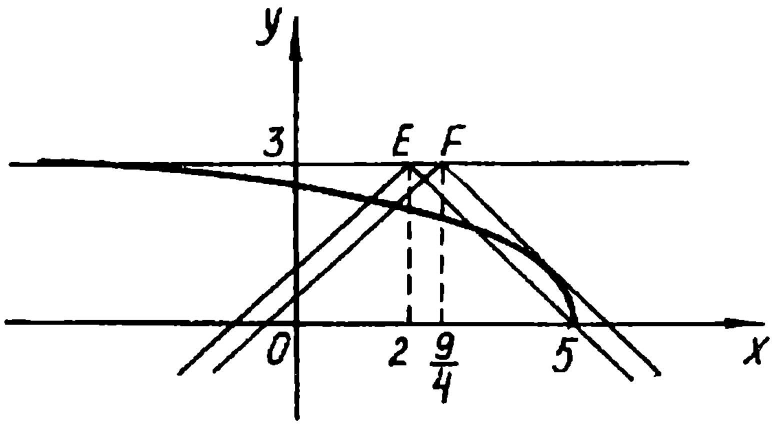


Рис. 15

Определив координаты точек $E$ и $F$, получаем

*Ответ.* $\left(-8; -\frac{9}{4}\right] \cup (-2; 4)$.

## Упражнения

II.211. (МГУ). Для каждого значения параметра $a$ определить число решений уравнения $|x^2-2x-3| = a$.

**П.212.** (МГУ). Для каждого значения параметра $a$ определить число решений уравнения $\sqrt{2|x|-x^2} = a$.

**П.213.** Найти число решений уравнения $|x^2-6x+8|+$ $+|x^2-6x+5| = a$.

**П.214.** (МИФИ). Решить уравнение $\log_2(5-|x^2-6x+8|) = a$.

**П.215.** (МГУ). При каких $a$ уравнение $\left||2x|-1\right| = x-a$ имеет ровно три решения ?

**П.216.** (НГУ). При каких значениях параметра $a$ уравнение $\log_{(x-1)}(x+a) = \frac{1}{2}$ имеет единственное решение ?

**П.217.** Для каждого значения параметра $a$ решить неравенство $\left|1-|x|\right| < a-x$.

**П.218.** (МИЭМ). Решить неравенство $\sqrt{1-x^2} \geqslant \frac{4}{3}(x-a)$ при $a=0$ и убедиться, что множеством его решений является отрезок. При каких значениях $a$ множество решений данного неравенства есть отрезок длины $\frac{9}{5}$ ?

**П.219.** (МГУ). Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $x-\frac{a}{2} = 4\left|4|x|-a^2\right|$ имеет три различных корня. Найти эти корни.

**П.220.** Найти $a$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ x^2 + y^2 + a^2 = 2x + 2ay \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**П.221.** (КГУ). При каком значении параметра $a$ система уравнений

$$\begin{cases} x+3|y|+5 = 0, \\ (x-a)^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет три решения ?

**П.222.** (КГУ). Найти наибольшее значение $c$, при котором система уравнений

$$\begin{cases} (x+c\sqrt{3})^2+y^2+6y+8 = 0, \\ \sqrt{3}|x|+y = 6 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**П.223.(II.29).** При каких значениях $a$ уравнение $\sqrt{x+a}=x$ имеет два корня?

**П.224.(МИРЭиА).** Для каждого значения параметра $a$ найдите все значения $x$, удовлетворяющие неравенству $\sqrt{4x+a}+1 \geqslant 2x$.

**П.225.(КЭПИ).** Решить неравенство $\sqrt{x-a} > x+1$.

**П.226.(МИЭМ).** Решить уравнение $9^{\lg(x-a)-\lg 2} = 3^{\lg(x-1)}$.

**П.227.(МГТУ).** Найдите все значения параметра $a$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y = 2x+a, \\ x^2+y^2 = 2x \end{cases}$$

имеет решения.

**П.228.** Завершить решение задачи П.162.

**П.229.(НГУ).** При каких $a$ уравнение $|x-a|-|2x+2| = 3$ имеет единственное решение ?

**П.230.(МФТИ).** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = |x+a|$ на отрезке $[-3;-1]$ $(a \neq 1,\ a \neq 3)$.

**П.231.(МИФИ).** Решить уравнение $-\log_5(2-|x-b|) = \log_{0,2}(5-x)$.

**П.232.** Сколько корней в зависимости от параметра $a$ имеет уравнение $x^2 + 2|x-a| = 5$?

**П.233.(МГУ).** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых неравенство $3-|x-a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

**П.234.(МГУ).** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых неравенство $2 > |x+a|+x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение.

**П.235.** При каких $a$ неравенство $x^2 - |x-a| - |x-1| + 3 \geqslant 0$ выполняется при всех $x$ ?

**П.236.(МАИ).** При каких действительных значениях $a$ неравенство $\sqrt{x^2 + 4ax + 4a^2} + \sqrt{x-a} \leqslant 4$ не имеет действительных решений ?

**П.237.(МАИ).** При каких действительных значениях $a$ неравенство $\dfrac{2-\sqrt{x}-2a}{\sqrt{x^2+8ax+16a^2}} \geqslant 1$имеет хотя бы одно действительное решение ?

**П.238.** (МГУ). Найти все значения $a$, при которых наименьшее значение функции $y = x^2 + |x - a| + |x - 1|$ больше 2.

**П.239.** Найдите все значения параметра $a$, при которых наименьшее значение функции $y = 3|x - a| + |x^2 + x - 2|$ меньше 2.

## Б. Поворот.

Сразу отметим, что в настоящем пункте выбор семейства кривых (в отличие от самих задач) не отличается разнообразием, а точнее он одновариантный: во всех примерах члены семейства $y = f(x;a)$ — прямые. Более того, центр поворота принадлежит прямой. Иными словами, мы ограничимся семейством вида $y - y_0 = a(x - x_0)$, где $(x_0; y_0)$ — центр поворота.

Такой выбор обусловлен тем, что в равенстве $f(x,y,a)=0$ очень сложно увидеть аналитическое задание поворота кривых, отличных от прямых. Поэтому о повороте как о методе целесообразно говорить лишь для прямых указанного типа.

**П.240.** (МГТУ). Найти все значения параметра $k$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y - \dfrac{1}{2} = k(x + 2), \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

имеет решения.

*Решение.* Ясно, что прямые семейства $y - \dfrac{1}{2} = k(x + 2)$ переходят друг в друга путем преобразования поворота с центром в точке $\left(-2; \dfrac{1}{2}\right)$. Данная система очевидно будет иметь решение, если указанные прямые имеют с «полупараболой» $y = \sqrt{x}$ хотя бы одну общую точку.

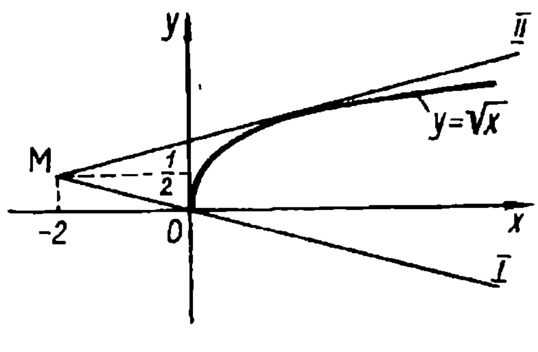


Рис. 16

На рис. 16 отмечены два положения прямой, которым соответствуют некоторые значения параметра $k_1$ и $k_2$. На первой прямой лежит вершина. Вторая прямая касается «полупараболы». Наглядно очевидно, что если прямые семейства «заметают» образовавшийся угол (параметр $k$ изменяется от $k_1$ до $k_2$ ), то исходная система имеет решения.

Значение $k_1$ найдем, подставив в первое уравнение системы пару (0; 0). Отсюда $k_1 = -\frac{1}{4}$. Значение $k_2$ получим, потребовав от системы

$$\begin{cases} y - \frac{1}{2} = k(x + 2), \\ y^2 = x, \\ k > 0 \end{cases}$$

иметь одно решение, что равносильно для уравнения $ky^2 - y + \frac{1}{2} + 2k = 0$ при $k > 0$ иметь один корень. Отсюда $k_2 = \frac{1}{4}$.

*Ответ.* $-\frac{1}{4} \leqslant k \leqslant \frac{1}{4}$.

Сделаем одно замечание. В некоторых примерах этого пункта нам придется решать стандартную задачу: для прямой семейства находить ее угловой коэффициент, соответствующий моменту касания с кривой. Покажем, как это сделать в общем виде при помощи производной.

Если $(x_0\,;\,y_0)$ — центр поворота, то координаты $(x_1\,;\,y_1)$ точки касания с кривой $y = f(x)$ можно найти, решив систему

$$\begin{cases} y_1 - y_0 = f'(x_1)(x_1 - x_0), \\ y_1 = f(x_1). \end{cases}$$

Искомый угловой коэффициент $k$ равен $f'(x_1)$.

Этот этап решения задачи отнесем к «техническому», предлагая читателю в каждой конкретной ситуации лишь конечный результат. Однако мы будем намечать ход решения в тех случаях, когда можно «обойти» производную.

П.241. (МГТУ). Найти все значения параметра $k$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 6, \\ y = 8 + k(x - 6) \end{cases}$$

имеет два различных решения.

*Решение.* Легко получить следующую систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} xy = 64, \\ x > 0, \\ y = 8 + k(x - 6) . \end{cases}$$

Теперь будем придерживаться схемы решения предыдущей задачи. На рис. 17 изображена ветвь гиперболы $y = \dfrac{64}{x}$ при $x > 0$. Все прямые, проходящие через точку $M$ (6 ; 8), составляют семейство $y = 8 + k(x - 6)$. $MA$ и $MB$ — касательные к гиперболе. Нетрудно заметить,что лишь прямые семейства, проходящие между сторонами углов $AMD$ и $BMC$, пересекают гиперболу в двух точках. Возможно покажется, что прямые, близкие к вертикальному или горизонтальному положениям, например, $MK$ и $MP$ имеют только одну общую точку с гиперболой. (Кстати, пример обманчивой наглядности.) Однако это не так,

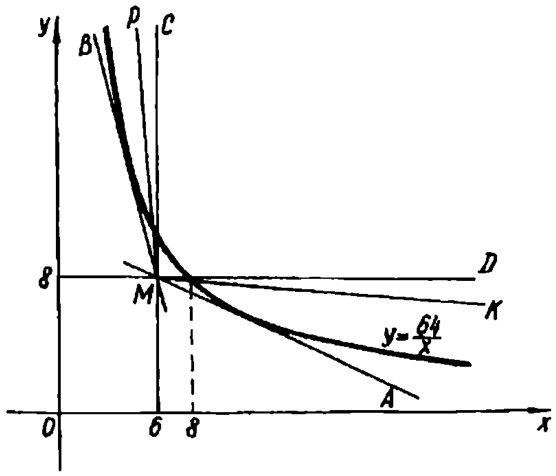



Рис. 17

ибо любой луч, проходящий внутри упомянутых углов, пересекая кривую, обязательно пересечет оси координат, т.е. «столкнется» с гиперболой еще в одной точке.

Угловой коэффициент прямой $MA$ $k = -\dfrac{4}{9}$, а прямой $MB$ $k = -4$. Окончательный результат удобно получить, вращая прямую семейства внутри угла $AMD$ против часовой стрелки (положительное направление), а в угле $BMC$ — по часовой (отрицательное направление). Итак, соответственно имеем

*Ответ.* $-\dfrac{4}{9} < k < 0$ или $k < -4$.

Еще один способ решения задач П.240 и П.241 мы предложим читателю в гл. III.

П.242.(МАИ). При каких значениях $a$ система уравнений

$$\begin{cases} y = a(x-3), \\ \dfrac{1}{\log_x 2} + \dfrac{1}{\log_y 2} = 1 \end{cases}$$

не имеет решений ?

*Решение.* Система

$$\begin{cases} y = a(x-3), \\ xy = 2, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ y \neq 1 \end{cases}$$

равносильна исходной.

Уже видно, что эта задача близка предыдущей. Поэтому, опуская подробности, перейдем сразу на графический язык.

На рис. 18 точка (3; 0) — центр поворота. Ясно, что если прямая семейства $y = a(x-3)$ вращается внутри угла $OMA$, то система не имеет решений. Устанавливаем, что угловой коэффициент прямой $MA$ равен $-\frac{8}{9}$. Тогда при таком повороте параметр $a$ принимает все значения из промежутка $\left(-\frac{8}{9}; 0\right]$. (Заметим, что мы включили $a = 0$, поскольку прямая $MO$ не пересекает гиперболу.)

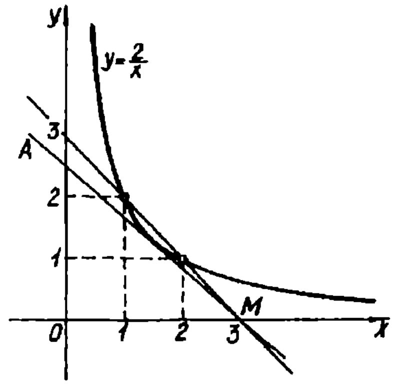



Рис. 18

Важно при записи ответа не упустить, что существует еще одна прямая семейства, а именно $y = -x + 3$, проходящая через «дырки» в гиперболе. Поэтому при $a = -1$ система также не имеет решений.

*Ответ.* $a = -1$ или $-\frac{8}{9} < a \leqslant 0$.

**П.243.** (МИЭМ). При каких значениях параметра $a$ уравнение $ax - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$ имеет единственное решение?

*Решение.* Рассмотрим функции $y = ax$ и $y = \sqrt{8x - x^2 - 15} + 1$. График второй функции легко построить, рассмотрев уравнение $(y-1)^2 = 8x - x^2 - 15$ при $y \geqslant 1$. Преобразовав последнее к виду $(y-1)^2 + (x-4)^2 = 1$, получаем, что искомый график — полуокружность с центром (4 ; 1) и радиусом 1. На рис. 19 это дуга $AB$.

Все прямые $y = ax$, проходящие между лучами $OA$ и $OB$ пересекают дугу в одной точке. Также одну точку с дугой имеют прямая $OB$ и касательная $OM$. Легко показать, что угловые коэффициенты прямых $OB$ и $OA$ соответственно равны $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{3}$. Устанавливаем, что угловой коэффициент касательной $OM$ равен $\frac{8}{15}$, причем это можно сделать не обязательно при помощи производной. Действительно, потребовав от системы

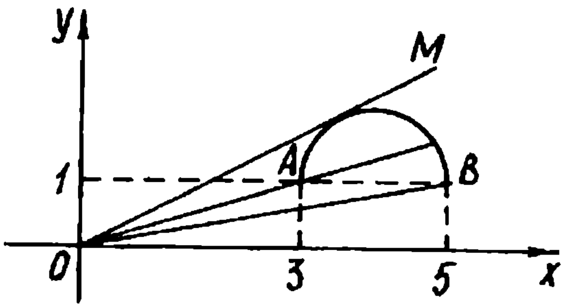


Рис. 19

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-1)^2=1,\\ y=ax,\\ a>0\end{cases}$$

иметь одно решение, получим $a = \frac{8}{15}$.

Итак, прямые семейства $y = ax$ имеют с дугой $AB$ только одну общую точку при $\frac{1}{5} \leqslant a < \frac{1}{3}$ или $a = \frac{8}{15}$.

*Ответ.* $\frac{1}{5} \leqslant a < \frac{1}{3}$ или $a = \frac{8}{15}$.

**II.244.** (МГУ). Определить, при каких значениях параметра $a$ минимум функции $f(x) = ax + |x^2 - 4x + 3|$ больше 1.

*Решение.* Напомним читателю, что с подобной задачей мы встречались в предыдущем пункте (см. **II.209**). Поэтому сразу перейдем к равносильной формулировке: определить, при каких значениях $a$ неравенство

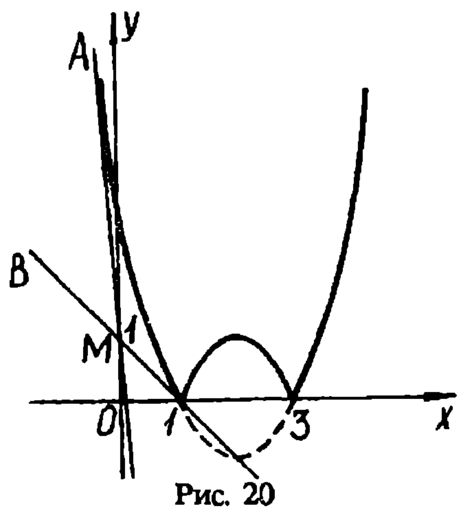


Рис. 20

$|x^2 - 4x + 3| > 1 - ax$ выполняется для всех $x$.

На рис. 20 изображен график функции $y = |x^2 - 4x + 3|$. Все прямые семейства $y = 1 - ax$ проходят через точку $(0 ; 1)$ — центр поворота. Если эти прямые «заполняют» угол $AMB$ ($MA$ — касательная), то каждая точка построенного графика находится выше соответствующих точек прямых. Понятно, что справедливо и обратное утверждение. Найдя наибольшее значение параметра $a$, при котором уравнение $x^2 - 4x + 3 = 1 - ax$ имеет одно решение, получаем угловой коэффициент прямой $MA$. (Меньшее значение $a$ соответствует моменту касания прямой с дугой параболы $y = x^2 - 4x + 3$, $1 \leqslant x \leqslant 3$.) Отсюда $a = 4 + 2\sqrt{2}$. Для прямой $MB$ имеем $a = 1$.

*Ответ.* $1 < a < 4 + 2\sqrt{2}$.

Аналитическое решение этой задачи можно найти в [15, с.117].

**II.245.** (МАИ). При каких значениях параметра $a$ система

$$\begin{cases} y^2 + 2(x-2)y + (x^2-4)(2x-x^2) = 0, \\ y = a(x-4) \end{cases}$$

имеет три различных решения?

*Решение.* Рассмотрев первое уравнение системы как квадратное относительно $y$, легко разложить его левую часть на множители. Имеем $(y - x^2 + 2x)\times$ $\times(y + x^2 - 4) = 0$. График этого уравнения — объединение двух парабол — изображен на рис. 21. Через точку $A$ $(4;\ 0)$ проходят все прямые семейства $y = a(x-4)$. Выделим те из них, которые имеют с графиком первого уравнения три общие точки. На рисунке это прямые $AB$, $AC$, $AD$, $AF$.

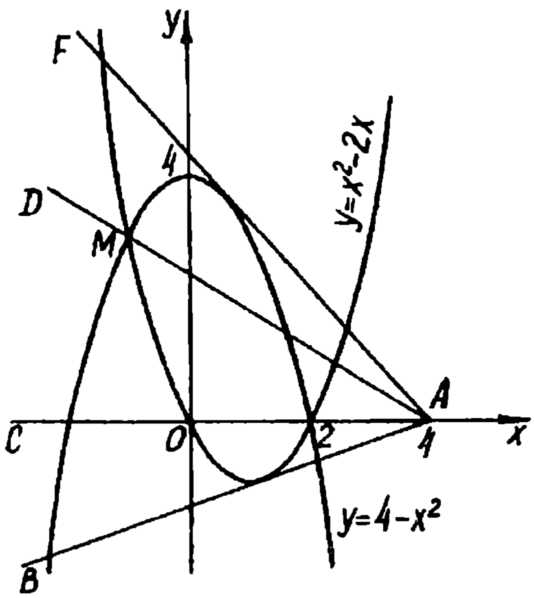



Рис. 21

Итак, видно, что искомых значений параметра четыре. Однако надо обладать хорошей наблюдательностью и, может быть, интуицией, чтобы увидеть еще две прямые семейства, удовлетворяющие требованию задачи. Действительно, из точки $A$ к параболе $y = x^2 - 2x$ можно провести две касательные (на рисунке показана одна — $AB$). Вторая касательная, разумеется, не вертикальная прямая, поэтому она обязательно «догонит» параболу $y = 4 - x^2$ еще в двух точках. Аналогичный результат даст вторая, отличная от $AF$, касательная к параболе $y = 4 - x^2$.

Наличие этих двух случаев не бросается в глаза, что и является «подводными рифами» графического метода, о которых мы говорили в начале параграфа. Впрочем, наши волнения напрасны. Аналитическая часть решения, без которой в этой задаче не обойтись, обязательно покажет все шесть искомых значений параметра.

Потребовав от уравнений $a(x - 4) = x^2 - 2x$ и $a(x - 4) = 4 - x^2$ иметь единственный корень, получим угловые коэффициенты касательных соответственно к кривым $y = x^2 - 2x$ и $y = 4 - x^2$. Имеем $a = 6 \pm 4\sqrt{2}$, $a = -8 \pm 4\sqrt{3}$. Далее абсцисса точки $M$ равна отрицательному корню уравнения $x^2 - 2x = 4 - x^2$, т. е. $x = -1$. Тогда угловой коэффициент прямой $AD$ равен $-\frac{3}{5}$. Не забыв о прямой $AC$, угловой коэффициент которой равен 0, запишем

*Ответ.*
$a = 6 \pm 4\sqrt{2}$,
$a = -8 \pm 4\sqrt{3}$,
$a = -\frac{3}{5}$, $a = 0$.

**II.246.** (КГУ). Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ (y - ax)(y - a\sqrt{2}) = 0 \end{cases}$$

в зависимости от значений параметра $a$?

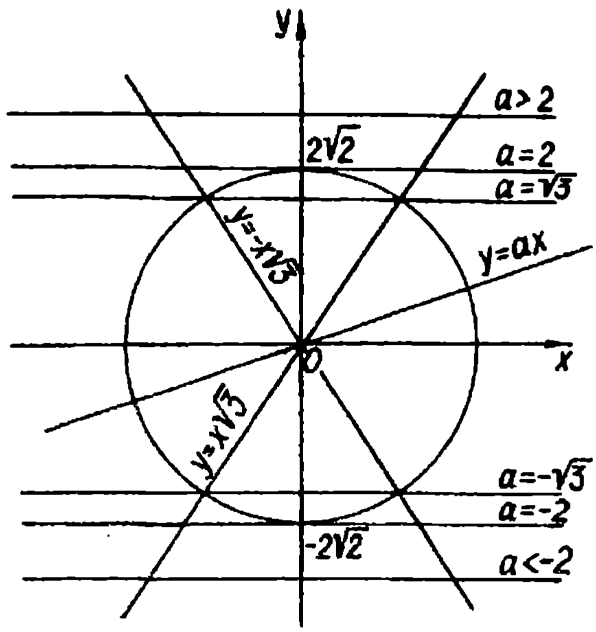



Рис. 22

*Решение.* Запишем совокупность систем, равносильную данной. Имеем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ y = ax \end{cases} \text{или} \begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ y = a\sqrt{2}. \end{cases}$$

Возможно, читатель заметил, что в этой задаче нам предстоит иметь дело сразу с двумя преобразованиями — поворотом и параллельным переносом.

Обратившись к графической интерпретации (рис. 22), увидим, что первая система совокупности имеет два решения при любом $a$. Тот же рисунок поможет определить число решений второй системы. Имеем: при $|a| > 2$ — нет решений, при $|a| = 2$ — одно решение, при $|a| < 2$ — два решения.

Поскольку мы работали с совокупностью, равносильной исходной системе, то с первого взгляда представляется естественным просто сложить число решений каждой системы. Однако более внимательный анализ (опять-таки благодаря рисунку) показывает, что при $a = \sqrt{3}$, или $a = -\sqrt{3}$, или $a = 0$ прямые $y = ax$ и $y = a\sqrt{2}$ пересекаются в точках, лежащих на окружности $x^2 + y^2 = 8$. Понятно, что этот факт изменяет число решений для случая $|a| < 2$.

*Ответ.* Если $|a| > 2$, или $a = 0$, то решений два; если $|a| = 2$ или $|a| = \sqrt{3}$, то решений три; если $-2 < a < -\sqrt{3}$, или $-\sqrt{3} < a < 0$, или $0 < a < \sqrt{3}$, или $\sqrt{3} < a < 2$, то решений четыре.

Следующие две задачи, как и предыдущие, связаны с еще одним преобразованием — параллельным переносом.

П.247.(МАИ). Найти все значения $a$, для которых существует пара отрицательных чисел $x$ и $y$, удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} 2ax + y = 1, \\ x + 2y > a. \end{cases}$$

*Решение.* Неравенство $x + 2y > a$ задает полуплоскость с «плывущей» гра-

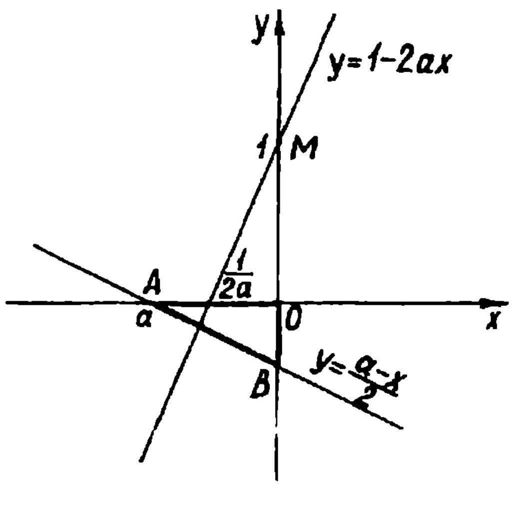



Рис. 23

ницей $x + 2y = a$. Поскольку очевидно, что $a < 0$, то система неравенств $x < 0$, $y < 0$, $x + 2y > a$ задает внутренюю область треугольника $OAB$ с координатами вершин $O$ (0; 0), $A$ (0; $a$), $B\left(0; \frac{a}{2}\right)$ — рис. 23.

Все прямые семейства $y = -2ax + 1$ проходят через точку $M(0; 1)$. Очевидно исходная система имеет решение, если прямые указанного семейства пересекают ось абсцисс в точках, лежащих между $A$ и $O$. Для прямой $y = -2ax + 1$ при фиксированном $a$ абсцисса точки пересечения с осью $x$ равна $\frac{1}{2a}$. Тогда осталось потребовать, чтобы $a < \frac{1}{2a} < 0$. Отсюда

*Ответ.* $a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**II.248.**(МАИ). При каких значениях параметра $a$ уравнение $|2x + a| = (a - 2)x - \frac{3}{4}$ не имеет решений?

*Решение.* Рассмотрим функции $y = |2x + a|$ и $y = (a - 2)x - \frac{3}{4}$, задающие знакомые геометрические образы: семейство «уголков» и семейство прямых, проходящих через точку $\left(0; -\frac{3}{4}\right)$. Поскольку каждый из графиков рассматриваемых функций находится в «движении», то при поиске их общих точек (или условий их отсутствия) возникают неизбежные осложнения. ( В этом читатель может убедиться самостоятельно, двигая «уголок» и вращая прямую одновременно.) С ситуацией, близкой к возникшей, мы встречались в задаче **II.203.** Поэтому попробуем применить знакомый прием: «остановить» одно из движений надлежащей заменой.

Пусть $2x + a = t$. Тогда $x = \frac{t - a}{2}$, и исходное уравнение принимает вид $|t| = \frac{(a-2)t}{2} - \frac{2a^2 - 4a + 3}{4}$. Все прямые вида $y = \frac{(a-2)t}{2} - \frac{2a^2 - 4a + 3}{4}$ проходят через точку $M\left(0; -\frac{2a^2 - 4a + 3}{4}\right)$. Поскольку положение точки $M$ не зафиксировано, то поворот не формирует рассматриваемое семейство прямых. Однако сама идея поворота оказывается результативной.

Очевидно ордината точки $M$ всегда отрицательна. С помощью рис. 24 легко заметить, что если прямые семейства проходят между сторонами угла $AMB$ ($\angle AMO = \angle OMB = 45°$), то в этом и только в этом случае исходное уравнение имеет решения.

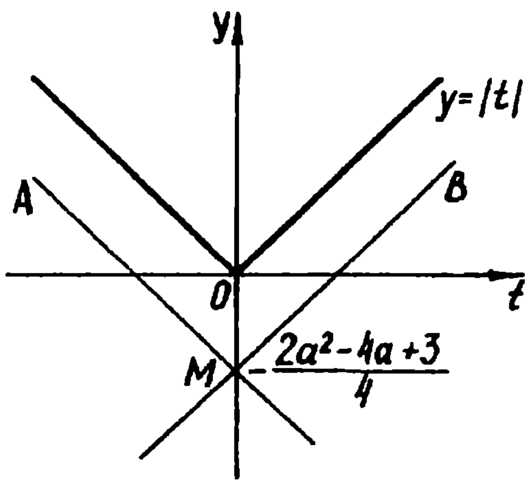



Рис. 24

Таким образом, угловой коэффициент $\frac{a-2}{2}$ рассматриваемых прямых удовлетворяет требованию $-1 \leqslant \frac{a-2}{2} \leqslant 1$. Отсюда

*Ответ.* $0 \leqslant a \leqslant 4$.

## Упражнения

**П.249.** При каких $a$ уравнение $|x^2 - 5x + 6| = ax$ имеет три решения?

**П.250.** (МИЭМ). Решить уравнение $|3x + 3| = ax + 4$ и определить значения $a$, при которых оно имеет единственное решение.

**П.251.** (КГУ). При каких значениях параметра $k$ уравнение $\left| |x| - 3 \right| = k(x - 9)$ имеет одно, два, три, четыре решения?

**П.252.** При каких значениях $k$ уравнение $\log_{(x+1)} kx = 2$ имеет ровно одно решение? Найти соответствующее решение.

**П.253.** (ЛЭТИ). При каких $k$ уравнение $\sqrt{6 - x} + \sqrt{x + 3} = kx$ имеет решение?

**П.254.**(МИЭМ). Найти $a$, при которых решения неравенства $\sqrt{9-x^2} \geqslant -a^2x$ образуют промежуток длины $\frac{15}{4}$, и найти этот промежуток.

**П.255.**(НГУ). При каких значениях $a$ уравнение $\log_{2x}(ax+1) = \frac{1}{2}$ имеет единственное решение ?

**П.256.**(МИФИ). Найти значения $c$, при которых уравнение $2\log_7(cx-2) = \log_{\sqrt{7}}(-x^2-9x-18)$ имеет только одно решение.

**П.257.**(МАИ). При каких значениях параметра $a$ система уравнений

$$\begin{cases} y^2 + 2xy + (x^2+2x-3)(3-x^2) = 0, \\ y - ax - 6a = 0 \end{cases}$$

имеет более двух различных решений?

**П.258.**(МГУ). Найти все значения параметра $a$, при которых наименьшее значение функции $f(x) = ax - |x^2+6x+8|$ меньше 2.

**П.259.**(МАИ). Найти все $a$, при которых существует пара положительных $(x\,;\,y)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} x + y < a, \\ 2x - ay = 1\,. \end{cases}$$

**П.260.**(МАИ). При каких значениях параметра $a$ уравнение $|x+a| = 1 + \frac{a}{4x}$ имеет единственное решение?

**П.261.**(МАИ). При каких действительных значениях параметра $a$ уравнение $(a-2{,}5)\,x+1 = 4\,|x-a|$ имеет ровно два различных корня?

**П.262.**(МАИ). Найти все действительные значения $a$, для которых верно утверждение: если пара положительных чисел $(x;\,y)$ является решением неравенства $|2y+ax| - ax \leqslant 2$, то и пара $(-y\,;\,x)$ также является решением этого неравенства.

## В. Гомотетия. Сжатие к прямой.

**П.263.**(ЛГУ). При каких $c$ система

$$\begin{cases} 2^{3x} - 2^{8y-3x+3} \geqslant 2^{4y+1}, \\ x^2 + y^2 = c \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

*Решение.* В этой задаче возможность перехода к графическому образу хорошо будет видна после того, как мы упростим неравенство системы. Имеем $2^{3x-4y} - 2^{4y-3x} \cdot 8 \geqslant 2$. Пусть $2^{4y-3x} = z$. Тогда $\frac{1}{z} - 8z - 2 \geqslant 0$. Отсюда с учетом того, что $z > 0$, получаем $0 < z \leqslant \frac{1}{4}$. Запишем $2^{4y-3x} \leqslant 2^{-2}$,т.е. $4y - 3x + 2 \leqslant 0$. Следовательно, исходная система равносильна такой:

$$\begin{cases} 4y - 3x + 2 \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 = c. \end{cases}$$

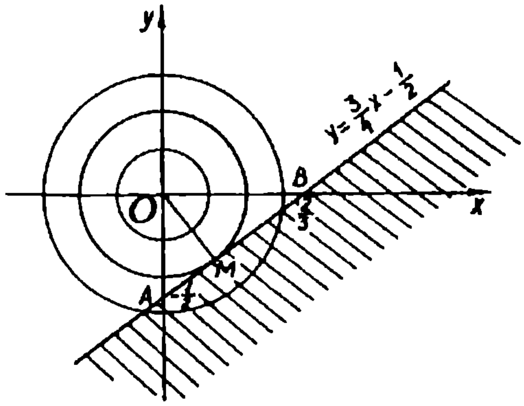



Рис. 25

Графиком первого неравенства этой системы является полуплоскость с границей $y = \frac{3x}{4} - \frac{1}{2}$ (рис.25). Очевидно система может иметь решения, если $c \geqslant 0$. Тогда уравнение $x^2 + y^2 = c$ задает семейство гомотетичных окружностей с центром в точке $O$ (0; 0). Рисунок подсказывает, что если радиус окружности не меньше длины отрезка $OM$ , т. е. расстояния от точки $O$ до границы полуплоскости, то система имеет решения. Имеем $\sqrt{c} \geqslant OM$. Из $\Delta\, AOB$ :$OM = AO \cos\angle AOM = AO \cos\angle OBA = \frac{2}{5}$. Отсюда

*Ответ.* $c \geqslant \frac{4}{25}$.

П.264.(КГУ). Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

в зависимости от значений параметра $a$?

*Решение.* Прежде всего отметим, что при $a \leqslant 0$ система решений не имеет. При фиксированном $a > 0$ графиком первого уравнения является квадрат с вершинами ($a$ ; 0), (0 ; $-a$), ($-a$ ; 0), (0 ; $a$). Таким образом, членами семейства $|x| + |y| = a$ являются гомотетичные квадраты (центр гомотетии — точка $O$(0; 0)).

Обратимся к рис. 26. Очевидно если квадрат находится внутри окружности $x^2 + y^2 = 1$, то система решений не имеет. С увеличением $a$ (квадрат «раздувается») решения появятся лишь в тот момент, когда квадрат окажется вписанным в окружность. В этом случае ($a = 1$) решений будет четыре. Далее, при $1 < a < \sqrt{2}$ каждая сторона квадрата имеет две общие точки с окружностью, а значит, система будет иметь восемь решений. При $a = \sqrt{2}$ окружность окажется вписанной в квадрат, т.е. решений станет опять четыре. Очевидно при $a > \sqrt{2}$ система решений не имеет.

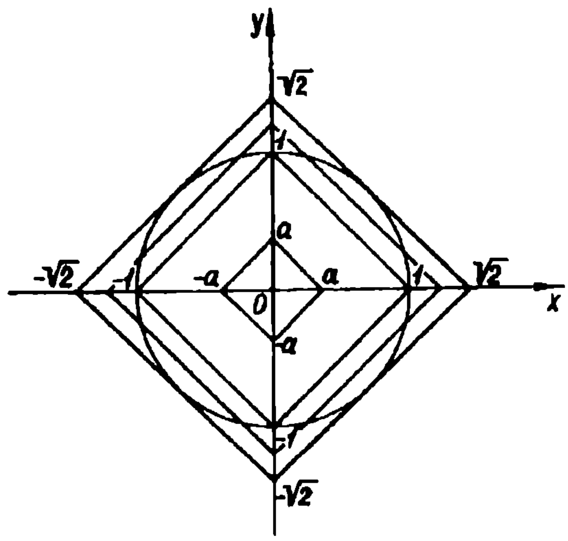


Рис. 26

*Ответ.* Если $a < 1$ или $a > \sqrt{2}$, то нет решений; если $a = 1$ или $a = \sqrt{2}$, то решений четыре; если $1 < a < \sqrt{2}$, то решений восемь.

Как и ранее, пойдем по пути наращивания сложности задач за счет появления на картинке еще одного семейства кривых. В следующих трех задачах таким семейством будет систем. параллельных прямых с постоянным расстоянием между соседними прямыми. Некоторое однообразие в выборе графического образа, на наш взгляд, компенсируется разнообразием задач.

**II.265.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$ имеет ровно восемь решений.

*Решение.* Имеем $\sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi k$, где $k \in Z$. Рассмотрим функции $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ и $y = 2\pi k$. Первая из них задает семейство гомотетических полуокружностей с центром в $O$ (0 ; 0), вторая — семейство прямых, параллельных оси абсцисс. Из рис. 27 хорошо видно, что с увеличением радиуса $r$ полуокружности растет число корней

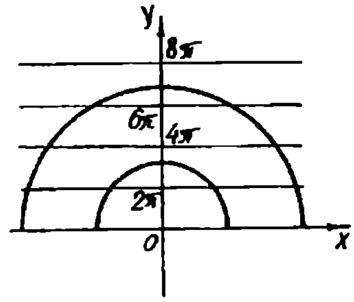


Рис. 27

исходного уравнения. Их будет ровно восемь, если $6\pi < r < 8\pi$.

Завершая решение, хотим предостеречь читателя от распространенной ошибки — считать $a$ радиусом рассматриваемой полуокружности. На самом деле $r = |a|$.

*Ответ.* $-8\pi < a < -6\pi$ или $6\pi < a < 8\pi$.

**II.266.** (МГУ). Найти все $a$, при которых системы

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

равносильны.

*Решение.* Перепишем первую систему в виде

$$\begin{cases} y = -x + \pi k, \\ x^2 + y^2 = a, \quad \text{где } k \in Z. \end{cases}$$

Первое уравнение системы задает семейство параллельных прямых, изображенное на рис. 28. Для случая $a > 0$ второе уравнение системы задает семейство окружностей.

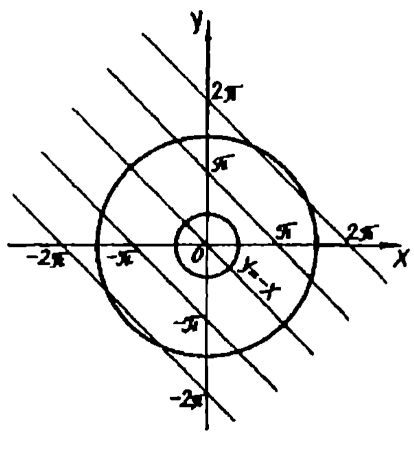



Рис. 28

Разумеется, что все решения второй из исходных систем содержатся среди решений первой. Обратное требование выполняется лишь тогда, когда окружности $x^2 + y^2 = a$ имеют общие точки только с прямой $y = -x$. Расстояние между соседними прямыми равно $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, поэтому для радиуса окружности получаем ограничение $\sqrt{a} < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Отсюда $0 \leqslant a < \frac{\pi^2}{2}$. Поскольку мы рассматриваем случай $a > 0$, то значение $a = 0$ требует проверки. Очевидно оно подходит.

Казалось бы решение завершено. Однако такой вывод преждевременный. Действительно, ведь при $a < 0$ исходные системы решений не имеют, а следовательно, они равносильны. Кстати, с подобной ситуацией мы встречались в задаче I.19.

*Ответ.* $a < \frac{\pi^2}{2}$.

П.267.(МИРЭиА). При каких положительных значениях параметров $a$ и $b$ системы уравнений

$$\begin{cases} \log_9 x^2 = b - \log_3 y, \\ (x+y)^2 = a^2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ x^2 + y^2 = 2x + 2y + a^2 \end{cases}$$

имеют одинаковое число решений?

*Решение.* Несложно заметить, что вторая система задает знакомые по предыдущей задаче графические образы: семейство параллельных прямых $y = -x + \pi k$, $k \in Z$, и семейство гомотетичных окружностей $(x-1)^2 + (y-1)^2 = a^2 + 2$ с центром $O_1(1;\ 1)$ (рис. 29). Поскольку по условию $a \neq 0$, то $\sqrt{a^2+2} > OO_1$, и, следовательно, рассматриваемая система имеет не меньше четырех решений. Очевидно таким же свойством должна обладать первая из исходных систем.

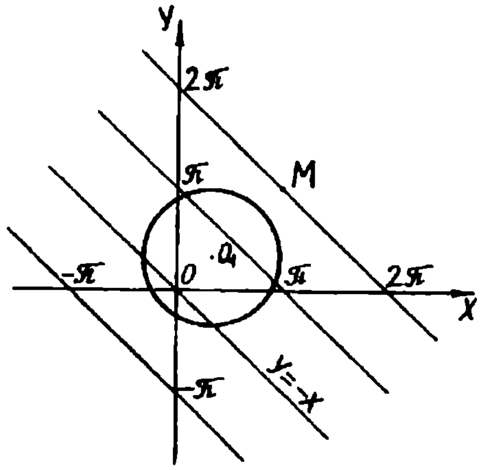



Рис. 29

Легко установить, что последняя равносильна совокупности следующих двух систем:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3^b}{|x|}, \\ y = -x - a \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = \dfrac{3^b}{|x|}, \\ y = -x + a. \end{cases}$$

Обратимся к рис. 30. Поскольку $a > 0$, то семейство параллельных прямых $y = -x - a$ пересекает график $y = \dfrac{3^b}{|x|}$ лишь в одной точке, а значит, первая система совокупности имеет только одно решение. Вторая система может иметь не более трех решений (см. рис. 30). Поэтому мы вынуждены потребовать от этой системы иметь ровно три решения. Последнее условие достигается тогда, когда прямые

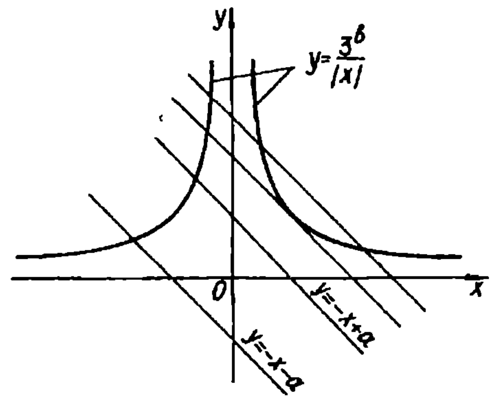



Рис. 30

$y = -x + a$ будут пересекать кривую $y = \dfrac{3^b}{x}$, $x > 0$, в двух точках. Для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнение $\dfrac{3^b}{x} = -x + a$ при $a > 0$ имело два корня, т.е. дискриминант квадратного уравнения $x^2 - ax + 3^b = 0$ должен быть положительным. Имеем $a^2 - 4 \cdot 3^b > 0$. Отсюда для $a > 0$ получаем $a > 2\sqrt{3^b}$.

Теперь осталось выяснить, при каких $a$ вторая из данных в условии систем имеет ровно четыре решения. Обратимся опять к рис. 29. Рассмотрим точку $M$ $(\pi\,;\,\pi)$. Если радиус окружности будет больше или равен $O_1 M$, то система очевидно будет иметь больше четырех решений. Тогда получаем $\sqrt{a^2 + 2} < O_1M$, т.е. при $a > 0$ имеем $a < \sqrt{2\pi(\pi - 2)}$.

И последний шаг. Определим, при каких $b > 0$ $2\sqrt{3^b} < \sqrt{2\pi(\pi - 2)}$. Легко устанавливаем, что $0 < b < \log_3 \dfrac{\pi(\pi - 2)}{2}$.

*Ответ.* Если $0 < b < \log_3 \dfrac{\pi(\pi - 2)}{2}$, то $2\sqrt{3^b} < a < \sqrt{2\pi(\pi - 2)}$; при других $b$ требование задачи не выполняется.

Разбирая последний пример, мы сознательно не стали привлекать внимание читателя к еще одному семейству кривых вида $y = k f(x)$ $\left(\text{в задаче } k = 3^b, f(x) = \dfrac{1}{|x|}\right)$. Это прежде всего обусловлено тем, что его (семейства) свойства не лежали в основе идеи решения задачи.

Разумеется, есть тип задач, в которых кривые $y = k f(x)$ не «ведут» себя пассивно, т.е. их свойства (в данной ситуации нас будут интересовать геометрические) являются ключом к решению.

Прежде чем проиллюстрировать сказанное примерами, напомним читателю, что при фиксированном $k \neq 0$ кривая $y = k f(x)$ — результат сжатия к оси абсцисс кривой $y = f(x)$ в $|k|$ раз. (Порой для случая $|k| > 1$ говорят, что кривая растягивается от оси.)

**П.268.** (МГУ). При каждом фиксированном значении параметра $a$ решить уравнение $|x + 3| - a|x - 1| = 4$.

*Решение.* Рассмотрим функции $y = |x + 3| - 4$ и $y = a|x - 1|$.

На рис. 31 построены график первой из них, а также графики шести представителей семейства $y = a|x - 1|$ соответственно для случаев $a > 1$, $a = 1$, $0 < a < 1$, $-1 < a < 0$, $a = -1$, $a < -1$. (Для $a = 0$ имеем ось абсцисс.) Как нам кажется, получившийся графический образ дает полную информацию о решении исходного уравнения. Осталось лишь найти значения $x_1$ и $x_2$.

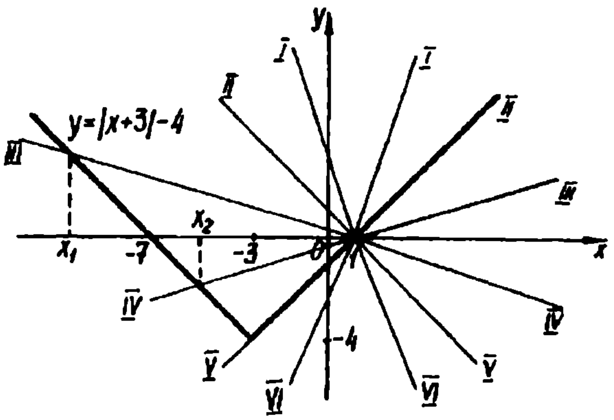



Рис. 31

Очевидно искомые значения соответственно для $0 < a < 1$ и $-1 < a < 0$ — это корни уравнения $(-x - 3) - 4 = a(1 - x)$. Отсюда $x = \dfrac{7 + a}{a - 1}$. Приступая к записи ответа, важно не упустить, что $x = 1$ — корень исходного уравнения при любом $a$.

*Ответ.* Если $|a| > 1$, то $x = 1$; если $|a| < 1$, то $x = 1$ или $x = \dfrac{7 + a}{a - 1}$; если $a = 1$, то $x \geq 1$; если $a = -1$, то $-3 \leq x \leq 1$.

П.269. (МГУ). Найти все натуральные значения $b$, при каждом из которых выражение $\dfrac{1}{x + y + 3}$ имеет смысл для всех пар чисел $(x\,; y)$, где $x < 0$ и $y < 0$, для которых выражение $\lg(xy - b)$ также имеет смысл.

*Решение.* Как нам кажется, условие задачи выглядит тяжеловесно и поэтому затруднительно для восприятия. Обычно в таких случаях следует поискать комфортную формулировку. (Напомним читателю, что к такому приему мы прибегали в задачах П.209, П.244.)

Поскольку выражения $\dfrac{1}{x + y + 3}$ и $\lg\,(xy - b)$ должны иметь смысл одновременно, то несложно прийти к формулировке, равносильной исходной: найти все натуральные $b$, при которых система

$$\begin{cases} x + y + 3 \neq 0, \\ xy - b > 0, \\ x < 0, y < 0 \end{cases}$$

имеет решение.

Графиком первого неравенства системы являются все точки координатной плоскости $(x\,;y)$, кроме прямой $y = -x - 3$. Остальные неравенства задают область, ограниченную веткой гиперболы $y = \frac{b}{x}$. (На рис. 32 эта область показана штриховкой.)

Очевидно система имеет решение, если семейство $y = \frac{b}{x}$ имеет не более одной общей точки с прямой $y = -x - 3$ (одна точка соответствует моменту касания). Для этого достаточно потребовать, чтобы уравнение $\frac{b}{x} = -x - 3$ имело не более одного корня. Поскольку $b \neq 0$, то условие неположительности дискриминанта квадратного уравнения $x^2 + 3x + b = 0$ даст искомые значения параметра. Имеем $9 - 4b \leqslant 0$. Отсюда, не забыв, что $b$ — натуральное, получаем

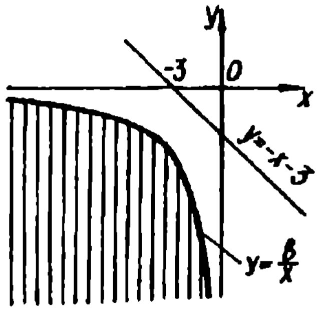


Рис. 32

*Ответ.* $b = 3, 4, \ldots$

П.270.(МАИ). При каких значениях $a$ множество точек, заданное неравенством $|y| < 1 - ax^2$, является подмножеством множества точек, заданного неравенством $|2x| + |y| < \frac{5}{4}$?

*Решение.* Легко установить, что графиком неравенства $|2x| + |y| < \frac{5}{4}$ является область, ограниченная ромбом (рис. 33). Неравенство $|y| < 1 - ax^2$ равносильно системе $ax^2 - 1 < y < 1 - ax^2$. Очевидно при $a \leqslant 0$ эта система задает неограниченное множество точек (рис. 34), которое, естественно, не может поместиться внутри ромба. Если $a > 0$, то рассматриваемая система задает фигуру, изображенную на рис. 35.

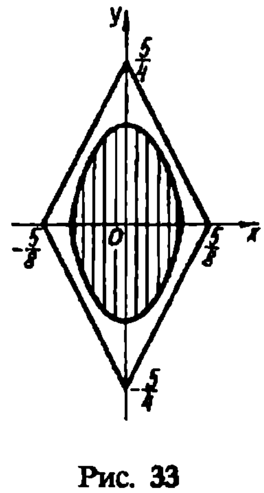


Рис. 33

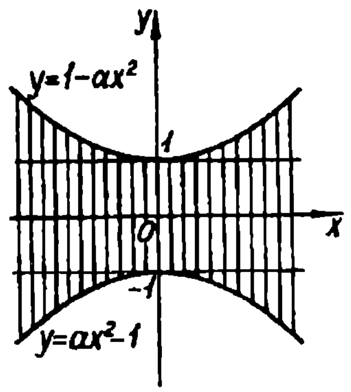



Рис. 34

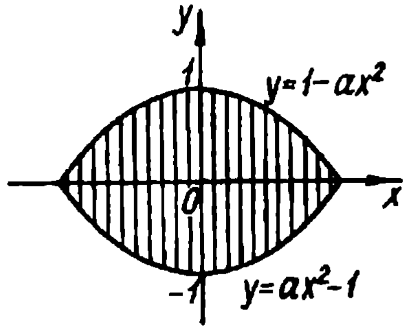



Рис. 35

Ясно, что задача свелась к поиску значений $a$, при которых эта фигура «сожмется» до таких размеров, что поместится в ромб. Из соображений симметрии для поиска искомых значений параметра достаточно потребовать от уравнения $1 - ax^2 = \frac{5}{4} - 2x$ при $a > 0$ иметь не более одного корня. Отсюда

*Ответ.* $a \geqslant 4$.

## Упражнения

**П.271.** (КГУ). Найти число решений системы уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 \, (a > 0). \end{cases}$$

**П.272.** При каких действительных значениях $a$ система

$$\begin{cases} 2|x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет восемь различных решений?

**П.273.** (МГУ). Определить, при каких $a$ система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a), \\ (x + y)^2 = 14 \end{cases}$$

имеет в точности два решения.

**П.274.** (МГУ). Определить, при каких $a$ система уравнений

$$\begin{cases} (x - y)^2 = 6a - 14, \\ x^2 + y^2 = 3(2 + a) \end{cases}$$

имеет в точности два решения.

**П.275.** (МГУ). Найти все $a$, при которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|y-7|} = \sqrt{3|x|}, \\ 9x^2 + y^2 = 14y - 49 - 2a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

**П.276.**(МГУ). Найти все значения $a$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{|y+3|} = 1 - \sqrt{5|x|}, \\ 16a - 9 - 6y = 25x^2 + y^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

**П.277.**(НГУ). Найти те $a > 0$, для которых существуют точки плоскости с координатами $(x;\ y)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - a^2, \\ x + y > a. \end{cases}$$

**П.278.**(МГУ). Найти все действительные значения $a$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 8xy + 25 = 0, \\ x^2 = y - 2x \end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

**П.279.**(МАИ). Для каждого отрицательного числа $a$ решить неравенство $2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0$.

**П.280.**(МАИ). При каких значениях параметра $a$ решения неравенства $\sqrt{a^2 - x^2} \geqslant 2x$ образуют отрезок длиной 4?

**П.281.**(МАИ). Для каждого положительного числа $a$ решить неравенство $\sqrt{2ax - x^2} \geqslant a - x$.

**П.282.** Сколько корней в зависимости от $a$ имеет уравнение $x^2 + a|x-2| = 0$?

**П.283.**(МГУ). Для каждого значения $a$ найти все значения $x$, удовлетворяющие уравнению $a|x+3| + 2|x+4| = 2$.

**П.284.** При каких значениях параметра $a > 1$ уравнение $|x^2 - 6x + 8| + 2 = \log_a x$ имеет единственное решение?

**П.285.** При каких значениях параметра $a > 0$ уравнение $|x+2| - |2x+8| = a^x$

а) имеет единственное решение?

б) имеет более одного решения?

в) не имеет решений?

II.286. (КГУ). При каких значениях $a$ кривые $y = 1 + \frac{x^2}{a^3}$ и $y = 4\sqrt{x}$ имеют только одну общую точку?

II.287. (МИЭМ). Решить уравнение $|2x + 2| = ax^2 + 4$ и определить значения $a$, при которых оно имеет единственное решение.

II.288. (МГУ). Найти все $a$, при каждом из которых имеется хотя бы одна пара чисел $(x\,;\,y)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} x^2 + (y + 3)^2 < 4, \\ y = 2ax^2. \end{cases}$$

II.289. (МГУ). При каких значениях параметра $\beta$ количество пар целых чисел $(y\,;\,z)$, удовлетворяющих неравенству $\beta^3 y^2 + |z| \leqslant \beta^2$, минимально?

## Г. Две прямые на плоскости.

По существу, в основе идеи решения задач настоящего пункта лежит вопрос об исследовании взаимного расположения двух прямых : $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Несложно показать решение этой задачи в общем виде. Мы же обратимся непосредственно к конкретным характерным примерам, что, на наш взгляд, не нанесет ущерба общей стороне вопроса.

II.290. (КПИ). Определить число решений системы

$$\begin{cases} (a + 3)x + 4y = 5 - 3a, \\ 2x + (5 + a)y = 8 \end{cases}$$

в зависимости от значений параметра $a$.

*Решение.* Очевидно графиками уравнений системы являются прямые. Параллельно заметим, что не всякое уравнение вида $ax + by + c = 0$ задает прямую: необходимо еще потребовать, чтобы $a^2 + b^2 \neq 0$. Поскольку коэффициент при $y$ в первом уравнении отличен от нуля, то это уравнение задает невертикальную прямую $y = -\frac{a + 3}{4}x + \frac{5 - 3a}{4}$. Второе уравнение при $a = -5$ задает вертикальную прямую, которая очевидно пересекает график первого уравнения, что равносильно исходной системе иметь единственное решение. Если $a \neq -5$,то имеем $y = -\frac{2}{5 + a}x + \frac{8}{5 + a}$.

Сделаем замечание общего характера. При исследовании взаимного расположения двух прямых удобно вначале рассмотреть случаи, когда коэффициенты при $y$ равны нулю (имеем вертикальное положение прямых), затем каждое из уравнений представить в виде $y = kx + l$.

Прямые параллельны , если

$$\begin{cases} -\dfrac{a+3}{4} = \dfrac{-2}{5+a}, \\ \dfrac{5-3a}{4} \neq \dfrac{8}{5+a}, \end{cases}$$

прямые совпадают , если

$$\begin{cases} -\dfrac{a+3}{4} = \dfrac{-2}{5+a}, \\ \dfrac{5-3a}{4} = \dfrac{8}{5+a} \end{cases}$$

и, наконец, прямые пересекаются, если $-\dfrac{a+3}{4} \neq -\dfrac{2}{5+a}$.

Решение первой системы $a = -7$ , второй — $a = -1$, решение последнего неравенства $a \neq -7$ и $a \neq -1$.

*Ответ.* Если $a \neq -7$ и $a \neq -1$ ,то система имеет единственное решение ( заметим , что значение $a = -5$ учтено ); если $a = -1$ , то решений бесконечно много; если $a = -7$ , то решений нет.

И еще одно замечание. Рассмотренная система принадлежит к классу систем двух линейных уравнений с двумя переменными $x$ и $y$ , т.е. систем вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$ — некоторые числа (параметры). Подробно о линейных системах, в частности об аналитическом методе их исследования, можно прочитать в [13].

**П.291.** Даны два утверждения :

а) система

$$\begin{cases} (a+4)x + 3y = a + 1, \\ ax + (a-1)y = a - 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений;

б) прямые, заданные уравнениями $5x + 4y = 6$ и $ax + 6y = 10$

пересекаются во второй четверти декартовой прямоугольной системы координат. При каких значениях $a$ одно из утверждений истинно , а другое — ложно ?

*Решение.* Графиком первого уравнения системы является невертикальная прямая $y = -\frac{a+4}{3}x + \frac{a+1}{3}$. При $a = 1$ система очевидно имеет единственное решение ( второе уравнение задает вертикальную прямую ). Если $a \neq 1$, то имеем $y = -\frac{a}{a-1}x + 1$. Отсюда система имеет бесконечно много решений, если

$$\begin{cases} \dfrac{a+4}{3} = \dfrac{a}{a-1}, \\ \dfrac{a+1}{3} = 1. \end{cases}$$

Получаем $a = 2$.

Прямые, заданные в утверждении б) , удобно записать так: $y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$ и $y = -\frac{a}{6}x + \frac{5}{3}$. Ясно,что они будут пересекаться, если $-\frac{5}{4} \neq -\frac{a}{6}$, т.е. $a \neq \frac{15}{2}$. Решив уравнение $-\frac{5}{4}x + \frac{3}{2} = -\frac{a}{6}x + \frac{5}{3}$, легко найти координаты точки пересечения прямых. Имеем $x = \frac{2}{2a-15}$ и $y = \frac{25-3a}{15-2a}$. Прямые пересекаются во второй четверти , если $x < 0$ и $y > 0$. Отсюда $a < \frac{15}{2}$.

Итак, утверждение а) истинно, если $a = 2$, б) — если $a < \frac{15}{2}$. Тогда требованию задачи удовлетворяет следующий

*Ответ.* $a < 2$ или $2 < a < \frac{15}{2}$.

**II.292.** (МГУ). Найти все значения $a$, при каждом из которых для любого значения $b$ система

$$\begin{cases} bx - y - az^2 = 0, \\ (b-6)x + 2by - 4z = 4 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение $(x, y, z)$.

*Решение.* Имеем систему двух уравнений с тремя (!) переменными. Однако на эту систему можно смотреть , как на линейную с переменными $x$ и $y$ и параметрами $a$, $b$, $z$. Тогда решение поведем по схеме, изложенной ранее.

Имеем $y = bx - az^2$ — невертикальная прямая. Тогда при $b = 0$ (второе уравнение системы — вертикальная прямая) система имеет решение при любых $a$ и $z$. Если $b \neq 0$, получаем $y = \frac{6-b}{2b}x + \frac{2+2z}{b}$. Отсюда, если $b \neq \frac{6-b}{2b}$, т.е. $b \neq -2$ и $b \neq \frac{3}{2}$, система очевидно имеет решение опять–таки при любых $a$ и $z$. Однако задача требует , чтобы $b$ было любым. Поэтому необходимо исследовать случаи, когда $b = -2$ и $b = \frac{3}{2}$. Для указанных значений $b$ уравнения системы задают или параллельные прямые, или совпадающие. Нас, естественно, устраивает только второй случай. Для этого надо потребовать, чтобы $\frac{2+2z}{b} = -az^2$. При $b = -2$ имеем $az^2 - z - 1 = 0$, при $b = \frac{3}{2}$ — $3az^2 + 4z + 4 = 0$. Осталось найти такие $a$, при которых полученные уравнения относительно $z$ имеют хотя бы одно решение, причем одновременно. Поскольку эти уравнения степени не выше второй, то легко устанавливаем

*Ответ.* $-\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{3}$.

П.293.(КГУ). Найти все $a$, при которых для любого $b$ существуют четыре различных значения $c$, при которых система

$$\begin{cases} 5x + by = c^4 + a, \\ 5x + 2y = bc^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

*Решение.* Воспользовавшись хорошо знакомым по предыдущим задачам методом исследования систем линейных уравнений, без труда устанавливаем, что при $b \neq 2$ данная система имеет единственное решение при любых $a$ и $c$. Поскольку по условию $b$ — любое, то рассмотрим отдельно случай, когда $b = 2$.

Получаем

$$\begin{cases} 5x + 2y = c^4 + a, \\ 5x + 2y = 2c^2. \end{cases}$$

Очевидно эта система имеет решение, если $c^4 + a = 2c^2$. Имеем биквадратное уравнение относительно $c$. Оно имеет четыре различных решения, если соответственное квадратное уравнение имеет два различных положительных корня. (Подробно о таких задачах см. в гл. III.) Для этого достаточно потребовать, чтобы $a > 0$ и $D > 0$, где $D = 4 - 4a$. Отсюда

*Ответ.* $0 < a < 1$.

**П.294.** (ЛГУ). При каких $a$ и $b$ система

$$\begin{cases} 3^{2(x-y)} - 6 \cdot 3^{-2x} - 3^{-y} > 0, \\ ax + by = 5 \end{cases}$$

имеет решение?

*Решение.* Легко преобразовать неравенство системы к виду $3^{2(2x-y)} - 3^{2x-y} - 6 > 0$. Отсюда $(3^{2x-y} + 2)(3^{2x-y} - 3) > 0$. Тогда $3^{2x-y} > 3$, т.е. $y-2x+1 < 0$. Следовательно, исходная система равносильна такой:

$$\begin{cases} y-2x+1<0, \\ ax + by = 5. \end{cases}$$

Неравенство системы задает полуплоскость с границей $y = 2x - 1$ (рис. 36). Легко сообразить, что полученная система имеет решение, если прямая $ax + by = 5$ пересекает границу полуплоскости или, будучи параллельной ей, лежит в полуплоскости $y - 2x + 1 < 0$.

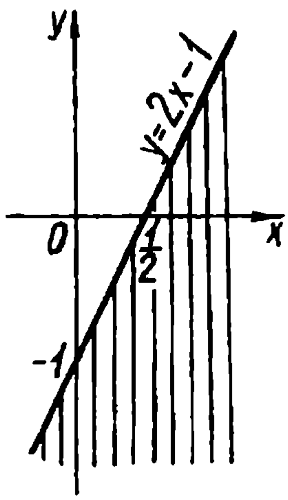



Рис. 36

Как и ранее, начнем со случая $b = 0$. Тогда, казалось бы, уравнение $ax + by = 5$ задает вертикальную прямую, которая очевидно пересекает прямую $y = 2x - 1$. Однако это утверждение справедливо лишь при $a \neq 0$. Значит, при $b = 0$ и $a \neq 0$ система имеет решения. Далее, при $b \neq 0$ имеем $y = -\frac{a}{b}x + \frac{5}{b}$. В этом случае условие пересечения прямых достигается при $-\frac{a}{b} \neq 2$, т.е. $a \neq -2b$. Если $a = -2b$, то прямые или совпадают, или параллельны. Добавив требование $\frac{5}{b} < -1$ (прямая $y = -\frac{a}{b}x + \frac{5}{b}$ пересекает ось ординат ниже точки $(0; -1)$), получим еще одно нас устраивающее взаимное положение прямых.

*Ответ.* $b = 0$ и $a \neq 0$, или $b \neq 0$ и $a \neq -2b$, или $-5 < b < 0$ и $a = -2b$.

**П.295.**(МИСиС).При каких значениях параметра $a$ система неравенств

$$\begin{cases} 3x + (a-1)y < 8-a, \\ (6-a)x + 2y > a+2 \end{cases}$$

имеет решение?

*Решение.* Если границы полуплоскостей, которые задают неравенства системы, пересекаются, то данная система имеет решения.

Очевидно $a = 1$ подходит. Если $a \neq 1$, то уравнения границ полуплоскостей перепишем в таком виде: $y = \frac{3}{1-a}x + \frac{8-a}{a-1}$ и $y = \frac{a-6}{2}x + \frac{a+2}{2}$. Эти прямые пересекаются, если $\frac{3}{1-a} \neq \frac{a-6}{2}$, т.е. $a \neq 3$ и $a \neq 4$.

Разумеется, решение не завершено: ведь параллельность границ еще не означает, что исходная система не имеет решений. Поэтому необходимо рассмотреть случаи $a = 3$ и $a = 4$. При $a = 3$ границы совпадают, и очевидно система решений не имеет (неравенства системы задают различные полуплоскости).

При $a = 4$ имеем

$$\begin{cases} 3x + 3y < 4, \\ 2x + 2y > 6\,. \end{cases}$$

Эта система также решений не имеет (рис. 37). Следовательно, $a = 4$ не подходит.

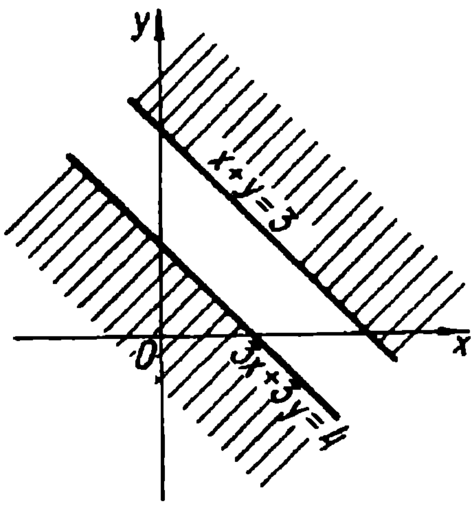



Рис. 37

*Ответ.* $a \neq 3$ и $a \neq 4$.

## Упражнения

**П.296.**(КПИ). Найти значения $a$, при которых система уравнений

$$\begin{cases}(2a-3)x-ay=3a-2,\\ 5x-(2a+3)y=5\end{cases}$$

имеет единственное решение.

**П.297.**(КПИ). Покажите, что система уравнений

$$\begin{cases}ax+(a-1)y=2a,\\ 3(a+2)x+(4a+1)y=a+5\end{cases}$$

имеет единственное решение при всех значениях $a$.

**П.298.**(МГУ). Найти все значения $a$, при которых система уравнений

$$\begin{cases}2x+(9a^2-2)y=3a,\\ x+y=1\end{cases}$$

не имеет решений.

**П.299.**(МЭСИ). При каких значениях $a$ система уравнений

$$\begin{cases}(a-2)x+27y=4{,}5\ ,\\ 2x+(a+1)y=-1\end{cases}$$

имеет бесчисленное множество решений ?

**П.300.**(МГУ). Найти все пары значений $(\alpha\,;\beta)$ , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases}8x+(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)y=4,\\ (\alpha-\beta)x+26y=2\end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

**П.301.**(МИФИ). При каких значениях $k$ существуют решения системы уравнений

$$\begin{cases}x+ky=3,\\ kx+4y=6,\end{cases}$$

удовлетворяющие одновременно неравенствам $x>1$, $y>0$ ?

**П.302.**(МИФИ). Найти все $a$ и $b$, при которых равносильны системы уравнений

$$\begin{cases}ax+2y=b+1,\\ x+y=3\end{cases} \text{ и } \begin{cases}2x+y=a^2+2,\\ x+3y=3.\end{cases}$$

**П.303.**(МГУ). Числа $a$, $b$, $c$ таковы, что система уравнений

$$\begin{cases} ax - by = 2a - b, \\ (c + 1)x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений, причем $x = 1$, $y = 3$ — одно из этих решений. Найти числа $a$, $b$, $c$.

**II.304.** (МГУ). Найти все значения $a$, при каждом из которых для любого значения $b$ система

$$\begin{cases} x - by + az^2 = 0, \\ 2bx + (b-6)y - 8z = 8 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение $(x, y, z)$.

**II.305.** (МИФИ). Найдите $b \in R$ такие, чтобы при любых $a \in R$ имела хотя бы одно решение система уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = a, \\ ax - y = b. \end{cases}$$

**II.306.** (НГУ). При каких значениях $a$ для любого $b$ найдется хотя бы одно $c$ такое, что система уравнений

$$\begin{cases} 2x + by = ac^2 + c, \\ bx + 2y = c - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение ?

## §4. Графические приемы. Координатная плоскость $(x\,;\,a)$

Взгляд на параметр как на равноправную переменную (см. §2 п. Г) находит свое отражение в графических методах. В самом деле, поскольку параметр «равен в правах» с переменной, то ему, естественно, можно «выделить» и свою координатную ось. Таким образом возникает координатная плоскость $(x\,;\,a)$. Казалось бы, такая незначительная деталь, как отказ от традиционного выбора букв $x$ и $y$ для обозначения осей, определяет один из эффективнейших методов решения задач с параметрами.

Для того чтобы наиболее полно раскрыть возможности этого метода, покажем его применение для решения основных типов задач, о которых шла речь в §1. Не разбивая настоящий параграф на отдельные пункты, выстроим его задачи в такой последовательности: Б, В, А (см. соответствующие буквам заглавия в §1).

Дадим самые общие признаки, которые, возможно, помогут читателю узнавать задачи, подходящие под рассматриваемый метод (при этом необходимо помнить, что нет правил без исключений): в задаче фигурируют лишь один параметр $a$ и одна переменная $x$, они конструируют некоторые аналитические выражения $F(x\,;\,a)$, $G(x\,;\,a)$ и т.д. (понятно, что выбор букв может быть иным); графики уравнений $F(x\,;\,a) = 0$, $G(x\,;\,a) = 0$ и т.д. в системе координат $(x;\,a)$ строятся несложно.

Сам же процесс решения схематично выглядит так. Вначале строится графический образ, затем, пересекая полученный график прямыми, перпендикулярными параметрической оси, «снимаем» нужную информацию.

Перейдем непосредственно к задачам.

**П.307.(II.29, П.223).** При каких значениях $a$ уравнение $\sqrt{x+a} = x$ имеет два корня?

*Решение.* Переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} x \geqslant 0\,, \\ a = x^2 - x\,. \end{cases}$$

Эта система на координатной плоскости $(x\,;\,a)$ задает кривую, изображенную на рис. 38 сплошной линией. Ясно, что все точки этой дуги параболы (и только они) имеют координаты $(x\,;\,a)$, удовлетворяющие исходному уравнению. Поэтому число решений уравнения при каждом фиксированном значении параметра

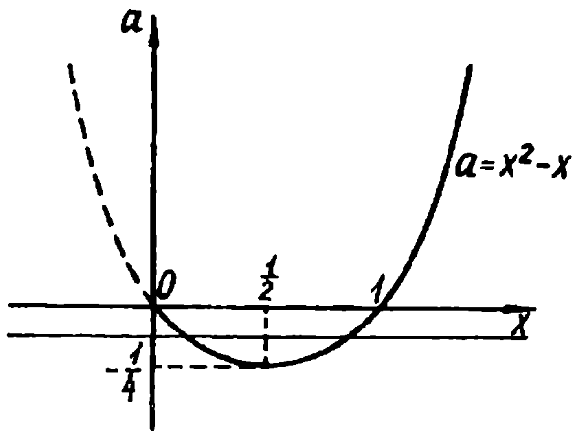



Рис. 38

$a$ равно количеству точек пересечения кривой с горизонтальной прямой, соответствующей этому значению параметра. Очевидно при $-\frac{1}{4} < a \leqslant 0$ указанные прямые пересекают график в двух точках, что равносильно исходному уравнению иметь два корня.

*Ответ.* $-\frac{1}{4} < a \leqslant 0.$

**П.308.** (МГУ). Найти все значения $\alpha$, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + 2x + \alpha \leqslant 0, \\ x^2 - 4x - 6\alpha \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

*Решение.* Перепишем исходную систему в таком виде:

$$\begin{cases} \alpha \leqslant -x^2-2x, \\ \alpha \geqslant \dfrac{x^2-4x}{6}. \end{cases}$$

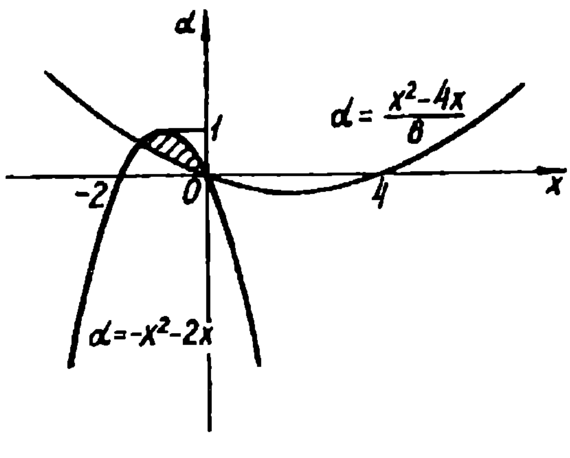



Рис. 39

Все решения этой системы (пары вида $(x\,;\,\alpha)$) образуют область, показанную на рис. 39 штриховкой.[1] Требование единственности решения данной системы на графический язык переводится так: горизонтальные прямые должны иметь с полученной областью только одну общую точку. Легко заметить, что лишь прямые $\alpha = 0$

1 Здесь и далее мы не будем специально указывать, принадлежит ли граница построенному графическому образу. Это легко установить по типу неравенств (строгие или нестрогие), которые его задают.

и $a = 1$ удовлетворяют выдвинутому требованию.

*Ответ.* $a = 0$ или $a = 1$.

Только что разобранные две задачи позволяют дать более конкретные рекомендации по сравнению с приведенными ранее: попытаться выразить параметр через переменную, т. е. получить равенство вида $a = f(x)$, а затем на плоскости $(x\ ;\ a\ )$ строить график функции $f$.

**П.309.** (МИЭМ). При каких значениях $a$ уравнение $(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$ имеет ровно три корня?

*Решение.* Имеем

$$\left[\begin{array}{l} a = x^2 - 4x + 1, \\ a = |x - 2| - 1. \end{array}\right.$$

График этой совокупности — объединение «уголка» и параболы (рис. 40). Очевидно лишь прямая $a = -1$ пересекает полученное объединение в трех точках.

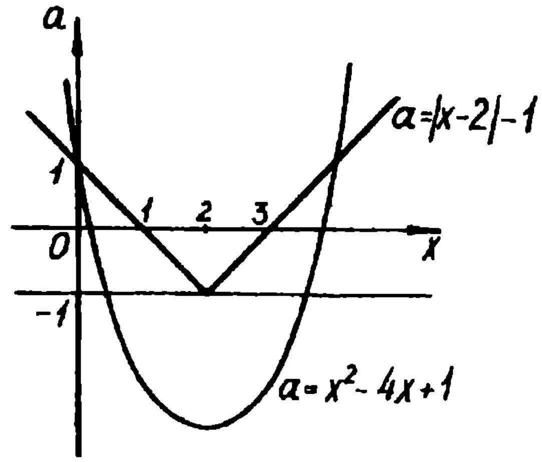



Рис. 40

*Ответ.* $a = -1$.

**П.299.** (КГУ). Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} y - x^2 = c, \\ x - y^2 = c \end{cases}$$

в зависимости от значений параметра $c$?

*Решение.* С первого взгляда может показаться, что присутствие двух переменных $x$ и $y$ не позволит воспользоваться изучаемым методом. Однако следующие естественные преобразования сделают эту задачу близкой (по методу решения) к предыдущим.

Легко получить

$$\begin{cases} y = x^2 + c, \\ x - (x^2 + c)^2 = c. \end{cases}$$

Ясно, что количество корней второго уравнения системы равно числу решений самой системы. Имеем $x^4 + 2x^2c - x + c^2 + + c = 0$. Рассмотрев это уравнение как квадратное относительно $c$ (этот прием уже знаком читателю по п. Г § 1), получаем следующую совокупность

$$\left[\begin{array}{l} c = -x^2 + x, \\ c = -x^2 - x - 1. \end{array}\right.$$

Теперь обращение к координатной плоскости $(x\ ;\ c)$ делает задачу почти тривиальной (рис. 41). Координаты точек пересечения парабол можно найти, решив уравнение $-x^2 + x = -x^2 - x - 1$. Отсюда $x = -\frac{1}{2}$. Для записи ответа осталось лишь заметить, что общая точка этих парабол — вершина параболы $c = -x^2 - x - 1$.

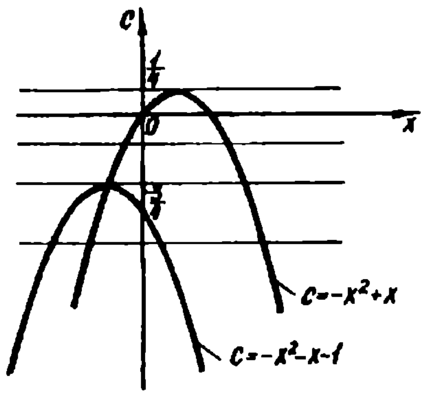


Рис. 41

*Ответ*. Если $c < -\frac{3}{4}$, то решений четыре; если $-\frac{3}{4} \leqslant c < \frac{1}{4}$, то решений два; если $c = \frac{1}{4}$, то решение одно; если $c > \frac{1}{4}$, то решений нет.

П.311.(П.32). Найти все значения параметра $b$, при которых уравнение $\dfrac{x^2-(3b-1)x+2b^2-2}{x^2-3x-4} = 0$ имеет одно решение.

*Решение*. Без труда устанавливаем, что данное уравнение равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 2b - 2, \\ x = b + 1, \end{array}\right. \\ x^2 - 3x - 4 \neq 0. \end{array}\right.$$

С помощью полученной системы легко построить график исходного уравнения (рис. 42). Именно наличие «проколов» в этом графике позволяет при $b = -2$ и $b = \frac{1}{2}$ иметь уравнению единственное решение. Сразу заметим, что и в дальнейшем подобная ситуация (разрывы в графических образах) будет нередко служить определяющим фактором в решении.

*Ответ.* $b = -2$ или $b = \frac{1}{2}$.

Поскольку алгоритм строим – «читаем» ответ является сквозным для примеров этого параграфа, то дальнейшие пояснения к задачам будут более схематичными.

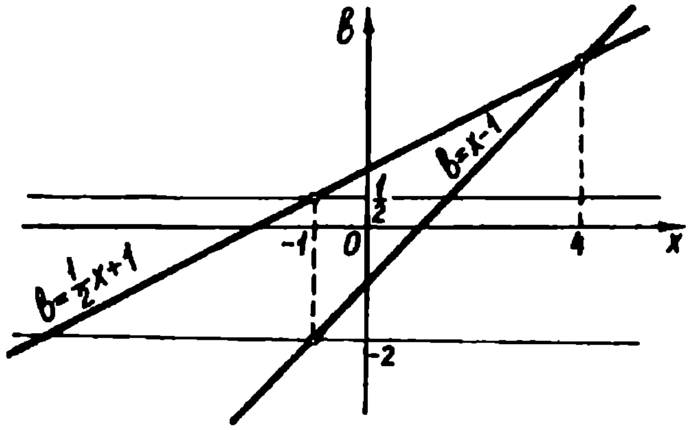


рис.42

**П.312.(П.45).** При каких значениях параметра $a$ уравнение $\log_{\sqrt{ax-6}}(2x^2 - 3x + 2) = 2\log_{ax-6}(x^2 + 2x - 4)$ имеет единственное решение?

*Решение.* Запишем систему, равносильную исходному уравнению:

$$\begin{cases} ax - 6 > 0, \\ ax - 6 \neq 1, \\ 2x^2 - 3x + 2 = x^2 + 2x - 4. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} ax > 6, \\ ax \neq 7, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 3. \end{array}\right. \end{cases}$$

Первые два неравенства системы задают множество точек, показанное на рис. 43 штриховкой, причем в это множество не входят гиперболы $ax = 7$ и $ax = 6$. Тогда отрезок $AB$ и луч $BD$, отрезок $EF$ и луч $FK$, лежащие соответственно на прямых $x = 2$ и $x = 3$, являются графиком исходного уравнения. Далее осталось лишь «снять» с картинки

*Ответ.* $2 < a < \frac{7}{3}$, или $\frac{7}{3} < a \leq 3$, или $a = \frac{7}{2}$.

**П.302.(МГУ).** Найти все значения параметра $a$, при которых уравнение $x^2 + 4x - 2|x - a| + 2 - a = 0$ имеет ровно два различных решения.

*Решение.* Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

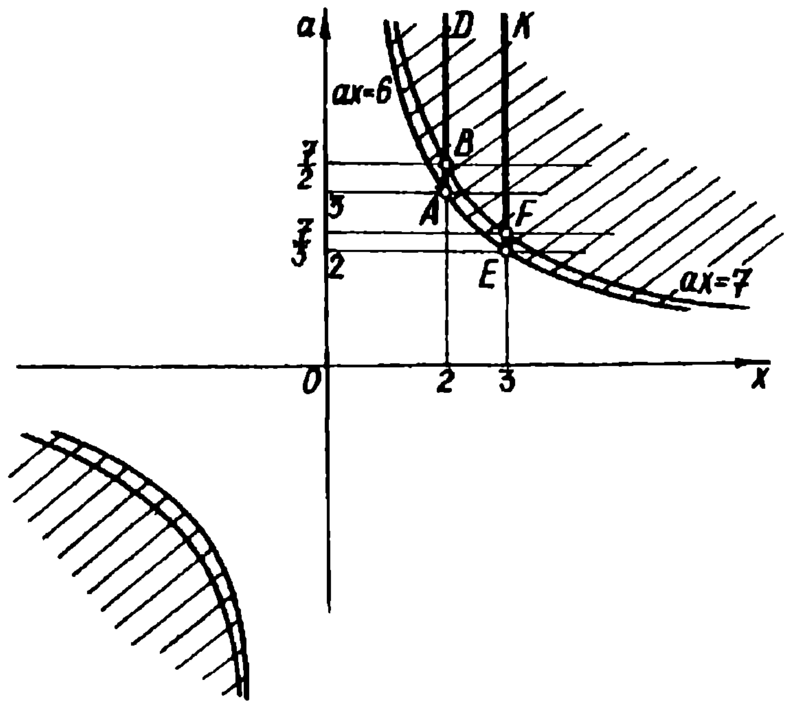



Рис. 43

$$\begin{cases} x \geqslant a, \\ x^2 + 2x + a + 2 = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x < a, \\ x^2 + 6x - 3a + 2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x \geqslant a, \\ a = -x^2 - 2x - 2 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x < a, \\ a = \dfrac{x^2 + 6x + 2}{3}. \end{cases}$$

При построении графика исходного уравнения важно учесть, что параболы $a = -x^2 - 2x - 2$, $a = \dfrac{x^2 + 6x + 2}{3}$ и прямая $a = x$ имеют две общие точки: $A(-2; -2)$, $B(-1; -1)$, причем точка $B$ — вершина первой из записанных парабол. Вершина второй параболы $D\left(-3; -\dfrac{7}{3}\right)$.

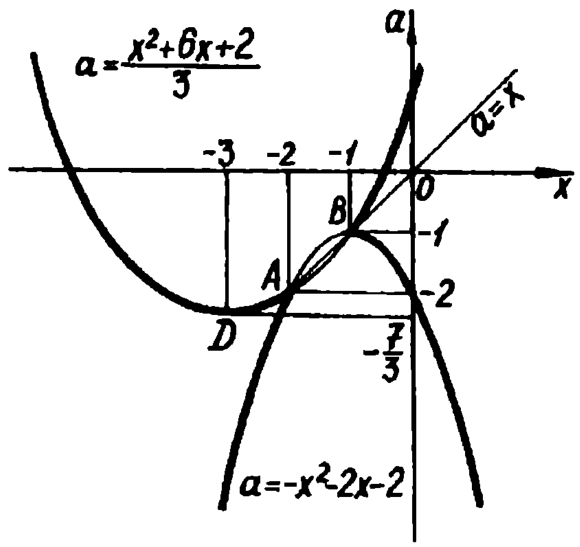



Рис. 44

График исходного уравнения изображен на рис. 44. Отсюда

*Ответ.* $a < -\frac{7}{3}$ или $a > -2$.

П.314. (МАИ). Найдите множество всех чисел $a$, для каждого из которых уравнение $\sqrt{x + 2a^2}(x^2 - (a-1)x - a) = 0$ имеет только два различных корня.

*Решение.* Перепишем данное уравнение в следующем виде: $\sqrt{x + 2a^2}(x - a)(x + 1) = 0$. Теперь важно не упустить, что $x = -2a^2$, $x = a$ и $x = -1$ — корни исходного уравнения лишь при условии $x \geqslant -2a^2$.

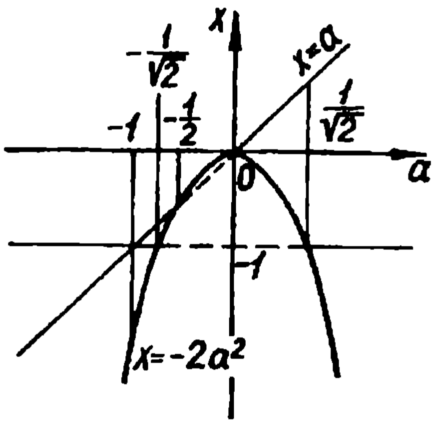


Рис. 45

Обратим внимание читателя, что график данного уравнения удобно строить, отнеся переменной $x$ ось ординат. На рис. 45 искомый график — объединение сплошных линий. Здесь ответ «считывается» вертикальными прямыми.

*Ответ.* $a = -1$, или $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant a < -\frac{1}{2}$, или $0 < a \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

П.315. (МГУ). Найти все неотрицательные числа $p$, при которых существует единственное число $x$, удовлетворяющее системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \pi x = 0, \\ (5x + 25p + 19)(2p - 13 - 4x) \geqslant 0. \end{cases}$$

*Решение.* Имеем

$$\begin{cases} x = k, \\ (5x + 25p + 19)(2p - 13 - 4x) \geqslant 0, \text{ где } k \in Z. \end{cases}$$

Первое уравнение на координатной плоскости $(x\,;\,p)$ задает семейство вертикальных прямых (рис. 46). Прямые $5x + 25p + 19 = 0$ и $2p - 13 - 4x = 0$ разбивают плоскость на четыре области. Некоторые из них являются решениями неравенства системы. Конкретно какие — можно установить, взяв из каждой области по пробной точке. Та область, точка которой удовлетворяет неравенству, является его решением. (Такой прием ассоциируется с методом интервалов при решении неравенств с одной переменной.)

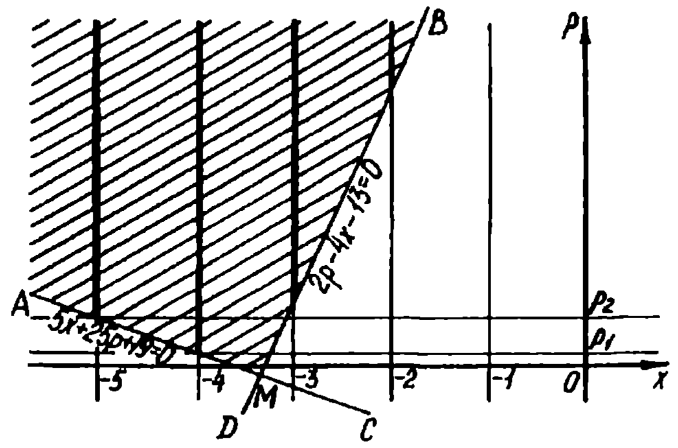



Рис. 46

Для данного неравенства решением будут две области, ограниченные углами $AMB$ и $DMC$. Поскольку по условию $p \geq 0$, то для решения задачи достаточно ограничиться множеством, отмеченным штриховкой на рис.46. Тогда исходной системе удовлетворяют все точки (и только они), лежащие на лучах и выделенные на чертеже жирными линиями.

При фиксированном $p = p_0$ число решений исходной системы равно количеству точек пересечения горизонтальной прямой $p = p_0$ с отмеченными лучами. По рисунку видно, что требование единственности решения достигается, если $p_1 \leq p < p_2$, где $p_1$ и $p_2$ — соответственно ординаты точек пересечения двух пар прямых $5x + 25p + 19 = 0$, $x = -4$ и $5x + 25p + 19 = 0$, $x = -5$. Отсюда $p_1 = \frac{1}{25}$, $p_2 = \frac{6}{25}$.

*Ответ.* $\frac{1}{25} \leq p < \frac{6}{25}$.

**П.316.(П.63).** Для каких $a$ в множестве решений неравенства $x + \sqrt{x^2-2ax} > 1$ содержится промежуток $\left[\frac{1}{4};\ 1\right]$?

*Решение.* Запишем совокупность двух систем, равносильную исходному уравнению:

$$\begin{cases} 1 - x < 0, \\ x^2 - 2ax \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 - x \geq 0, \\ x^2 - 2ax > (1-x)^2. \end{cases}$$

Поскольку в решение первой системы ни при каких значениях параметра $a$ не может входить отрезок $\left[\frac{1}{4};\ 1\right]$, то необходимые исследования проведем для второй системы.

Имеем

$$\begin{cases} x \leqslant 1\ , \\ 2x\,(a-1) < -1. \end{cases}$$

Обозначим $2(a-1) = b$. Тогда второе неравенство системы на координатной плоскости $(x;\ b)$ задает множество, показанное на рис. 47 штриховкой. Теперь с помощью рисунка легко установить, что при $b < -4$ в полученном множестве содержатся все точки, абсциссы которых пробегают все значения из промежутка $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1$. Тогда $2(a-1) < -4$

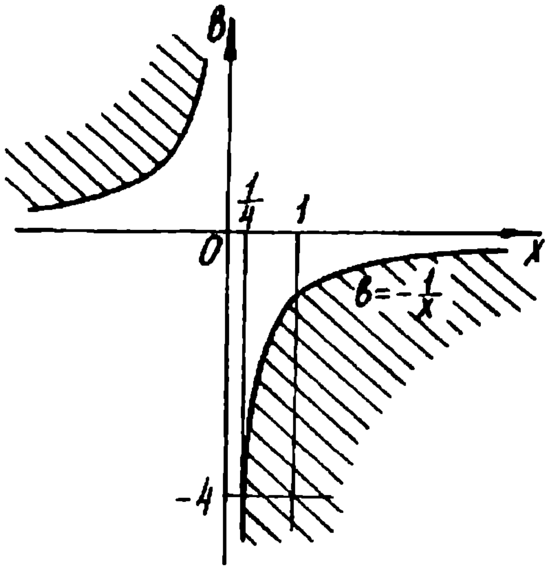


Рис. 47

Отсюда

*Ответ.* $a < -1$.

**П.317.**(МГУ). При каких значениях параметра $a$ система

$$\begin{cases} x^2 + (2-3a)x + 2a^2 - 2a < 0, \\ ax = 1 \end{cases}$$

имеет решения?

*Решение.* Имеем

$$\begin{cases} (x-a)(x-2a+2) < 0, \\ ax = 1. \end{cases}$$

Неравенство системы задает область, ограниченную углами $AKB$ и $CKD$ (рис. 48). Тогда абсциссы выделенных дуг гиперболы $ax = 1$ — решения исходной системы. Найдем абсциссы точек $M$, $N$, $P$, $Q$, решив уравнения $a^2 = 1$ и $a(2a-2) = 1$. Отсюда для перечисленных точек абсциссы

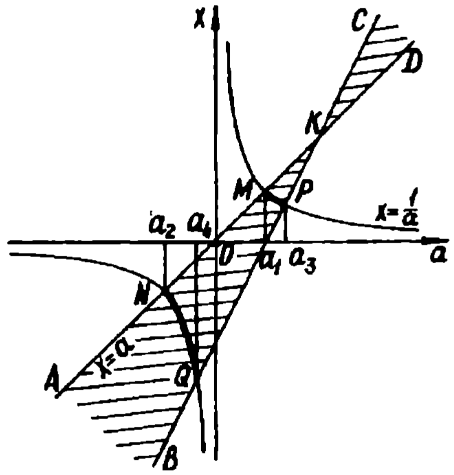


Рис. 48

соответственно равны $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $a_4 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Осталось записать

*Ответ.* $-1 < a < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ или $1 < a < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

**II.318.**(МГУ). Найти все значения $a$, при которых любое решение неравенства $ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0$ по модулю не превосходит двух.

*Решение.* Перепишем данное неравенство в таком виде:

$$(a - x)(ax + 1) < 0.$$

Графики уравнений $x = a$ и $ax = -1$ разбивают координатную плоскость $(x; a)$ на четыре области. «Методом интервалов» устанавливаем, что решением исходного неравенства будут заштрихованные области (рис. 49). Теперь, если при каком-то фиксированном значении $a_0$ прямая $a=a_0$ в пересечении с полученной областью дает лишь точки, абсциссы которых удовлетворяют условию $|x| \leqslant 2$, то $a_0$ — одно из искомых значений параметра. Тогда очевидно, что все $a$ из отрезка $AB$ составляют

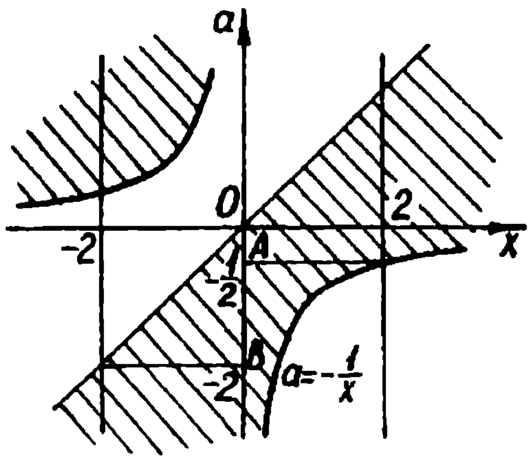



Рис. 49

*Ответ.* $-2 \leqslant a \leqslant -\frac{1}{2}$.

**II.319.**(II.64). При каких значениях $a$ множество решений неравенства $x(x - 4) + a^2(a + 4) \leqslant ax(a + 1)$ содержит не более четырех целых значений $x$?

*Решение.* Ранее нами установлено, что данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x \leqslant a^2, \\ x \geqslant a + 4 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x \geqslant a^2, \\ x \leqslant a + 4. \end{cases}$$

С помощью этой совокупности легко изобразить решения исходного неравенства (рис. 50). Проведем прямые $x = k$, где

$k \in Z$. Тогда значение $a_0$, для которого прямая $a = a_0$ пересекает прямые $x = k$ не более чем в четырех точках из отмеченного множества, будет искомым. Анализируя полученную картинку, приходим к выводу, что в данной задаче

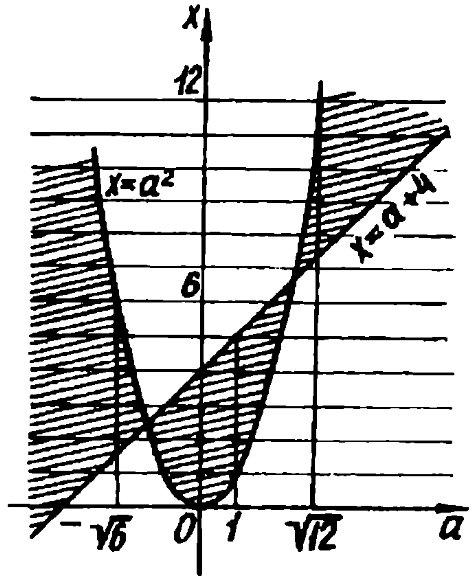


Рис. 50

*Ответ.* $-\sqrt{6} < a < 0$, или $0 < a < 1$, или $1 < a < \sqrt{12}$.

**П.320.(П.268).** Решить уравнение $|x + 3| - a|x - 1| = 4$.

*Решение.* Желание построить график данного уравнения на координатной плоскости $(x; a)$ вынуждает нас выразить $a$ через $x$, что в свою очередь влечет за собой необходимость делить на выражение $|x - 1|$. Вероятно, такая тактика решения поможет нам заметить, что $x = 1$ — корень исходного уравнения при любом $a$. Отсюда уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ a = \dfrac{|x+3| - 4}{|x - 1|}. \end{array}\right.$$

Раскрывая модули во втором уравнении, несложно построить график исходного уравнения (рис. 51). Обратим внимание читателя, что вертикальная прямая $x = 1$ является частью этого графика.

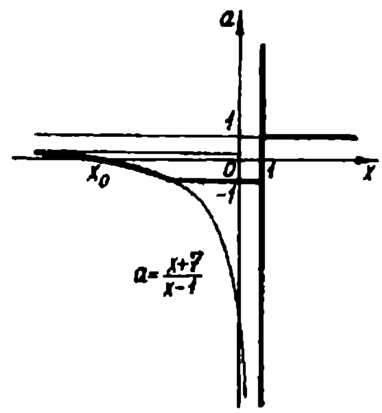


рис.51

Поскольку в настоящем примере поставлена задача решить уравнение, то необходимо показать, как для каждого фиксированного значения $a$ указать корень. Так, (см. рисунок) корень $x_0$, соответствующий значению $a_0$, можно найти, выразив $x$ через $a$ в равенстве $a = \dfrac{x+7}{x-1}$. Теперь несложно опять–таки с помощью графика записать ответ. Предлагаем читателю это сделать самостоятельно и убедиться, что он (ответ) полностью совпадает с ранее полученным.

**П.321. (П.5, П.202).** Решить неравенство $\sqrt{x+a} \geqslant x+1$.

*Решение.* Следующая совокупность двух систем равносильна данному неравенству:

$$\begin{cases} x+1<0, \\ a \geqslant -x \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ a \geqslant x^2+x+1. \end{cases}$$

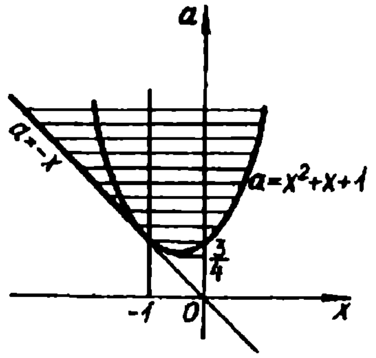



Рис. 52

Далее, при объединении графических образов каждой из этих систем следует учесть, что прямая $a=-x$ касается параболы $a=x^2+x+1$ в точке $(-1; 1)$.

Итак, на рис. 52 изображены все решения исходного неравенства. Горизонтальные прямые, пересекающие это множество, пересекают его по отрезку (за исключением одной прямой $a=\frac{3}{4}$). Очевидно абсциссы всех точек этого отрезка и будут решениями данного неравенства. Для получения ответа осталось выразить $x$ через $a$ в уравнении $x^2+x+1=a$. При $a \geqslant \frac{3}{4}$ имеем $x=\frac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$. Как и в предыдущем примере, концовку решения (запись ответа) оставим за читателем.

**П.322.** Решить неравенство $\log_{\frac{a^2+x^2}{2}} x \geqslant 1$.

*Решение.* Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \frac{x^2+a^2}{2} < 1, \\ x > 0, \\ x \leqslant \frac{x^2+a^2}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{x^2+a^2}{2} > 1, \\ x \geqslant \frac{x^2+a^2}{2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x^2 + a^2 < 2, \\ (x-1)^2 + a^2 \geqslant 1, \\ x > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 + a^2 > 2, \\ (x-1)^2 + a^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

На координатной плоскости $(x; a)$ первая система задает множество точек первого и четвертого координатных углов, одновременно лежащих внутри круга с центром $(0; 0)$ и радиуса $\sqrt{2}$ и вне круга с центром $(1; 0)$ и радиуса 1. Вторая система — множество точек, одновременно лежащих вне первого круга, но находящихся во втором. Тогда все решения исходного неравенства изображаются так, как показано на рис. 53.

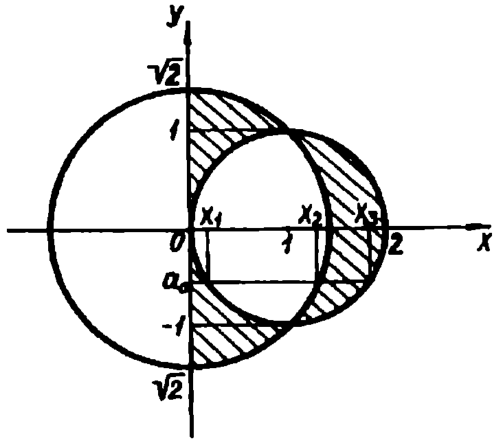


Рис. 53

Заметим, что, например, прямая $a=a_0$ (см. рисунок) пересекает окружности в точках с абсциссами $x_1=1-\sqrt{1-a^2}$, $x_2=\sqrt{2-a^2}$, $x_3=1+\sqrt{1-a^2}$. Теперь несложно «прочесть» с рисунка

*Ответ.* Если $1 \leqslant |a| < \sqrt{2}$, то $0 < x < \sqrt{2-a^2}$; если $|a| < 1$, то $0 < x \leqslant 1 - \sqrt{1-a^2}$ или $\sqrt{2-a^2} < x \leqslant 1 + \sqrt{1-a^2}$; если $|a| \geqslant \sqrt{2}$, то нет решений.

Мы надеемся, что разобранные задачи достаточно убедительно демонстрируют эффективность предложенного метода. Однако, к сожалению, сфера применения этого метода ограничена трудностями, с которыми можно столкнуться при построении графического образа. А так ли это плохо? По–видимому, нет. Ведь при таком подходе в большой степени теряется главная дидактическая ценность задач с параметрами как модели миниатюрного исследования. Впрочем, приведенные соображения адресованы учителям, а для абитуриентов вполне приемлема формула: цель оправдывает средства. Более того возьмем на себя смелость сказать, что в немалом числе вузов составители конкурсных задач с параметрами идут по пути от картинки к условию.

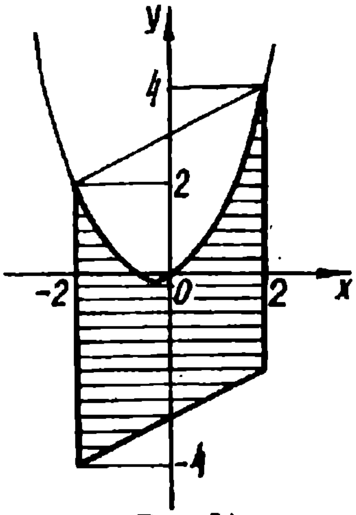



Рис. 54

Попробуем приоткрыть читателю технологию («кухню») составления задач. Рассмотрим ничем не примечательную задачу:

Изобразить на координатной плоскости $(x; y)$ решение системы неравенств

$$\begin{cases} |2x - y| + |x + y| \leqslant 6, \\ 3x^2 + 2x - 4y \geqslant 0. \end{cases}$$

По понятным причинам мы не будем описывать процесс построения, а предложим читателю готовый результат — рис. 54.

Теперь, заменив $y$ на $a$, с помощью графического образа легко составить следующие задачи.

**П.323.** При каких значениях $a$ система неравенств

$$\begin{cases} |2x - a| + |x + a| \leqslant 6, \\ 3x^2 + 2x - 4a \geqslant 0 \end{cases}$$

1) имеет решение?
2) имеет единственное решение?
3) имеет только отрицательные решения?
4) имеет только положительные решения?
5) имеет только решения, удовлетворяющие условию $|x| \geqslant 1$?
6) имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $|x| < \frac{1}{2}$?
7) имеет решения, содержащие отрезок $\left[-1; -\frac{1}{4}\right]$?
8) имеет решения, содержащие не более трех целых чисел?

Очевидно список заданий подобного рода можно продолжить.

## Упражнения

**П.324.** (ЛГУ). Найти все значения параметра $a$, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + a + 4x + 3 \leqslant 0, \\ 2a - x + 2 \geqslant 0 \end{cases}$$

удовлетворяется лишь при одном $x$.

**П.325.** (ЛГУ). Найти все значения параметра $a$, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 4x + a \leqslant 0, \\ x^2 + 2x - 3a \leqslant 0 \end{cases}$$

удовлетворяется лишь при одном $x$.

**П.326.** (МИЭМ). При каких значениях $a$ уравнение $(a + 1 - |x - 1|)(a + x^2 - 2x) = 0$ имеет ровно три корня?

**П.327.** При каких значениях $a$ уравнение $(x^2 - a)^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0$ имеет ровно три решения?

**П.328.** (МФТИ). В зависимости от параметра $a$ определить число корней уравнения

$$x^4 - 10x^3 - 2(a - 11)x^2 + 2(5a + 6)x + 2a + a^2 = 0.$$

**П.329.** (КПИ). При каких $a$ уравнение $\sin \dfrac{2\pi}{x^2 + 2x + a} = 0$ имеет ровно шесть решений?

**П.330.** (МГУ). Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $|1 - ax| = 1 + (1 - 2a)x + ax^2$ имеет только один корень.

**П.331.** (МАИ). Найти все действительные значения $a$, для каждого из которых уравнение $\sqrt{x - a}(x^2 + (1 + 2a^2)x + 2a^2) = 0$ имеет только два различных корня. Запишите эти корни.

**П.332.** (МГУ). Найти все числа $p$, при которых существует единственное число $x$, удовлетворяющее одновременно следующим условиям: $\sin \pi x = 0$; $(2x + 14p^2 - 7)(4x - 4p^2 - 15) \leqslant 0$.

**П.333.** (ЛГУ). При каких действительных значениях параметра $a$ система неравенств

$$\begin{cases} ax - 1 < 0, \\ x > 4a \end{cases}$$

не имеет решений?

**П.334.** (ЛГУ). При каких значениях параметра $a$ имеет решение система неравенств

$$\begin{cases} ax > -1, \\ x + a > 0? \end{cases}$$

**П.335.** (МГУ). При каких значениях $a$ все решения уравнения $2|2x - a| + a + 2x - 8 = 0$ удовлетворяют неравенству $1 \leqslant x \leqslant 4$?

**II.336.** (ЛГУ). При каких значениях $a$ уравнение $\log_{x^2-1}(x + a) = 1$ не имеет решений?

**II.337.** (МГТУ). Найдите все значения параметра $a$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = \dfrac{(x-1)^2}{2}, \\ \lg(5 - a - y) = \lg(a - x) \end{cases}$$

имеет решение.

**II.338.** (МГУ). При каких действительных значениях параметра $a$ существует хотя бы одно действительное $x$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2a < 0, \\ x + a^2 = 0? \end{cases}$$

**II.339.** (МГУ). При каких действительных значениях параметра $a$ существует хотя бы одно действительное $x$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} x^2 + (5a+2)x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4? \end{cases}$$

**II.340.** (МГУ). Найдите все значения параметра $q$, при каждом из которых множество решений неравенства $(x^2 - q)(q - 2x - 8) > 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leqslant 4$.

**II.341.** (МГУ). Найдите все значения $\alpha$, при которых решения системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 7 + \alpha \leqslant 0, \\ x^2 + 4x + 7 \leqslant 4\alpha \end{cases}$$

образуют на числовой оси отрезок длины 1.

**II.342.** (ЛТИ). Найти все значения $a$, при которых неравенство $\log_{(a+x)} x(a - x) < \log_{(a+x)} x$ имеет хотя бы одно решение.

**II.343.** (УрГУ). Найдите все значения $a$, при которых неравенство $\log_{2x}(3x + a) < 1$ не имеет решений.

**II.344.** (МАИ). Найдите все $a$, при которых отрезок $[3\,;\,4]$ не имеет общих точек с множеством решений неравенства

$$\left| x + a - \left| 2a - \frac{x}{2} \right| \right| < 1.$$

**П.345.** (МАИ). При каких $a$ для всех $x \in \left[2\,;\,\frac{5}{2}\right]$ выполняется неравенство $\log_{|x-a|}(x^2 + ax) \leqslant 2$?

**П.346.** Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 + a < 0, \\ 2x + a + 6 > 0. \end{cases}$$

**П.347.** Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 + a \leqslant 0, \\ x^2 - 2x - 3 + 2a > 0. \end{cases}$$

**П.348.** (МИФИ). Решить неравенство

$$2\log_4(x - a + 1) + \log_{1/2}(x - 3 - 2a) \geqslant 2\,.$$

**П.349.** (МИФИ). Решить неравенство

$$\log_{1/3}(x + a - 5) + 2\log_9(x - 2a + 1) \leqslant -2.$$

**П.350.** (МИЭМ). Для каждого значения $a$ решить уравнение $|x - a + 1| + |x - 2a| = x$.

**П.351.** Решить неравенство

$$2x^2 + x - a - 8 \leqslant |x^2 + 2x - 2a - 4|.$$

**П.352.** (МАИ). При каждом значении параметра $a > 0$ решить неравенство $\dfrac{x^2(x-2)}{x+2} + ax^2 + \dfrac{ax}{x+2} - 2ax + a^2 \geqslant 0.$

**П.353.** (МГУ). При каждом значении параметра $a$ найдите все решения неравенства $x + 2a - \sqrt{3ax + 4a^2} > 0.$

**П.354.** (КПИ). При всех значениях $a$ решить неравенство $\log_a x + \log_a(x - 2) > 1.$

**П.355.** (МИФИ). Решить уравнение $\log_{\sqrt{x}} a \log_{a^2}\left(\dfrac{a^2 - 4}{2a - x}\right) = 1.$

**П.356.** (ЛГУ). Решить неравенство $\log_{x+2}(x^2 - 2x + p) \geqslant 2$ при всех значениях параметра $p$.

**П.357.** (МАИ). Для каждого действительного $a$ решить неравенство $\log_{x^2}\sqrt{a + x} \leqslant \dfrac{1}{2}.$

**П.358.** (ЛГУ). Решить неравенство $\log_{p-x+1}(p^2 - 2px) \leqslant 2.$

**П.359.** Применив изученный графический прием, решить задачи: П.5, П.24, П.27, П.33, П.41, П.42, П.46, П.61, П.64, П.65,

**П.68, П.74, П.85, П.86, П.94, П.105, П.106, П.116, П.121, П.186, П.197, П.198, П.207, П.209, П.210, П.216, П.224, П.225, П.226, П.229, П.233, П.234, П.236, П.237, П.238, П.245, П.257, П.268, П.279, П.280, П.281, П.282, П.283.**

# Глава III

# КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

В предыдущей главе мы познакомились с основными приемами решения задач с параметрами. Более того, список предложенных задач как основного текста, так и упражнений, по-видимому, помог сформировать неплохие «решательские» навыки. Поэтому сейчас мы попытаемся применить приобретенный опыт на одном из центральных понятий школьной математики — квадратичной функции.

Наверное, читатель обратил внимание, что в некоторых ранее разобранных задачах мы не смогли «обойти» квадратичную функцию, не задействовав ее свойства. Будем рассматривать этот факт как анонс нашей дальнейшей работы.

Будучи основной в школьном курсе математики, квадратичная функция, естественно, формирует обширный класс задач с параметрами, разнообразных по форме и содержанию, но объединенных общей идеей — в основе их решения лежат свойства функции $y = ax^2 + bx + c$.

## §1. «Каркас» квадратичной функции

Фактически все важные свойства квадратичной функции определяются таблицей, хорошо знакомой по школьным учебникам (рис. *55*). Приведенная схема достаточно ясно показывает, что дискриминант $D$, старший коэффициент $a$, абсцисса $x_0$ вершины параболы конструируют «каркас», на котором строится теория квадратичной функции. В связи с этим мы решили разделить задачи настоящего параграфа на два пункта. В первом

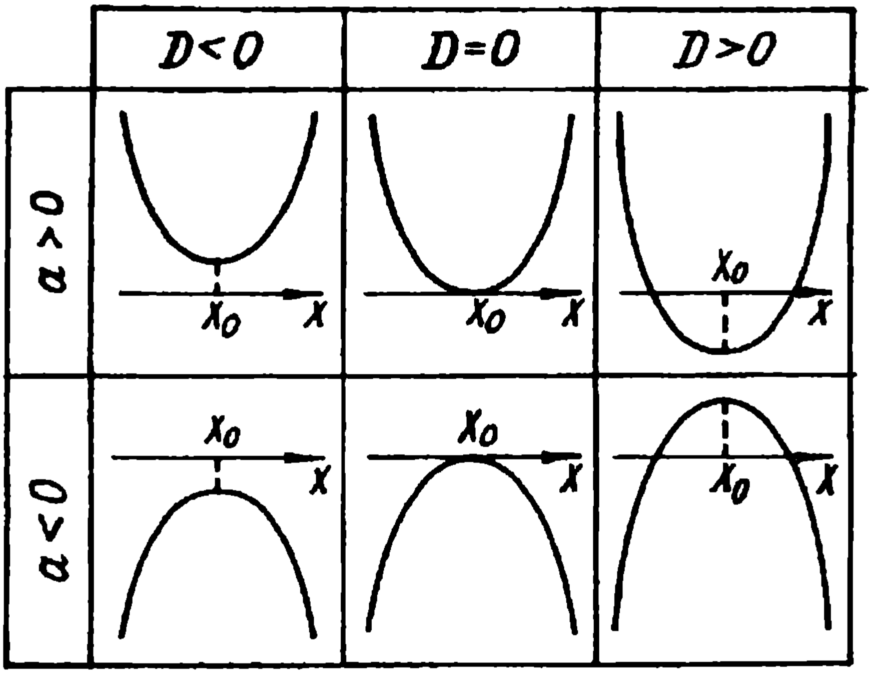



Рис. 55

рассмотрим примеры, решение которых связано с исследованием знаков $D$ и $a$, во втором — с положением вершины параболы.

Перед тем, как обратиться непосредственно к задачам, дадим одну рекомендацию. Как нам кажется, повторное обращение к примерам I.13—I.16 облегчит дальнейшую работу.

## А. Дискриминант, старший коэффициент.

III.1. (МГУ). Найти все значения параметра $\alpha$, при которых квадратичная функция $f(x) = (\cos\alpha)x^2 + (2\sin\alpha)x + \dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha}{2}$ является квадратом линейной функции.

*Решение.* Если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ равен нулю, то трехчлен можно представить в виде $a(x - x_0)^2$, где $x_0$ — корень. Однако это еще не означает, что полученное выражение является квадратом линейного двучлена. Еще необходимо потребовать: $a > 0$. Тогда для данной задачи искомые значения параметра — это решения системы

$$\begin{cases} \cos\alpha > 0, \\ 2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \cos\alpha > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = -1, \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

*Ответ.* $\alpha = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$ или $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + 2\pi k$, где $n$ и $k$ — целые.

**III.2.** (МАИ). При каких значениях параметра $a$ множество значений функции $f(x) = 8 \cdot 2^{\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}} - 1$ принадлежит промежутку $[0\ ;\ 127]$ для всех значений $x$?

*Решение.* Имеем

$$0 \leqslant 8 \cdot 2^{\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}} - 1 \leqslant 127.$$

Отсюда $-3 \leqslant \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} \leqslant 4$. Переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} 3x^2 - x(a+4) + 6 \geqslant 0, \\ 4x^2 + x(a-3) + 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Квадратные трехчлены, стоящие в левых частях неравенств системы, должны принимать неотрицательные значения при всех $x$. Поскольку их старшие коэффициенты положительны, то достаточно потребовать (см. рис. 55), чтобы их дискриминанты $D_1$ и $D_2$ были неположительными. Имеем $D_1 = (a+4)^2 - 72$, $D_2 = (a-3)^2 - 16$. Искомые значения параметра $a$ получим, решив систему

$$\begin{cases} (a+4)^2 \leqslant 72, \\ (a-3)^2 \leqslant 16. \end{cases}$$

Отсюда

*Ответ.* $-1 \leqslant a \leqslant 6\sqrt{2} - 4$.

**III.3.** (Куйбышевский ГУ). При каких значениях $m$ неравенство $mx^2 + (2-m)x + 3 - 2m \leqslant 0$ выполняется только для одного действительного значения $x$?

*Решение.* Поскольку многочлен относительно $x$ в левой части неравенства степени не выше второй, то решение естественно начать, рассмотрев случай $m = 0$. Тогда имеем $2x + 3 \leqslant 0$. Теперь понятно, что $m = 0$ не подходит.

Для $m \neq 0$ рассмотрим квадратичную функцию $y = mx^2 + (2 - m)x + 3 - 2m$. Если $m < 0$, то ветви параболы направлены вниз, и очевидно исходное неравенство не может иметь единственное решение. Тогда осталось рассмотреть случай, когда $m > 0$. Опять-таки, обращаясь к таблице (рис. 55), устанавливаем, что дискриминант $D$ соответствующего квадратного трехчлена должен принимать только нулевое значение. Отсюда ответ составит решение следующей системы:

$$\begin{cases} m > 0, \\ (m - 2)^2 - 4m(3 - 2m) = 0. \end{cases}$$

Теперь запишем

*Ответ.* $m = \dfrac{8 - 2\sqrt{7}}{9}$ или $m = \dfrac{8 + 2\sqrt{7}}{9}$.

III.4. (ЛГУ). При каких значениях $a$ все пары чисел $(x\,;\,y)$, удовлетворяющие неравенству $y > 5(x - a)^2 - \sqrt{9 - a^2}$, одновременно удовлетворяют и неравенству $y > x^2 - 3$?

*Решение.* Часто бывает удобно начать решение задачи с рассмотрения ее упрощенной модели. Так, в конкретном случае уместно поставить следующую задачу: при каком соотношении между $m$ и $n$ все решения неравенства $y > m$ (относительно $y$) одновременно являются решениями неравенства $y > n$. Ответ на этот вопрос очевиден: $n \leqslant m$.

Эти рассуждения позволяют сформулировать исходную задачу в таком виде: при каких значениях параметра $a$ неравенство $x^2 - 3 \leqslant 5(x - a)^2 - \sqrt{9 - a^2}$ выполняется при всех $x$ (знакомая задача!). Имеем: $4x^2 - 10ax + 5a^2 + 3 - \sqrt{9 - a^2} \geqslant 0$. Ясно, что условие неположительности дискриминанта квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства, и определит искомое значение параметра. Получаем $5a^2 - 12 + 4\sqrt{9 - a^2} \leqslant 0$. Не составляет большого труда решить это иррациональное неравенство и получить

*Ответ.* $a = 0$.

III.5. (МГУ). Найти наибольшее из значений параметра $a$, для которого существуют числа $x$ и $y$, удовлетворяющие уравнению $x^2 + 2y^2 + a^2 + xy - ax + ay = 3$.

*Решение.* Рассмотрим данное в условии уравнение как квадратное относительно $x$. Тогда его удобно записать в таком виде: $x^2 + x(y - a) + 2y^2 + a^2 + ay - 3 = 0$. Поскольку должен существовать $x$, удовлетворяющий этому уравнению, то естественно потребовать от дискриминанта принимать неотрицательные значения. Имеем $7y^2 + 6ay + 3a^2 - 12 \leqslant 0$. Теперь осталось найти такие $a$, при которых полученное квадратичное неравенство имеет хотя бы одно решение. Очередное обращение к знакомой таблице (рис. 55) показывает, что дискриминант соответствующего квадратного трехчлена должен принимать неотрицательные значения. Получаем $9a^2 - 21a^2 + 84 \geqslant 0$. Отсюда $|a| \leqslant \sqrt{7}$. Тогда наибольшее значение параметра $a$ равно $\sqrt{7}$.

*Ответ.* $a = \sqrt{7}$.

III.6. (МИРЭиА). При каких значениях параметра $a$ существует единственная пара чисел $(x\ ;\ y)$, удовлетворяющая соотношению $ax^2 + (3a + 2)y^2 + 4axy - 2ax + (4 - 6a)y + 2 = 0$?

*Решение.* Воспользуемся идеей решения предыдущей задачи: рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно $x$. Однако, чтобы этот шаг стал законным, необходимо предварительно рассмотреть случай, когда $a = 0$. Имеем $2y^2 + 4y + 2 = 0$. Следовательно, при $a = 0$ исходное уравнение имеет бесконечно много решений вида $(x\ ;\ -1)$, что не подходит.

Если $a \neq 0$, то дискриминант рассматриваемого квадратного уравнения равен $4a(a - 2)(y + 1)^2$. При $a(a - 2) \geqslant 0$ это выражение принимает неотрицательные значения при любом $y$, а значит, исходное уравнение имеет опять-таки бесконечно много решений. При $a(a - 2) < 0$ дискриминант становится неположительным, и существование корней исходного уравнения (относительно $x$) обеспечивается лишь условием $y = -1$. В этом случае дискриминант равен нулю, и рассматриваемое уравнение имеет единственное решение $(3\ ;\ -1)$.

*Ответ.* $0 < a < 2$.

III.7. (II.135.) Найти все значения параметра $a$, при которых неравенство $\left|3\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + \cos^2 x + a\right| \leqslant 3$ выполняется при любых значениях $x$.

*Решение.* Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} a\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + (a - 2)\cos^2 x \leqslant 0, \\ (a + 6)\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + (a + 4)\cos^2 x \geqslant 0. \end{cases}$$

Поскольку левые части неравенств — однородные многочлены относительно $\sin x$ и $\cos x$, то естественно рассмотреть случай $\cos x = 0$. Получим $-6 \leqslant a \leqslant 0$. Следовательно, искомые значения параметра содержатся в отрезке $[-6; 0]$.

Далее, рассмотрим случай, когда $\cos x \neq 0$. Имеем

$$\begin{cases} a\operatorname{tg}^2 x + 2a\operatorname{tg} x + a - 2 \leqslant 0, \\ (a+6)\operatorname{tg}^2 x + 2a\operatorname{tg} x + a + 4 \geqslant 0. \end{cases}$$

Теперь удобно воспользоваться заменой $\operatorname{tg} x = t$. Запишем

$$\begin{cases} at^2 + 2at + a - 2 \leqslant 0, \\ (a+6)\,t^2 + 2at + a + 4 \geqslant 0. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой устанавливаем, что из значений $a = 0$ и $a = -6$ требованию задачи удовлетворяет лишь первое.

Для $a \neq 0$ и $a \neq -6$ имеем систему двух квадратичных неравенств. Решением каждого из этих неравенств должно являться множество всех действительных чисел. Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} a < 0, \\ a^2 - a(a-2) \leqslant 0, \\ a + 6 > 0, \\ a^2 - (a+6)(a+4) \leqslant 0, \end{cases}$$

решением которой будет промежуток $-\frac{12}{5} \leqslant a < 0$.

*Ответ.* $-\frac{12}{5} \leqslant a \leqslant 0$.

**III.8.** Найти все пары $a$ и $b$, при которых уравнение $x^2 + b^2x - 8b = 0$ является следствием уравнения $x^2 - ax + a = 0$.

*Решение.* Для квадратного уравнения $x^2 - ax + a = 0$ рассмотрим три возможных значения его дискриминанта. Если $D < 0$, т.е. $a^2 - 4a < 0$, то это уравнение корней не имеет. Тогда любое уравнение с одной переменной, в частности уравнение из условия, является его следствием. Если $D = 0$, т.е. $a = 0$ или $a = 4$, то рассматриваемое уравнение при этих значениях параметра имеет соответственно корни $x = 0$, $x = 2$. Первый из этих корней удовлетворяет уравнению $x^2 + b^2x - 8b = 0$ при $b = 0$, второй — при $b = 2 \pm \sqrt{2}$. Если $D > 0$, т.е. $a^2 - 4a > 0$, то два корня уравнения $x^2 - ax + a = 0$ должны являться корнями уравнения $x^2 + b^2x - 8b = 0$ . А это возможно тогда и только тогда, когда у этих уравнений равны соответственные коэффициенты. Имеем

$$\begin{cases} -a = b^2, \\ a = -8b. \end{cases}$$

Отсюда с учетом $a^2 - 4a > 0$ получаем $a = -64$, $b = 8$. Теперь осталось собрать полученные результаты в

*Ответ.* $0 < a < 4$, $b$ — любое; $a = 0$, $b = 0$; $a = 4$, $b = 2 \pm \sqrt{2}$; $a = -64$, $b = 8$.

**III.9.** (МАИ). На координатной плоскости изобразить множество пар $(a\,;b)$, для каждой из которых уравнение $\left(x^2 - (a+b)x + 1\right)\left(x^2 - (a-b)x + 1\right) = 0$, имеет четыре различных действительных корня.

*Решение.* $D_1$ и $D_2$ — дискриминанты квадратных трехчленов, стоящих соответственно в первой и второй скобках. Для выполнения требования задачи необходимо

$$\begin{cases} D_1 > 0, \\ D_2 > 0, \end{cases} \text{т.е.} \begin{cases} |a+b| > 2, \\ |a-b| > 2. \end{cases}$$

На координатной плоскости $(a\,;b)$ несложно изобразить решение последней системы (рис. 56). Однако ошибочно считать полученное множество точек искомым ответом. Мы не будем сразу указывать на ошибку, хотя, вероятно, читатель сам может это сделать.

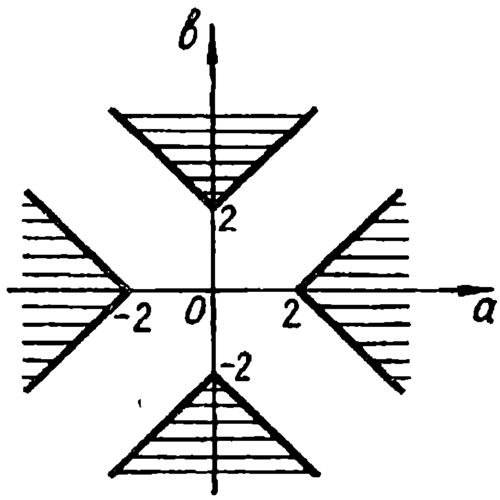


Рис. 56

Предлагаем еще раз вернуться к задачам **II.35.** и **II.246.** Решение этих двух примеров и настоящего проходит по такой схеме. Определяется совокупность, равносильная данному уравнению (системе). Затем отдельно находится число решений каждого уравнения (системы) совокупности. Вероятность возникновения ошибки возрастает на последнем этапе, когда определяется общее число решений исходного уравнения (системы). Причина — «механическое» сложение ранее полученных результатов. Действительно, ведь нет никаких гарантий, что при определенных значениях параметров решения не совпадут.

Поскольку произведение корней квадратных трехчленов равно 1 (напомним, что существование этих корней определено условиями $D_1 > 0$ и $D_2 > 0$), то если один из корней первого трехчлена совпадет с каким-то корнем второго, тогда обязательно совпадут и оставшиеся корни. Таким образом, совпадение каких-либо корней влечет за собой необходимость выполнения равенства $a - b = a + b$, т.е. $b = 0$. Следовательно, из полученного множества точек (рис.56) надо исключить лучи $(-\infty; -2)$ и $(2; \infty)$ оси абсцисс.

**III.10.** (МГУ). При каких $a$ система

$$\begin{cases} 2y - x + xy = 0, \\ (x + 2a - 4)y - ax + 5 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение ?

*Решение.* Очевидно ни при каких $y$ пара $(-2; y)$ не является решением данной системы. Тогда из первого уравнения системы получаем $y = \dfrac{x}{x+2}$. С учетом последнего, второе уравнение системы становится таким: $(1 - a)x^2 + x + 10 = 0$. Это уравнение имеет единственное решение, если $a - 1 = 0$, или $D = 40a - 39 = 0$, т.е. при $a = 1$ или $a = \dfrac{39}{40}$.

Но эти найденные значения параметра $a$ не исчерпывают ответ задачи. Поучительный момент заключается в том, что требованию задачи удовлетворяет и тот случай, когда рассматриваемое квадратное уравнение имеет два (!) различных корня. Однако один из них обязательно должен быть равен $-2$. (см. также I.16).

Подставив $x = -2$ в квадратное уравнение, получим $a = 3$. Решение будет полностью «чистым», если мы убедимся, что при $a = 3$ уравнение имеет два корня, из которых только один равен $-2$.

*Ответ.* $a = 1$, или $a = \dfrac{39}{40}$, или $a = 3$.

**III.11.** (МАИ). При каких $a$ система

$$\begin{cases} x^2 - 2x - y^2 = 0, \\ y = ax - a + b \end{cases}$$

имеет решение при любых $b$?

*Решение.* Подставляя $y = ax - a + b$ в первое уравнение, получаем $x^2 - 2x - (ax - a + b)^2 = 0$. Отсюда $(1 - a^2)x^2 - 2(1 - a^2 + ab)x - (a - b)^2 = 0$. Сразу заметим, что если $1 - a^2 = 0$, то последнее уравнение имеет решение не при любых $b$. (В этом можно убедиться, взяв, например, $b = 0$.) Следовательно, дальнейшее решение поведем для случая $|a| \neq 1$. Тогда полученное уравнение — квадратное. Легко найти его дискриминант. Имеем $D = b^2 - a^2 + 1$. Осталось выяснить, при каких $a$ неравенство $b^2 - a^2 + 1 \geqslant 0$ выполняется при любых $b$. Запишем $a^2 - 1 \leqslant b^2$. Это неравенство справедливо при любом $b$, если $a^2 - 1 \leqslant 0$, т.е. $|a| \leqslant 1$. Поскольку $|a| = 1$ не подходит, то получаем

*Ответ.* $|a| < 1$.

Мы неоднократно в той или иной форме подчеркивали, что функция вида $y = ax^2 + bx + c$ «почти» квадратичная, т.е. при $a \neq 0$ — квадратичная, при $a = 0$ — линейная. Однако определить вид этой функции можно иначе, не выясняя значения старшего коэффициента. Так, легко показать (графически это очевидно), что если рассматриваемая функция принимает какое-либо значение $y_1$ в трех и более точках, то она линейная, причем $a = b = 0$, $c = y_1$. Пользуясь этими соображениями, решим следующие две задачи.

III.12. (МИЭМ). При каких значениях $a$, $b$, $c$ равенство

$$a\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + b\sin 2\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + c\sin(x + \pi) = 0$$

выполняется при всех $x \in \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{3}\right]$?

*Решение.* Легко получить из данного уравнения следующее: $\sin x(4a\cos^2 x - 2b\cos x - a - c) = 0$. Поскольку $x \in \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{3}\right]$, то $\sin x \neq 0$, и уравнение $4a\cos^2 x - 2b\cos x - a - c = 0$ равносильно исходному на множестве $\left[\frac{1}{8}; \frac{1}{3}\right]$.

Рассмотрим функцию $f(t) = 4at^2 - 2bt - a - c$, где $t = \cos x$. Из условия задачи следует, что функция $f$ должна принимать нулевые значения при всех $t \in \left[\cos\frac{1}{3}\,;\,\cos\frac{1}{8}\right]$, т.е. в бесконечном числе точек. А это возможно лишь тогда, когда $4a = -2b = -a - c = 0$. Отсюда

*Ответ.* $a = b = c = 0$.

**III.13.** (МГУ). Найти все пары значений $a$ и $b$, для которых система

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x + y) = x - y + a, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений $(x\,;\,y)$.

*Решение.* Первое уравнение системы равносильно уравнению $(x + y - 1)(x - y + a) = 0$. Отсюда данная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} y = x + a, \\ (b + 2)x^2 + a(b + 2)x + a^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} y = 1 - x, \\ (b - 2)x^2 - (b - 2)x = 0. \end{cases}$$

Если вторые уравнения этих систем первой или второй степени, то очевидно исходная система не может иметь более четырех решений. Следовательно, для того чтобы она имела не меньше пяти решений, достаточно потребовать: $b + 2 = a(b + 2) = = a^2 - 1 = 0$ или $b - 2 = 0$. Отсюда

*Ответ.* $a = 1$ и $b = -2$; $a = -1$ и $b = -2$; $a$ — любое и $b = 2$.

## Упражнения

**III.14.** (МГУ). Найти все значения параметра $\alpha$, при которых квадратичная функция

$$f(x) = (\sin\alpha)x^2 + (2\cos\alpha)\,x + \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{2}$$

является квадратом линейной функции.

**III.15.** (МГТУ). Найдите все значения параметра $a$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y + 1 = 0, \\ x^2 - y^2 + (a + 1)x + (a - 1)y + a = 0 \end{cases}$$

имеет решение.

III.16. (РПИ). Найдите все значения $a$, для которых неравенство $(a-3)x^2-2ax+3a-6>0$ выполняется при всех значениях $x$.

III.17. (РПИ). Найдите все значения $a$, для которых неравенство $(a+4)x^2-2ax+2a-6<0$ выполняется при всех значениях $x$.

III.18. (МЭСИ). При каких $a$ неравенство $(a+2)x^2-(2a+4)x+7a+3>0$ выполняется при всех $x$?

III.19. При каких значениях $a$ неравенство $\left|\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}\right|<3$ выполняется при любых значениях $x$?

III.20. (МАИ). Найти все целые значения $a$, при которых неравенство $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-(5a-6)x+4a^2}\leqslant 1$ выполняется при любом действительном значении $x$.

III.21. Найти все значения $p$, при которых выражение $\lg((p-1)x^2+2px+3p-2)$ определено при любых $x$.

III.22. (НГУ). При каких значениях параметра $a$ для любого действительного числа $x$ выполняется неравенство $\log_{a^2-2}((a^2-1)x^2+2x+2)>1$?

III.23. (ЛЭТИ). Даны два многочлена: $f(x)=ax^2+ax+1$, $g(x)=x^2+2ax+a$. При каких значениях $a$ один из данных многочленов имеет корень, а другой нет?

III.24. (МГУ). Найдите все значения $a$, при каждом из которых существует единственная тройка чисел $(x;\ y;\ z)$, удовлетворяющая равенствам $x+y+z=x^2+4y^2$ и $x+2y+3z=a$.

III.25. (МГУ). Найти наименьшее $a$, при котором существует решение уравнения $2x^2+y^2+ax-ay-xy+a^2=1$.

III.26. (МИРЭиА). При каких значениях параметра $a$ существует единственная пара чисел $(x\ ;\ y)$, удовлетворяющая соотношению $x^2+(1-a)y^2-2xy(1-a)+2x(1-2a)+2y(a-1)+1=0$?

III.27. (МАИ). На координатной плоскости изобразить множество пар $(a\ ;\ b)$, для каждой из которых уравнение $(x^2+2x+(a-b)^2)(x^2-2x+(2b-a)^2)=0$ не имеет действительных корней.

III.28. (МАИ). На координатной плоскости изобразить множество пар $(a; b)$, для каждой из которых уравнение $(x^2-(a+b)x+1)(x^2-(a-b)x+1)=0$ имеет ровно два действительных корня.

III.29. (МГУ). Найти $a$, при которых система

$$\begin{cases} 3y+2+xy=0, \\ x(y+1-a)+y(2a-3)+a+3=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

III.30. (МГУ). Найти $a$, при которых система

$$\begin{cases} axy+x-y+\dfrac{3}{2}=0, \\ x+2y+xy+1=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

III.31. Найти все такие $q$, что для любого $p$ уравнение $x^2+px+q=0$ имеет хотя бы один корень.

III.32. При каких $a$ система уравнений

$$\begin{cases} x^2-4y^2=1, \\ ax+y=b \end{cases}$$

имеет действительные решения при любых $b$?

III.33. (МАИ). Найти $b$, при которых система

$$\begin{cases} x^2-2x+y^2=0, \\ y-ax+ab=0 \end{cases}$$

имеет решения для любых $a$.

III.34. (МИЭМ). При каких значениях $a$, $b$, $c$, $d$ равенство $a\cos 2x=b\cos^2 x+c\cos x+d$ является тождеством?

III.35. (МГУ). Найти $a$ и $b$, при которых система

$$\begin{cases} bx(2x-y)+(y-1)(2x-y)=bx+y-1, \\ 4x^2+y^2+axy=1 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений.

III.36. (МГУ). Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых неравенство $25y^2+\frac{1}{100}\geqslant x-axy+y-25x^2$ выполняется для любых пар чисел $(x; y)$ таких, что $|x|=|y|$.

## Б. Вершина параболы.

Перейдем непосредственно к задачам.

**III.37.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 2 - ax - 3x^2$$

на отрезке $[-1 ; 1]$.

*Решение.* Данная функция возрастает на луче $(-\infty ; x_0]$ и убывает на луче $[x_0 ; \infty)$, где $x_0 = -\frac{a}{6}$ — абсцисса вершины параболы. Этих соображений вполне достаточно для выяснения вопроса. Скорее всего рис. 57 также поможет в записи ответа. При этом заметим, что этот рисунок во многом схематичен: ведь в данной задаче результат фактически зависит от положения абсциссы $x_0$ относительно отрезка $[-1; 1]$, а не от знака дискриминанта (чертеж сделан для положительного дискриминанта).

Если $1 < -\frac{a}{6}$, т.е. $a < -6$, то $\max\limits_{[-1;1]} y = y(1) = -a - 1$, $\min\limits_{[-1;1]} y = y(-1) = a - 1$ (рис. 57, *а*).

Если $0 < -\frac{a}{6} \leqslant 1$, т.е. $-6 \leqslant a < 0$, то $\max\limits_{[-1;1]} y = y(x_0) = 2 + \frac{a^2}{12}$, $\min\limits_{[-1;1]} y = y(-1) = a - 1$ (рис. 57, *б*).

Если $-1 < -\frac{a}{6} \leqslant 0$, т.е. $0 \leqslant a < 6$, то $\max\limits_{[-1;1]} y = y(x_0) = 2 + \frac{a^2}{12}$, $\min\limits_{[-1;1]} y = y(1) = -a - 1$ (рис. 57, *в*).

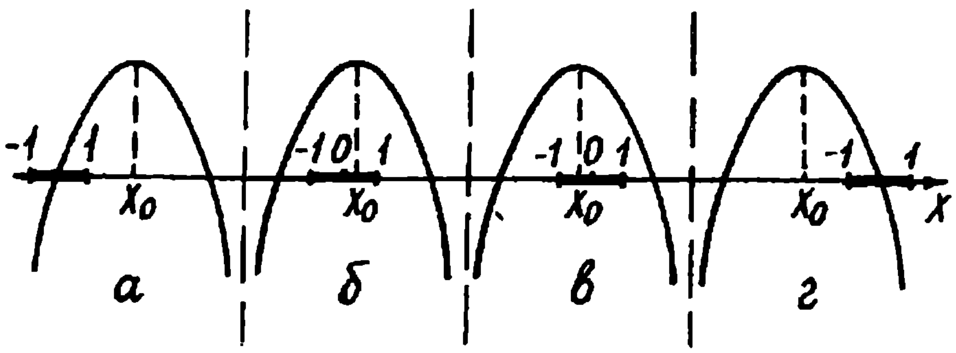



Рис. 57

Если $-\frac{a}{6} \leq -1$, т.е. $a \geq 6$, то $\max\limits_{[-1;1]} y = y(-1) = a - 1$, $\min\limits_{[-1;1]} y = y(1) = -a - 1$ (рис. 57, *г*).

**III.38.** (МАИ). **При каких значениях параметра *a* наименьшее значение функции $f(x) = 4^x - 2^{3+x} \cdot a + 7a^2$ на отрезке $[-2; 0]$ отрицательно?**

*Решение.* Поскольку $-2 \leq x \leq 0$, то $\frac{1}{4} \leq 2^x \leq 1$. Тогда искомыми значениями параметра будут те, при которых наименьшее значение функции $f(t) = t^2 - 8at + 7a^2$ на отрезке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ отрицательно. Обратимся к графическому образу (рис. 58), еще раз подчеркнув, что в подобных задачах знак дискриминанта не имеет значения.

Для каждого из трех случаев а), б), в) наименьшее значение функции достигается соответственно в точках $x = 1$, $x = 4a$, $x = \frac{1}{4}$. Тогда ответ на вопрос задачи даст решение следующей совокупности трех систем:

$$\begin{cases} 1 \leq 4a, \\ f(1) < 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{1}{4} < 4a < 1, \\ f(4a) < 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4a \leq \frac{1}{4}, \\ f\left(\frac{1}{4}\right) < 0. \end{cases}$$

Получаем

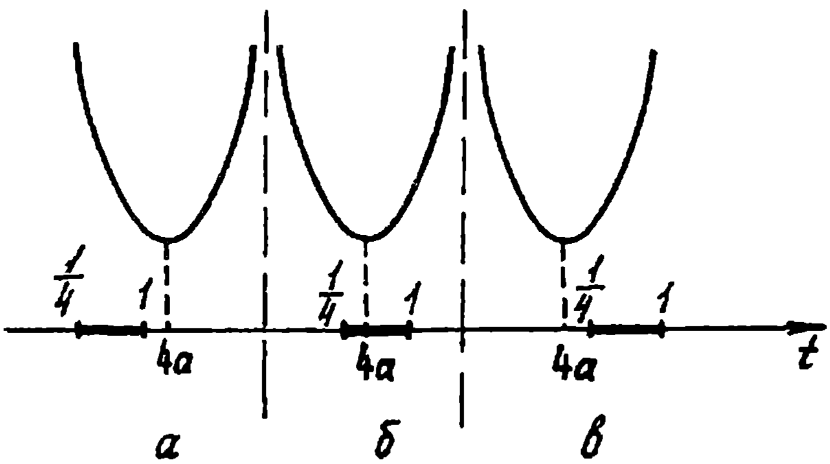



Рис. 58

$$\begin{cases} a \geq \frac{1}{4}, \\ 1 - 8a + 7a^2 < 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{1}{16} < a < \frac{1}{4}, \\ 16a^2 - 32a^2 + 7a^2 < 0, \end{cases}$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} a \leq \frac{1}{16}, \\ \frac{1}{16} - 2a + 7a^2 < 0. \end{cases}$$

Отсюда

*Ответ.* $\frac{1}{28} < a < 1$.

**III.39.** (ЛГУ). Действительные числа $x$, $y$, $a$ таковы, что

$$\begin{cases} x + y = 2a - 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3. \end{cases}$$

При каком значении $a$ произведение $xy$ принимает наименьшее значение?

*Решение.* Имеем

$$xy = \frac{(x+y)^2 - (x^2+y^2)}{2} = \frac{(2a-1)^2 - (a^2 + 2a - 3)}{2} = \frac{3}{2}a^2 - 3a + 2.$$

Рассмотрим функцию $f(a) = \frac{3}{2}a^2 - 3a + 2$. Очевидно при $a = 1$ эта функция принимает наименьшее значение. С первого взгляда представляется очень соблазнительным считать ответом $a = 1$. Однако при $a = 1$ исходная система принимает вид

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

и очевидно решений не имеет. Этот факт не случаен. Ведь мы не выяснили, при каких $a$ исходная система имеет решения. Сделаем это.

Подставив $y = 2a - 1 - x$ во второе уравнение системы, получим квадратное уравнение $2x^2 + 2x(1 - 2a) + 3a^2 - 6a + 4 = 0$. Его дискриминант $D = -2a^2 + 8a - 7$. Решением неравенства $D \geq 0$ будет промежуток $\left[2 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Именно при всех $a$ из этого отрезка (и только этих) исходная система имеет решения.

Таким образом, осталось выяснить, при каких $a$ функция $f(a) = \frac{3}{2}a^2 - 3a + 2$ принимает наименьшее значение на отрезке $\left[2 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Имеем: абсцисса вершины параболы $a = 1 < 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, при $a = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ функция $f$ на указанном отрезке принимает наименьшее значение.

*Ответ.* $a = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**III.40.** (МФТИ). Найти все значения параметра $a$, при которых вершины двух парабол $f(x) = 4x^2 + 8ax - a$ и $g(x) = 4ax^2 - 8x + a - 2$ лежат по одну сторону от прямой $y = -5$.

*Решение.* Выясним, при каких $a$ ординаты вершин данных парабол или одновременно больше $-5$, или одновременно меньше $-5$.

Имеем $x_1 = -a$ — абсцисса вершины параболы $f$, $f(x_1) = -4a^2 - a$; $x_2 = \frac{1}{a}$ — абсцисса вершины параболы $g$, $g(x_2) = -\frac{4}{a} + a - 2$. Очевидно требуемое положение вершин парабол обеспечивается всеми (и только этими) значениями параметра $a$, являющимися решениями следующей совокупности двух систем:

$$\begin{cases} -a - 4a^2 > -5, \\ a - 2 - \frac{4}{a} > -5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -a - 4a^2 < -5, \\ a - 2 - \frac{4}{a} < -5. \end{cases}$$

Отметим, что нет необходимости решать эту совокупность «в лоб». Достаточно заметить, что она равносильна неравенству $(-a - 4a^2 + 5)\left(a - 2 - \frac{4}{a} + 5\right) > 0$. Решив это неравенство, получим

*Ответ.* $a < -4$ или $-\frac{5}{4} < a < 0$.

**III.41.** (НГУ). Найдите точку с наибольшей ординатой, удовлетворяющую системе неравенств

$$\begin{cases} y - 2x \geq 0, \\ -x^2 + 2ax - a^2 + a + 1 - y \geq 0. \end{cases}$$

*Решение.* Поскольку второе неравенство системы задает множество точек, лежащих «под» параболой $y = -x^2 + 2ax - a^2 + a + 1$, включая и саму параболу, то поиск точки с наибольшей ординатой достаточно провести для системы

$$\begin{cases} y - 2x \geqslant 0, \\ y = -x^2 + 2ax - a^2 + a + 1. \end{cases}$$

Решения неравенства этой системы — полуплоскость с границей $y = 2x$ (рис. 59). Тогда, если вершина параболы лежит не ниже прямой $y = 2x$, то искомая точка и есть вершина параболы, а если ниже, то прямая $y = 2x$ должна пересекать «возрастающую» ветвь параболы (или касаться ее) (рис. 60). Значит, в этом случае искомой точкой будет та, у которой абсцисса является наибольшим корнем уравнения $2x = -x^2 + 2ax - a^2 + a + 1$ (или просто корнем, если он один).

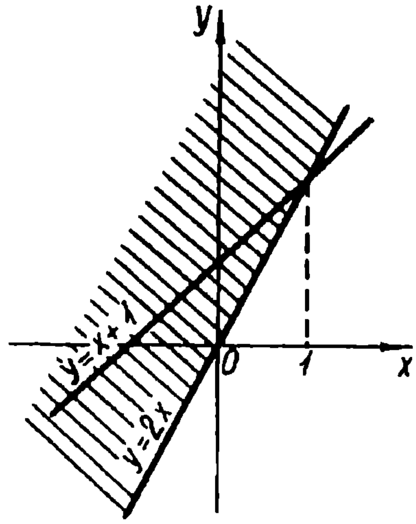


Рис. 59

Рассматриваемая парабола имеет следующие координаты вершины: $x = a$, $y = a + 1$. Следовательно, ордината вершины всегда на единицу больше абсциссы, а это в свою очередь означает, что при изменении $a$ от $-\infty$ до $+\infty$ вершина параболы пробегает все точки прямой $y = x + 1$. Отсюда в тех точках прямой $y = x + 1$, у которых абсцисса не больше единицы, вершина параболы лежит не ниже прямой $y = 2x$ (см. рис. 59). Следовательно, если $a \leqslant 1$, то искомой будет точка $(a\,;\,a + 1)$. Если $a > 1$, то, как мы отмечали выше, необходимо найти корни уравнения $x^2 - 2(a - 1)x + a^2 - a - 1 = 0$. Имеем $D = 4(2 - a)$. Отсюда при $a > 2$ корней нет, при $a \leqslant 2$ наибольшим очевидно будет корень $x = a - 1 + \sqrt{2 - a}$.

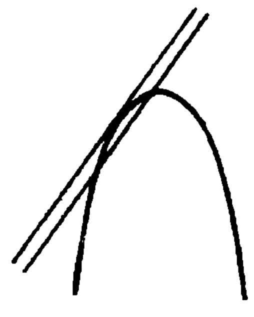


рис.60

*Ответ.* Если $a \leqslant 1$, то $x = a$, $y = a + 1$; если $1 < a \leqslant 2$ то

$x = a - 1 + \sqrt{2 - a}, y = 2(a - 1) + 2\sqrt{2 - a}.$

## Упражнения

III.42. (МАИ). При каких значениях $a$ наибольшее значение трехчлена $ax^2 + 4x\sqrt{24 - 2a - a^2}$ меньше четырех?

III.43. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^2 - 2ax + 1$ на отрезке $[-1; 1]$.

III.44. (МАИ). Найти наибольшее значение квадратного трехчлена $1 - (a - 2)x - x^2$ на отрезке $[2a - 3; 2a + 1]$.

III.45. (МИЭМ). При каких значениях $a$ наименьшее значение функции $y = x^2 + (a + 4)x + 2a + 3$ на отрезке $[0; 2]$ равно $-4$?

III.46. (МГУ). Для каких значений параметра $a$ наименьшее значение функции $y = x^2 - (a + 2)x + a^2$ на отрезке $[-1; 1]$ равно 4?

III.47. (НГУ). Пусть $x$ пробегает множество решений неравенства $x^4 - 4x^2 + 3 \leq 0$. Каково при этом максимальное значение выражения $1 + ax - x^2$?

III.48. (МАИ). При каких действительных значениях $a$ наибольшее значение функции $f(x) = -\left(\frac{1}{9}\right)^x + \left(\frac{7}{2}\right)3^{-x} - 3a^2$ на отрезке $[-1; 0]$ отрицательно?

III.49. (МАИ). При каких действительных значениях параметра $a$ функция $f(x) = 4^{-x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \cdot \frac{5a}{2} + \frac{a^2 + 12}{6}$ принимает во всех точках отрезка $[-1; 1]$ значения больше 2?

III.50. (ЛГУ). Действительные числа $x$, $y$, $a$ таковы, что

$$\begin{cases} x + y = a - 1, \\ xy = a^2 - 7a + 14. \end{cases}$$

При каких $a$ сумма $x^2 + y^2$ принимает наибольшее значение?

III.51. (ЛГУ). Числа $x$, $y$, $a$ таковы, что

$$\begin{cases} x + y = a - 1, \\ x^2 + y^2 = 5a^2 - 3a + 0{,}5. \end{cases}$$

При каком $a$ произведение $xy$ принимает наибольшее значение?

**III.52.** (МФТИ). Найти все значения параметра $a$, при которых вершины двух парабол $y = x^2 - 2(a + 1)x + 1$ и $y = ax^2 - x + a$ лежат по разные стороны от прямой $y = \frac{3}{4}$.

**III.53.** (МФТИ). Найдите все значения $a$, при которых вершины парабол $y = x^2 - 2ax$ и $y = x^2 - (a + 3)x + 1$ лежат по разные стороны от прямой $y = 2x$.

**III.54.** Найти $a$, при котором наибольшее значение функции $y = |-2x^2 + x + a|$ на промежутке $0 \leq x \leq 1$ является наименьшим.

## §2. Корни квадратичной функции

### А. Теорема Виета.

В настоящем параграфе, говоря о корнях квадратичной функции, представляется естественным в первую очередь обратиться к хорошо знакомой школьникам теореме Виета. По-видимому, нет необходимости отводить здесь место каким-либо теоретическим рассуждениям. Перейдем непосредственно к задачам, которые и раскроют возможности применения этой теоремы.

**III.55.** При каких значениях параметра $a$ множество решений неравенства $x^2 + ax - 1 < 0$ будет интервал длины $5$?

*Решение.* Заметим, что при любых значениях параметра $a$ дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства, положителен. Пусть $x_1$ и $x_2$— корни этого квадратного трехчлена. По условию должно иметь место равенство $|x_1 - x_2| = 5$.

Имеем $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$. Применяя теорему Виета, получим $|x_1 - x_2| = \sqrt{a^2 + 4}$. Тогда $\sqrt{a^2 + 4} = 5$. Отсюда $|a| = \sqrt{21}$.

*Ответ.* $a = \sqrt{21}$ или $a = -\sqrt{21}$.

**III.56.** При каких значениях параметра $a$ сумма квадратов корней уравнения $4x^2 - 28x + a = 0$ равна $22{,}5$?

*Решение.* Вначале предложим читателю «решение», с которым нам не раз приходилось встречаться.

Имеем $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 49 - \frac{a}{2}$. Поскольку $x_1^2 + x_2^2 = 22{,}5$, то получаем «ответ» $a = 53$. Однако при найденном значении $a$ исходное уравнение корней не имеет. В этом решении мы столкнулись с одной из «популярнейших» ошибок, связанной с применением теоремы Виета: вести речь о корнях, предварительно не выяснив, существуют они или нет. Так, в данном примере, в первую очередь необходимо было установить, что лишь при $a \leqslant 49$ исходное уравнение имеет корни. Только после этого можно обратиться к выкладкам, приведенным выше.

*Ответ.* Таких $a$ не существует.

III.57. (УрГУ). При каком значении параметра $a$ сумма квадратов корней уравнения $x^2 + x\sqrt{a^2 - 4a} - a - 2 = 0$ принимает наименьшее значение?

*Решение.* Найдем дискриминант данного квадратного уравнения. Имеем $D = a^2 + 8$. Здесь важно не сделать ошибочный вывод о том, что уравнение имеет два корня при любом $a$. Оно действительно имеет два корня при любом, но допустимом $a$, т.е. при $a \leqslant 0$ или $a \geqslant 4$.

Используя теорему Виета, запишем $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\sqrt{a^2 - 4a}\right)^2 - 2(-a - 2) = a^2 - 2a + 4$.

Таким образом, для получения ответа осталось найти наименьшее значение квадратичной функции $f(a) = a^2 - 2a + 4$ на множестве $(-\infty; 0] \cup [4; \infty)$. Поскольку при $a \leqslant 0$ $f(a) \geqslant f(0) = 4$, а при $a \geqslant 4$ $f(a) \geqslant f(4) = 12$, то функция $f$ на указанном множестве принимает наименьшее значение в точке $a = 0$.

*Ответ.* $a = 0$.

III.58. (МАИ). При каких $a$ корни $x_1$ и $x_2$ уравнения $(a^2 - 2a + 2)x^2 + 2(a - 1)ax - 3a^2 = 0$ удовлетворяют неравенству $x_1x_2 < |ax_1| - |ax_2|$ ?

*Решение.* Обозначим левую часть данного уравнения через $f(x)$. Условие существования его корней можно получить без вычисления дискриминанта. Так, старший коэффициент квадратного трехчлена $f$ положителен при любых $a$, $f(0) = -3a^2 \leqslant 0$, и, следовательно, уравнение $f(x) = 0$ имеет корни всегда. Этот факт совершенно очевиден с графической точки зрения: ветви параболы $y = f(x)$ направлены вверх и существуют точки, в которых функция принимает неположительные значения. Причем, если $a \neq 0$, то уравнение имеет два различных корня.

Нетрудно догадаться, что возникла необходимость разобрать отдельно случай, когда $a = 0$. При таком $a$ уравнение имеет один двойной корень $x = 0$. Очевидно полученные значения не удовлетворяют исходному неравенству. Если $a \neq 0$, то имеем $x_1x_2 = \dfrac{-3a^2}{a^2 - 2a + 2} < 0$, т.е. корни уравнения разных знаков. (Обратим внимание читателя на то, что с помощью теоремы

Виета легко определяются знаки корней. Этим мы не раз будем пользоваться в последующих задачах.) Отсюда $|x_1| - |x_2| = $ $= x_1 + x_2 = \dfrac{-2(a-1)a}{a^2 - 2a + 2}$ или $|x_1| - |x_2| = -(x_1 + x_2) = $ $= \dfrac{2(a-1)a}{a^2 - 2a + 2}$.

Перепишем исходное неравенство в таком виде: $x_1 x_2 < |a|\left(|x_1| - |x_2|\right)$. Тогда искомые значения параметра $a$ найдем, решив систему

$$\begin{cases} \dfrac{-3a^2}{a^2 - 2a + 2} < \dfrac{-2|a|(a-1)a}{a^2 - 2a + 2}, \\ \dfrac{-3a^2}{a^2 - 2a + 2} < \dfrac{2|a|(a-1)a}{a^2 - 2a + 2}. \end{cases}$$

Отсюда с учетом $a \neq 0$ запишем

$$\begin{cases} 3|a| > 2a(a-1), \\ 3|a| > 2a(1-a). \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

*Ответ.* $-\dfrac{1}{2} < a < 0$ или $0 < a < \dfrac{5}{2}$.

**III.59. (II.241).** Найти все значения параметра $k$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 6, \\ y = 8 + k(x - 6) \end{cases}$$

имеет два различных решения.

*Решение.* Данная система равносильна такой:

$$\begin{cases} xy = 64, \\ x > 0, \\ y = 8 + k(x-6). \end{cases}$$

Отсюда искомые значения параметра $k$ найдем, потребовав от уравнения $x\left(8 + k(x - 6)\right) = 64$ иметь два различных положительных корня. Перепишем это уравнение в таком виде: $kx^2 - 2x(3k - 4) - 64 = 0$. Очевидно $k = 0$ не подходит. Если $k \neq 0$, то следующие условия, полученные с помощью теоремы Виета, и обеспечат выполнение необходимых свойств корней рассматриваемого уравнения.

Имеем

$$\begin{cases} \dfrac{2(3k-4)}{k} > 0, \\ -\dfrac{64}{k} > 0, \\ (3k-4)^2 + 64k > 0. \end{cases}$$

Решение этой системы даст ранее полученный ответ.

**III.60.** (МАИ). На координатной плоскости изобразить множество пар чисел $(b\,;\,c)$, для которых сумма корней уравнения $2^x + \log_2 b + c \cdot 2^{-x} = 0$ равна $-2$.

*Решение.* Обратим внимание, что в условии прямо указано на существование двух (не обязательно различных) корней данного уравнения. Обозначим их через $x_1$ и $x_2$. Найдем условия их существования. Пусть $2^x = y$, $y > 0$. Тогда исходное уравнение становится таким: $y^2 + y\log_2 b + c = 0$. Это уравнение должно иметь два положительных корня $y_1$ и $y_2$, $y_1 = 2^{x_1}$, $y_2 = 2^{x_2}$. Если $y_1$ и $y_2$—корни полученного уравнения, то по теореме Виета $c = y_1y_2 = 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 2^{x_1 + x_2} = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$.

Имеем $y^2 + y\log_2 b + \dfrac{1}{4} = 0$. Существование двух различных корней или одного двойного корня у этого уравнения обеспечивается неотрицательностью дискриминанта. Запишем $(\log_2 b)^2 - 1 \geqslant 0$, т.е. $|\log_2 b| \geqslant 1$. Для положительности корней достаточно добавить, что $\log_2 b < 0$. Отсюда $0 < b \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Искомый геометрический образ изображен на рис. 61.

**III.61.** (МГТУ). Найти все значения параметра $a$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (x + a + 2)^2 + y^2 = 1, \\ y^2 = 2ax \end{cases}$$

имеет четыре различных решения.

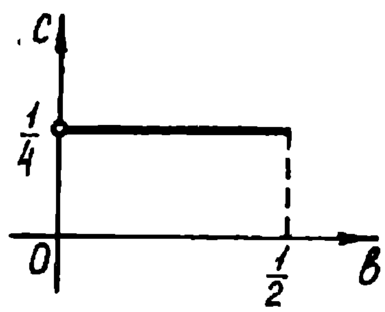


Рис. 61

*Решение.* Подставив $y^2$ из второго уравнения в первое, получим $(x + a + 2)^2 + 2ax = 1$. Если нам удастся найти условия для $a$, при которых это уравнение имеет два различных корня $x_1$ и $x_2$ таких, что выражения $ax_1$ и $ax_2$ становятся положительными, то задача очевидно будет решена.

Ясно, что $a = 0$ не подходит. Имеем $x^2 + 4x(a + 1) + a^2 + 4a + 3 = 0$. Умножим обе части этого уравнения на $a^2$. Получим $a^2x^2 + 4a^2x(a + 1) + a^4 + 4a^3 + 3a^2 = 0$. Обозначим $ax = t$. Тогда последнее уравнение становится таким: $t^2 + 4ta \times (a + 1) + a^4 + 4a^3 + 3a^2 = 0$. Теперь осталось найти значения $a$, при которых это уравнение имеет два различных положительных корня (знакомая задача !). Имеем

$$\begin{cases} a(a + 1) < 0, \\ a^2(a^2 + 4a + 3) > 0, \\ 4a^2(a + 1)^2 - a^2(a^2 + 4a + 3) > 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

*Ответ.* $-\frac{1}{3} < a < 0$.

**III.62.** (МВТУ). Найти все значения $p$, при которых уравнение $(p - 4)9^x + (p + 1)3^x + 2p - 1 = 0$ не имеет решений.

*Решение.* Произведем замену $3^x = y$, $y > 0$. Тогда получаем $(p - 4)y^2 + (p + 1)y + 2p - 1 = 0$. Естественно в первую очередь рассмотреть случай, когда $p = 4$. В этом случае полученное уравнение имеет корень $y = -\frac{7}{5}$. Следовательно, $p = 4$ входит в ответ. Если $p \neq 4$, то имеем квадратное уравнение. Теперь важно не упустить все случаи, которые обеспечат отсутствие корней у исходного уравнения: а) квадратное уравнение не имеет корней; б) оба корня отрицательны; в) оба корня равны нулю; г) один корень равен нулю, другой—отрицательный.

Для случая а) имеем $D = (p + 1)^2 - 4(p - 4)(2p - 1) < 0$. Отсюда $p < \frac{3}{7}$ или $p > 5$.

Обеспечим выполнение случая б) следующими требованиями, полученными с помощью теоремы Виета:

$$\begin{cases} (p+1)^2 - 4(p-4)(2p-1) \geqslant 0, \\ \dfrac{p+1}{p-4} > 0, \\ \dfrac{2p-1}{p-4} > 0. \end{cases}$$

Отсюда $4 < p \leqslant 5$.

Случай в) очевидно не выполняется ни при каких $p$.

И последний этап. Подставив $y = 0$ в уравнение, получим $p = \frac{1}{2}$; и наоборот, если $p = \frac{1}{2}$, то рассматриваемое уравнение имеет один нулевой корень и один положительный, что нас не устраивает.

Соберем полученные результаты в

*Ответ.* $p < \frac{3}{7}$ или $p \geqslant 4$.

**III.63.** (МАИ). На координатной плоскости изобразить множество точек $(a; b)$, координаты $a$ и $b$ которых таковы, что уравнение $(0{,}25)^x - 2a \cdot 2^{-x} - 4b + 1 = 0$ имеет единственный корень.

*Решение.* Очевидна замена $2^{-x} = y$, $y > 0$. Исходное уравнение становится таким: $y^2 - 2ay - 4b + 1 = 0$. Мы пришли к следующей задаче: при каких $a$ и $b$ последнее уравнение имеет только один положительный корень? Это возможно, если: а) корни разных знаков; б) один корень положительный, другой равен нулю; в) оба корня положительные и равны между собой.

Поскольку старший коэффициент квадратного уравнения положителен, то для выполнения случая а) достаточно потребовать $-4b + 1 < 0$, т.е. $b > \frac{1}{4}$. (Напомним, что эта ситуация разобрана в задаче III.58.)

Если $b = \frac{1}{4}$, то очевидно один из корней уравнения равен нулю, другой равен $2a$. Отсюда получаем, $a > 0$.

Если корни совпадают, то $\frac{D}{4} = a^2 + 4b - 1 = 0$. Положительность этих корней обеспечивается выполнением условия $2a > 0$.

Искомый графический образ удобно строить, записав полученные результаты в виде следующей совокупности:

$b > \frac{1}{4}$, $a$ — любое число, или

$b = \frac{1}{4}$, $a > 0$, или $b = \frac{1 - a^2}{4}$, $a > 0$. Отсюда легко получить множество, изображенное на рис. 62.

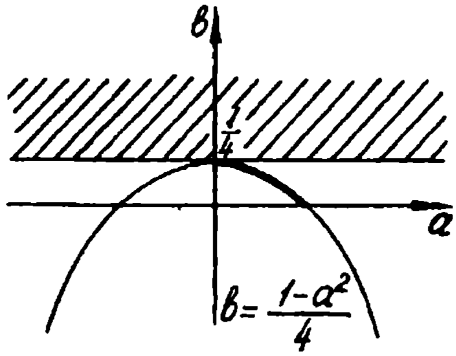



Рис. 62

## Упражнения

III.64. (КГУ). Пусть $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $3x^2 - ax + 2a - 1 = 0$. Вычислите $x_1^3 + x_2^3$.

III.65. (МАИ). При каких значениях $a$ уравнение $ax^2 + x + a - 1 = 0$ имеет два различных действительных корня $x_1$ и $x_2$, удовлетворяющих неравенству $\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| > 1$?

III.66. (УрГУ). При каких значениях параметра $a$ сумма квадратов корней уравнения $x^2 + x\sqrt{6 - a - a^2} - (7a + 1) = 0$ принимает наибольшее значение?

III.67. (Омский ГУ). При каких $a$ разность корней уравнения $2x^2 - (a + 1)x + (a - 1) = 0$ равна их произведению?

III.68. (МАИ). При каких значениях $a$ уравнение $x^2 + 1 = \frac{x}{a}$ имеет два действительных различных корня $x_1$ и $x_2$, удовлетворяющих неравенству $\left|x_1^2 - x_2^2\right| > \frac{1}{a}$?

III.69. (МИЭМ). Вычислить сумму корней уравнения $x^2 + 2(a^2 - 3a)x - (6a^3 - 14a^2 + 4) = 0$ и найти значения $a$, при которых она принимает наибольшее значение.

III.70. (ЛГУ). На координатной плоскости $(p\,;\,q)$ найдите множество точек, для которых уравнение $x^2 - 2px + q = 0$ имеет два таких вещественных корня $x_1$, $x_2$, что $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

III.71. Найдите наименьшее значение выражения $x_1^2 + x_2^2$, если $x_1$ и $x_2$ корни уравнения $x^2 - 2ax + a + 6 = 0$.

III.72. (ДГУ). Найти отрицательные корни уравнения $x^2 + 4ax + 8a^2 - 9 = 0$.

**III.73.(II.240).** Найдите все значения параметра $k$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y - \frac{1}{2} = k(x + 2), \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

имеет решения.

III.74.(МГТУ). Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = \sqrt{x^2 - 9}, \\ 5x - 4y + a = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

III.75.(МАТИ). При каких значениях параметра $p$ уравнение $p \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$ имеет единственное решение?

III.76.(МАИ). При каких действительных $a$ уравнение $(a - 1) \cdot 3^{2x} - (2a - 1) \cdot 3^x - 1 = 0$ имеет два различных корня?

III.77.(МГУ). Найти все значения параметра $\alpha$, для которых неравенство $4^x - \alpha \cdot 2^x - \alpha + 3 \leqslant 0$ имеет хотя бы одно решение.

III.78.(МАИ). При каких действительных $a$ уравнение $(a + 1)2^{2x} + 2^x + 3 - a = 0$ имеет единственное решение?

III.79.(Тб.ГУ). При каких значениях $a$ уравнение $2\log_3^2 x - |\log_3 x| + a = 0$ имеет четыре решения?

III.80.(МГУ). Найти $a$, при которых уравнение $x(x^{12} - ax^6 + a^4) = 0$ имеет ровно пять корней, образующих арифметическую прогрессию.

III.81.(МФТИ). На координатной плоскости рассматривается множество $M$ всех точек, координаты $(a\,;\,b)$ которых удовлетворяют условиям $-3 < a < 0$, $0 < b < 9$ и таковы, что уравнение $(b + 2a)x^4 + (b + 7a)x^2 + b - a = 0$ имеет четыре различных корня.

а) Принадлежит ли точка $N(-2\,;\,3)$ множеству $M$?

б) Найти площадь многоугольника, внутренней областью которого является множество $M$.

## Б. Расположение корней квадратичной функции относительно заданных точек.

В задачах из п. А на определение знаков корней квадратичной функции мы по сути дела выясняли вопрос о расположении корней относительно точки $x = 0$. Такой подход предполагает естественное обобщение: не привязываться к точке $x = 0$ и, более того, пойти дальше, не ограничиваясь только одной точкой. Для подобных задач характерна следующая формулировка: при каких значениях параметра корни (только один корень) больше (меньше, не больше, не меньше) заданного числа $p$; корни расположены между числами $p$ и $q$; корни не принадлежат промежутку с концами в точках $p$ и $q$ и т.п.

С первого взгляда представляется естественным, найдя корни квадратичной функции (если они существуют), сопоставить их с заданной точкой (точками). Заметим, что этот путь оправдан лишь в тех случаях, когда нам повезет — дискриминант квадратичной функции окажется полным квадратом. Именно с такого «комфортного» типа задач мы и начнем работу.

**III.82.** Найти все значения параметра $a$, при которых только один корень квадратного трехчлена $x^2 - 2x(b + 1) + 6b - 3$ больше 2.

*Решение.* $x_1 = 3$ и $x_2 = 2b - 1$ — корни данного квадратного трехчлена. Поскольку $x_1 > 2$ и таким свойством должен обладать только один корень, то мы вынуждены потребовать, чтобы $x_2 \leq 2$, т. е. $2b - 1 \leq 2$, или $x_2 = 3$, т.е. $2b - 1 = 3$. Отсюда

*Ответ.* $b \leq \frac{3}{2}$ или $b = 2$.

**III.83.** (КПИ). Найти все значения $m$, при которых один из корней уравнения $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m - 2 = 0$ находится между числами 0 и 2, а второй — между числами 3 и 5.

*Решение.* Данное квадратное уравнение имеет корни $x_1 = m - 1$, $x_2 = m + 2$. Очевидно $x_1 < x_2$. Тогда искомые значения параметра найдем, решив систему

$$\begin{cases} 0 < m - 1 < 2, \\ 3 < m + 2 < 5. \end{cases}$$

*Ответ.* $1 < m < 3$.

**III.84.** (КПИ). При каких $a$ решением системы

$$\begin{cases} x^2 - x(3a-2) + 2a^2 - 4a < 0, \\ x < 3 \end{cases}$$

является промежуток длины 5.

*Решение.* Корнями квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства, будут $x_1 = 2a$, $x_2 = a - 2$. Тогда решением этого неравенства будет один из промежутков $(2a\ ;\ a-2)$ либо $(a-2\ ;\ 2a)$. Понятно, что система имеет решение, если число 3 будет находиться справа от левого конца промежутка.

Если $2a < a - 2$, т. е. $a < -2$ (рис. 63, *а*) и число 3 находится между корнями, то решением системы будет промежуток $(2a\ ;\ 3)$. По условию необходимо, чтобы $3 - 2a = 5$. Получаем $a = -1$, что не удовлетворяет рассматриваемому случаю. Если $a - 2 \leqslant 3$, то промежуток $(2a\ ;\ a-2)$ является решением системы. Потребовав $a - 2 - 2a = 5$, получим $a = -7$.

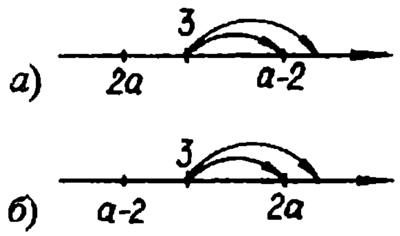



Рис. 63

Если $a - 2 < 2a$, т. е. $a > -2$ (рис. 63, *б* ), то, проводя аналогичные рассуждения, устанавливаем, что в этом случае подходящих $a$ не существует.

*Ответ.* $a = -7$.

**III.85.** (КПИ). При каких $a$ неравенство $(x-a)(x-a-2) > 0$ является следствием неравенства $x^2 - 4x + 3 < 0$?

*Решение.* Решением первого неравенства является очевидно объединение промежутков $(-\infty\ ;\ a)$ и $(a+2\ ;\ \infty)$, второго неравенства — промежуток $(1\ ;\ 3)$. По условию решения первого неравенства должны содержать все решения второго.

На рис. 64 показана графическая интерпретация этого требования (стрелочками указано возможное совпадение точек). Отсюда решения совокупности

$$\left[\begin{array}{l} a \geqslant 3, \\ a + 2 \leqslant 1 \end{array}\right.$$

и составляют

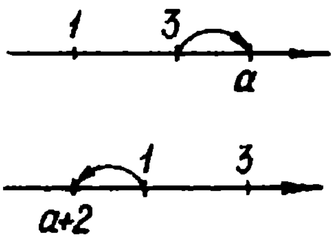



Рис. 64

*Ответ.* $a \leqslant -1$ или $a \geqslant 3$.

**III.86.** (МГУ). Найти все значения параметра $a$, для каждого из которых существует ровно два значения $x$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2 + 7x + 6| + x^2 - 5x + 6 - 12|x| = 0, \\ x^2 - 2(a + 2)x + a(a + 4) = 0. \end{cases}$$

*Решение.* Решение первого уравнения системы сопряжено не более чем с техническими сложностями. Поэтому мы ограничимся лишь результатом: $-6 \leqslant x \leqslant -1$, или $x = 2$, или $x = 3$. Решением второго уравнения будут $x_1 = a$, $x_2 = a + 4$. Заметим, что если $x_1 = 2$ или $x_1 = 3$, то система имеет единственное решение (это следует из того, что $x_2 - x_1 = 4$). Таким образом, для выполнения требования задачи корень $x_1$ «обязан» принадлежать отрезку $[-6\,;\,-1]$. При этом корень $x_2$ имеет «высокую степень свободы»: он может принадлежать как отрезку, так и совпадать с одной из точек $x = 2$ или $x = 3$. Сказанное формально записывается так:

$$\begin{cases} -6 \leqslant a \leqslant -1, \\ \left[\begin{array}{l} -6 \leqslant a + 4 \leqslant -1, \\ a + 4 = 2, \\ a + 4 = 3. \end{array}\right. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

*Ответ.* $-6 \leqslant a \leqslant -5$, или $a = -2$, или $a = -1$.

**III.87. (II.318).** Найти все значения параметра $a$, при которых любое значение $x$, удовлетворяющее неравенству $ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0$, по модулю не превосходит двух.

*Решение.* Очевидно $a = 0$ не подходит. Тогда при $a \neq 0$, найдя корни соответствующего квадратного трехчлена, получим $a(x - a)\left(x + \frac{1}{a}\right) > 0$. Если $a > 0$, то решением этого неравенства будет неограниченное множество чисел (объединение двух лучей). Следовательно, $a > 0$ также не подходит. Остается возможность $a < 0$. Имеем $(x - a)\left(x + \frac{1}{a}\right) < 0$, и поскольку $a < 0$, то $a < -\frac{1}{a}$. Отсюда решением этого неравенства будет промежуток $\left(a\,;\,-\frac{1}{a}\right)$. По условию полученный промежуток должен полностью содержаться в отрезке $[-2\,;\,2]$. Тогда

$$\begin{cases} a \geq -2, \\ -\dfrac{1}{a} \leq 2. \end{cases}$$

С учетом $a < 0$ получим знакомый ответ.

**III.88.** (МФТИ). На координатной плоскости рассматривается фигура $F$, состоящая из всех точек, координаты $(a\,;\,b)$ которых таковы, что каждое решение неравенства $x^2 + (a^2 - 3b^2)x - 2a^2(a^2 + 3b^2) \leq 0$ является решением неравенства $x^2 + (a^2 - 2b^2 - 15)x - (a^2 + 1)(2b^2 + 16) \leq 0$. Изобразить фигуру $F$.

*Решение.* С помощью теоремы, обратной теореме Виета, несложно «увидеть» корни квадратных трехчленов, стоящих в левых частях заданных неравенств. Для первого трехчлена имеем $x_1 = -2a^2$, $x_2 = 3b^2 + a^2$, для второго — $x_3 = -a^2 - 1$, $x_4 = 2b^2 + 16$. Поскольку $x_1 \leq x_2$ и $x_3 < x_4$, то решениями исходных неравенств будут соответственно промежутки $[x_1\,;\,x_2]$ и $[x_3\,;\,x_4]$. Требование задачи выполняется, если $x_3 \leq x_1$ и $x_2 \leq x_4$ Отсюда запишем

$$\begin{cases} -a^2 - 1 \leq -2a^2, \\ 3b^2 + a^2 \leq 2b^2 + 16. \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{cases} a^2 \leq 1, \\ a^2 + b^2 \leq 16. \end{cases}$$

Первое неравенство этой системы задает полосу, ограниченную прямыми $a = -1$, $a = 1$, второе неравенство — круг с центром $(0\,;\,0)$ и радиусом 4.

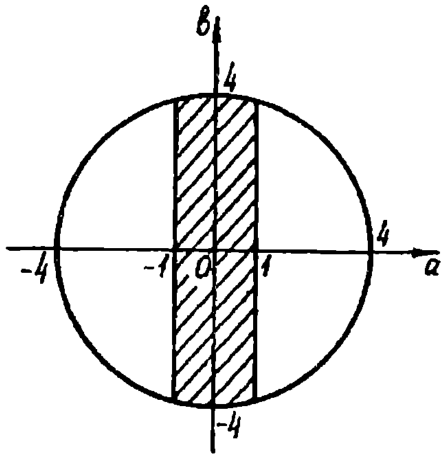


Рис. 65

Множество точек, являющихся решением системы (фигура $F$), показано штриховкой на рис. 65.

**III.89.** (КПИ). При каких значениях параметра $a$ число 2 находится между корнями квадратного уравнения $x^2 + (4a + 5)x + 3 - 2a = 0$?

*Решение.* Во всех предыдущих задачах (может быть, за исключением последней) поиск корней квадратичной функции был связан с нахождением дискриминанта. Поступим также и в этой задаче. Имеем $D = 16a^2 + 48a + 13$. Так как в условии прямо указано на существование двух различных корней, то дискриминант должен быть положительным. Пусть $x_1$ и $x_2$ — корни квадратного уравнения, причем $x_1 < x_2$. Тогда искомые значения параметра найдем, решив систему

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 < 2, \\ x_2 > 2. \end{cases}$$

Совершенно очевидно, что решение этой системы связано с немалыми техническими трудностями. Поэтому для настоящей задачи выбранный подход не оправдан (об этом мы говорили в начале данного пункта).

Рациональный путь решения основан на простой геометрической интерпретации условия задачи. Обозначим левую часть исходного уравнения через $f(x)$. Парабола $y = f(x)$ должна пересекать ось абсцисс в двух точках, причем ее ветви направлены вверх. Тогда рис. 66 — перевод условия на графический язык. Теперь надо найти аналитические соотношения, описывающие эту картинку. Нетрудно догадаться, что требование $f(2) < 0$ как необходимо, так и достаточно для того, чтобы выполнялось неравенство $x_1 < 2 < x_2$. Имеем $f(2) = 17 + 6a$.

*Ответ.* $a < -\frac{17}{6}$.

Чрезвычайно полезно обобщить разобранную задачу, т. е. найти условия, при которых число $p$ лежит между корнями квадратичной функции $f(x) = = ax^2 + bx + c$. Обратимся опять- таки к геометрической трактовке. Поскольку из условия следует, что $D > 0$, то в зависимости от знака $a$ достаточно рассмотреть два случая (рис. 67). Каждый из них полностью описывается следующими условиями. Для рис. 67, $a$ имеем

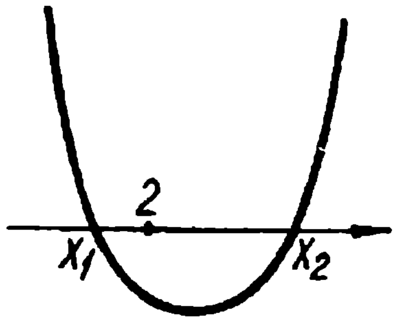


Рис. 66

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(p) < 0, \end{cases}$$

для рис. 67, *б* —

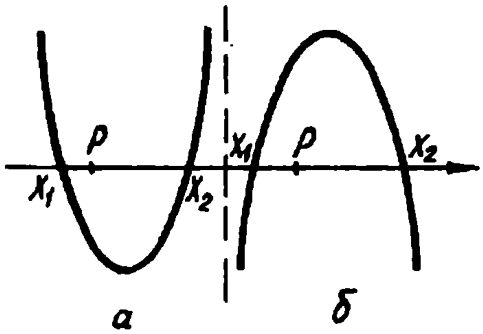


Рис. 67

$$\begin{cases} a < 0, \\ f(p) > 0. \end{cases}$$

Заметим, что здесь нет необходимости требовать еще выполнения неравенства $D > 0$: неравенства системы гарантируют существование двух корней.

Поскольку совокупность этих двух систем равносильна неравенству $af(p) < 0$, то можно записать следующее

**Утверждение 1.** *Для того чтобы число $p$ находилось между корнями квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, необходимо и достаточно выполнения неравенства $af(p) < 0$.*

Обратим внимание читателя, что, несмотря на наглядную очевидность утверждения 1, оно нами не доказано. Более того, наши нестрогие рассуждения проведены в одном направлении. Предлагаем читателю провести доказательство самостоятельно. (При необходимости доказательство можно найти в [10].)

После этой задачи представляется естественным попытаться построить критерий, обеспечивающий положение заданного числа $p$ вне корневого промежутка. Так, в частности, найдем условия, при которых корни квадратичной функции будут меньше числа $p$. Для этого достаточно описать рис. 68 и 69.

Из рис. 68 получаем $D \geqslant 0$, $a > 0$. Легко сообразить, что требование $f(p) > 0$ обеспечит положение числа $p$ вне корневого промежутка. Понятно, что этого требования недостаточно: при $f(p) > 0$ точка $p$ может оказаться левее корня $x_1$ или $x_0$, если $x_1 = x_2$. Окончательно зафиксирует точку $p$ в нужном положении неравенство $p > x_0$, где $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Итак, следующая система полностью описывает рис. 68:

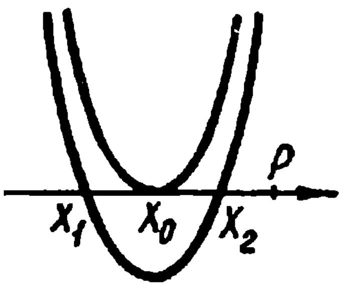


Рис. 68

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ a > 0, \\ f(p) > 0, \\ p > -\dfrac{b}{2a}. \end{cases}$$

Рассуждая совершенно аналогично, для рис. 69 имеем:

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ a < 0, \\ f(p) < 0, \\ p > -\dfrac{b}{2a}. \end{cases}$$

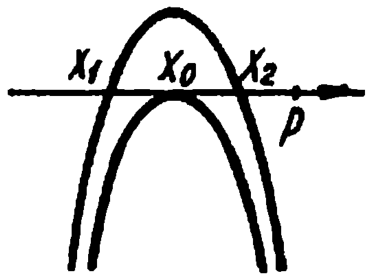


Рис. 69

Как и ранее, заметим, что совокупность полученных систем равносильна системе

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ a\,f(p) > 0, \\ p > -\dfrac{b}{2a}. \end{cases}$$

Это и есть необходимое и достаточное условие того, что число $p$ больше корней квадратичной функции. Сформулируем его в таком виде:

**Утверждение 2.** *Для того чтобы число $p$ было больше корней квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:*

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ a\,f(p) > 0, \\ p > -\dfrac{b}{2a}. \end{cases}$$

Сделаем ряд замечаний.

1. Утверждение 2 нами не доказано. При необходимости доказательство можно найти в [10].

2. Если в последней системе заменить третье неравенство на $p < -\dfrac{b}{2a}$, то получим критерий того, что число $p$ будет меньше корней квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$.

3. Неплохо было бы помнить утверждения 1 и 2. Однако специально заучивать их не надо. Скорее всего, следует понять

механизм возникновения необходимых неравенств и научиться применять его на конкретных задачах.

**4.** Совершенно очевидно, что утверждения 1 и 2 не описывают все задачи, связанные с расположением корней квадратичной функции. Так, в целом ряде задач число $p$ может совпадать с одним из корней. Кроме того, полученные критерии сформулированы лишь для одной заданной точки. Однако существует немалый класс задач на исследование положения корней относительно двух и более точек или относительно заданного числового промежутка. Понятно, что для каждого типа примеров можно построить свой критерий. Но вряд ли следует это делать: ключевая идея будет повторяться, а следовательно, здесь проще не строить общую теорию, а учиться решать задачи на самих задачах.

**III.90.** (НГУ). Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых только один корень уравнения $x^2 + 2(a-3)x + 9 - 2a = 0$ удовлетворяет неравенству $x < 2$.

*Решение.* Здесь и далее квадратный трехчлен, фигурирующий в задаче, будем обозначать через $f(x)$, его дискриминант — через $D$, абсциссу вершины параболы $f$ — через $x_0$.

Для $D > 0$ требование задачи выполняется очевидно, если число 2 находится между корнями квадратного уравнения или совпадает с большим из них (рис.70). Первый случай реализуется, если $f(2) < 0$, т.е. $2a + 1 < 0$, $a < -\frac{1}{2}$.

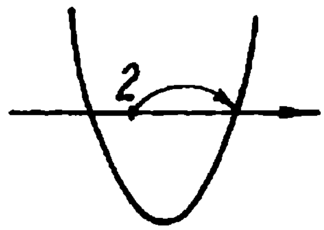


Рис. 70

Второй случай полностью описывается системой

$$\begin{cases} f(2) = 0, \\ x_0 < 2. \end{cases}$$

Легко убедиться, что эта система решений не имеет.

Чтобы решение стало полным, необходимо рассмотреть случай, когда $D = 0$. Имеем $\frac{D}{4} = (a-3)^2 - 9 + 2a = 0$. Отсюда $a = 0$ или $a = 4$. Если $a = 0$, то уравнение имеет один двойной корень $x = 3$, что не подходит. Если $a = 4$, то получаем $x = -1$.

*Ответ.* $a < -\frac{1}{2}$ или $a = 4$.

**III.91.** При каких значениях параметра $a$ оба корня уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ удовлетворяют условию $1 < x < 3$?

*Решение.* Очевидно $D \geqslant 0, f(1) > 0, f(3) > 0$ (рис. 71). Эти условия лишь необходимы для выполнения требования задачи. Мы получим достаточное условие, если добавим еще одно неравенство $1 < x_0 < 3$. Отсюда запишем систему

$$\begin{cases} a^2 - 8 \geqslant 0, \\ 3 - a > 0, \\ 11 - 3a > 0, \\ 1 < \dfrac{a}{2} < 3. \end{cases}$$

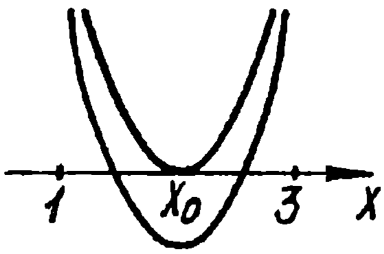



Рис. 71

Решив систему, получим

*Ответ.* $2\sqrt{2} \leqslant a < 3$.

**III.92.** При каких значениях $a$ существует единственный корень уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$, удовлетворяющий условию $1 < x < 3$?

*Решение.* Обратим внимание, что в условии не сказано, что данное квадратное уравнение имеет два различных корня. Поэтому вначале рассмотрим случай, когда $D = 0$, т. е. $a = 2\sqrt{2}$ или $a = -2\sqrt{2}$. Для первого значения параметра получаем $x = \sqrt{2} \in (1\ ;\ 3)$, для второго — $x = -\sqrt{2} \notin (1\ ;\ 3)$.

В случае,когда $D > 0$, обозначим корни через $x_1$ и $x_2$ ($x_1 < x_2$). Исходя из условия потребуем, чтобы $x_1 \in (1\ ;\ 3)$, а $x_2 \notin (1\ ;\ 3)$ (рис. 72, *а*) или $x_1 \notin (1\ ;\ 3)$, а $x_2 \in (1\ ;\ 3)$ (рис. 72, *б*). Опишем эти два случая. Понятно, что должна выполняться следующая совокупность:

$$\begin{cases} f(1) > 0, \\ f(3) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(1) < 0, \\ f(3) > 0. \end{cases}$$

(Заметим, что здесь условие $D > 0$ учтено.)

Очевидно полученная совокупность равносильна неравенству $f(1) \cdot f(3) < 0$. Отсюда $(3 - a)(11 - 3a) < 0$, $3 < a < \frac{11}{3}$. Однако полученный результат не учитывает возможность, когда $x_1 \in (1\ ;\ 3)$, $x_2 = 3$ или $x_2 \in (1\ ;\ 3), x_1 = 1$. Исследуем эти случаи.

Если $f(3) = 0$, т.е. $a = \frac{11}{3}$, то $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 3$, что не подходит.

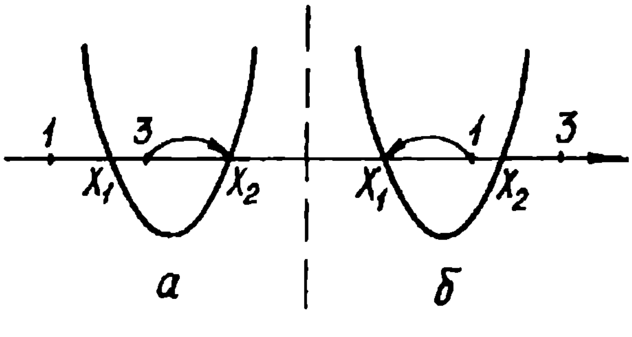



Рис. 72

Если $f(1) = 0$, т.е. $a = 3$, то $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, что удовлетворяет условию задачи. Отсюда

*Ответ.* $3 \leqslant a < \frac{11}{3}$ или $a = 2\sqrt{2}$.

III.93.(КГПИ). При каких значениях $a$ всякое решение неравенства $x^2 - x - 2 < 0$ больше любого решения неравенства $ax^2 - 4x - 1 \geqslant 0$?

*Решение.* Решив первое неравенство, получим $-1 < x < 2$. Обратимся теперь ко второму неравенству. Если $a = 0$, то получим $-4x - 1 \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant -\frac{1}{4}$. Следовательно, $a = 0$ не подходит. Если $a > 0$, то очевидно решением неравенства будет или все множество действительных чисел (в случае, когда $D \leqslant 0$), или объединение двух лучей $(-\infty; x_1]$ и $[x_2; \infty)$ (в случае, когда $D > 0$, $x_1$ и $x_2$ — корни квадратного трехчлена $f$). Значит, $a > 0$ также не подходит. Остается рассмотреть случай, когда $a < 0$. Тогда $D \geqslant 0$ (если $D < 0$, неравенство решений не имеет). Отсюда решением неравенства будет отрезок $[x_1; x_2]$ или точка $x_0$, когда $D = 0$ (рис. 73). Таким образом, искомое значение $a$ найдем, решив систему

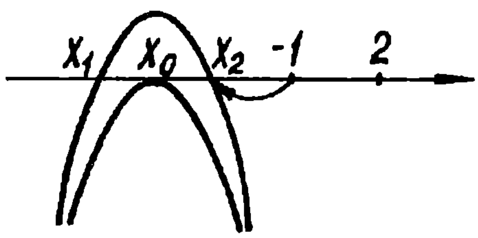



Рис. 73

$$\begin{cases} a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ f(-1) \leqslant 0, \\ x_0 \leqslant -1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} a < 0, \\ a + 4 \geqslant 0, \\ a + 3 \leqslant 0, \\ \dfrac{2}{a} \leqslant -1. \end{cases}$$

Теперь легко получить

*Ответ*. Таких $a$ не существует.

**III.94.**(КПИ). Найти все $a$, при которых из неравенства $ax^2 - x + 2 - a < 0$ следует неравенство $0 < x < 2$.

*Решение.* Поскольку этот пример во многом аналогичен предыдущему, то проведем решение схематично, акцентируя внимание на ключевых моментах.

Если $a \leqslant 0$, то решением первого неравенства будет неограниченное множество чисел, которое, понятно, не может содержаться в промежутке $(0; 2)$. Если $a > 0$, то надо быть внимательным и суметь заметить, что случай, когда $D \leqslant 0$, нас устраивает. Действительно, при $D \leqslant 0$ рассматриваемое неравенство решений не имеет, а следовательно, любое неравенство с одной переменной может являться его следствием. Имеем $D = 4a^2 - 8a + 1 \leqslant 0$. Отсюда $\frac{2 - \sqrt{3}}{2} \leqslant a \leqslant \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$.

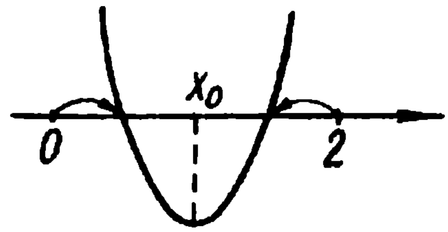


Рис. 74

Остается разобрать случай, когда $D > 0$. Тогда решением неравенства будет корневой промежуток $(x_1 ; x_2)$, который должен «поместиться» в интервале $(0; 2)$ (рис. 74). Отсюда получаем

$$\begin{cases} a > 0, \\ D > 0, \\ f(0) \geqslant 0, \\ f(2) \geqslant 0, \\ 0 < x_0 < 2. \end{cases}$$

Обратим внимание, что корни квадратичной функции могут совпасть с концами рассматриваемого промежутка.

Имеем

$$\begin{cases} a > 0, \\ 4a^2 - 8a + 1 > 0, \\ 2 - a \geqslant 0, \\ 3a \leqslant 0, \\ 0 < \dfrac{1}{2a} < 2. \end{cases}$$

Очевидно эта система решений не имеет.

*Ответ.* $\frac{2-\sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

**III.95.** Найти все значения параметра $a$, при которых корни $x_1$ и $x_2$ уравнения $(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ удовлетворяют условию $x_1 < 2$, $x_2 > 3$.

*Решение.* Из условия задачи следует, что данное уравнение является квадратным. Отсюда $a - 2 \neq 0$. Кроме того, требования, предъявляемые к корням $x_1$ и $x_2$, позволяют сделать вывод, что числа 2 и 3 принадлежат корневому промежутку. Следовательно, если $a - 2 > 0$, то $f(2) < 0$ и $f(3) < 0$ (рис. 75, *а*); если $a - 2 < 0$, то $f(2) > 0$, $f(3) > 0$ (рис. 75, *б*). Таким образом, искомые значения параметра найдем, решив совокупность двух систем. Имеем

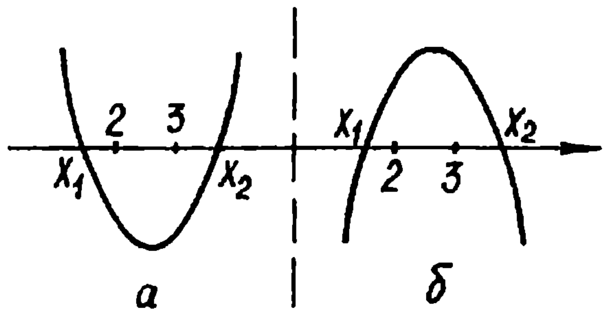


Рис. 75

$$\begin{cases} a-2>0, \\ f(2)<0, \\ f(3)<0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} a-2<0, \\ f(2)>0, \\ f(3)>0. \end{cases}$$

Облегчим техническую работу, заметив, что эта совокупность равносильна системе

$$\begin{cases} (a-2)f(2)<0, \\ (a-2)f(3)<0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} (a-2)(4a-20)<0, \\ (a-2)(7a-36)<0. \end{cases}$$

Теперь легко получить

*Ответ.* $2 < a < 5$.

**III.96.** (КПИ). При каких значениях параметра $a$ все решения уравнения $(a-1)x^2 - 2(a+1)x + a - 3 = 0$ удовлетворяют условию $-1 < x < 5$?

*Решение.* Если $a = 1$, то данное уравнение имеет корень $x = -\frac{1}{2}$, удовлетворяющий заданному условию. Если $a \neq 1$, то исходное уравнение становится квадратным, и его дискриминант $D = 24a - 8$. При $D = 0$ уравнение имеет один двойной корень $x = -2$, что не подходит. При $D > 0$ квадратное уравнение имеет два различных корня, которые по условию должны принадлежать промежутку $(-1\ ;\ 5)$. Отсюда в зависимости от знака двучлена $a - 1$ необходимое положение корней будет обеспечено следующей совокупностью двух систем (см. также рис. 76):

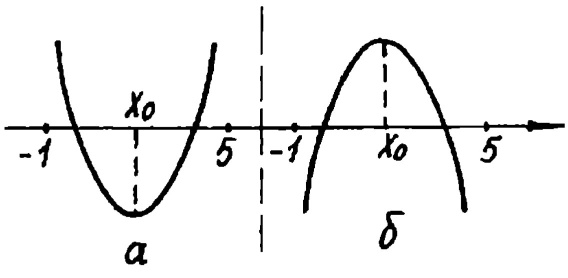



Рис. 76

$$\begin{cases} a - 1 > 0, \\ D > 0, \\ f(-1) > 0, \\ f(5) > 0, \\ -1 < x_0 < 5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a - 1 < 0, \\ D > 0, \\ f(-1) < 0, \\ f(5) < 0, \\ -1 < x_0 < 5. \end{cases}$$

Как и в предыдущем примере, нет необходимости решать каждую из полученных систем. Легко заметить, что достаточно ограничиться решением системы

$$\begin{cases} (a - 1)\, f(-1) > 0, \\ (a - 1)\, f(5) > 0, \\ D > 0, \\ -1 < x_0 < 5. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} (a - 1)(4a - 2) > 0, \\ (a - 1)(16a - 38) > 0, \\ 3a - 1 > 0, \\ -1 < \dfrac{a + 1}{a - 1} < 5. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $a > \frac{19}{8}$.

*Ответ.* $a = 1$ или $a > \frac{19}{8}$.

Справедливости ради отметим, что в двух последних задачах, рассмотрев случай неравенства нулю старшего коэффициента, можно было, перейдя к приведенному квадратному уравнению, несколько сократить решение. Однако из учебных соображений мы не пошли по такому пути, предложив более универсальную схему, пригодную и для аналогичных задач, связанных с квадратичными неравенствами.

## Упражнения

III.97.(КПИ). При каких значениях $a$ корни квадратного трехчлена $(2a-2)x^2+(a+1)x+1$ больше $-2$, но меньше 0?

III.98.(ЛГУ). При каких $a$ любое решение неравенства $\dfrac{\log_3(x^2-3x+7)}{\log_3(3x+2)}<1$ будет также решением неравенства $x^2+(5-2a)x\leqslant 10a$?

III.99.(НГУ). Определить для каких действительных значений параметра $a$ все решения неравенства $\log_{3x+2}(x^2-3x+7)\leqslant 1$ являются одновременно решениями неравенства $(x+1)^2-4a^2(x+1)+3a^4\geqslant 0$.

III.100.(ЛПИ). При каких значениях параметра $a$ каждое решение неравенства $4x^2+8x+3<0$ будет содержаться среди решений неравенства $2ax^2-(7a-4)x-14>0$?

III.101.(ВГУ). При каких действительных значениях $a$ все корни уравнения $ax^2-(a^3+2a^2+1)x+a(a+2)=0$ лежат в отрезке $[0\,;\,1]$?

III.102.(ЛГУ). При каких значениях параметра $a$ всякое решение неравенства $x^2-3x+2<0$ будет одновременно решением неравенства $ax^2-(3a+1)x+3>0$?

III.103.(МАИ). При каких действительных значениях $k$ все решения неравенства $(k-1)x^2+(k^2-2k+2)x+k-1>0$ положительны и меньше 2?

III.104.(ЛГУ). При каких значениях параметра $a$ имеет решение система неравенств

$$\begin{cases} x^2-(a+1)x+a<0, \\ x^2+(a+3)x+3a<0? \end{cases}$$

Ш.105.(МФТИ). На координатной плоскости рассматривается фигура $\Phi$, состоящая из всех точек, координаты $(a\,;b)$ которых таковы, что каждое решение неравенства $x^2 - (2a^2 - b^2)x - 2b^2(2a^2 + b^2) \leqslant 0$ является решением неравенства $x^2 - (a^2 - b^2 + 8)x - (b^2 + 1)(a^2 + 9) \leqslant 0$. Построить фигуру $\Phi$.

Ш.106.(МГУ). Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых существует только одно значение $x$, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} \left|x^2 - 5x + 4\right| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x\,|x| = 0, \\ x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) = 0. \end{cases}$$

Ш.107.(УрГУ). Найти $a$, при которых решение системы

$$\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geqslant 0, \\ x \leqslant 2 \end{cases}$$

состоит из одной точки.

Ш.108.(МФТИ). Определите все значения параметра $k$ так, чтобы один из корней уравнения $x^2 - 2\log_k(k+1)\cdot x + \log_k(k-4) = 0$ был меньше 0, а другой — больше 1.

Ш.109.(МФТИ). Определите все значения параметра $k$, при которых один из корней уравнения $x^2 - 2\left|9 - \log_3 k\right|x + 3\left|9 - \log_3 k\right| = 0$ был бы больше 3, а другой — меньше 3.

Ш.110.(МГУ). При каких действительных $a$ корни уравнения $4x^2 - 2x + a = 0$ подчиняются условию $-1 < x_1 < 1$ и $-1 < x_2 < 1$?

Ш.111.(МИИГАиК). При каких значениях $a$ корни уравнения $x^2 - 4ax + 1 = 0$ действительные и удовлетворяют условиям $x_1 \geqslant a$, $x_2 \geqslant 0$?

Ш.112.(МИСиС). Найдите сумму всех целых значений параметра $a$, при которых квадратный трехчлен $x^2 + ax + a^2 + 6a$ при всех $x$, удовлетворяющих условию $1 < x < 2$, отрицателен.

Ш.113.(ЛПИ). Пусть квадратное уравнение $(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ имеет корни $x_1$, $x_2$. Найти все такие $a$, что $x_1$ и $x_2$ удовлетворяют условию $x_1 < 2 < 3 < x_2$.

**III.114.** (ЛПИ). Пусть квадратное уравнение $(2a + 3)x^2 + (a + 1)x + 4 = 0$ имеет корни $x_1$, $x_2$. Найти все такие $a$, что $x_1$ и $x_2$ удовлетворяют условию $-2 < x_1 < x_2 < 0$.

**III.115.** (МАИ). При каких действительных значениях параметра $m$ корни уравнения $(1 + m)x^2 - 3mx + 4m = 0$ подчиняются условию $2 < x < 5$?

**III.116.** (МАИ). Найдите все значения $a$, при которых больший корень уравнения $(a - 1)x^2 + 2x + 1 = 0$ больше 100.

**III.117.** При каких значениях $m$ корни уравнения $(m - 1)x^2 - 2(m + 2)x + m = 0$ различны и принадлежат промежутку $(-1\,;\,2)$?

**III.118.** При каких значениях $a$ уравнение $(a - 1)x^2 - 2ax + 2 - 3a = 0$ имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенству $x > 1$?

**III.119.** При каких значениях параметра $a$ уравнение $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a = 0$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $0 < x < 3$?

**III.120.** Найти все значения параметра $a$, при которых все корни уравнения $(2 - a)x^2 - 3ax + 2a = 0$ больше $\frac{1}{2}$.

**III.121.** (МАИ). Найти все действительные $m$, при которых все решения неравенства $-1 < 2x < 0$ заключены в решениях неравенства $mx^2 - 2(m - 3)x + m - 1 > 0$.

**III.122.** (МГУ). Найдите все значения $k$, при которых неравенство $\dfrac{x^2 + k^2}{k(6 + x)} \geqslant 1$ выполняется для всех $x$, удовлетворяющих условию $-1 < x < 1$.

**III.123.** (КПИ). Найдите все значения $k$, при которых неравенство $\dfrac{3}{x + 1} > 1$ имеет своим следствием неравенство $(k + 1)x^2 - (3k + 4)x + 3 > 0$.

**III.124.** (КПИ). Найдите все значения параметра $m$, при которых множество решений неравенства $mx^2 + 2(m - 2)x + m - 5 > 0$ является подмножеством множества решений неравенства $x^2 - 3x + 2 > 0$.

## В. Задачи, сводящиеся к исследованию расположения корней квадратичной функции.

Это заглавие вполне отражает основную идею решения примеров настоящего пункта. Добавим лишь, что умение заметить «скрытую» в задаче квадратичную функцию — прием достаточно распространенный и в немалой степени эффективный. Заметим еще, что в этом пункте мы сохраним обозначения: $f$ — квадратичная функция; $D$ — дискриминант; $x_0$ — абсцисса вершины параболы.

**III.125.**(УрГУ). При каких значениях параметра $a$ система уравнений

$$\begin{cases}(a-1)y^2-2(3a+1)y+9a=0,\\ y=-\sqrt{x-3}+2\end{cases}$$

имеет решения ?

*Решение.* Из второго уравнения системы следует, что $y \leq 2$. Тогда, если хотя бы один корень первого уравнения будет не больше 2, то данная система имеет решения.

Если $a = 1$, то $y = \frac{9}{8}$. Следовательно, $a = 1$ входит в ответ. Если $a \neq 1$, то квадратное уравнение удобно записать в таком виде : $y^2-\frac{2(3a+1)}{a-1}y+\frac{9a}{a-1}=0$. Для него $\frac{D}{4}=\frac{15a+1}{(a-1)^2}$.

Если $a = -\frac{1}{15}$, то $y = -\frac{3}{4}$. Значит, $a = -\frac{1}{15}$ также подходит.

Если $D > 0$, т.е. $a > -\frac{1}{15}$, то искомые значения параметра определяются следующей совокупностью неравенств (рис. 77):

$f(2) \leq 0$ или $f(2) > 0$ и $y_0 < 2$.

Отсюда имеем

$$\left[\begin{array}{l} f(2) \leq 0, \\ \begin{cases} D > 0, \\ f(2) > 0, \\ y_0 < 2. \end{cases}\end{array}\right.$$

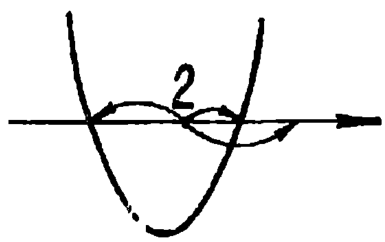



Рис. 77

Решением этой совокупности будет $-\frac{1}{15} < a < 1$ или $1 < a \leq 8$.

*Ответ.* $-\frac{1}{15} \leqslant a \leqslant 8.$

**III.126.** При каких значениях параметра $a$ один корень уравнения $ax^4 - (a-3)x^2 + 3a = 0$ меньше $-2$, три остальных — больше $-1$?

*Решение.* Пусть $x^2 = t$. Исходя из требований, предъявляемых к корням исходного уравнения, достаточно решить следующую задачу: при каких значениях $a$ один корень уравнения $at^2 - (a-3)t + 3a = 0$ больше 4, другой — меньше 1, но не меньше 0?

Очевидно $a \neq 0$, $D > 0$. Представим квадратное уравнение в таком виде: $t^2 - \frac{a-3}{a}t + 3 = 0$. Его корни будут удовлетворять указанным выше условиям, если $f(1) < 0$, $f(4) < 0$ и $f(0) > 0$ (рис.78). Поскольку $f(0) = 3$, то достаточно решить систему

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{a-3}{a} + 3 < 0, \\ 16 - \dfrac{4(a-3)}{a} + 3 < 0. \end{cases}$$

Решения этой системы и будут составлять

*Ответ.* $-\frac{4}{5} < a < 0.$

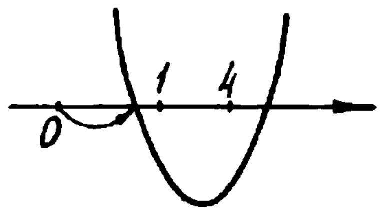


Рис. 78

**III.127.** (НГУ). При каких значениях параметра $a$ множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + (a+4)x + 4a \leqslant y, \\ 3x + y - (2a+4) \leqslant 0 \end{cases}$$

содержит отрезок $[-2; -1]$ оси $x$?

*Решение.* Первое неравенство системы задает множество точек, лежащих «внутри» параболы $y = f(x)$, включая границу. Тогда это множество будет содержать отрезок $[-2; -1]$ оси абсцисс, если решения неравенства $f(x) \leqslant 0$ содержат этот же отрезок (рис. 79). Отсюда $f(-2) \leqslant 0$ и $f(-1) \leqslant 0$. Тогда

$$\begin{cases} 4 - 2(a+4) + 4a \leqslant 0, \\ 1 - a - 4 + 4a \leqslant 0. \end{cases}$$

Получаем $a \leqslant 1$.

Второе неравенство исходной системы задает полуплоскость. Если точки $(-2;0)$ и $(-1;0)$ принадлежат этой полуплоскости, то очевидно рассматриваемый отрезок также содержится среди решений указанного неравенства. Подставив координаты этих точек в рассматриваемое неравенство, получим

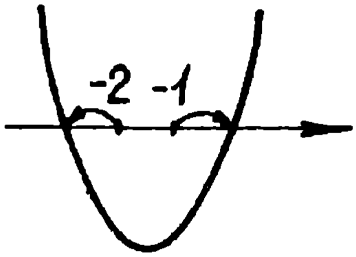


Рис. 79

$$\begin{cases} -10 - 2a \leqslant 0, \\ -7 - 2a \leqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда $a \geqslant -\frac{7}{2}$.

Следовательно, решения исходной системы будут удовлетворять требованию задачи, если $a \leqslant 1$ и $a \geqslant -\frac{7}{2}$.

*Ответ.* $-\frac{7}{2} \leqslant a \leqslant 1$.

III.128. (МАИ). Найти все $a$, при которых значения функции $y = a \cdot 4^x + (a+2)2^x + 2$ неположительны для всех $x$ из промежутка $[0;1]$.

*Решение.* Пусть $2^x = t$, $t > 0$. Так как $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $1 \leqslant t \leqslant 2$. Таким образом, задача свелась к тому, чтобы найти все значения параметра, при которых неравенство $at^2 + (a+2)t + 2 \leqslant 0$ выполняется для всех $t$ из промежутка $[1;2]$.

Очевидно $a \neq 0$ (при $a = 0$ неравенство не имеет решений для $t > 0$). Тогда квадратный трехчлен, стоящий в левой части неравенства, имеет корни $-1$ и $-\frac{2}{a}$. Перепишем это неравенство в таком виде: $a(t+1)\left(t + \frac{2}{a}\right) \leqslant 0$. Поскольку $t > 0$, то $a\left(t + \frac{2}{a}\right) \leqslant 0$, и очевидно при $a > 0$ это неравенство положительных решений не имеет. Остается разобрать случай, когда $a < 0$. Тогда получаем $t \geqslant -\frac{2}{a}$. Это неравенство выполняется при всех $t \in [1;2]$, если $-\frac{2}{a} \leqslant 1$. Учитывая, что $a < 0$, получаем

*Ответ.* $a \leqslant -2$.

**III.129.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых неравенство $-5 + 5a + \sin^2 x + a(3 - \cos x)^2 > 0$ выполняется для всех значений $x$.

*Решение.* Произведя замену $\cos x = t$, получим $(a - 1)t^2 - 6at + 14a - 4 > 0$. Поскольку $x$ принимает любые значения, то $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Теперь, по существу, надо найти такие $a$, при которых записанное неравенство выполняется при всех $t$ из промежутка $[-1\,;\,1]$.

Если $a = 1$, то получим неравенство $t < \frac{5}{3}$, в решение которого очевидно входит промежуток $[-1\,;\,1]$. Если $a - 1 > 0$ и $D < 0$, то неравенство выполняется при всех $t$, что, естественно, подходит. Имеем

$$\begin{cases} a - 1 > 0, \\ 5a^2 - 18a + 4 > 0. \end{cases}$$

Отсюда $a > \frac{9 + \sqrt{61}}{5}$.

Если $a - 1 > 0$ и $D \geqslant 0$, то требуемое положение отрезка $[-1\,;\,1]$ обеспечивается следующими условиями (рис. 80):

$$\begin{cases} a - 1 > 0, \\ D \geqslant 0, \\ f(1) > 0, \\ t_0 > 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a - 1 > 0, \\ D \geqslant 0, \\ f(-1) > 0, \\ t_0 < -1. \end{cases}$$

Решив эту совокупность, получим $1 < a \leqslant \frac{9 + \sqrt{61}}{5}$.

Если $a - 1 < 0$ и $D \leqslant 0$, то неравенство решений не имеет. Если $a - 1 < 0$ и $D > 0$, то получим (рис. 81):

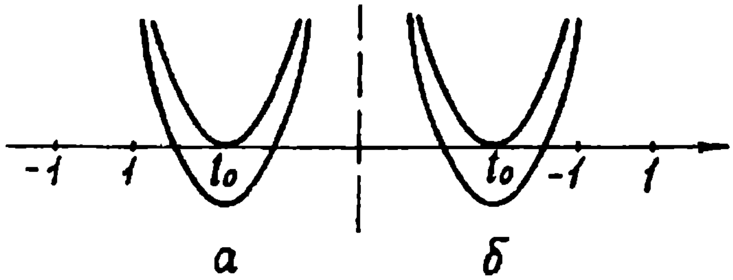



Рис. 80

$$\begin{cases} a - 1 < 0, \\ f(1) > 0, \\ f(-1) > 0. \end{cases}$$

Отсюда $\frac{5}{9} < a < 1$.

Объединение результатов всех этапов решения даст

*Ответ.* $a > \frac{5}{9}$.

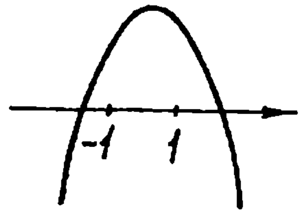



Рис. 81

**III.130.**(МГУ). Найти все $a$, при которых неравенство
$$\operatorname{tg}^2(\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2}) - 4a\operatorname{tg}(\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2}) + 2 + 2a \leqslant 0$$
имеет конечное число решений.
Найти эти решения.

*Решение.* Сделаем замену $\operatorname{tg}(\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2}) = t$, где $|t| \leqslant \operatorname{tg} 1$. Несложно заметить, что при $t_0 \in [-\operatorname{tg}1 ; \operatorname{tg}1]$ уравнение $\operatorname{tg}(\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2}) = t_0$ имеет конечное число решений. Поэтому найдем все $a$, при которых система
$$\begin{cases} t^2 - 4at + 2 + 2a \leqslant 0, \\ -\operatorname{tg}1 \leqslant t \leqslant \operatorname{tg}1 \end{cases}$$
имеет конечное число решений. Очевидно это возможно лишь тогда, когда она (система) имеет ровно одно решение.

Если дискриминант соответствующего квадратного трехчлена отрицательный, то очевидно система решений не имеет.

Если $D = 0$, т.е. $a = 1$ или $a = -\frac{1}{2}$, то решением первого неравенства системы будет лишь одна точка $t = 2a$. Из двух найденных значений параметра подходит только $a = -\frac{1}{2}$ $\Big($при $a = -\frac{1}{2}$ получаем $t = -1 \in [-\operatorname{tg}1 ; \operatorname{tg}1]\Big)$. Отсюда $\operatorname{tg}(\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2}) = -1$, $\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2} = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in Z$. Это уравнение имеет решение только при $n = 0$. Тогда $\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2} = -\frac{\pi}{4}$, $\sqrt{4\pi^2 - x^2} = \pm(\pi - \arccos\frac{\pi}{4}) + 2\pi k$, где $k \in Z$. Нетрудно обнаружить, что это уравнение имеет решение
$$x = \pm\sqrt{4\pi^2 - \left(\pi \pm \arccos\frac{\pi}{4}\right)^2}.$$

Если $D > 0$, то решением квадратичного неравенства будет корневой промежуток $[t_1 ; t_2]$, который должен иметь только одну общую точку с отрезком $[-\operatorname{tg}1 ; \operatorname{tg}1]$. Отсюда $t_1 = \operatorname{tg}1$ (рис.82,$a$)

или $t_2 = -\text{tg}1$ (рис.82, *б*). Тогда искомые значения параметра найдем, решив следующую совокупность двух систем:

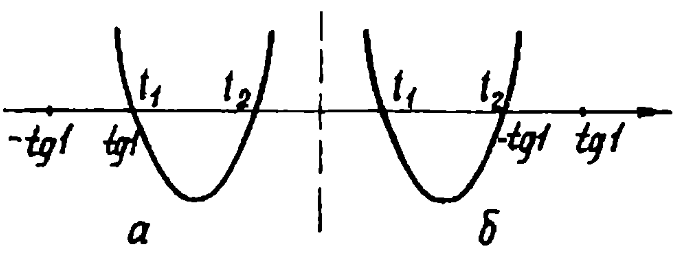



Рис. 82

$$\begin{cases} f(\text{tg}1) = 0, \\ \text{tg}1 < t_0 \end{cases} \text{ или }$$

$$\begin{cases} f(-\text{tg}1) = 0, \\ -\text{tg}1 > t_0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} a = \dfrac{\text{tg}^2 1 + 2}{4\text{tg}1 - 2}, \\ a > \dfrac{1}{2}\text{tg}1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a = -\dfrac{\text{tg}^2 1 + 2}{4\text{tg}1 + 2}, \\ a < -\dfrac{1}{2}\text{tg}1. \end{cases}$$

Легко убедиться, что первая система совокупности имеет решения, а вторая нет. Найденному значению параметра соответствует $t = \text{tg}1$. Отсюда $\text{tg}\,(\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2}) = \text{tg}1$, $\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2} = 1 + \pi n$, $n \in Z$. Имеем $\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2} = 1$, $\sqrt{4\pi^2 - x^2} = 2\pi k$, где $k \in Z$. Это уравнение имеет только три корня: $x_1 = 0$; $x_2 = -2\pi$; $x_3 = 2\pi$.

*Ответ.* Если $a = -\dfrac{1}{2}$, то

$x = \pm\sqrt{4\pi^2 - \left(\pi \pm \arccos\dfrac{\pi}{4}\right)^2}$; если $a = \dfrac{\text{tg}^2 1 + 2}{4\text{tg}1 - 2}$, то $x = 0$, или $x = -2\pi$, или $x = 2\pi$. При остальных $a$ уравнение корней не имеет или их бесконечно много.

III.131.(ЛГУ). Найти все $a$, для которых при всех $b > 0$ существует в интервале $0 < x < \dfrac{1}{2}$ решение уравнения $\log_2(1 - x - x^2) = a\log_{1-x-x^2} 2 + b$.

*Решение.* Так как $0 < x < \dfrac{1}{2}$, то $\dfrac{1}{4} < 1 - x - x^2 < 1$, а $-2 < \log_2(1 - x - x^2) < 0$. Произведя замену $\log_2(1 - x - x^2) =$

$= t$, приходим к уравнению $t = \frac{a}{t} + b$. Теперь понятно, что надо найти такие $a$, для которых при всех $b > 0$ уравнение $t^2 - bt - a = 0$ имеет хотя бы один корень в интервале $(-2\ ;\ 0)$.

Покажем на этом примере, ставшим, по-видимому, уже «стандартным», как, используя конкретные особенности самой задачи, сократить техническую работу. Так, абцисса вершины параболы $t_0 \doteq \frac{b}{2}$ положительна. Следовательно, при $D = 0$ уравнение не имеет корней на рассматриваемом промежутке $(-2\ ;\ 0)$. Далее, при $D > 0$, опять-таки благодаря тому, что $t_0 > 0$, больший корень уравнения всегда положителен. Поэтому осталось рассмотреть лишь один случай, когда меньший корень принадлежит интервалу $(-2\ ;\ 0)$ (рис. 83). Тогда получаем $f(0) < 0$ и $f(-2) > 0$. Отсюда

$$\begin{cases} a > 0, \\ a < 4 + 2b. \end{cases}$$

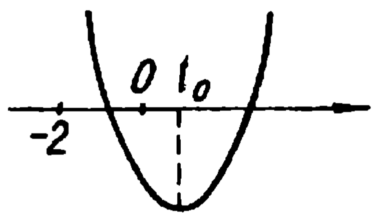


Рис. 83

Поскольку второе неравенство системы должно выполняться для всех $b > 0$, то отсюда получаем, что $a \leqslant 4$.

*Ответ.* $0 < a \leqslant 4$.

**III.132.** (СГУ). При каких $a$ система

$$\begin{cases} 2^{x+y} - 2^{2x-y} = 1 - 2^a, \\ 2^{4x} - 2^{x+3y+1} = 3 \cdot 2^{a+2y} - 2^{2y+2} \end{cases}$$

имеет единственное решение?

*Решение.* Умножив второе уравнение системы на $2^{-2y}$, получим

$$\begin{cases} 2^{x+y} - 2^{2x-y} = 1 - 2^a, \\ 2^{4x-2y} - 2 \cdot 2^{x+y} = 3 \cdot 2^a - 4. \end{cases}$$

Пусть $2^{x+y} = u$, $2^{2x-y} = v$, где $u > 0$, $v > 0$. Отсюда имеем

$$\begin{cases} u - v = 1 - 2^a, \\ v^2 - 2u = 3 \cdot 2^a - 4. \end{cases}$$

Подставив $u = v + 1 - 2^a$ во второе уравнение системы, получим квадратное уравнение $v^2 - 2v - 2^a + 2 = 0$.

Требование единственности решения исходной системы может послужить поводом для предъявления аналогичного требования к полученному квадратному уравнению. Однако, столкнувшись с ситуациями подобного рода, важно не упустить, что в результате замены значения новой переменной могут быть ограничены каким-либо множеством. Поэтому вопрос о количестве решений должен быть непосредственно связан с этим множеством. Так, в настоящей задаче в ходе замены установлено, что $v > 0$. Вместе с тем и $u > 0$. Тогда с учетом последней системы получим $v > 2^a - 1$. Таким образом, надо найти значения параметра, при которых уравнение $v^2 - 2v - 2^a + 2 = 0$ имеет единственное решение для $v > 0$ и $v > 2^a - 1$.

Очевидно необходимо, чтобы $D \geqslant 0$, т. е. $2^a - 1 \geqslant 0$. Поэтому значение переменной $v$ можно ограничить лишь одним неравенством $v > 2^a - 1$. Если $D = 0$, т.е. $a = 0$, то рассматриваемое уравнение имеет единственный корень $v = 1$, удовлетворяющий требованию $v > 2^a - 1$. Если $D > 0$, то число $2^a - 1$ должно или находиться в корневом промежутке, или совпадать с меньшим корнем (рис. 84). Отсюда искомые значения параметра $a$ найдем, решив совокупность

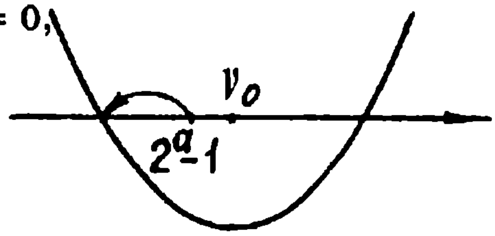



Рис. 84

$$\left[\begin{array}{l} f(2^a - 1) < 0, \\ \left\{\begin{array}{l} f(2^a - 1) = 0, \\ 2^a - 1 < v_0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Нетрудно убедиться, что ее решением будет промежуток $\left[\log_2\dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}; \log_2\dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

*Ответ.* $a = 0$ или $\log_2\dfrac{5 - \sqrt{5}}{2} \leqslant a < \log_2\dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

## Упражнения

III.133. (НГУ). При каких $a$ система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - (y-a)^2 \geq 1, \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

III.134. (УрГУ). При каких $a$ система уравнений

$$\begin{cases} (a+1)y^2 - 2ay + a - 9 = 0, \\ y = \sqrt{1-x} + 2 \end{cases}$$

имеет решение?

III.135. (МГУ). Найдите все действительные $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y(ax-1) = 2|x+1| + 2xy, \\ yx + 1 = x - y \end{cases}$$

имеет действительные решения.

III.136. Для каких $a$ уравнение $\dfrac{x}{(1+x)^2} + 2a\dfrac{\sqrt{x}}{1+x} + 1 = 0$ имеет решения?

III.137. (МАИ). Найти множество всех чисел $a \in R$, для каждого из которых уравнение

$$\sqrt{2(x^2 - x - 2a^2 + 2a + 2)} = x + 1$$

имеет два корня разных знаков.

III.138. (МАИ). При каких значениях $a$ неравенство $z^4 + (z^2 - 1)\log_2 a < 0$ не имеет действительных решений ?

III.139. (МИРЭиА). Найти $a$, при которых все решения уравнения $x^4 + (3a-2)x^2(x+1) + (2a^2 - a - 3)(x+1)^2 = 0$ удовлетворяют условию $-3 \leq x \leq 0$.

III.140. (МГУ). Для каждого значения $a$ найти все значения $x$, удовлетворяющие условию

$$(x-3)(x+1) + 3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = (a-1)(a+2)$$

и найти все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение имеет только один корень.

III.141.(НГУ). При каких действительных значениях параметра $\beta$ уравнение $2(\beta^2 + 1)\cos^2 x + 4\beta^2\cos x + 1 = 0$ не имеет решений?

III.142.(НГУ). При каких действительных значениях параметра $\alpha$ уравнение $(\alpha^2 + 1)\sin^2 x + 2\alpha^2\sin x + \frac{1}{2} = 0$ имеет хотя бы одно решение?

III.143. Найти $a$, при которых уравнение $2\sin^2 x - 3\cos x\sin x - 3\cos^2 x = a$ не имеет решений, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.

III.144.(МГУ). При каких значениях параметра $a$ неравенство $\sin^6 x + \cos^6 x + a\sin x\cos x \geqslant 0$ выполняется при всех $x$?

III.145.(МГУ). Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых неравенство $a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a\cos x > 2$ выполняется для любого значения $x$.

III.146.(МГУ). Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых неравенство $\cos^2 x + 2a\sin x - 2a < a^2 - 4$ выполняется для любого значения $x$.

III.147.(МГУ). Найти $a$, при которых неравенство $(a - 1)\sin^2 x + 2(a - 2)\sin x + a + 3 < 0$ не имеет решений.

III.148.(МИРЭиА). Найти все значения параметра $a$, для которых неравенство

$$\sin^5 x + \cos^5 x - a(\sin x + \cos x) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{a^2 - 11}{2}(\sin x + \cos x)\sin x\cos x$$

выполняется при всех $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$.

III.149.(МГУ). Найти $a$, при которых неравенство $\sqrt{2\pi - |x|}\,(\operatorname{ctg}^2(\sin x) - 2a\operatorname{ctg}(\sin x) - a) \leqslant 0$ имеет и при том конечное число решений и указать эти решения.

III.150. Найти $a$, при которых корни уравнения

$$(a - 1)\log_3^2(x - 2) - 2(a + 1)\log_3(x - 2) + a - 3 = 0$$

меньше 3.

**III.151.** (ЛГУ). Найти все вещественные $a$, для которых при всех $b < 0$ существует в интервале $x > 4$ решение уравнения $a \log_{\left(1-\frac{2}{x}\right)} 4 = \log_4 \left(1 - \frac{2}{x}\right) + b.$

**III.152.** (СГУ). Найти $a$, при которых существуют решения системы

$$\begin{cases} 3^{2x+y} + 3^{x+3y} = 3, \\ 3^{y} + \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+3y} = 3^{a-2x}. \end{cases}$$

**III.153.** (МГУ). При каких значениях параметра $a$ неравенство $4^{\cos x} - 2(a-3)\cdot 2^{\cos x} + a + 3 > 0$ выполняется при всех действительных $x$?

**III.154.** (КПИ). Для каких значений параметра $m$ неравенство $(m+2)4^{|x-1|} - 2m\cdot 2^{|x-1|} + 3m + 1 > 0$ выполняется при всех действительных $x$?

# Глава IV

# АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

## §1. Применение производной

В каждом из пяти пунктов настоящего параграфа собраны наиболее распространенные (классические) типы задач на применение аппарата математического анализа, изучаемого в школе.

### А. Касательная к кривой.

**IV.1.** (ЛГУ). При каком значении параметра $k$ касательная к графику функции $f(x) = kx^2$ образует с осью $x$ угол, равный $\frac{\pi}{3}$, и отсекает от четвертой четверти треугольник, площадь которого равна $\frac{8\sqrt{3}}{3}$?

*Решение.* Пусть $(x_0\,;\,y_0)$ — координаты точки касания. Уравнение касательной к графику функции $f$ в точке $(x_0\,;\,y_0)$ имеет вид $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. По условию имеем $f'(x) = 2kx$, $f'(x_0) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Отсюда $2kx_0 = \sqrt{3}$. Тогда уравнение касательной становится таким: $y = \sqrt{3}(x - x_0) + \frac{x_0\sqrt{3}}{2}$.

Найдем координаты точек пересечения касательной с осями. При $x = 0$ получаем $y = -\frac{\sqrt{3}x_0}{2}$. При $y = 0$ имеем $x = \frac{x_0}{2}$. Тогда

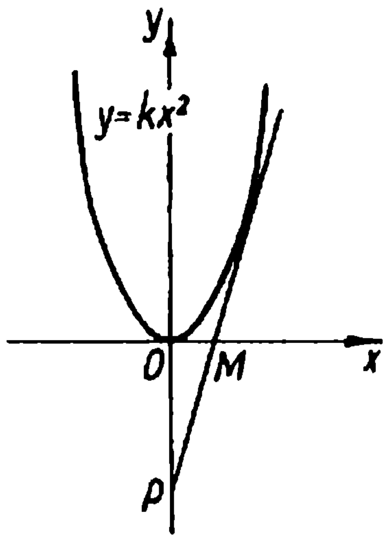



Рис. 85

$OP = \frac{\sqrt{3}x_0}{2}$, $OM = \frac{x_0}{2}$ (рис. 85). По условию $OM \cdot OP = \frac{16\sqrt{3}}{3}$. Отсюда $x_0^2 = \frac{64}{3}$, и поскольку $x_0 > 0$, то $x_0 = \frac{8}{\sqrt{3}}$. Наконец, $k = \frac{\sqrt{3}}{2x_0} = \frac{3}{16}$.

*Ответ.* $k = \frac{3}{16}$.

IV.2. (МАИ). Найти все $a$, при которых на графике функции $f(x) = ax^3 + (a-1)x^2$ существует единственная точка с отрицательной абсциссой, касательная в которой параллельна прямой $y = 2x$.

*Решение.* Ясно, что угловой коэффициент касательной, о которой говорится в условии, равен 2. Тогда, если $x$ — абсцисса точки касания, то $f'(x) = 2$, т.е. $3ax^2 + 2(a-1)x = 2$. Задача свелась к тому, чтобы найти все значения $a$, при которых уравнение $3ax^2 + 2(a-1)x - 2 = 0$ имеет ровно один отрицательный корень. (С подобными задачами мы знакомились в §2 главы III.)

Если $a = 0$, то рассматриваемое уравнение принимает вид $-2x - 2 = 0$ и имеет единственный отрицательный корень $x = -1$. Если $a \neq 0$, то уравнение удобно записать следующим образом: $x^2 + \frac{2(a-1)x}{3a} - \frac{2}{3a} = 0$. Легко установить, что дискриминант этого квадратного уравнения равен нулю при $a = -2 - \sqrt{3}$ или $a = -2 + \sqrt{3}$. При таких значениях параметра получаем один двойной корень $x = \frac{1-a}{3a}$, который очевидно отрицателен. Далее, в силу теоремы Виета для существования одного отрицательного корня достаточно потребовать, чтобы $-\frac{2}{3a} < 0$. Заметим, что это неравенство обеспечивает положительность дискриминанта. Отсюда $a > 0$. Соберем полученные результаты в

*Ответ.* $a = -2 - \sqrt{3}$, или $a = -2 + \sqrt{3}$, или $a \geqslant 0$.

IV.3. (МАИ). Найти все значения $a$, при которых числа $x_1$, $\sqrt{a^2+3}$, $x_2$ образуют геометрическую прогрессию, если $x_1$ и $x_2$ — абсциссы точек графика функции $f(x) = x^3 + 7x^2 + (2 - 9a)x$, в которых касательные к графику наклонены к оси абсцисс под углом $135°$.

*Решение.* Вначале заметим, что должно иметь место равенство $x_1x_2 = a^2 + 3$. Очевидно $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $f'(x) = \operatorname{tg} 135°$. Имеем $3x^2 + 14x + 2 - 9a = -1$, $3x^2 + 14x + 3 - 9a = 0$.

Понятно, что нет необходимости решать полученное квадратное уравнение. Достаточно лишь с помощью теоремы Виета найти произведение его корней, не забыв при этом потребовать их существование. Имеем

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ x_1x_2 = 1 - 3a. \end{cases}$$

Искомые значения параметра найдем, решив систему

$$\begin{cases} 40 + 27a \geqslant 0, \\ 1 - 3a = a^2 + 3. \end{cases}$$

Отсюда

*Ответ.* $a = -1$.

IV.4. (Красноярский ГУ). Найти все $a$, при которых хорда параболы $y = -a^2x^2 + 5ax - 4$ касается кривой $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ в точке $x = 2$ и делится этой точкой пополам.

*Решение.* Найдем уравнение касательной, проведенной к графику функции $f$ в точке $x = 2$. Имеем $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $f'(2) = 1$, $f(2) = -1$. Отсюда $y = x - 3$ — уравнение касательной.

Пусть $x_1$ и $x_2$ — абсциссы концов хорды параболы, о которой говорится в условии. Тогда эти значения переменной $x$ будут корнями уравнения $-a^2x^2 + 5ax - 4 = x - 3$. Поскольку $x = 2$ является абсциссой середины хорды, то $2 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, т.е. $x_1 + x_2 = 4$. Если корни уравнения $a^2x^2 + x(1 - 5a) + 1 = 0$

существуют, то их сумма равна $\frac{5a-1}{a^2}$. (Обратим внимание, что в силу условия случай $a = 0$ и $D = 0$ можно не рассматривать.) Тогда искомые значения параметра — решения системы

$$\begin{cases} D > 0, \\ \frac{5a-1}{a^2} = 4. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} 21a^2 - 10a + 1 > 0, \\ 4a^2 - 5a + 1 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

*Ответ.* $a = 1$.

**IV.5.** (МАИ). Парабола проходит через точку $A(-1; 1)$. Касательная к этой параболе, проведенная в точке $A$, параллельна прямой $y = \frac{1}{2}x$. Абсцисса одной из точек пересечения параболы с осью $x$ равна $a$. Какие значения может принимать $a$, если известно, что абсцисса второй точки пересечения положительна?

*Решение.* Пусть уравнение параболы, о которой идет речь в условии, имеет вид $f(x) = mx^2 + nx + q$, где $m \neq 0$. Так как парабола проходит через точку $A(-1; 1)$, то $1 = m - n + q$. Из условия следует также, что $f'(-1) = \frac{1}{2}$. Отсюда $-2m + n = \frac{1}{2}$. Выразим $n$ и $q$ через $m$. Имеем $n = 2m + \frac{1}{2}$, $q = m + \frac{3}{2}$.

Пусть $x_1$ и $x_2$ — корни квадратичной функции $f$. Тогда $x_1 = a$, $x_2 > 0$. В силу теоремы Виета получаем $a + x_2 = -\frac{n}{m} = -2 - \frac{1}{2m}$, $ax_2 = \frac{q}{m} = 1 + \frac{3}{2m}$. Отсюда $3(a + x_2) + ax_2 = -5$. Далее, $a = -\frac{5 + 3x_2}{x_2 + 3} = -3 + \frac{4}{x_2 + 3}$. Поскольку $x_2 > 0$, то запишем

*Ответ.* $-3 < a < -\frac{5}{3}$.

## Упражнения

**IV.6.** (НГУ). Парабола с вершиной на оси $x$ касается прямой, проходящей через точки $A\,(1\,;\,2)$ и $B\,(2\,;\,4)$ в точке $B$. Найти уравнение параболы.

**IV.7.** (МАИ). При каких $b$ и $c$ прямые $y = x$ и $y = -2x$ являются касательными к графику функции $y = x^2 + bx + c$?

**IV.8.** (МАИ). В двух точках $M$ и $N$ графика функции $y = 2x^2 - 3x + a$ к нему проведены касательные. Найти абсциссу точки пересечения касательных, если известно, что прямая $MN$ параллельна прямой $y = -2x$.

**IV.9.** (МАИ). В двух точках $M$ и $N$ графика функции $y = 3x^2 - 4x + a$ к нему проведены касательные. Известно, что прямая $MN$ параллельна прямой $y = -x$. Найти абсциссу точки пересечения касательных.

**IV.10.** (МАИ). Найти все действительные значения $a$, при которых на графике функции $y = ax^3 - (a-1)x^2$ существует единственная точка с отрицательной абсциссой, касательная в которой к этому графику параллельна прямой $y = -2x$.

**IV.11.** (ЛГУ). При каком значении $a$ касательная к графику функции $y = a - x^2$ отсекает от первой четверти равнобедренный прямоугольный треугольник с площадью равной $\frac{9}{32}$?

**IV.12.** (МИСиС). Графики функций $y = x^2 - 5x + 7$ и $y = x^2 + ax + b$ проходят через точку $(4\,;\,3)$. Через эту же точку к данным графикам проведены касательные. Найти $a$ и $b$, если площади треугольников, образованных двумя касательными и, соответственно, осями абсцисс и ординат, равны.

**IV.13.** (МАИ). Парабола проходит через точку $A\,(1\,;-2)$. Касательная к этой параболе, проведенная в точке $A$, параллельна прямой $y = -x - 1$. Абсцисса одной из точек пересечения параболы с осью $x$ меньше 10. Какие значения может принимать абсцисса другой точки пересечения?

**IV.14.** (МФТИ). Из точки $M\,(1\,;\,1)$ проведены касательные к двум ветвям гиперболы $y = \frac{k}{x}$ $(k < 0)$, касающиеся этих ветвей в точках $A$ и $B$, причем треугольник $MAB$ — правильный. Найти $k$ и площадь треугольника $MAB$.

**IV.15.** Найти уравнение прямой, касающейся графика функции $y = x^4 + 2x^3 + x^2 + x - 1$ в двух точках.

**IV.16.** (МАИ). К графику функции $y = \frac{a(x-1)-1}{ax-1}$ в точках его пересечения с осями координат проведены две касательные. При каких значениях параметра $a$ абсцисса точки их пересечения будет больше 2?

## Б. Критические точки.

**IV.17.** (МИФИ). Найти критические точки функции $f(x) = (2x-1)\sqrt[4]{x-a}$.

*Решение.* Напомним определение критической точки: внутренняя точка области определения функции, в которой производная равна нулю или не существует, называется критической.

Имеем $f'(x) = 2\sqrt[4]{x-a} + \frac{2x-1}{4\sqrt[4]{(x-a)^3}} = \frac{10x-8a-1}{4\sqrt[4]{(x-a)^3}}$. Поскольку найденная производная существует во всех внутренних точках области определения функции $f$, то критические точки следует искать среди корней уравнения $f'(x) = 0$. Отсюда $x = \frac{4a}{5} + \frac{1}{10}$. Осталось потребовать, чтобы $\frac{4a}{5} + \frac{1}{10} > a$. Получаем $a < \frac{1}{2}$.

*Ответ.* Если $a < \frac{1}{2}$, то $x = \frac{4a}{5} + \frac{1}{10}$ — критическая точка; если $a \geqslant \frac{1}{2}$, то критических точек нет.

**IV.18.** (ЛЭТИ). При каких $a$ и $b$ функция $f(x) = ae^{2x} + be^{-x}$ не имеет экстремумов?

*Решение.* Как нам кажется, в настоящей задаче удобно придерживаться такой схемы. Вначале найти критические точки, выяснить, какие из них являются точками экстремума, а затем получить условия отсутствия последних.

Запишем $f'(x) = 2ae^{2x} - be^{-x} = e^{-x}(2ae^{3x} - b)$. Очевидно все критические точки данной функции — это корни уравнения $f'(x) = 0$. Имеем $2ae^{3x} - b = 0$. Если $a = b = 0$, то любое действительное число $x$ является корнем этого уравнения, а следовательно, критической точкой функции $f$. Более того, при $a = b = 0$ $f(x) \equiv 0$, и всякий $x \in R$ — ее точка экстремума.

Если $a \neq 0$, то $e^{3x} = \dfrac{b}{2a}$. Последнее уравнение имеет корни, если $\dfrac{b}{2a} > 0$. Причем легко проверить, что корень этого уравнения $x = \dfrac{1}{3} \ln \dfrac{b}{2a}$, будучи критической точкой, является точкой экстремума функции $f$. Таким образом, любое решение уравнения $f'(x) = 0$ является не только критической точкой, но и точкой экстремума. Следовательно, для ответа на вопрос задачи достаточно найти условия отсутствия корней этого уравнения. А поскольку выше мы получили условия наличия корней, то решить противоположную задачу не составляет большого труда.

В первую очередь должно выполняться неравенство $a^2 + b^2 \neq$ $\neq 0$, т.е. $a$ и $b$ одновременно равными нулю быть не могут. Далее, если $a = 0$ и $b \neq 0$ или $a \neq 0$ и $b = 0$, то очевидно исследуемое уравнение корней не имеет. И последнее: неравенство $\dfrac{b}{2a} < 0$ также обеспечивает отсутствие корней. Найденные условия дают возможность записать следующий

*Ответ.* $ab \leqslant 0$ и $a^2 + b^2 \neq 0$.

**IV.19.** (КГУ). При каких $a$ функция $f(x) = x^3 +$ $+ 3(a - 7)x^2 + 3(a^2 - 9)x + 1$ имеет положительную точку максимума?

*Решение.* Запишем $f'(x) = 3x^2 + 6(a - 7)x + 3(a^2 - 9)$. Очевидно, если полученная квадратичная функция не имеет корней ($D < 0$), то функция $f$ не имеет критических точек, а следовательно, и экстремумов. Если уравнение $f'(x) = 0$ имеет один двойной корень ($D = 0$), то этот корень, будучи критической точкой, не является точкой экстремума. Осталось рассмотреть случай, когда $D > 0$. Пусть $x_1$ и $x_2$ — корни функции $f'$, причем $x_1 < x_2$. Тогда слева от $x_1$ имеем $f'(x) > 0$, а справа — $f'(x) < 0$. Следовательно, $x = x_1$ — точка максимума. Тогда задача свелась к тому, чтобы найти все $a$, при которых меньший корень, а значит, оба корня уравнения $f'(x) = 0$ положительны. Это легко сделать с помощью теоремы Виета. Действительно, достаточно потребовать

$$\begin{cases} D > 0, \\ a^2 - 9 > 0, \\ 7 - a > 0, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} 58 - 14a > 0, \\ a^2 > 9, \\ a < 7. \end{cases}$$

Решив последнюю систему, получим

*Ответ.* $a < -3$ или $3 < a < \frac{29}{7}$.

**IV.20.** (МГТУ). Найти все значения параметра $a$, при которых функция $f(x) = a8^x + (3a+1)4^x + (9a+1)2^x + 2$ не имеет экстремумов.

*Решение.* Имеем $f'(x) = a8^x \ln 8 + (3a+1)4^x \ln 4 + (9a+1) \times$ $\times 2^x \ln 2 = 2^x \ln 2(3a2^{2x} + 2(3a+1)2^x + 9a + 1)$.

Рассмотрим функцию $g(t) = 3at^2 + 2(3a+1)t + 9a + 1$ с областью определения $D(g) = (0 ; \infty)$. Если функция $g$ на $(0 ; \infty)$ не имеет корней, то функция $f$ не имеет критических точек. Если функция $g$ на этом же промежутке имеет корень, но двойной кратности, то функция $f$ имеет критическую точку, которая не является точкой экстремума. Понятно, что при ином «поведении» функции $g$ на $D(g)$ функция $f$ будет иметь экстремумы.

Таким образом, достаточно решить следующую задачу: найти все значения $a$, при которых уравнение $3at^2 + 2(3a+1)t +$ $+ 9a + 1 = 0$ на промежутке $(0 ; \infty)$ или вообще корней не имеет, или имеет корень, но двойной кратности.

При $a = 0$ получаем $t = -\frac{1}{2}$, что подходит. При $a \neq 0$ имеем квадратное уравнение, которое запишем так: $t^2 + \frac{2(3a+1)t}{3a} +$ $+ \frac{9a+1}{3a} = 0$. В первую очередь потребуем, чтобы его дискриминант был неположительным. Получаем $\frac{D}{4} = \frac{-18a^2 + 3a + 1}{9a^2} \leqslant 0$, т.е. $a \leqslant -\frac{1}{6}$ или $a \geqslant \frac{1}{3}$. При найденных $a$ рассматриваемое уравнение или не имеет корней, или имеет корень двойной кратности.

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два различных корня $t_1$ и $t_2$, которые должны быть отрицательными или в крайнем случае больший из них $t_2$ может равняться нулю. Описать эту возможность поможет теорема Виета. Имеем

$$\begin{cases} D > 0, \\ \dfrac{9a + 1}{3a} \geq 0, \\ \dfrac{3a + 1}{3a} > 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем $0 < a < \frac{1}{3}$.

Объединим полученные значения для параметра в

*Ответ.* $a \leq -\frac{1}{6}$ или $a \geq 0$.

**IV.21.** (МИФИ). Найти $f'(x)$ и все $a$, при которых функция $f(x) = -\cos x + \dfrac{2a - 3}{a + 7}x + \operatorname{tg}^3 a$ имеет на отрезке $\left[-\dfrac{227\pi}{12}; -\dfrac{109\pi}{6}\right]$ не менее двух критических точек.

*Решение.* $f'(x) = \sin x + \dfrac{2a - 3}{a + 7}$. Найдем, при каких $a$ уравнение $\sin x = \dfrac{3 - 2a}{a + 7}$ имеет не менее двух корней на отрезке $\left[\dfrac{13\pi}{12}; \dfrac{11\pi}{6}\right]$. (В силу периодичности функции $y = \sin x$ мы смогли провести замену отрезка.) На рассматриваемом отрезке $\sin x < 0$, причем $\sin\dfrac{11\pi}{6} = -\dfrac{1}{2} < \sin\dfrac{13\pi}{12}$ (рис. 86). Тогда исследуемое уравнение на указанном промежутке имеет не менее двух корней, если

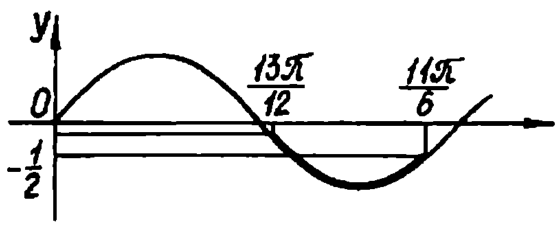


Рис. 86

$$\begin{cases} \dfrac{3 - 2a}{a + 7} > -1, \\ \dfrac{3 - 2a}{a + 7} \leq -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда $\frac{13}{3} \leqslant a < 10$.

Предостережем читателя от ошибки, которая скорее всего может возникнуть из–за невнимательности. При нахождении производной «исчезло» слагаемое $\operatorname{tg}^3 a$. Поэтому при составлении ответа следует не упустить, что $a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$.

*Ответ.* $\frac{13}{3} \leqslant a < \frac{3\pi}{2}$, или $\frac{3\pi}{2} < a < \frac{5\pi}{2}$, или $\frac{5\pi}{2} < a < 10$.

**IV.22.** (МИСиС). При каких значениях $a$ функция $f(x) = x(1-a) + 3(1-2a)\sin\frac{x}{3} + \frac{3}{2}\sin\frac{2x}{3} + \pi a$ имеет не более двух экстремумов на промежутке $(\pi; 5\pi)$?

*Решение.* Имеем $f'(x) = 1 - a + (1-2a)\cos\frac{x}{3} + \cos\frac{2x}{3}$. Корни уравнения $f'(x) = 0$ будут критическими точками функции $f$. Запишем $1 - a + (1-2a)\cos\frac{x}{3} + \cos\frac{2x}{3} = 0$. Легко установить, что это уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}, \\ \cos\frac{x}{3} = a. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности на промежутке $(\pi; 5\pi)$ имеет два корня $x_1 = 2\pi$, $x_2 = 4\pi$, которые являются критическими точками функции $f$. Записав производную в виде $f'(x) = 2\left(\cos\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{3} - a\right)$, несложно заметить, что полученные критические точки становятся точками экстремума лишь при $a \neq -\frac{1}{2}$ (если $a = -\frac{1}{2}$, то производная сохраняет постоянный знак, а следовательно, функция $f$ экстремумов не имеет).

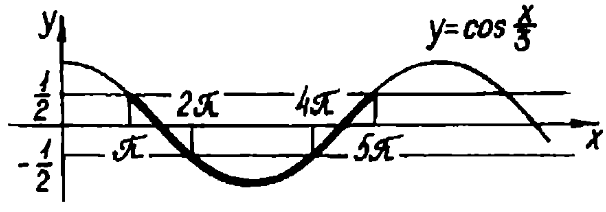


Рис. 87

Итак, если $a \neq -\frac{1}{2}$, то функция $f$ на рассматриваемом промежутке имеет не менее двух экстремумов. Следовательно, надо найти такие $a$, при которых второе уравнение совокупности больше не давало бы экстремумов.

На рассматриваемом промежутке $(\pi\ ;\ 5\pi)$ функция $y = \cos\frac{x}{3}$ принимает все значения из промежутка $\left[-1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ (рис. 87). Понятно, что если $a \in \left(-1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ и $a \neq -\frac{1}{2}$, то функция $f$ будет иметь четыре экстремума. Значит, при других $a$ функция будет иметь не более двух экстремумов.

*Ответ.* $a \leqslant -1$, или $a = -\frac{1}{2}$, или $a \geqslant \frac{1}{2}$.

**IV.23.** (ЛГУ). Для каких $a$ и $b$ графики функций $f(x) = 2x^4 - a^2x^2 + b - 1$ и $g(x) = 2ax^3 - 1$ имеют лишь две общие точки?

*Решение.* Выясним, при каких $a$ и $b$ уравнение $2x^4 - 2ax^3 - a^2x^2 + b = 0$ имеет только два различных корня. (Понятно, что этого будет достаточно для ответа на вопрос задачи.)

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = 2x^4 - 2ax^3 - a^2x^2 + b$. Имеем $\varphi'(x) = 8x^3 - 6ax^2 - 2a^2x = 8x(x - a)\left(x + \frac{a}{4}\right)$.

Исследуем знак производной при $a \neq 0$. Для $a > 0$ знак производной на промежутках, образованных критическими точками, показан на рис. 88, *а*; для $a < 0$ — на рис. 88, *б*. Отсюда можно сделать вывод, что при $a \neq 0$ $x = -\frac{a}{4}$ и $x = a$ — точки минимума, $x = 0$ — точка максимума. Имеем $\varphi(0) = b$, $\varphi(a) = b - a^4$, $\varphi\left(-\frac{a}{4}\right) = b - \frac{3a^4}{128}$. Очевидно $\varphi(a) < \varphi\left(-\frac{a}{4}\right)$.

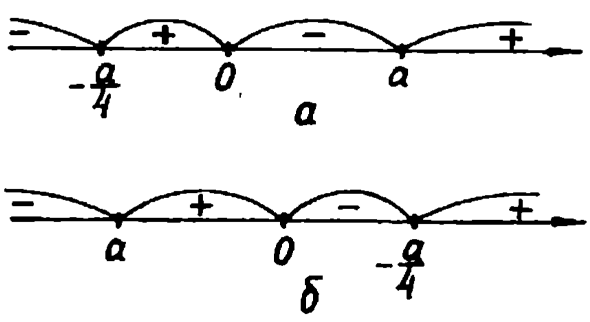


Рис. 88

Дальнейшее исследование проведем в зависимости от знака $b$. Для $b > 0$, т.е. $\varphi(0) > 0$, график функции $\varphi$ будет пересекать ось абсцисс только в двух

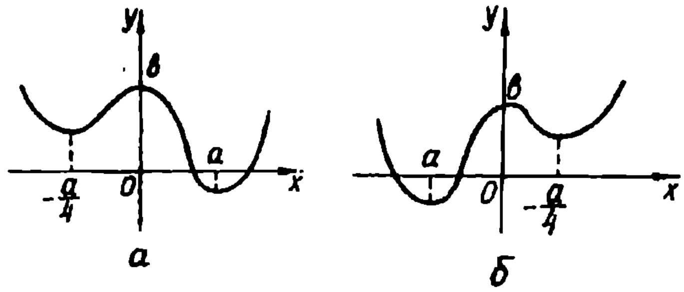



Рис. 89 Рис. 89

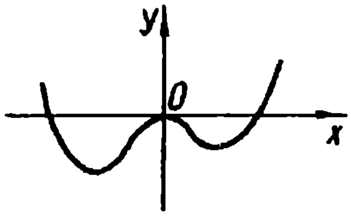



Рис. 90

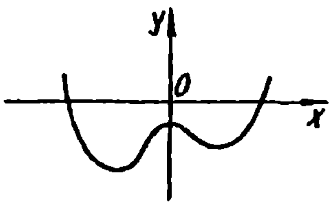



Рис. 91

точках, если $\varphi(a) < 0$ и $\varphi\left(-\frac{a}{4}\right) > 0$ (рис. 89). (Заметим, что неравенство $\varphi(a) < \varphi\left(-\frac{a}{4}\right)$ существенно сокращает перебор возможных случаев.) Отсюда $a^4 > b$ и $a^4 < \frac{128b}{3}$.

Теперь получаем $\sqrt[4]{b} < |a| < \sqrt[4]{\frac{128b}{3}}$.

Для $b = 0$ имеем $\varphi(0) = 0$, $\varphi(a) = -a^4 < 0$, $\varphi\left(-\frac{a}{4}\right) = -\frac{3a^4}{128} < 0.$ Следовательно, график функции $\varphi$ имеет с осью абсцисс три общие точки (рис.90).

Для $b < 0$ получаем $\varphi(a) < 0$, $\varphi(0) < 0$, $\varphi\left(-\frac{a}{4}\right) < 0$, и график функции $\varphi$ пересекает ось абсцисс только в двух точках (рис. 91).

Решение станет полным, если мы разберем еще один случай, когда $a = 0$. При таком значении $a$ исследуемое уравнение приобретает вид $2x^4 + b = 0$. Ясно, что это уравнение имеет только два различных корня лишь при $b < 0$.

*Ответ.* $b < 0$ и $a$ — любое; $b > 0$ и $\sqrt[4]{b} < |a| < \sqrt[4]{\frac{128b}{3}}$; при остальных $a$ и $b$ графики функций $f$ и $g$ не обладают требуемыми свойствами.

## Упражнения

**IV.24.** (МИНГП). При каком значении параметра $a$ значения функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + a$ в точке $x = 2$ и в точках экстремума, взятые в некотором порядке, образуют геометрическую прогрессию?

**IV.25.** (УрГУ). При каких $a > 0$ точка $x = 3$ является точкой минимума функции $f(x) = 2x^3 - 6a^2x + 3$?

**IV.26.** (МАИ). При каких действительных $a$ на интервале $(1; 3)$ лежит ровно одна критическая точка функции $f(x) = \frac{x^3}{3} + (a+1)x^2 - (2a+3)x + 1$?

**IV.27.** (МАИ). При каких действительных значениях $a$ на интервале $(-2; 3)$ есть более одной критической точки функции $f(x) = \frac{x^3}{3} + (2-a)x^2 - 2ax + 3$?

**IV.28.** (КГУ). При каких значениях параметра $m$ точки экстремумов функции $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - 4$ лежат в промежутке $(-2; 4)$?

**IV.29.** (МИФИ). Найдите все значения $a$, при которых функция $f(x) = (a^2 - 3a + 2)\left(\cos^2\frac{x}{4} - \sin^2\frac{x}{4}\right) + (a-1)x + \sin 1$ не имеет критических точек.

**IV.30.** (КГУ). При каких значениях параметра $a$ функция $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + (a+2)x^2 + (a-1)x + 2$ имеет отрицательную точку минимума?

**IV.31.** (МИФИ). Найдите критические точки функции $f(x) = 2\sin a\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{\sqrt{4a - a^2}}$.

**IV.32.** (МИФИ). Найдите $f'(x)$ и критические точки функции

$$f(x) = \ln\left(\left(\frac{1}{7}\right)^x + \left(\frac{1}{7}\right)^{-x}\right) + x\ln 7^a - \arccos\left(a^2 + \frac{2a}{3} + \frac{10}{9}\right)$$

при всех допустимых значениях $a$.

**IV.33.** (МИФИ). Найдите $f'(x)$ и все значения параметра $a$, при которых функция $f(x) = (a^2 + 4a)x - \sin x + \operatorname{ctg}^5 a + 1$ имеет на отрезке $\left[-8\pi - \arccos\frac{1}{5}; -6\pi - \arccos\frac{1}{3}\right]$ не более двух критических точек.

**IV.34.** (МГТУ). Найдите все значения параметра $a$, при которых функция $y = a8^x - (3a-2)4^x + 3(3a-2)2^x - 1$ не имеет экстремумов.

IV.35. (МГТУ). Найдите все значения параметра $a$, при которых функция $y = a8^x + \frac{3a+5}{2}4^x + (6a+7)2^x$ не имеет экстремумов.

IV.36. (МАИ). При каких действительных значениях $a$ и $b$ все экстремумы функции $f(x) = \frac{5a^2}{3}x^3 + 2ax^2 - 9x + b$ положительны и максимум находится в точке $x_0 = -\frac{5}{9}$?

IV.37. (МАИ). При каких действительных значениях $a$ и $b$ все экстремумы функции $f(x) = a^2x^3 - 0{,}5ax^2 - 2x - b$ положительны и минимум находится в точке $x_0 = \frac{1}{3}$?

IV.38. (ЛГУ). В зависимости от $p$ укажите те значения $a$, для которых уравнение $x^3 + 2px^2 + p = a$ имеет три различных действительных корня.

IV.39. (ЛГУ). При каких $p$ и $q$ существуют четыре различные параллельные оси ординат прямые, такие, что каждая из них пересекает графики функций $f(x) = px^4 - \frac{4}{5}x^5 + 1$ и $g(x) = \frac{p^2}{3}x^3 - qx - 2$ в точках, в которых касательные к графикам $f$ и $g$ параллельны?

## В. Монотонность.

IV.40. (МАИ). Найти все $a > 0$, для которых функция $f(x) = 2^{\frac{a(x+1)}{a^2+3a-x}}$ монотонно возрастает на промежутке $[1\,;\,4)$.

*Решение.* Запишем $f'(x) = \frac{a(a^2+3a+1)}{(a^2+3a-x)^2} \cdot 2^{\frac{a(x+1)}{a^2+3a-x}}\ln 2$. Так как $a > 0$, то $a(a^2+3a+1) > 0$, и $f'(x) > 0$ при всех допустимых $x$, т.е. для $x \neq a^2 + 3a$. Следовательно, функция $f$ возрастает на $[1\,;\,4)$, если $f$ определена во всех точках указанного промежутка. Отсюда достаточно потребовать

$$\left[\begin{array}{l} a^2 + 3a < 1, \\ a^2 + 3a \geq 4. \end{array}\right.$$

С учетом $a > 0$ получаем

*Ответ.* $0 < a < \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$ или $a \geqslant 1$.

**IV.41.** (МАИ). При каких значениях параметров $a$ и $b$ значения функции $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 1}{x^2 + bx + a}$ не зависят от $x$?

*Решение.* Договоримся, что требование «не зависеть от $x$» относится ко всем значениям аргумента из области определения функции. Так, например значения функции $f(x) = \dfrac{x}{x}$ не зависят от $x$, т.е. $f$ сохраняет свое значение 1 при всех $x \in D(f)$.

Для решения данной задачи достаточно найти значения параметров $a$ и $b$, при которых $f'(x) = 0$ для всех $x \in D(f)$.

Имеем $\quad f'(x) = \dfrac{b(a-1)x^2 + 2(a^2-1)x + b(a-1)}{(x^2 + bx + a)^2}$. Очевидно $f'(x) \equiv 0$, если одновременно $b(a-1) = 0$, $a^2 - 1 = 0$. Отсюда, если $a = 1$, то $b$ может быть любым; если $a = -1$, то $b$ обязано принимать значение, равное нулю.

*Ответ.* $a = 1$ и $b$ — любое; $a = -1$ и $b = 0$.

**IV.42.** (ВГУ). Найти все $c$, при которых функция $f(x) = (c-12)x^3 + 3(c-12)x^2 + 6x + 7$ монотонно возрастает при всех $x$.

*Решение.* Запишем $f'(x) = 3(c-12)x^2 + 6(c-12)x + 6$.

Остановимся на одном тонком вопросе. Нередко в подобных задачах учащиеся ограничиваются поиском условий, при которых $fprime(x) > 0$. Но поскольку данная функция дифференцируема на $D(f)$ (хотя достаточно было бы ссылки на непрерывность), то в множество, на котором она возрастает (или убывает), могут входить критические точки. (Классический пример: функция $y = x^3$ возрастает на $R$, однако ее производная не строго положительна, а неотрицательна.)

Таким образом, найдем все значения $c$, при которых неравенство $fprime(x) \geqslant 0$ выполняется при всех $x$. Очевидно сперва следует рассмотреть случай, когда $c = 12$. Получаем $f'(x) = 6 > 0$ при всех $x$. Если $c \neq 12$, то $f'$ — квадратичная функция. Она принимает неотрицательные значения при всех $x$, если $D \leqslant 0$ и $c - 12 > 0$. Имеем

$$\begin{cases} (c-12)^2 - 2(c-12) \leqslant 0, \\ c - 12 > 0. \end{cases}$$

Отсюда $12 < c \leqslant 14$.

*Ответ.* $12 \leqslant c \leqslant 14$.

**IV.43.** (МАИ). При каких значениях $a$ функция $f(x) = 2ax^3 + 3(3 - 2a)x^2 - 36x + 4$ возрастает на отрезке $\left[1\ ;\ \frac{3}{2}\right]$?

*Решение.* Имеем $f'(x) = 6ax^2 + 6(3 - 2a)x - 36 = 6(x - 2)\times(ax + 3)$. Найдем все $a$, при которых производная принимает неотрицательные значения на отрезке $\left[1\ ;\ \frac{3}{2}\right]$.

На рассматриваемом промежутке $x - 2 < 0$, поэтому для решения задачи достаточно потребовать, чтобы $ax + 3 \leqslant 0$ при всех $x \in \left[1\ ;\ \frac{3}{2}\right]$. Для указанных $x$ получаем $a \leqslant -\frac{3}{x}$. Поскольку функция $y = -\frac{3}{x}$ возрастает на $\left[1\ ;\ \frac{3}{2}\right]$, то $\min\limits_{\left[1;\frac{3}{2}\right]} y = y(1) = -3$. Отсюда

*Ответ.* $a \leqslant -3$.

**IV.44.** (КГУ). При каких $m$ функция $f(x) = 2e^x - me^{-x} + (1 + 2m)x - 3$ монотонно возрастает на всей оси?

*Решение.* Получаем $f'(x) = 2e^x + me^{-x} + 1 + 2m = e^{-x}\times(2e^{2x} + (1 + 2m)e^x + m)$. Рассмотрим функцию $g(t) = 2t^2 + (1 + 2m)t + m$ на $D(g) = (0\ ;\ \infty)$. Тогда искомые значения параметра — это те, при которых $g(t) \geqslant 0$ для всех $t > 0$. Имеем $g(t) = 2(t + m)\left(t + \frac{1}{2}\right)$. Так как на рассматриваемом множестве $t + \frac{1}{2} > 0$, то решением неравенства $g(t) \geqslant 0$ является луч $[-m;\ \infty)$. Теперь ясно, что все неотрицательные $m$ (и только они) удовлетворяют условию задачи.

*Ответ.* $m \geqslant 0$.

**IV.45.** (МАИ). При каких значениях параметра $b$ функция $f(x) = bx^5 - 20x^3 + 5(b + 9)x - 7$ монотонна при всех $x \in R$?

*Решение.* Запишем $f'(x) = 5bx^4 - 60x^2 + 5(b + 9) = 5\times\left(bx^4 - 12x^2 + b + 9\right)$. Поскольку функция $f$ дифференцируема, то для ее монотонности на $R$ достаточно потребовать, чтобы производная $f'$ была или только неположительной, или только неотрицательной.

Как и в предыдущей задаче, обратимся к вспомогательной функции $g(t) = bt^2 - 12t + b + 9$ с областью определения $D(g) = [0\,;\,\infty)$. Те значения параметра, при которых функция $g$ не меняет свой знак на $[0\,;\,\infty)$, и будут искомыми.

Если $b = 0$, то $g(t) = -12t + 9$. Понятно, что в этом случае $g(t)$ меняет свой знак на $D(g)$. Если $b \neq 0$, то $g(t)$ — квадратичная функция, и поиск условий сохранения ее знака естественно следует начать с требования неположительности дискриминанта. Имеем $\frac{D}{4} = 36 - b^2 - 9b \leqslant 0$. Отсюда $b \leqslant -12$ или $b \geqslant 3$. При таких $b$ функция $g(t)$ или неположительна, или неотрицательна при всех $t$, тем более для $t \geqslant 0$. Если $D > 0$, то $g(t)$ сохраняет свой знак на $[0\,;\,\infty)$ тогда и только тогда, когда оба ее корня отрицательны, в крайнем случае больший из них может быть равен нулю (рис. 92, 93). Нужные значения для $b$ найдем с помощью теоремы Виета. Запишем

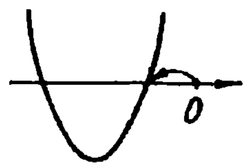



Рис. 92

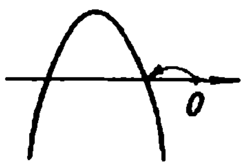



Рис. 93

$$\begin{cases} 36 - b^2 - 9b > 0, \\ \dfrac{12}{b} < 0, \\ \dfrac{b+9}{b} \geqslant 0. \end{cases}$$

Кстати, благодаря тому, что последнее неравенство нестрогое, нет необходимости отдельно рассматривать случай, когда больший корень равен нулю. Решив систему, получим $-12 < b \leqslant -9$.

*Ответ.* $b \leqslant -9$ или $b \geqslant 3$.

## Упражнения

**IV.46.** Найдите все значения параметра $a$, при которых функция $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{a+4}}{1-a} - 1\right)x^5 - 3x + \lg 5$ убывает.

IV.47. (МИФИ). Найдите интервалы монотонного убывания функции $f(x) = 6 - (4c + 3)\left(\frac{1}{5}\right)^x + (c - 7)5^x$.

IV.48. (МИФИ). Найдите интервалы монотонного возрастания функции $f(x) = (c - 3)\,5^x - (3c + 4)\left(\frac{1}{5}\right)^x + 7$.

IV.49. (КГУ). При каких значениях параметра $a$ функция $y = (a + 2)\,x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$ монотонно убывает на всей числовой оси?

IV.50. (КГУ). При каких значениях параметра $a$ функция

$$f(x) = 1 - 2e^x + (1 - a)\,e^{-x} - e^{2x} + (a - 1)\,x$$

монотонно убывает на всей числовой оси?

IV.51. (МГУ). Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых функция

$$f(x) = \sin 2x - 8(a + 1)\sin x + (4a^2 + 8a - 14)\,x$$

является возрастающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

IV.52. (МГУ). Найти все значения параметра $b$, при каждом из которых функция

$$f(x) = \sin 2x - 8(b + 2)\cos x - (4b^2 + 16b + 6)\,x$$

является убывающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

IV.53. (КГУ). При каких значениях параметра $a$ функция $f(x) = \sin x - a\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x + 2ax$ возрастает для всех $x \in R$?

IV.54. (КГУ). При каких значениях параметра $a$ функция $f(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x\,(a + \cos x) + (1 - 2a)\,x - 2$ убывает на всей числовой прямой?

IV.55. (МАИ). При каких значениях $a$ функция $f(x) = 2ax^3 + 3(a + 1)\,x^2 + 6x - 2$ убывает на отрезке $\left[-1\,;\,-\frac{1}{3}\right]$?

**IV.56.** (МАИ). При каких значениях $a$ функция $f(x) = (a + 2)\frac{x^7}{7} - (a^2 + 7a + 12)\frac{x^6}{6}$ возрастает на отрезке $[-2; 0]$?

**IV.57.** (МАИ). Найти все действительные значения параметра $a$, при которых функция $f(x) = \frac{1}{5}(a + 1)x^5 - (a^2 - 3a + 2)\frac{x^4}{4}$ возрастает на отрезке $[-2; 0]$.

**IV.58.** (МАИ). При каких действительных $a$ функция $f(x) = \frac{a+1}{2}x^2 + x + (3 - a)\ln x$ является монотонной на множестве положительных чисел?

**IV.59.** (ЛГУ). Для каких $b$ и для каких отрицательных $a$ функция $f(x) = ax^5 + bx^4 - b^2x^3 - 1$ убывает на промежутке $[0; \infty)$?

**IV.60.** (ЛГУ). Для каких $q$ при любом положительном $p$ функция $f(x) = px^5 - p^2x^4 + p^3qx^3 + 1$ возрастает на интервале $\left(0; \frac{p}{5}\right)$?

## Г. Наибольшие и наименьшие значения функции. Оценки.

**IV.61.** (МИИТ). Найти неотрицательные значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases} \sin x \cos y = a^3 - a^2 - 6a + \dfrac{35}{4}, \\ \cos x \sin y = a^2 - 6a + \dfrac{33}{4} \end{cases}$$

имеет решения. Найти эти решения.

*Решение.* Складывая и вычитая уравнения исходной системы, получаем:

$$\begin{cases} \sin(x + y) = a^3 - 12a + 17, \\ \sin(x - y) = a^3 - 2a^2 + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Нетрудно догадаться, что задача поиска условий существования решений приводит к необходимости оценки правых частей уравнений полученной системы.

Рассмотрим функцию $f(a) = a^3 - 12a + 17$ на $D(f) = [0\,;\,\infty)$. Имеем $f'(a) = 3a^2 - 12$, $f'(a) = 0$ при $a = -2$ или $a = 2$. Поскольку $a \geqslant 0$, то $a = 2$ — единственная критическая точка функции $f$ на $D(f)$. Очевидно $f'(a) < 0$ при $0 \leqslant a < 2$ и $f'(a) > 0$ при $a > 2$. Следовательно, $\min\limits_{[0;\infty)} f(a) = f(2) = 1$.

Итак, при $a \geqslant 0$ $a^3 - 12a + 17 \geqslant 1$. Однако $\sin(x + y) \leqslant 1$, а значит, для существования решений системы необходимо, чтобы $a = 2$.

Сделаем два замечания. Во-первых, отпала необходимость оценивать правую часть второго уравнения системы. Во-вторых, если в рассматриваемой системе уравнения были бы записаны в другом порядке, то мы, естественно, начали бы исследовать функцию $f(a) = a^3 - 2a^2 + \frac{1}{2}$. Однако в этом случае не был бы получен выгодный «стык» правой и левой частей уравнения. Поэтому в подобных ситуациях мы советуем читателю не ограничиваться лишь одной попыткой, а проводить намеченное исследование до конца.

При $a = 2$ рассматриваемая система становится такой:

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 1\,, \\ \sin(x - y) = \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\,, \\ x - y = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n\,, \quad k \text{ и } n \text{ — целые,} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + (-1)^n \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}(2k + n)\,, \\ y = \dfrac{\pi}{4} - (-1)^n \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}(2k - n)\,. \end{cases}$$

*Ответ.* Если $a = 2$, то $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(2k + n)$ и $y = \frac{\pi}{4} - (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(2k - n)$, $k$ и $n$ — целые. При других $a$ решений нет.

IV.62. (III.77.). Найти все значения параметра $a$, при которых неравенство $4^x - a\,2^x - a + 3 \leqslant 0$ имеет хотя бы одно решение.

*Решение.* Данное неравенство равносильно неравенству $a \geqslant \dfrac{4^x + 3}{2^x + 1}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{4^x + 3}{2^x + 1}$. Понятно, что если $a \geqslant \min f(x)$, то исходное неравенство имеет хотя бы одно решение. (Напомним, что с подобными рассуждениями мы знакомились в п. Б §2 гл. II.) Положив $2^x = t$, исследуем на наибольшее и наименьшее значения функцию $g(t) = \dfrac{t^2 + 3}{t + 1}$ с областью определения $D(g) = (0\,;\infty)$. Имеем $g'(t) = \dfrac{t^2 + 2t - 3}{(t + 1)^2}$. С учетом $t > 0$ получим, что $g'(t) = 0$ при $t = 1$. Если $0 < t < 1$, то $g'(t) < 0$. Если $t > 1$, то $g'(t) > 0$. Отсюда $\min\limits_{(0;\infty)} g(t) = g(1) = 2$, а $\min\limits_{(-\infty;\infty)} f(x) = f(0) = 2$. Следовательно, если $a \geqslant 2$, то исходное неравенство имеет хотя бы одно решение.

*Ответ.* $a \geqslant 2$.

IV.63. (КГУ). При каких значениях $a$ неравенство $2(x - a)^4 \leqslant 1 - x$ имеет хотя бы одно решение?

*Решение.* Рассмотрим функцию $f(x) = 2(x - a)^4 + x$. Те значения $a$, при которых $\min f(x) \leqslant 1$, и будут искомыми. Имеем $f'(x) = 8(x - a)^3 + 1$, $f'(x) = 0$ при $x = a - \dfrac{1}{2}$. Очевидно, если $x < a - \dfrac{1}{2}$, то $f'(x) < 0$; если $x > a - \dfrac{1}{2}$, то $f'(x) > 0$. Следовательно, $\min f(x) = f\left(a - \dfrac{1}{2}\right) = a - \dfrac{3}{8}$.

Теперь осталось решить неравенство $a - \dfrac{3}{8} \leqslant 1$. Отсюда

*Ответ.* $a \leqslant \dfrac{11}{8}$.

IV.64. (МАИ). Найти все такие значения параметра $a$, при которых наименьшее значение функции $f(x) = -x^4 + \dfrac{2ax^3}{9} + \dfrac{a^2x^2}{3}$ на отрезке $[-1\,;0\,]$ не превышает

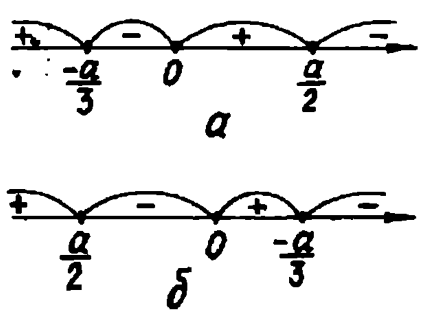


Рис. 94

единицы и достигается на левом конце отрезка.

*Решение.* Запишем $f'(x) = -4x^3 + \frac{2ax^2}{3} + \frac{2a^2x}{3} = -4x \times \times \left(x + \frac{a}{3}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right)$. Сразу заметим, что если $a = 0$, то $f(x) = -x^4$. Поэтому $\min\limits_{[-1;0]} f(x) = f(-1) = -1$. Следовательно, $a = 0$ подходит. Для случаев $a > 0$ и $a < 0$ знак производной показан соответственно на рис. 94 *а*, *б*. Следовательно, $x = -\frac{a}{3}$ и $x = \frac{a}{2}$ — точки максимума функции $f$, а $x = 0$ — точка минимума. Отсюда с учетом характера монотонности функции $f$ получаем, что $f(0) < f\left(-\frac{a}{3}\right)$ и $f(0) < f\left(\frac{a}{2}\right)$. Значит, при исследовании данной функции на наименьшее значение в указанном отрезке нет нужды рассматривать точки $x = -\frac{a}{3}$ и $x = \frac{a}{2}$. Достаточно лишь потребовать, чтобы $f(-1) < f(0)$. А поскольку $f(0) = 0$, то последнее неравенство учитывает требование того, чтобы наименьшее значение функции не превышало единицы. Имеем $-1 - \frac{2}{9}a + \frac{a^2}{3} < 0$. Отсюда

*Ответ.* $\frac{1 - \sqrt{28}}{3} < a < \frac{1 + \sqrt{28}}{3}$.

**IV.65.** (ХГУ). Найти наибольшее значение функции $f(x) = x^4 - 2ax^2 + 3a^2$ на отрезке $[-2; 1]$ в зависимости от значений параметра $a$.

*Решение.* Имеем $f'(x) = 4x^3 - 4ax = 4x(x^2 - a)$. Очевидно, если $a \leqslant 0$, то исходная функция имеет только одну критическую точку $x = 0$, которая, как легко проверить, является точкой минимума. Следовательно, при $a \leqslant 0$ функция $f$ может принимать наибольшее значение на промежутке $[-2; 1]$ лишь в точках $x = -2$ или $x = 1$. Дальше можно поступить так: найти $f(-2)$ и $f(1)$ и сравнить полученные значения. Однако, замечая, что функция $f$ четная, приходим к выводу, что $f(-2) = f(2) > f(1)$ (функция $f$ при $a \leqslant 0$ возрастает на $[0; \infty)$). Таким образом, $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = f(-2) = 16 - 8a + 3a^2$.

Если $a > 0$, то данная функция имеет три критические точки: $x = -\sqrt{a}$; $x = 0$; $x = \sqrt{a}$. Легко установить, что $x = 0$ — точка максимума, $x = \sqrt{a}$ и $x = -\sqrt{a}$ — точки минимума, причем в силу характера монотонности функции $f$ $f(0) > f(-\sqrt{a})$ и $f(0) > f(\sqrt{a})$. Возникла ситуация, близкая предыдущей задаче: точки $x = \sqrt{a}$ и $x = -\sqrt{a}$ в дальнейшем исследовании не участвуют, и остается лишь сравнить значения $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$. Имеем $f(0) = 3a^2$, $f(1) = 3a^2 - 2a + 1$, $f(-2) = 16 - 8a + 3a^2$.

Очевидно при $a \geqslant 2$ $f(0) \geqslant f(-2)$ и $f(0) > f(1)$. Легко проверить, что при $a < 2$ $f(-2) > f(0)$ и $f(-2) > f(1)$. Соберем полученные результаты в

Ответ. Если $a < 2$, то $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = f(-2) = 3a^2 - 8a + 16$; если $a \geqslant 2$, то $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = f(0) = 3a^2$.

IV.66. (МИФИ). Функция $f(x) = (b - x^2 + 6x)^{-1}$ определена на отрезке $[-4; 2]$. Найти все $b$, при которых наименьшее значение функции $f$ на отрезке $[-4; 2]$ больше 0,02.

*Решение.* Рассмотрим квадратичную функцию $g(x) = -x^2 + 6x + b$. Поскольку функция $f$ определена на $[-4; 2]$, то функция $g$ не должна принимать нулевых значений на этом отрезке. Если дискриминант $D$ квадратного трехчлена $g(x)$ отрицателен, т.е. $b < -9$, то $g(x)$ вообще корней не имеет. Если $D = 0$, то имеем один двойной корень $x = 3$, не принадлежащий рассматриваемому отрезку. Следовательно, на этом этапе решения имеем $b \leqslant -9$.

Если $D > 0$, т.е. $b > -9$, то требование отсутствия корней на отрезке $[-4; 2]$ обеспечивается одним из следующих двух условий: $g(2) < 0$ (рис. 95, *а*) или $g(-4) > 0$ (рис. 95, *б*). Отсюда $-9 < b < -8$ или $b > 40$.

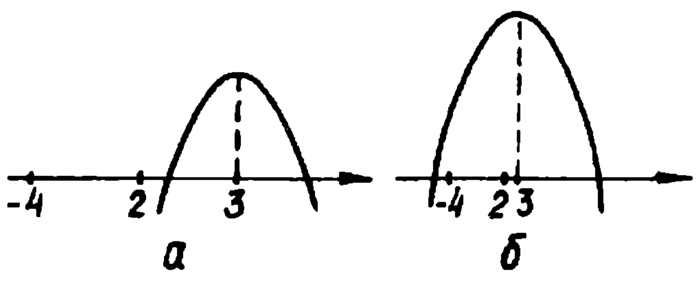


Рис. 95

Объединив полученные выше результаты, имеем $b < -8$ или $b > 40$. Среди этих значений $b$ и содержатся искомые.

Далее, запишем $f'(x) = \dfrac{2x - 6}{(b - x^2 + 6x)^2}$. Очевидно $f'(x) < 0$ на $[-4 ; 2]$. Следовательно, функция $f$ убывает на указанном промежутке. Отсюда $\min\limits_{[-4;2]} f(x) = f(2) = \dfrac{1}{b+8}$. По условию $\dfrac{1}{b+8} > 0{,}02$. Отсюда $-8 < b < 42$. Сопоставив эти значения с ранее полученными, запишем

*Ответ.* $40 < b < 42$.

IV.67.(ЛГУ). При каком значении $a$ максимальная абсолютная погрешность на промежутке $[1 ; 8]$, возникшая при замене $y = \sqrt[3]{x}$ на квадратный трехчлен $y = a + \dfrac{5x}{9} - \dfrac{x^2}{9}$, будет наименьшей?

*Решение.* Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{x} - \left(a + \dfrac{5x}{9} - \dfrac{x^2}{9}\right)$.

Получаем $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{5}{9} + \dfrac{2x}{9} = \dfrac{2\sqrt[3]{x^5} + 3 - 5\sqrt[3]{x^2}}{9\sqrt[3]{x^2}}$. Очевидно при $x \in [1 ; 8]$ $f'(x) \geqslant 0$. Следовательно, $f$ возрастает на указанном промежутке. Отсюда можно сделать вывод, что абсолютная погрешность $|f(x)|$, о которой говорится в условии, достигает своего наибольшего значения на одном из концов рассматриваемого отрезка.

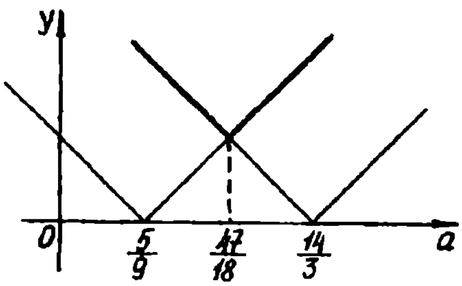



Рис. 96

Таким образом, искомые значения $a$ — это те, при которых $\max\{|f(8)|, |f(1)|\}$ принимает наименьшее значение. Имеем $|f(8)| = \left|\dfrac{14}{3} - a\right|$, $|f(1)| = \left|\dfrac{5}{9} - a\right|$. Построим графики функций $y = \left|\dfrac{14}{3} - a\right|$, $y = \left|\dfrac{5}{9} - a\right|$ (рис. 96). График $y = \max\{|f(8)|, |f(1)|\}$ выделен жирной линией. Эта функция достигает своего наименьшего значения в точке $a = \dfrac{47}{18}$.

*Ответ.* $a = \dfrac{47}{18}$.

## Упражнения

**IV.68.** (МАИ). При каких действительных значениях $a$ сумма обратных величин корней уравнения $x^2 - (a+1)x + a^2 = 0$ будет наименьшей?

**IV.69.** (МАИ). При каких $a > 0$ сумма кубов корней уравнения $x^2 - ax + a + 1 = 0$ будет наименьшей?

**IV.70.** (МГУ). Найти все значения параметра $a$, при которых неравенство $a \cdot 9^x + 4(a-1)3^x + a > 1$ справедливо при всех $x$.

**IV.71.** (МАИ). Найти все действительные $a$, при которых неравенство $x^2 + 1 \leqslant \sqrt{a|x| - 1}$ имеет решения.

**IV.72.** (КГУ). При каких $a$ функция $f(x) = (\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}x + a^2)^3\,\mathrm{tg}x$ достигает наименьшего значения на промежутке $\left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$ в точке $x = \frac{\pi}{3}$?

**IV.73.** Найти все значения $a$ из промежутка $\left[\frac{3}{4}\,;\infty\right)$, при каждом из которых наименьшее значение функции $y = x^3 - 2ax^2 + 1$ достигается на правом конце отрезка $[0\,;1]$.

**IV.74.** (МАИ). Найти наибольшее значение функции $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}ax^2 + 1$ на отрезке $[-a^2\,;a^2]$.

**IV.75.** (ХГУ). Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x^4 - 6bx^2 + b^2$ на отрезке $[-2\,;1]$ в зависимости от параметра $b$.

**IV.76.** (ХГУ). Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \frac{1}{2bx^2 - x^4 - 3b^2}$ на отрезке $[-2\,;1]$ в зависимости от параметра $b$.

**IV.77.** При каждом значении $a$ найти наименьшее значение функции $y = \frac{1}{x} - \frac{a^2}{6-x}$, $x \in [2\,;3]$.

**IV.78.** Найти наименьшее значение $a$, при котором уравнение $\frac{4}{\sin x} + \frac{1}{1-\sin x} = a$ на интервале $\left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$ имеет хотя бы одно решение.

**IV.79.** (МИФИ). Функция $f(x) = (c - 2x - x^2)^{-1}$ определена на отрезке $[-5; -3]$. Найдите $f'(x)$ и все значения $c \in R$, при которых наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-5; -3]$ больше $-0{,}05$.

**IV.80.** (ЛГУ). При каком значении $b \in [0; 1]$ максимальная абсолютная погрешность приближенной формулы $\sqrt{x} \approx b\left(\frac{3}{8} + \frac{3}{4}x - \frac{x^2}{8}\right) + (1-b)\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{8}x - \frac{x^2}{64}\right)$ на промежутке $[1; 4]$ будет наименьшей?

## Д. Построение графиков функций.

В этом пункте представлены задачи, в решении которых используются наглядно-графические соображения. Однако в отличие от §§ 3 и 4 гл. II при построении необходимого графического образа здесь мы будем вынуждены обратиться к аппарату производной. При этом, как и ранее, мы не будем подробно описывать процесс построения.

**IV.81.** (МАИ). При каких значениях $a$ все три корня уравнения $x^3 - ax + 2a + 32 = 0$ действительные?

*Решение.* Очевидно $x = 2$ не является корнем данного уравнения ни при каких значениях параметра $a$. Тогда запишем $a = \frac{x^3 + 32}{x - 2}$. Имеем $a(x) = \frac{x^3 + 32}{x - 2}$, $a'(x) = \frac{2(x-4)(x^2 + x + 4)}{(x-2)^2}$.

Функция $a(x)$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 2)$ и $(2; 4]$, а возрастает на $[4; \infty)$, причем $x = 4$ — точка минимума, $a(4) = 48$. График исследуемой функции изображен на рис. 97. Те значения $a$, для которых соответствующие горизонтальные прямые пересекают построенный график в трех точках, и будут искомыми. Из соображений наглядности очевидно $a > 48$.

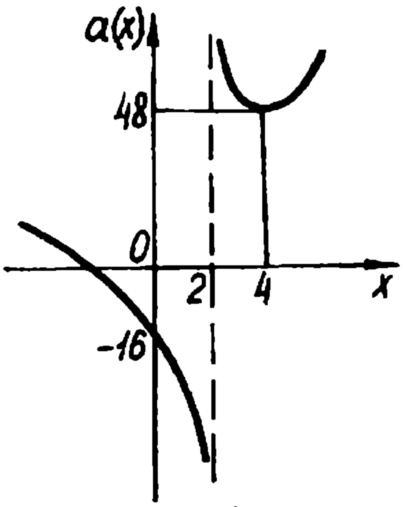


Рис. 97

*Ответ.* $a > 48$.

**IV.82.(II.68).** Решить уравнение $(x + 2a)(x^2 - a^2 - 2a - 1) = 0$. При каких значениях параметра $a$ произведение корней меньше наименьшего корня этого уравнения?

*Решение.* Легко получить, что $x_1 = -2a$, $x_2 = a + 1$, $x_3 = -(a + 1)$ — корни исходного уравнения.

Рассмотрим функции $f_1(a) = -2a$, $f_2(a) = a + 1$, $f_3(a) = -(a + 1)$. Графики этих функций изобразим на рис. 98. Жирной линией выделен график функции $y = \min\{f_1(a), f_2(a), f_3(a)\}$.

Далее, рассмотрим функцию $f(a) = f_1(a) f_2(a) f_3(a) = 2a(a + 1)^2$. Ее график также изображен на рассматриваемом рисунке. Понятно, что надо найти те значения параметра, при которых график $f$ лежит ниже выделенной линии. Очевидно искомые $a$ — это все значения, меньше $a_0$, где $a_0$ — наименьший корень уравнения $f_2(a) = f(a)$. Отсюда находим, что $a_0 = \frac{-\sqrt{3} - 1}{2}$.

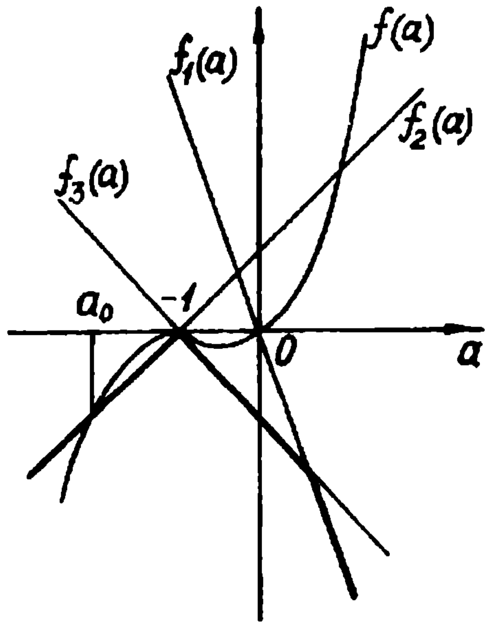


Рис. 98

*Ответ.* $a < \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$.

**VI.83.** Определить, как расположены корни уравнения $ax^2 - 3(a + 1)x + 2a + 7 = 0$ относительно отрезка $[-1; 4]$.

*Решение.* Запишем $a(x^2 - 3x + 2) = 3x - 7$. Очевидно $x = 1$ и $x = 2$ не являются корнями исходного уравнения ни при каких $a$. Тогда получаем $a = \frac{3x - 7}{x^2 - 3x + 2}$.

Рассмотрим функцию $a(x) = \frac{3x - 7}{x^2 - 3x + 2}$. Имеем

$aprime(x) = -\frac{3x^2 - 14x + 15}{(x^2 - 3x + 2)^2}$, $a'(x) = 0$ при $x = \frac{5}{3}$ или

$x = 3$. Легко показать, что $x = \frac{5}{3}$ — точка минимума, $x = 3$ — точка максимума, $a\left(\frac{5}{3}\right) = 9$, $a(3) = 1$. Функция $a(x)$ с указанной областью определения убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 1)$, $\left(1; \frac{5}{3}\right]$, $[3; \infty)$ и возрастает на $\left[\frac{5}{3}; 2\right)$, $(2; 3]$. График рассматриваемой функции построен на рис. 99.

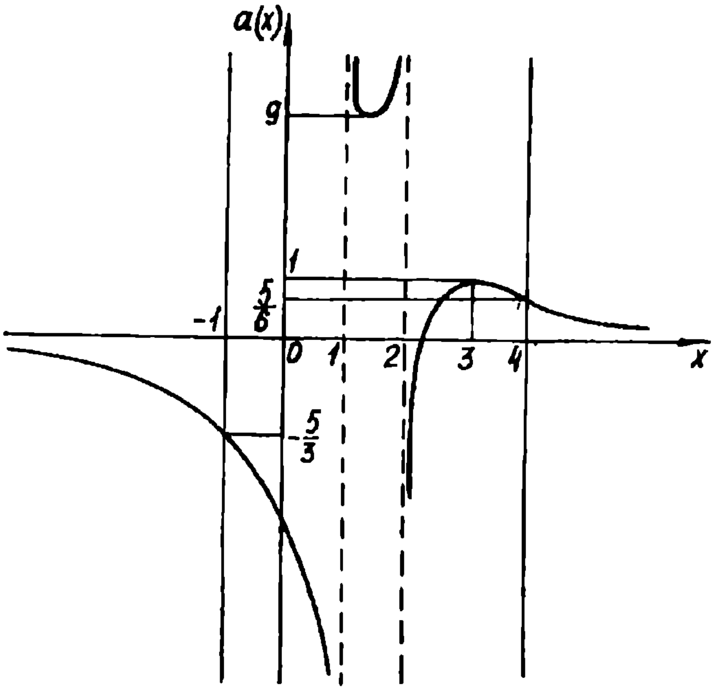



рис.99

Понятно, что, пересекая построенный график горизонтальными прямыми, мы сможем определить , как расположены корни исходного уравнения относительно рассматриваемого промежутка. Теперь можно приступить к записи результата, предварительно договорившись, что через $x_1$ будем обозначать меньший корень уравнения, а через $x_2$ — больший.

*Ответ.* Если $a < -\frac{5}{3}$, то $-1 < x_1 < x_2 < 4$; если $a = -\frac{5}{3}$, то $-1 = x_1 < x_2 < 4$; если $-\frac{5}{3} < a < 0$, то $x_1 < -1 < x_2 < 4$; если $a = 0$, то $-1 < x = \frac{7}{3} < 4$; если $0 < a < \frac{5}{6}$, то $-1 < x_1 < 4 < x_2$; если $a = \frac{5}{6}$, то $-1 < x_1 < x_2 = 4$; если $\frac{5}{6} < a < 1$, то $-1 < x_1 < x_2 < 4$; если $a = 1$, то $-1 < x_1 = x_2 < 4$, если $1 < a < 9$, то уравнение корней не имеет; если $a = 9$, то $-1 < x_1 = x_2 < 4$; если $a > 9$, то $-1 < x_1 < x_2 < 4$.

**IV.84.** (ЛГУ). При каких значениях параметра $a$ уравнение $\sin x \cos 2x \sin 3x = a$ имеет ровно два корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ ?

*Решение.* Запишем данное уравнение в таком виде: $\cos 2x \times$ $\times (\cos 2x - \cos 4x) = 2a$. Пусть $\cos 2x = t$. Поскольку по условию $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, то $-1 \leq t \leq 0$. Далее, получаем $t(t + 1 - 2t^2) = 2a$, $-2t^3 + t^2 + t = 2a$.

Построим график функции $f(t) = -2t^3 + t^2 + t$ для $-1 \leq t \leq 0$. Имеем $f'(t) = -6t^2 + 2t + 1$. Устанавливаем, что функция $f$ убывает на отрезке $\left[-1; \frac{1-\sqrt{7}}{6}\right]$ и возрастает на $\left[\frac{1-\sqrt{7}}{6}; 0\right]$, $t = \frac{1-\sqrt{7}}{6}$ — точка минимума, $f\left(\frac{1-\sqrt{7}}{6}\right) =$ $= \frac{10-7\sqrt{7}}{54}$. График рассматриваемой функции изображен на рис. 100. Теперь легко сделать вывод, что уравнение $f(t) = 2a$ имеет ровно два корня, если $\frac{10-7\sqrt{7}}{54} < 2a \leq 0$. Осталось заметить, что функция $y = \cos 2x$ монотонна на $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, а следовательно, на этом отрезке каждое свое значение принимает только один раз.

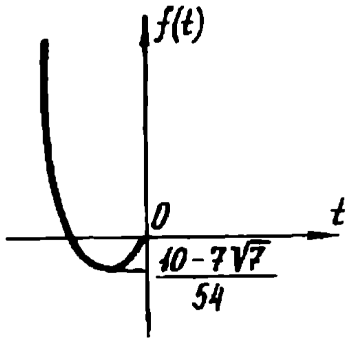


Рис. 100

*Ответ.* $\frac{10-7\sqrt{7}}{108} < a \leq 0$.

IV.85. (ЛГУ). При каких $a$ найдется $b$ из интервала $(0; 1)$ такое, что уравнение $x \cos x \sin b - a \sin x \cos b = x \cos x \cos b$ имеет по крайней мере два решения на интервале $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$?

*Решение.* При $a = 0$ данное уравнение становится таким: $x \cos x \sin b = x \cos x \cos b$. Очевидно, если $b = \frac{\pi}{4}$, то полученное уравнение имеет своим корнем любое действительное число. Следовательно, $a = 0$ подходит.

Пусть $a \neq 0$. При $b \in (0; 1)$ $\cos b \neq 0$. Из того, что $a \neq 0$ и $\cos b \neq 0$, получаем $\cos x \neq 0$. Действительно, подставив $\cos x = 0$ в исходное уравнение, получим $a \sin x \cos b = 0$. Отсюда $\sin x = 0$, что не возможно, так как $\cos x = 0$. Теперь можно разделить обе части уравнения на выражение $a \cos b \cos x$, которое, как мы доказали, не принимает нулевых значений. Имеем $\dfrac{\operatorname{tg}x}{x} = \dfrac{\operatorname{tg}b - 1}{a}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$ с областью определения $D(f) = \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Запишем $f'(x) = \dfrac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}$. Для того чтобы определить знак производной, мы исследуем еще одну функцию $g(x) = x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$ на промежутке $\left(0; \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Имеем $g'(x) = 1 - \cos 2x \geq 0$. Следовательно, $g$ возрастает на рассматриваемом промежутке $\left(0; \dfrac{3\pi}{2}\right)$. А поскольку $g(0) = 0$ и $g(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, то $g(x) > 0$, т.е. $x - \sin x \cos x > 0$. Отсюда $f'(x) > 0$. Значит, функция $f$ возрастает на каждом из промежутков $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

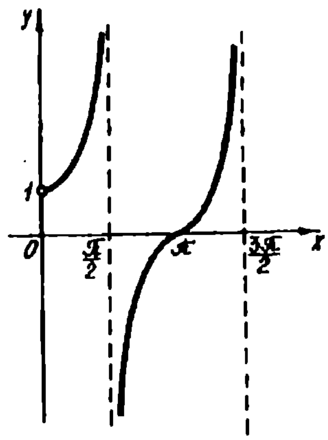


Рис. 101

Для построения графика функции $f$ заметим еще, что $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg}x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = 1$. График $f$ построен на рис. 101.

Ясно, что уравнение $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}b - 1}{a}$ имеет ровно два корня, если $\dfrac{\operatorname{tg}b - 1}{a} > 1$. По условию $0 < b < 1$. Тогда $0 < \operatorname{tg}b < \operatorname{tg} 1$, $-1 < \operatorname{tg}b - 1 < \operatorname{tg} 1 - 1$. С учетом того, что $\dfrac{\operatorname{tg}b - 1}{a} > 1$, получаем промежуток $(-1; \operatorname{tg} 1 - 1)$ искомых значений $a$. В этот промежуток входит $a = 0$.

*Ответ.* $-1 < a < \operatorname{tg} 1 - 1$.

## Упражнения

**IV.86.** (КГУ). Сколько корней в зависимости от параметра $a$ имеет уравнение $x^5 + x = a + 2x^3$?

**IV.87.** (КГУ). При каких $a$ уравнение $x^3 + ax + 2 = 0$ имеет три корня?

**IV.88.** (КГУ). При каких $a$ уравнение $x^2e^x = a$ имеет три корня?

**IV.89.** Сколько решений имеет уравнение $x^2 - 2ax - 1 = 0$ на промежутке $|x| < 2$?

**IV.90.** (МГУ). Пусть $x = x_0$ — больший из корней уравнения $x^2 + (3ab + 3a - 2)x + 5ab + 5a - 17 = 0$. Найти наибольшее значение $x_0$ при $a \geqslant 1$, $b \geqslant 0$.

**IV.91.** (ЛГУ). При каких действительных $a$ уравнение $\cos x \cos 2x \cos 3x + a = \cos 2x$ имеет более одного корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right]$?

**IV.92.** (МГУ). Найти все значения $a$, при которых уравнение $x\,|x + 2a| + 1 - a = 0$ имеет единственное решение.

**IV.93.** (МГУ). Найти все значения $a$, при которых для всех $x$, по модулю не превосходящих единицу, выполняется неравенство $\frac{ax - a(1 - a)}{a^2 - ax - 1} > 0$.

**IV.94.** (МАИ). Найти все $a \in R$, при каждом из которых область определения функции $f(x) = \lg\left((x - 1)^2x^2 - ax^2 - 1\right)$ не пересекается с множеством $[1 ; 2]$.

**IV.95.** (ЛГУ). При каких $a$ уравнение

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}x^3 + x + 1} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3 + x - 1} = \sqrt[3]{ax}$$

имеет ровно четыре корня?

## § 2. Методы поиска необходимых условий

Для того чтобы пояснить идею настоящего параграфа, прибегнем к следующему примеру.

Решить неравенство $(\sqrt{x^2 - 5x + 6} + 1)\log_3\frac{2x}{5} + \frac{1}{x} \times$ $\times \sqrt{10x - 2x^2 - 12} \leqslant 0$.

Применение каких-либо приемов, связанных с преобразованием левой части неравенства, к успеху не приведет. (В этом читатель может убедиться самостоятельно.) Вместе с тем нахождение области определения — шаг совершенно очевидный.

Имеем

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geqslant 0\,, \\ 10x - 2x^2 - 12 \geqslant 0\,, \\ x > 0\,. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что область определения рассматриваемого неравенства является двухэлементным множеством $\{2\,;3\}$. Понятно, что нам в большой степени повезло: на ответ претендуют всего два числа. Не будем мудрить, а просто поочередно подставим числа 2 и 3 в исходное неравенство, т.е. произведем проверку. Проверка покажет, что $x = 2$ подходит, а $x = 3$ — нет.

В решении этого неравенства прослеживается следующий подход. Вначале формируется множество чисел, среди которых содержатся искомые значения переменной, а затем полученное множество сужается до ответа. (Эта идея в какой-то степени напоминает стандартную детективную схему: круг подозреваемых постепенно сужается до преступника). Оказывается подобный сюжет реализуется в целом классе математических задач. Так, в тех случаях, когда непосредственный поиск значений переменной затруднен, можно сперва выделить необходимые условия для получения ответа, а затем от необходимых условий перейти к достаточным, т.е. к ответу. (В рассматриваемом примере $x \in \{2\,;3\}$ — необходимое условие, а $x = 2$ — достаточное, для того чтобы быть решением исходного неравенства.)

Будем называть задачи, решаемые таким методом, задачами с поиском необходимых условий. Именно приемам поиска необходимых условий и посвящен настоящий параграф.

## А. Использование симметрии аналитических выражений.

Задачи этого пункта собраны по следующим двум признакам.

1. В каждой задаче обязательно фигурирует аналитическое выражение, геометрический образ которого имеет или ось симметрии, или плоскость симметрии. Простейшим примером может служить равенство $y = f(x)$, где $f$ — четная функция. В качестве примера можно взять также равенство $F(x\,;y) = 0$, левая часть которого не меняется при перемене местами $x$ и $y$ (график уравнения имеет ось симметрии $y = x$) или при одновременной замене $x$ на $-y$, $y$ на $-x$ (ось симметрии $y = -x$).

2. Во всех задачах (за исключением одной) в той или иной форме присутствует требование единственности решения.

Если описываемые аналитические выражения конструируют уравнения (неравенства, системы) и координаты точки $M$ являются его (ее) решением, то обязательно найдется еще одна точка $M_1$, симметричная точке $M$, координаты которой так же будут являться решением. Следовательно, для выполнения требования единственности решения необходимо, чтобы точки $M$ и $M_1$ совпадали, т.е. $M$ лежала на оси симметрии. (Заметим, что это требование не является достаточным: например, на оси симметрии может лежать не одна точка.) Высказанные соображения и составляют основу одного из приемов поиска необходимых условий, о котором будет идти речь в настоящем пункте.

**IV.96.** При каких значениях параметра $a$ система уравнений

$$\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 1 - |x|, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

*Решение.* Следующая схема рассуждений является сквозной для задач данного пункта.

Легко заметить, что если $(x_0\,; y_0)$ — решение системы, то $(-x_0\,; y_0)$ также является ее решением. Поэтому условие $x = 0$ — необходимое для существования единственного решения. Важно понимать, что оно не является достаточным: наша система может иметь несколько решений вида $(0\,; y_0)$ и, более того, вообще не иметь решений.

Положим $x = 0$. Тогда

$$\begin{cases} a = y + 1\,, \\ y^2 = 1\,. \end{cases}$$

Отсюда $a = 0$ или $a = 2$.

Итак, искомые значения параметра следует выбирать в множестве $\{0\,;2\}$.

При $a = 0$ получаем

$$\begin{cases} y + 1 - |x| = 0\,, \\ x^2 + y^2 = 1\,, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} |x| = y + 1\,, \\ y(y + 1) = 0\,. \end{cases}$$

Эта система имеет три решения $(1\,;0)$, $(-1\,;0)$, $(0\,;-1)$. Следовательно, значение $a = 0$ придется исключить из списка «подозреваемых».

При $a = 2$ получим

$$\begin{cases} 2x^4 + |x| = y - 1\,, \\ x^2 + y^2 = 1\,. \end{cases}$$

Очевидно $2x^4 + |x| \geqslant 0$. Тогда из первого уравнения имеем $y \geqslant 1$. В то же время второе уравнение позволяет сделать вывод, что $y \leqslant 1$. Следовательно, $y = 1$, а значит, $x = 0$. Проверка показывает, что пара $(0\,;1)$ — решение, а в силу ограничения для переменной $y$ ( $y \geqslant 1$ и $y \leqslant 1$ ) оно единственное.

*Ответ.* $a = 2$.

**IV.97.** (МГУ). При каких значениях параметра $c$ уравнение $x^2 - 2c\sin(\cos x) + 2 = 0$ имеет единственное решение?

*Решение.* Рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущем примере, позволяют сделать вывод, что $x = 0$ — необходимое условие для существования единственного корня данного уравнения. При $x = 0$ имеем $c\sin 1 = 1$, $c = \dfrac{1}{\sin 1}$. Напомним, что полученное значение для параметра — всего лишь «претендент» на ответ. Поэтому его судьбу решит проверка.

При $c = \frac{1}{\sin 1}$ получаем $x^2 + 2 = \frac{2}{\sin 1}\sin(\cos x)$. Рассмотрим функцию $f(t) = \sin t$. Для $t \in [-1; 1] \subset \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $f$ возрастает. Следовательно, $\sin(\cos x) \leqslant \sin 1$. Отсюда $\frac{2\sin(\cos x)}{\sin 1} \leqslant \frac{2\sin 1}{\sin 1} = 2$. Поскольку $x^2 + 2 \geqslant 2$, то полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + 2 = 2, \\ \frac{2\sin(\cos x)}{\sin 1} = 2, \end{cases}$$

имеющей, как понятно, единственное решение $x = 0$.

Таким образом, проверка дала положительный результат, и $c = \frac{1}{\sin 1}$ переходит из «претендентов» в

*Ответ.* $c = \frac{1}{\sin 1}$.

**IV.98.** (МГУ). Найти все значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases} (3 - 2\sqrt{2})^y + (3 + 2\sqrt{2})^y - 3a = x^2 + 6x + 5, \\ y^2 - (a^2 - 5a + 6)x^2 = 0, \\ -6 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

*Решение.* В этом примере идея симметрии не бросается в глаза. Вместе с тем числа $3 - 2\sqrt{2}$ и $3 + 2\sqrt{2}$ привлекают внимание, ибо их «скрытая» взаимная обратность нередко является ключом к решению. И в нашей задаче этот факт сыграет существенную роль. Действительно, $(3 - 2\sqrt{2})^{-y} = \frac{1}{(3 - 2\sqrt{2})^y} = (3 + 2\sqrt{2})^y$. Отсюда можно сделать вывод, что вместе с решением $(x_0; y_0)$ исходной системе удовлетворяет также пара $(x_0; -y_0)$. Следовательно, для существования единственного решения необходимо потребовать, чтобы $y = 0$.

При $y = 0$ имеем

$$\begin{cases} 2 - 3a = x^2 + 6x + 5, \\ x^2(a^2 - 5a + 6) = 0, \\ -6 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда легко получить список «кандидатов» в ответ: $a = -1$, $a = 2$, $a = 3$.

При $a = -1$ получаем

$$\begin{cases}(3 - 2\sqrt{2})^y + (3 + 2\sqrt{2})^y + 3 = x^2 + 6x + 5,\\ y^2 - 12x^2 = 0,\\ -6 \leqslant x \leqslant 0.\end{cases}$$

Если $x \in [-6\,;0\,]$, то очевидно $x^2 + 6x + 5 \leqslant 5$. В то же время, поскольку сумма двух взаимнообратных положительных чисел не меньше 2, то $(3 - 2\sqrt{2})^y + (3 + 2\sqrt{2})^y + 3 \geqslant 5$. Тогда, если полученная система имеет решение, то им может быть только пара $(0\,;0)$. Действительно, $(0\,;0)$ подходит.

При $a = 2$ получим систему

$$\begin{cases}(3 - 2\sqrt{2})^y + (3 + 2\sqrt{2})^y - 6 = x^2 + 6x + 5,\\ y^2 = 0,\\ -6 \leqslant x \leqslant 0,\end{cases}$$

имеющую единственное решение $(-3\,;0)$.

При $a = 3$ возникает система

$$\begin{cases}(3 - 2\sqrt{2})^y + (3 + 2\sqrt{2})^y - 9 = x^2 + 6x + 5,\\ y^2 = 0,\\ -6 \leqslant x \leqslant 0,\end{cases}$$

которая решений не имеет.

*Ответ.* $a = -1$ или $a = 2$.

**IV.99.** (МИРЭиА). При каких $a$ система

$$\begin{cases}y \geqslant (x + y)^2 - x - 2y + a,\\ x \geqslant (y - x)^2 - 3y + 2x + a\end{cases}$$

имеет единственное решение?

*Решение.* Если в предыдущем примере применение изучаемого нами метода — шаг далеко не тривиальный, то для решения настоящей задачи увидеть идею симметрии достаточно просто, приведя подобные слагаемые. Имеем

$$\begin{cases}x^2 + 2xy + y^2 - x - 3y + a \leqslant 0,\\ x^2 - 2xy + y^2 - 3y + x + a \leqslant 0.\end{cases}$$

Теперь становится очевидным, что $x = 0$ — необходимое условие единственности решения системы.

Если $x = 0$, то получаем $y^2 - 3y + a \leqslant 0$. Это неравенство имеет единственное решение, если дискриминант соответственного квадратного трехчлена равен нулю, т.е. $9 - 4a = 0$, $a = \frac{9}{4}$.

Проверка показывает, что при $a = \frac{9}{4}$ система имеет единственное решение $\left(0 ; \frac{3}{2}\right)$.

*Ответ.* $a = \frac{9}{4}$.

**IV.100.**(МФТИ). Найти все значения параметра $a$, при которых уравнение $4a^2x^4 + (2a - 8)x^2 + a + |a| = 0$ имеет ровно три корня на промежутке $(-1 ; 1]$.

*Решение.* Поскольку $a = 0$ очевидно не подходит, то дальнейшие исследования проведем для биквадратного уравнения.

Пусть $x^2 = t$, $t \geqslant 0$. Тогда имеем $4a^2t^2 + (2a - 8)t + a + |a| = 0$. Для того чтобы биквадратное уравнение имело три корня, необходимо потребовать от одного из корней квадратного уравнения принимать нулевое значение. Если при этом второй корень окажется положительным, то биквадратное уравнение очевидно будет иметь три корня. Поскольку по условию эти корни должны принадлежать указанному промежутку, то мало потребовать от второго корня быть положительным: он должен удовлетворять условию $0 < t < 1$.

Теперь важно понять, что мы получили условия, при которых исходное уравнение имеет три корня, но (!) на промежутке $(-1 ; 1)$. Это нас устраивает, но все же в данной задаче $t = 0$ не является необходимым условием.

Обратим внимание на особенность заданного промежутка — он полуоткрыт. Значит, если $t_1 = 1$, а $0 < t_2 < 1$, то биквадратное уравнение также имеет три корня на промежутке $(-1 ; 1]$.

Таким образом, в рассматриваемом примере необходимое условие состоит из объединения двух требований: $t = 0$ и $t = 1$.

Итак, выяснив, при каких $a$ корни квадратного уравнения удовлетворяют одному из условий

$$\begin{cases} t_1 = 0, \\ 0 < t_2 < 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} t_1 = 1, \\ 0 < t_2 < 1, \end{cases}$$

получим все искомые значения параметра.

Рассмотрим отдельно каждую из систем.

Если $t_1 = 0$, то получаем $a + |a| = 0$. Отсюда $a < 0$ (напомним, что случай $a = 0$ мы уже рассмотрели). При $a < 0$ квадратное уравнение становится таким: $4a^2t^2 + (2a - 8)t = 0$, $t\left(t + \frac{a-4}{2a^2}\right) = 0$. Поскольку $0 < t_2 < 1$, то потребуем, чтобы $0 < -\frac{a-4}{2a^2} < 1$. Отсюда с учетом $a < 0$ получаем $a < \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$.

Если $t_1 = 1$, то по теореме Виета $t_2 = \frac{a + |a|}{4a^2}$. Тогда в этом случае искомые значения параметра найдем, решив систему

$$\begin{cases} 4a^2 + 2a - 8 + a + |a| = 0, \\ 0 < \dfrac{a + |a|}{4a^2} < 1. \end{cases}$$

При решении этой системы можно значительно сократить техническую работу, заметив, что $a > 0$. Получаем $a = 1$.

*Ответ.* $a < \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ или $a = 1$.

**IV.101.**(МГУ). Найти все значения параметра $a$, при которых равносильны системы

$$\begin{cases} x + 2y = 2 - a, \\ -x + ay = a - 2a^2 \end{cases} \quad \text{и}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0. \end{cases}$$

*Решение.* Естественно вначале обратиться к первой системе (она проще). Эта система состоит из двух линейных уравнений с двумя переменными. Несложно установить (см. п. Г §3 гл. II), что при $a \neq -2$ система имеет единственное решение, а при $a = -2$ решений нет.

Вторая система при $a = -2$ становится такой:

$$\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 11x + 24 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение содержит квадратный трехчлен относительно $x$: $2x^2 - 11x + 24$. Его дискриминант отрицателен, поэтому второе уравнение решений не имеет. Таким образом, $a = -2$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь $a \neq -2$. В данном случае первая система имеет единственное решение, поэтому для равносильности исходных систем необходимо, чтобы и вторая система имела единственное решение. (Заметим, что достаточным условием их равносильности будет совпадение решений.)

Здесь, как и в предыдущих задачах, условие $y = 0$ является необходимым для существования единственного решения второй системы. При $y = 0$ эта система принимает вид

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = 1, \\ a^2 - 4a + 3 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 3, \\ a^2 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, искомые значения параметра $a$, если они существуют, принадлежат множеству $\{-1 ; 1 ; 3\}$.

Теперь осталось провести проверку. Покажем лишь часть этой технической работы для $a = -1$. Для остальных значений параметра ограничимся лишь результатом.

При $a = -1$ первая система такова:

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ -x - y = -3. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение $(3 ; 0)$. Вторая система принимает вид

$$\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2(x - 3)^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Очевидно $(3 ; 0)$ — решение. Поскольку решения систем совпали, то $a = -1$ удовлетворяет условию задачи.

При $a = 1$ легко установить, что первая система имеет единственное решение $(1 ; 0)$, а вторая — два решения: $(1 ; 0)$, $(3 ; 0)$.

При $a = 3$ первая система имеет единственное решение $\left(\frac{27}{5}; -\frac{16}{5}\right)$, не удовлетворяющее второй системе.

*Ответ.* $a = -2$ или $a = -1$.

**IV.102.** (МГУ). При каких значениях параметра $a$ система

$$\begin{cases} y \geqslant x^2 + 2a, \\ x \geqslant y^2 + 2a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

*Решение.* Несложно заметить, что эта система не меняется при одновременной замене $x$ на $y$ и $y$ на $x$. Следовательно, вместе с каждым решением $(x_0; y_0)$ система имеет решение $(y_0; x_0)$. Отсюда $x = y$ — необходимое условие для существования единственного решения.

При $x = y$ получаем $x \geqslant x^2 + 2a$, $x^2 - x + 2a \leqslant 0$. Это квадратичное неравенство имеет единственное решение, если его дискриминант равен нулю. Имеем $1 - 8a = 0$, $a = \frac{1}{8}$.

Сделаем проверку. При $a = \frac{1}{8}$ исходная система становится такой:

$$\begin{cases} y \geqslant x^2 + \frac{1}{4}, \\ x \geqslant y^2 + \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Сложив неравенства системы, получим неравенство — следствие этой системы. Имеем $x + y \geqslant x^2 + y^2 + \frac{1}{2}$. Отсюда $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0$. Решением следствия является только одна пара $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Следовательно, система имеет не более одного решения. На самом деле у системы есть лишь одно решение — именно пара $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

*Ответ.* $a = \frac{1}{8}$.

**IV.103.** (МГУ). Найти все значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases} z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0, \\ x^2+(y-1)^2+z^2=a+2x, \\ (x+y+a\sin^2 z)((1-a)\ln(1-xy)+1)=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

*Решение.* В настоящей задаче (равно, как и в других) идея симметрии является ключевой. Вместе с тем эта идея не лежит на поверхности, а наоборот, скорее всего спрятана за громоздкими конструкциями. И нам остается лишь надеяться, что опыт предыдущих примеров приведет читателя к изящной находке: если $(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ — решение системы, то решением также будет и $(y_0\,;\,x_0\,;\,z_0)$. Впрочем, если догадаться переписать второе уравнение системы в виде $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=a+1$, то обнаружить описанную выше закономерность, возможно, легче.

Итак, для единственности решения необходимо, чтобы $x=y$. При этом условии первое уравнение системы становится таким: $z+(2+x^2)\sin 2x-z=0$. Отсюда $x=\frac{\pi k}{2}$, где $k\in Z$. Третье уравнение системы позволяет сделать вывод, что $xy<1$, а значит, $xy=\frac{\pi^2k^2}{4}<1$. Тогда $k=0$, а следовательно, $x=y=0$. С учетом полученного второе уравнение системы приобретает вид $z^2=a-1$. Это уравнение имеет единственное решение только при $a=1$. Таким образом, свои права на ответ предъявляет лишь значение $a=1$.

Если $a=1$, то из третьего уравнения системы получаем $x+y+\sin^2 z=0$. Отсюда $x+y\leqslant 0$. Далее, подставим $a=1$ во второе уравнение системы. Имеем $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$. Теперь легко сделать вывод, что $x=y=z=0$ и других решений при $a=1$ быть не может. Непосредственная проверка убеждает нас, что тройка $(0\,;\,0\,;\,0)$ является решением каждого уравнения системы.

*Ответ.* $a=1$.

**IV.104.(II.274).** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-y)^2=6a-14, \\ x^2+y^2=3(2+a) \end{cases}$$

имеет два решения.

*Решение.* Обратим внимание, что симметрия, заключенная в структуре данной системы, дает по сравнению с предыдущими задачами более «щедрый» результат. Имеется в виду, что с каждым решением $(x_0\,;y_0)$ исходная система имеет решения $(y_0\,;x_0)$, $(-x_0\,;-y_0)$, $(-y_0\,;-x_0)$. По условию решений должно быть только два. Поэтому, как и ранее, источником необходимых значений для параметра будет требование совпадения каких–либо из полученных пар.

Если $(x_0\,;y_0)=(y_0\,;x_0)$, то $x_0=y_0$ и $x=y$ — необходимое условие существования двух решений. При $x=y$ первое уравнение системы дает $a=\frac{7}{3}$.

Если $(x_0\,;y_0)=(-x_0\,;-y_0)$, то получаем $x=y=0$ — очередное необходимое условие для выполнения требования задачи. Но ни при каких $a$ пара $(0\,;0)$ не может являться решением исходной системы.

Если $(x_0\,;y_0)=(-y_0\,;-x_0)$, то в качестве необходимого условия имеем $x=-y$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases}4x^2=6a-14,\\2x^2=3(2+a)\end{cases}$$

и очевидно решений не имеет.

Несложно заметить, что любые другие совпадения пар, а именно $(y_0\,;x_0)=(-x_0\,;-y_0)$, $(y_0\,;x_0)=(-y_0\,;-x_0)$, $(-x_0\,;-y_0)=(-y_0\,;-x_0)$, не расширят ранее полученный список необходимых условий. Таким образом, лишь $a=\frac{7}{3}$ претендует на ответ.

Проверка: при $a=\frac{7}{3}$ получаем систему

$$\begin{cases}(x-y)^2=0,\\x^2+y^2=13,\end{cases}$$

которая очевидно имеет только два решения $\left(-\sqrt{\frac{13}{2}}\,;-\sqrt{\frac{13}{2}}\right)$. $\left(\sqrt{\frac{13}{2}}\,;\sqrt{\frac{13}{2}}\right)$.

*Ответ.* $a=\frac{7}{3}$.

## Упражнения

**IV.105.** Найти все значения параметра $a$, при которых существует единственная пара $(x\,;\,y)$, удовлетворяющая уравнению $2^{\frac{1}{2}a+1}x^2 - x^4 = y^2 - 2y\sqrt{a} + 6$.

**IV.106.** (МГУ). При каких значениях параметра $b$ уравнение $2x^2 - b\,\mathrm{tg}\cos x + b^2 = 0$ имеет единственное решение?

**IV.107.** При каких значениях параметров $p$ и $q$ система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = p^2, \\ y = |x| + q \end{cases}$$

имеет единственное решение?

**IV.108.** При каких значениях $a$ система

$$\begin{cases} \left(|x| + 1\right)a = y + \cos x, \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

**IV.109.** (МГУ). Определить, при каких значениях параметра $a$ система

$$\begin{cases} a\,x^2 + a - 1 = y - |\sin x|, \\ \mathrm{tg}^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**IV.110.** (МГУ). Найти все значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases} (2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x - 5 = a - 2y + y^2, \\ x^2 + (2 - a - a^2)\,y^2 = 0, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**IV.111.** (МГУ). Найти все $a$, при которых система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**IV.112.** Найти все $a$, при которых система

$$\begin{cases} 3y - a\sqrt{x^2 + 1} = 1, \\ x + y + \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**IV.113.** (МГУ). Найти все значения $a$ и $b$, при которых система

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x^y - 1}{x^y + 1}\right| = a, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

имеет только одно решение ($x > 0$).

**IV.114.** (МГУ). Найти все значения $a$ и $b$, при которых система

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

**IV.115.** (ЛГУ). Даны три утверждения:

а) уравнение $x + \dfrac{1}{x} = a$ не имеет действительных корней;

б) справедливо равенство $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = 2 - a$;

в) система

$$\begin{cases} x + y^2 = a, \\ x - \sin^2 y = -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

При каких значениях параметра $a$ два из этих утверждений верны, а одно — ложно?

**IV.116.** (МФТИ). Множество $M$ состоит из точек $(a\,;b)$ координатной плоскости, для которых уравнение

$(20a + 21b + 63)x^4 + (3b - 4a + 9)x^2 + |b^2 - 4| + b^2 - 4 = 0$

имеет ровно одно решение. Доказать, что в многоугольник, которым является множество $M$, можно вписать окружность, и найти координаты центра этой окружности.

**IV.117.** (МГУ). Найти все значения параметра $a$, при которых равносильны системы

$$\begin{cases} x + 4y = 4a^2 + a, \\ x + ay = a + 4 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2 - 3y^4 - 8x + 15 = 0, \\ x^2 + y^2 + (a^2 - a - 10)x + 5a + 20 = 0. \end{cases}$$

**IV.118.(П.273).** Определить, при каких $a$ система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a), \\ (x + y)^2 = 14 \end{cases}$$

имеет в точности два решения.

**IV.119.** При каких значениях параметра $a$ система

$$\begin{cases} x^2 - (2a + 1)x + a^2 - 3 = y, \\ y^2 - (2a + 1)y + a^2 - 3 = x \end{cases}$$

имеет единственное решение $(x\ ;\ y)$?

**IV.120.(МГУ).** Найти $a$, при которых система

$$\begin{cases} y \geqslant (x - a^2), \\ x \geqslant (y - a)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**IV.121.** При каких значениях параметра $a$ уравнение $\log_2(\sqrt{2x^2 + 2y^2 - z} + 1) + \left|\arcsin(3x + 3y - z + a)\right| = 0$ имеет одно решение?

**IV.122.(МГУ).** Найти все значения параметра $p$, при которых система

$$\begin{cases} 2(p + 2y) - y^2 = (x - 2)^2 + z^2, \\ (xy + 4)\sin(x + y) + \cos(x - y) = 1, \\ \left(2 - \dfrac{xyz(p - 2)}{\sqrt{1 - 2xy}}\right)(p\,\mathrm{tg}^2 z + x + y) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

## Б."Выгодная точка".

В этом пункте будет рассмотрен еще один прием поиска необходимых условий. Поясним его суть на простом примере. Надо определить, при каких $a$ равенство $a\sin^2 x + a^2\cos^2 x = 1$ справедливо для всех $x$. Поскольку это равенство выполняется при всех $x$, то необходимо его выполнение, например, для $x = 0$. Подставив $x = 0$, получим $a = 1$ или $a = -1$. Следует ясно представлять, что найденные значения параметра требуют проверки. Действительно, мы имеем право лишь утверждать, что при $a = \pm 1$ исходное равенство выполняется при $x = 0$, и ничего не можем сказать о других значениях $x$. Проверка показывает, что подходит только $a = 1$.

Итак, если в задаче требуется определить значения параметра, при которых уравнение (неравенство, система) выполняется при всех значениях переменной из определенного множества $M$, то, подставив какое-либо конкретное значение из $M$, получим те значения параметра, среди которых обязательно содержатся искомые.

У читателя может возникнуть естественный вопрос, какие же значения из $M$ следует брать? (Например, почему в приведенной выше задаче выбор пал на $x = 0$?) Ответ на поставленный вопрос не содержит конкретных рецептов: значения должны быть «выгодными», т.е. такими, которые удобны в обращении и не дают громоздких формул. Кстати, в нашем примере $x = 0$ — «хорошая» пробная точка, однако $x = \frac{\pi}{2}$ — еще лучше, ибо при таком значении $x$ получаем $a = 1$, и проверка сокращается на один шаг.

Заметим, что выбор выгодной пробной точки часто основывается на интуиции и личном опыте. Конечно, было бы хорошо, если бы множество $M$ содержало «мало» элементов, еще лучше, когда — один. С такими задачами мы познакомимся в первую очередь.

IV.123.(МИСиС). При каких значениях параметра $a$ уравнения $4^{x+1} + 2^{x+4} = 2^{x+2} + 16$ и $|a - 9|3^{x-2} + a9^{x-1} = 1$ равносильны?

*Решение.* Несложно установить, что $x = 0$ — единственный корень первого уравнения. Тогда для равносильности исходных уравнений необходимо, чтобы найденное значение было также корнем второго уравнения (достаточное условие — это совпадение корней). Итак, выбора нет, а надо лишь подставить $x = 0$ во второе уравнение. Имеем $|a - 9|3^{-2} + a3^{-2} = 1$, $|a - 9| = 9 - a$. Отсюда искомые значения параметра надо искать среди решений неравенства $a \leqslant 9$.

При $a \leqslant 9$ получаем $a3^{2x} - (a - 9)3^x - 9 = 0$. Если $a = 0$, то это уравнение имеет единственный корень $x = 0$. Следовательно, при $a = 0$ исходные уравнения равносильны. Если $a \neq 0$, то рассмотрев полученное уравнение как квадратное относительно $3^x$, получим

$$\left[\begin{array}{l} 3^x = 1, \\ 3^x = -\dfrac{9}{a}. \end{array}\right.$$

Ясно, что второе уравнение совокупности «мешает» равносильности. Следовательно, оно или не должно иметь решений (это очевидно будет при $a > 0$), или его решения обязаны не отличаться от $x = 0$. Последнее требование выполняется только при $a = -9$.

С учетом необходимого условия для параметра ($a \leqslant 9$) получаем

*Ответ.* $0 \leqslant a \leqslant 9$ или $a = -9$.

**IV.124.** (МАИ). При каких значениях параметра $a$ уравнения $\sin 2x + a = \sin x + 2a\cos x$ и $2\cos 2x + a^2 = 5a\cos x - 2$ равносильны?

*Решение.* Преобразуем первое уравнение к такому виду: $\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right)(\sin x - a) = 0$. Тогда значения $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$ ($n \in Z$) входят в множество его корней. Следовательно, для выполнения требования задачи необходимо, чтобы все эти числа были корнями второго уравнения. Как видим, выбор большой, но в указанное уравнение мы подставим «удобную» точку $x = \dfrac{\pi}{3}$. (Заметим, что в это же уравнение можно подставить и все полученное множество в форме $\cos x = \dfrac{1}{2}$.)

При $x = \dfrac{\pi}{3}$ получаем $-1 + a^2 = \dfrac{5a}{2} - 2$. Отсюда $a = 2$ и $a = \dfrac{1}{2}$ — претенденты на ответ.

При $a = 2$ первое уравнение приобретает вид $\sin 2x + 2 = \sin x + 4\cos x$, а второе — $\cos 2x - 5\cos x + 3 = 0$. Легко убедиться, что каждое из двух последних уравнений равносильно уравнению $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

При $a = \dfrac{1}{2}$ первое уравнение принимает вид $\sin 2x + \dfrac{1}{2} = \sin x + \cos x$, а второе — $2\cos 2x + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{2}\cos x - 2$.

Очевидно, что корень первого из них $x = -\frac{\pi}{3}$ не является корнем второго.

*Ответ.* $a = 2$.

**IV.125.**(УрГУ). Найти такие значения параметра $a$, при которых неравенство $\sqrt{x^2 + 4x + 3} \geq -1 - x$ и уравнение $|x - a| - |x + 1| = 2$ равносильны.

*Решение.* Воспользовавшись результатом задачи II.65, получаем, что решением неравенства будет $x \geq -1$.

Как и в двух предыдущих задачах, необходимо, чтобы все числа из промежутка $[-1; \infty)$ были корнями данного уравнения. Опять перед нами возникла «проблема» поиска выгодной точки. Возьмем на себя смелость утверждать, что выбор в качестве таковой $x = -1$, не хуже любого другого.

При $x = -1$ имеем $|-1 - a| = 2$. Тогда в ответ могут попасть значения $a = -3$ и $a = 1$ и никакие другие.

Если $a = -3$, то уравнение становится таким: $|x + 3| - |x + 1| = 2$. Его решением будет $x \geq -1$. (Советуем читателю при решении этого уравнения воспользоваться очевидным свойством: если $|m| - |n| = m - n$, то $m \geq 0$ и $n \geq 0$.)

Если $a = 1$, то уравнение приобретает вид $|x - 1| - |x + 1| = 2$. Отсюда $x \leq -1$.

*Ответ.* $a = -3$.

**IV.126.**(П.63, П.316). Для каких $a$ в множестве решений неравенства $x + \sqrt{x^2 - 2ax} > 1$ содержится промежуток $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$?

*Решение.* Из условия следует, что исходное неравенство должно выполняться при всех $x$ из заданного промежутка. Тогда становится ясным дальнейший план решения: брать в промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ точки и подставлять их в неравенство.

С первого взгляда представляется естественным испытать значение $x = 1$. Имеем $1 + \sqrt{1 - 2a} > 1$. Отсюда получаем $a < \frac{1}{2}$. (Результат не очень утешительный: круг «подозреваемых» велик.) Далее, как нам кажется, на очереди точка $x = \frac{1}{4}$.

Получаем $\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{a}{2}} > 1$, $a < -1$. Круг сузился, но не на столько, как в двух предыдущих примерах.

Наверное, читатель уже догадался, что, подставляя точки в исходное неравенство, мы не получим конечное множество значений параметра. Однако провести еще одно испытание, например для $x = \frac{1}{2}$, представляется целесообразным, ибо при $x = \frac{1}{2}$ получим $a < 0$, и, возможно, возникнет гипотеза, что промежуток $(-\infty; -1)$ — самый узкий круг «подозреваемых», который можно получить в результате испытания пробными точками.

Итак, вооружившись результатом $a < -1$, попробуем оценить левую часть исходного неравенства. Рассмотрим функцию $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2ax}$. Запишем $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{1-8a}}{4}$. Очевидно $f\left(\frac{1}{4}\right) > 1$ при $a < -1$. Имеем $f'(x) = 1 + \frac{x-a}{\sqrt{x^2 - 2ax}}$. Теперь несложно заметить, что при $x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$ и $a < -1$ $f'(x) > 0$. Следовательно, функция $f$ возрастает на отрезке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$. Отсюда $f(x) \geqslant f\left(\frac{1}{4}\right) > 1$ для всех $x$ из $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

*Ответ.* $a < -1$.

IV.127.(МГУ). Найти все пары чисел $a$ и $b$, при которых неравенство $|2x^2 + ax + b| > 1$ не имеет решений на отрезке $[1; 3]$.

*Решение.* В силу особенностей изучаемого метода сформулируем задачу, равносильную исходной. Найти все пары чисел $a$ и $b$, при которых система

$$\begin{cases} 2x^2 + ax + b \leqslant 1, \\ 2x^2 + ax + b \geqslant -1 \end{cases}$$

выполняется при всех $x$ из промежутка $[1; 3]$.

Сомнений нет, что в подобных ситуациях выгодно работать с целыми числами из рассматриваемого промежутка. Поэтому подставим $x = 1$ и $x = 3$ в первое неравенство системы, а $x = 2$ — во второе. Соответственно запишем $a + b \leqslant -1$, $3a + b \leqslant -17$,

$2a + b \geqslant -9$. (Важно понимать, что полученные неравенства должны выполняться одновременно.) Теперь с этими неравенствами проведем следующие операции: из второго вычтем третье, а из третьего — первое. Получим $a \geqslant -8$ и $a \leqslant -8$.Отсюда $a = -8$. Тогда

$$\begin{cases} -8 + b \leqslant -1, \\ 2(-8) + b \geqslant -9, \end{cases}$$

т.е. $b = 7$.

Таким образом, получили для проверки лишь одну пару: $a = -8$ и $b = 7$. Имеем

$$\begin{cases} 2x^2 - 8x + 7 \leqslant 1, \\ 2x^2 - 8x + 7 \geqslant -1. \end{cases}$$

Решением этой системы будет промежуток $[1 ; 3]$.

*Ответ.* $a = -8$ и $b = 7$.

**IV.128.** (КПИ). При каких целых отрицательных $n$ функция $f(x) = \cos nx \sin\frac{15x}{n^2}$ удовлетворяет условию $f(x + 5\pi) = \cos nx \sin\frac{15x}{n^2}$ для всех $x \in R$?

*Решение.* По условию задачи равенство $\cos n(x + 5\pi)\sin\frac{15}{n^2}(x + 5\pi) = \cos nx \sin\frac{15x}{n^2}$ должно выполняться при любом действительном $x$, а следовательно, и при $x = 0$. В этом случае имеем $\cos 5\pi n \sin\frac{75\pi}{n^2} = 0$. Так как $\cos 5\pi n \neq 0$, то $\sin\frac{75\pi}{n^2} = 0$, т.е. $\frac{75}{n^2} = k$, где $k \in Z$. Отсюда $n^2 = 1$ или $n^2 = 25$. Нас интересуют лишь отрицательные значения $n$, поэтому решения задачи следует искать в множестве $\{-1 ; -5\}$. Проверка показывает, что и при $n = -1$, и при $n = -5$ рассматриваемое равенство выполняется при всех действительных $x$.

*Ответ.* $n = -1$, $n = -5$.

**IV.129.** (МГУ). Найти все $c$ такие, что при любом $b$ система

$$\begin{cases} (1 + 3x^2)^c + (b^2 - 4b + 5)^y = 2, \\ x^2y^2 - (2 - b)xy + c^2 + 2c = 3 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

*Решение.* Данная система должна иметь хотя бы одно решение при любом $b$, а значит, и при $b = 2$. В этом случае

$$\begin{cases} (1 + 3x^2)^c = 1, \\ x^2y^2 + c^2 + 2c = 3, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x = 0, \\ c^2 + 2c = 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} c = 0, \\ x^2y^2 = 3. \end{cases}$$

Круг «подозреваемых» значений для переменной $c$ сузился до множества $\{-3 ; 0 ; 1\}$.

При $c = -3$ получаем

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1 + 3x^2)^3} + (b^2 - 4b + 5)^y = 2, \\ x^2y^2 - (2 - b)xy = 0. \end{cases}$$

Очевидно эта система имеет решение $(0 ; 0)$ при любом $b$.

При $c = 0$ имеем

$$\begin{cases} (b^2 - 4b + 5)^y = 1, \\ x^2y^2 - (2 - b)xy = 3. \end{cases}$$

Если $b \neq 2$, то решение первого уравнения $y = 0$ не удовлетворяет второму уравнению. Но по условию система должна иметь решения при любых $b$, а следовательно, значение $c = 0$ придется исключить из списка «подозреваемых».

При $c = 1$ исходная система имеет вид

$$\begin{cases} 3x^2 + (b^2 - 4b + 5)^y = 1, \\ x^2y^2 - (2 - b)xy = 0. \end{cases}$$

Очевидно пара $(0 ; 0)$ — решение этой системы при любом $b$.

*Ответ.* $c = 1$ или $c = -3$.

**IV.130.** (МАИ). При каких $x$ для любого $y$ существует $z$ такое, что $\sin(x + y + z) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)\left|y + \dfrac{1}{2}\right| + \dfrac{\left|y - \dfrac{3}{2}\right|}{2\cos x}$?

*Решение.* Несложно заметить, что выгодными для подстановки являются значения $y = \dfrac{3}{2}$, $y = -\dfrac{1}{2}$. Однако первое из них (в этом читатель может убедиться самостоятельно) не даст эффективного результата. При $y = -\frac{1}{2}$ получим $\sin\left(x + z - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\cos x}$, откуда $\cos x = 1$ или $\cos x = -1$.

При $\cos x = 1$, т.е. $x = 2\pi k$, $k \in Z$, получим $\sin(2\pi k + y + z) = \cos\left(4\pi k + \frac{\pi}{3}\right)\left|y + \frac{1}{2}\right| + \frac{\left|y - \frac{3}{2}\right|}{2}$, и, следовательно, $\sin(y + z) = \frac{\left|y + \frac{1}{2}\right|}{2} + \frac{\left|y - \frac{3}{2}\right|}{2}$. Имеем $|\sin(y + z)| \leqslant 1$, но $\frac{\left|y + \frac{1}{2}\right|}{2} + \frac{\left|y - \frac{3}{2}\right|}{2} \geqslant 1$. На рис. 102 приведен график функции $f(y) = \frac{\left|y + \frac{1}{2}\right|}{2} + \frac{\left|y - \frac{3}{2}\right|}{2}$. Видно , что равенство из условия задачи при $x = 2\pi k$ выполняется не для всех $y$, а лишь для $y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

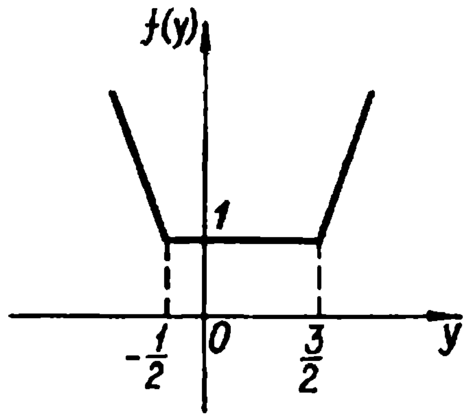


Рис. 102

При $\cos x = -1$, т.е. $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, получим

$$\sin(\pi + 2\pi k + y + z) = \cos\left(2\pi + 4\pi k + \frac{\pi}{3}\right)\left|y + \frac{1}{2}\right| + \frac{\left|y - \frac{3}{2}\right|}{2\cos(\pi + 2\pi k)},$$ откуда

$$2\sin(y + z) = \left|y - \frac{3}{2}\right| - \left|y + \frac{1}{2}\right|. \quad (*)$$

Поскольку $|2\sin(y + z)| \leqslant 2$, то должно выполняться неравенство

$\left|\left|y - \frac{3}{2}\right| - \left|y + \frac{1}{2}\right|\right| \leqslant 2$. На рис.103 построен график функции

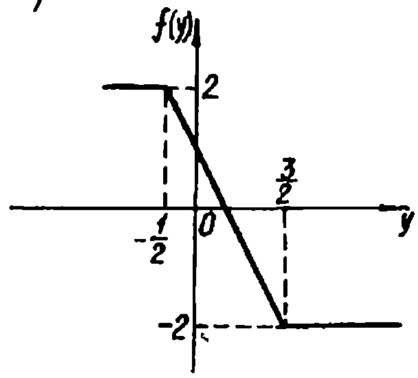


Рис. 103

$f(y) = \left|y - \frac{3}{2}\right| - \left|y + \frac{1}{2}\right|$. В этом случае для любого $y$ можно подобрать $z$ такое, что равенство (*) будет выполнено.

*Ответ.* $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

## Упражнения

**IV.131.** (МАПИ). Найти все значения параметра $m$, при которых уравнения $x^2 + (m^2 - 5m + 6)x = 0$ и $x^2 + 2(m - 3)x + (m^2 - 7m + 12) = 0$ равносильны.

**IV.132.** (МИСИС). При каких значениях параметра $a$ уравнения $9^x + 2\cdot 3^x = 3$ и $a\,7^{2x-1} + |a - 7|7^{x-1} = 1$ равносильны?

**IV.133.** (МГУ). Найти все значения параметра $a$, при которых любой корень уравнения

$$3\sin^3 x + (a - 2)(2a - 5)\cos^3 x - 2(a - 2)^2\cos x = 0$$

является корнем уравнения

$$\log_5(2\operatorname{ctg} x + 3) - \log_{\sqrt{5}}(6 - \operatorname{ctg} x) - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}(3\operatorname{ctg} x + 2) = 1$$

и, наоборот, любой корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

**IV.134.** (УрГУ). При каких значениях $a$ уравнение $\left(\sqrt{\log_x 2} - 1\right)\left(\log_2 x - |a - 1| - (a + 4)\log_x 32\right) = 0$ равносильно уравнению $(0{,}6)^{1 + \log_2^2 x} = \left(\frac{25}{9}\right)^{2 - \log_2 x^3}$?

**IV.135.** (УрГУ). При каких значениях $a$ уравнение $\left(\sqrt{\log_2 x} - \sqrt{2}\right)\left(\log_2 x - |a| + (a - 3)\log_x 8\right) = 0$ равносильно уравнению $\left(\log_x 2\right)\left(\log_{\frac{x}{16}} 2\right) = \log_{\frac{x}{64}} 2$?

**IV.136.** (МГУ). Найти все значения параметра $a$, при которых уравнения $\sin 3x = a\sin x + (4 - 2|a|)\sin^2 x$ и $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x\cos 2x$ равносильны.

**IV.137.** (МГУ). Найти все $a$, при которых уравнения $2\sin^7 x - (1 - a)\sin^3 x + (2a^3 - 2a - 1)\sin x = 0$ и $2\sin^6 x + \cos 2x = 1 + a - 2a^3 + a\cos^2 x$ равносильны.

**IV.138.** (УрГУ). При каких $a$ неравенство $\sqrt{2x + 8} \geqslant x$ и уравнение $|x + a| + |x + 4| = 8$ равносильны?

**IV.139.** (УрГУ). При каких значениях параметра $a$ неравенство $\sqrt{x^2+4x+7} \leqslant x+3$ и уравнение $2^{x+2} - \left|2^{x+1} - a\right| = 2^{x+1} + 1$ равносильны?

**IV.140.** (МГУ). Найти все пары чисел $a$ и $b$, при которых неравенство $|2x^2 + ax + b| > 9$ не имеет решений на отрезке $[-1; 5]$.

**IV.141.** (МГУ). Найти все пары чисел $a$ и $b$, при которых неравенство

$$|x^2 + ax + b| > 2$$

не имеет решений на отрезке $[1; 5]$.

**IV.142.** (МГУ). Найти все значения $x$, удовлетворяющие уравнению $\log_{x+a^2+1}(a^2x+2) = 2\log_{7+2x}(5-\sqrt{6-2x})$ при любом $a$.

**IV.143.** (МГУ). Найти все значения $x$, удовлетворяющие уравнению $\log_2(a^2x^3 - 5a^2x^2 + \sqrt{6-x}) = \log_{2+a^2}(3-\sqrt{x-1})$ при любом $a$.

**IV.144.** (МГУ). Найти множество всех пар чисел $(a; b)$, для каждой из которых при всех $x$ справедливо равенство $a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1$.

**IV.145.** (МГУ). Найти множество всех пар чисел $(a; b)$, для каждой из которых при всех $x$ справедливо равенство $ae^x + b = e^{ax+b}$.

**IV.146.** (МАИ). При каких значениях $x \neq 0$ для любых значений $a$ выполняется неравенство

$$x^2\left(1 - \frac{x^2a}{x^2+a^2}\right) - x\left(1 - \frac{x^2a}{x^2+a^2}\right) \geqslant 0?$$

**IV.147.** (МГУ). Найти все $a$, при которых система

$$\begin{cases} (x^2+1)^a + (b^2+1)^y = 2, \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого $b$.

**IV.148.** (МГУ). Найти все значения $b$, при которых для любых $a$ существует пара $(x; y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} 2(1+|y|)^b + (a^2-2a+2)^z = 3, \\ yz(z+a+1) = 2b^2 - 3b + 1. \end{cases}$$

**IV.149.**(МАИ). При каких действительных значениях $x$ для любого действительного $y$ найдется такое $z$, что

$$\cos(2x - y + z) = |y^3 - 1| \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) + \frac{|y^3 + 1|}{2\sin x}?$$

## В. Разные приемы.

В первых двух пунктах описаны, безусловно, далеко не все приемы поиска необходимых условий. И это понятно. Ведь фактически решение каждой задачи можно вести по схеме «от необходимого к достаточному». Но для одних задач этот подход оправдан, а для других нет. В одних случаях можно сразу «выйти» на достаточное условие, в других — подходить к ответу, стягивая «кольца» необходимых условий (рис. 104).

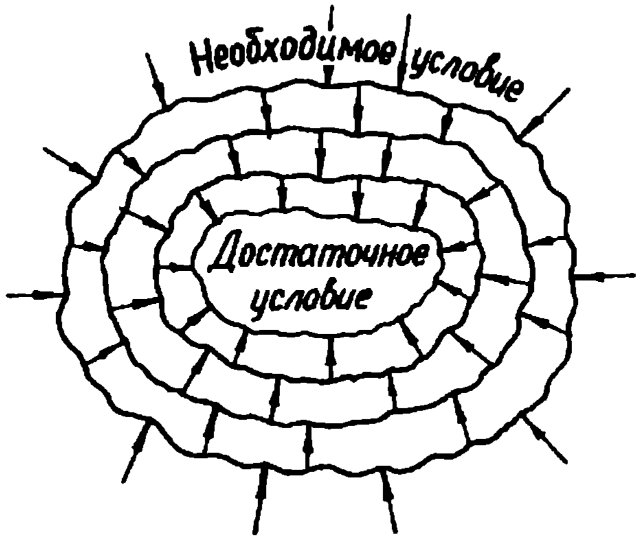


Рис.104

В этом пункте будут рассмотрены задачи, для которых упомянутая схема решения целесообразна. Заметим, что приемы поиска необходимых условий в каждом случае разные и в основном зависят от особенностей конкретной задачи.

**IV.150.**(МАИ). Найти все значения $a$, при каждом из которых существует целое нечетное число $n$, удовлетворяющее уравнению $n^2 3^a - 3^a - 16n = 9 \cdot 3^{-a} - 3^{2-a} n^2$.

*Решение.* Пусть $3^a = t$, $t > 0$. Тогда исходное уравнение становится таким: $t^2(n^2 - 1) - 16tn + 9n^2 - 9 = 0$. Если $n^2 = 1$, то это уравнение положительных корней не имеет. Теперь при $n^2 \neq 1$, рассматривая полученное уравнение как квадратное относительно $t$, достаточно найти такие $n$, при которых уравнение имеет хотя бы один положительный корень. Однако в данном примере выгодней не переходить к достаточному условию, а сначала исследовать необходимое условие, т.е. выяснить, при каких $n$ дискриминант квадратного уравнения неотрицателен.

При этом заметим, что поиск достаточного условия все равно включает этап исследования знака дискриминанта.

Имеем $\frac{D}{4} = (3n^2 + 8n - 3)(-3n^2 + 8n + 3)$. Легко установить, что при $n^2 \neq 1$ целыми нечетными решениями неравенства $D \geq 0$ будут $n = -3$ и $n = 3$. По понятным причинам полученные значения для $n$ следует проверить.

Если $n = -3$, то квадратное уравнение имеет один двойной корень $t = -3$, что не подходит. Если $n = 3$, то $t = 3$. Отсюда $3^a = 3$, $a = 1$.

*Ответ.* $a = 1$.

**IV.151.** При каких $a$ система неравенств

$$\begin{cases} x - y \leq 2, \\ x + ay \geq 2, \\ x - 2y \geq a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

*Решение.* Каждое из неравенств системы задает полуплоскость вместе с границей на координатной плоскости $(x\,;\,y)$. Если какие-то две из границ параллельны или совпадают, то очевидно система не может иметь единственное решение. Тогда пересечение решений любых двух неравенств должно задавать область, ограниченную углом (включая границу). Следовательно, если граница третьей полуплоскости не пройдет через точку пересечения двух других границ, то система также не может иметь единственное решение (решений будет бесконечно много или ни одного). Значит, все три границы должны проходить через одну точку. Правда, это требование еще не гарантирует единственность решения, а следовательно, оно является необходимым.

Таким образом, система

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ x + ay = 2, \\ x - 2y = a \end{cases}$$

должна иметь решения.

Из первого и третьего уравнений системы устанавливаем, что $x = 4 - a$, $y = 2 - a$. Подставив эти значения во второе уравнение, найдем условия, при которых система уравнений имеет решения. Получаем $4 - a + a(2 - a) = 2$. Отсюда $a = 2$ или $a = -1$. Среди этих значений и содержится ответ.

Если $a = -1$, то

$$\begin{cases} x - y \leqslant 2, \\ x - y \geqslant 2, \\ x - 2y \geqslant -1. \end{cases}$$

Поскольку границы полуплоскостей, которые задают первые два неравенства этой системы, совпадают, то,как отмечалось выше, эта система не может иметь единственное решение.

При $a = 2$ запишем

$$\begin{cases} x - y \leqslant 2, \\ x + 2y \geqslant 2, \\ x - 2y \geqslant 2. \end{cases}$$

Изобразив решения каждого неравенства системы (рис. 105), устанавливаем, что они имеют только одну общую точку.

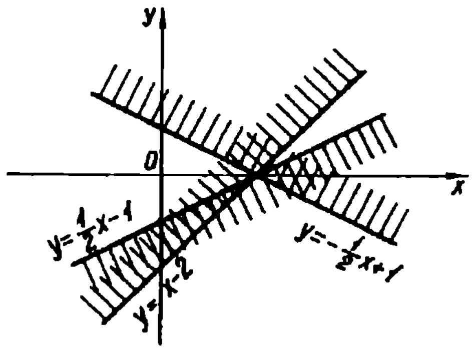



Рис. 105

*Ответ.* $a = 2$.

**IV.152.** (МГУ). Найти все значения параметра $q$, при которых уравнение

$$\sqrt{(|x+2| + q - 2\pi + 2)(x - 3q + 20)} + \log_x \frac{2\pi^2 + q^2}{2(q-\pi)|x+\pi| - x^2 - 2\pi x + 2\pi q} = 0$$ имеет хотя бы одно целочисленное решение.

*Решение.* Первое слагаемое левой части уравнения неотрицательно, поэтому для существования корней необходимо, чтобы

$$\log_x \frac{2\pi^2 + q^2}{2(q-\pi)|x+\pi| - x^2 - 2\pi x + 2\pi q} \leqslant 0.$$

Отсюда

$$0 < \frac{2\pi^2 + q^2}{2(q-\pi)|x+\pi| - x^2 - 2\pi x + 2\pi q} \leqslant 1.$$

Поскольку $2\pi^2 + q^2 > 0$, то последнее неравенство равносильно такому: $2(q-\pi)|x+\pi| - x^2 - 2\pi x + 2\pi q \geqslant 2\pi^2 + q^2$.

Отсюда $(x+\pi)^2 - 2|x+\pi|(q-\pi) + (q-\pi)^2 \leqslant 0$, $(|x+\pi| - (q-\pi))^2 \leqslant 0$. Тогда $|x+\pi| = q - \pi$. Заметим, что из последнего равенства следует, что подлогарифмическое выражение равно единице, а значит, второе слагаемое левой части исходного уравнения равно нулю. Теперь можно записать достаточное требование для получения ответа:

$$\begin{cases} |x+\pi| = q-\pi, \\ (|x+2| + q - 2\pi + 2)(x - 3q + 20) = 0, \\ x \in Z. \end{cases}$$

Заметим, что можно было поступить несколько иначе: не включать в систему ограничение $x \in Z$, т.е. перейти к очередному необходимому условию, а затем выбрать из полученных решений целые. Однако при таком подходе увеличивается техническая работа.

Рассмотрим случай, когда $x > -\pi$ ($x = -\pi$ не рассматриваем, так как $x \in Z$). Тогда $x + \pi = q - \pi$, $x = q - 2\pi$. Следовательно, в этом случае записанная выше система равносильна совокупности

$$\begin{cases} x = 3q - 20, \\ x = q - 2\pi, \\ x \in Z \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} |x+2| = -(x+2), \\ x = q - 2\pi, \\ x \in Z. \end{cases}$$

Понятно, что первая система решений не имеет. Из второй получаем $x \leqslant -2$. Но $x > -\pi$ и $x \in Z$, а значит, $x = -2$ или $x = -3$. Тогда соответственно $q = 2\pi - 2$ или $q = 2\pi - 3$.

Теперь разберем случай, когда $x < -\pi$. Получаем $-x - \pi = q - \pi$, $x = -q$. Переходим к совокупности

$$\begin{cases} |x+2| = x + 2\pi - 2, \\ x = -q, \\ x \in Z \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 3q - 20, \\ x = -q, \\ x \in Z. \end{cases}$$

Уравнение $|x+2| = x + 2\pi - 2$ очевидно не имеет решений в целых числах. Следовательно, первая система также решений не имеет. Из второй системы получаем $x = -5$, $q = 5$.

*Ответ.* $q = 2\pi - 3$, или $q = 2\pi - 2$, или $q = 5$.

Рассмотрим примеры, решения которых требуют увеличения числа «колец» необходимых условий (рис. 104).

IV.153. (МГУ). Найти все значения $a$, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел $x$ и $y$, удовлетворяющая уравнению $12x^2 + 41xy + 35y^2 = 5$ и двум неравенствам $y + 1 < x$, $a^2x - 3ay < 6$.

*Решение.* Как правило, в целых числах уравнения подобного типа решаются разложением левой части на множители. Это можно сделать, например, так: рассмотреть уравнение

$12x^2 + 41xy + 35y^2 = 0$ как квадратное относительно $x$, найти корни, а затем разложить левую часть на множители. Проделав эти операции, получим $(3x + 5y)(4x + 7y) = 5$. Это уравнение на множестве целых чисел равносильно совокупности четырех систем

$$\begin{cases} 3x + 5y = 5, \\ 4x + 7y = 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3x + 5y = -5, \\ 4x + 7y = -1, \end{cases} \text{ или }$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1, \\ 4x + 7y = 5, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3x + 5y = -1, \\ 4x + 7y = -5. \end{cases}$$

Принадлежность к множеству решений этой совокупности и будет первым необходимым условием. Имеем $(x\,;\,y) \in \{(30\,;\,-17), (-30\,;\,17), (-18\,;\,11), (18\,;\,-11)\}$. Подключив к последнему требованию условие $y + 1 < x$, получим следующее «кольцо» необходимого условия: $(x\,;\,y) \in \{(30\,;\,-17), (18\,;\,-11)\}$. Напомним, что по условию пара $(x\,;\,y)$ обязана быть единственной. Тогда одна из полученных пар должна быть решением неравенства $a^2x - 3ay < 6$, а другая нет. Таким образом, для получения ответа достаточно (наконец !) решить следующую совокупность двух систем:

$$\begin{cases} 30a^2 + 51a < 6, \\ 18a^2 + 33a \geqslant 6 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 18a^2 + 33a < 6, \\ 30a^2 + 51a \geqslant 6. \end{cases}$$

Решив эту совокупность, получим

*Ответ.* $-2 < a \leqslant \dfrac{-17 - 3\sqrt{41}}{20}$ или $\dfrac{-17 + 3\sqrt{41}}{20} \leqslant a < \dfrac{1}{6}.$

**IV.154.** (МГУ). Определить, при каких значениях параметров $a$ и $b$ каждое решение уравнения $\left(\dfrac{x + y}{x - y}\right)^2 = a$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{x}{y} = b$.

*Решение.* Вначале выясним, при каких $a$ в решения первого уравнения входят пары вида $(x\,;\,0)$.

При $y = 0$ получаем $\left(\dfrac{x}{x}\right)^2 = a$. Отсюда $a = 1$. И наоборот, при $a = 1$ в решения уравнения $\left(\dfrac{x + y}{x - y}\right)^2 = 1$ входят пары вида $(x\,;\,0)$. Следовательно, первым необходимым условием для $a$ является $a \neq 1$.

Теперь можно первое уравнение записать так: $\left(\dfrac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}-1}\right)^2 = a.$

Отсюда $(1-a)\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 2(1+a)\dfrac{x}{y} + (1-a) = 0$. Будем внимательными и сперва выясним, при каких $a$ полученное квадратное уравнение относительно $\dfrac{x}{y}$ может иметь корень $\dfrac{x}{y} = 1$. Имеем $(1-a) + 2(1+a) + (1-a) = 0$. Это равенство выполняться не может. Следовательно, при $a \neq 1$ квадратное уравнение равносильно первому уравнению из условия.

Все корни квадратного уравнения должны быть корнями линейного (относительно $\dfrac{x}{y}$ уравнения $\dfrac{x}{y} = b$). Для выполнения этого требования дискриминанту необходимо быть равным нулю. Имеем $D = 16a = 0$, т.е. $a = 0$.

Проверим значение $a = 0$ на достаточность. Имеем $\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2 = 0$. Отсюда $x = -y \neq 0$. Тогда $\dfrac{x}{y} = -1$. Следовательно, $b = -1$.

*Ответ.* $a = 0$ и $b = -1$.

Наметим еще два способа решения этой задачи. В первом будет использована идея п. А настоящего параграфа, во втором — графические соображения.

1. Если $(x_0\,; y_0)$ — решение первого уравнения, то пара $(y_0\,; x_0)$ также является решением. Поэтому для выполнения требования задачи необходимо, чтобы $x_0^2 = y_0^2$.

2. При $a > 0$ и $a \neq 0$ первое уравнение на координатной плоскости $(x\,; y)$ задает пару различных прямых. Следовательно, необходимо, чтобы $a = 0$.

**IV.155.** (МГУ). Найти все значения $\alpha$, для которых существуют четыре натуральных числа $x$, $y$, $u$, $v$, удовлетворяющих равенствам $(x+y)(x+y+20) = (140-\alpha)(\alpha - 80)$, $\alpha(8u^2 + 2v^2 - \alpha) = (4u^2 - v^2)^2$.

*Решение.* Поскольку $(x+y)(x+y+20) > 0$, то первое необходимое условие для $\alpha$ найдем, решив неравенство $(140-\alpha)(\alpha-80) > 0$. Имеем $80 < \alpha < 140$.

Представим второе равенство из условия в таком виде: $\alpha^2 - \alpha(8u^2 + 2v^2) + (4u^2 - v^2)^2 = 0$, т.е. как квадратное уравнение относительно $\alpha$. Решив его, получим $\alpha = 4u^2 - 4uv + v^2$ или $\alpha = 4u^2 + 4uv + v^2$. Теперь можно «сжать» необходимое условие для $\alpha$: $\alpha$ — натуральное число из промежутка $(80 ; 140)$. Совершенно очевидно, что проверка на достаточность 59 натуральных чисел из этого промежутка лишена всякого здравого смысла. Однако необходимое условие для $\alpha$ может стать еще уже. Надо лишь заметить, что $\alpha$ — квадрат натурального числа, а таких чисел в рассматриваемом промежутке всего три: 81, 100, 121. Теперь проверка становится реальной.

Если $\alpha = 81$, то $(x + y)(x + y + 20) = 59$. Пусть $x + y = t$, $t \in N$. Легко проверить, что уравнение $t^2 + 20t - 59 = 0$ натуральных корней не имеет. Аналогичный результат дает $\alpha = 121$.

Если $\alpha = 100$, то получаем $t^2 + 20t - 800 = 0$. Это уравнение имеет один натуральный корень $t = 20$.

Таким образом, для $\alpha = 100$ существуют два натуральных числа $x$, $y$ (например, $x = 10$, $y = 10$) и два натуральных числа $u$, $v$ (например, $u = 2$, $v = 6$) таких, что имеют место два равенства из условия задачи.

*Ответ.* $\alpha = 100$.

**IV.156.** (КПИ). При каких $p$ и $m$ минимум функции

$$f(x) = (x-1)^4(p-1)\sqrt{5-p} + x\cos\frac{\pi p}{4} + \left|\operatorname{ctg} 2\pi m\right|(1+m)(1-mp) + 1$$

не меньше 1 и достигается при $x = 1$?

*Решение.* Запишем $f'(x) = 4(x-1)^3(p-1)\sqrt{5-p} + \cos\frac{\pi p}{4}$.

Для того чтобы $x = 1$ была точкой минимума, необходимо выполнение условия $f'(1) = 0$. Имеем $f'(1) = \cos\frac{\pi p}{4} = 0$. Отсюда $p = 2 + 4k$, $k \in Z$. Поскольку $p \leqslant 5$, то необходимым условием для $p$ будет выполнение равенства $p = 2 + 4k$, где $k \in Z$ и $k \leqslant 0$.

Очевидно уравнение $f'(x) = 0$ может иметь не более одного корня, причем один уже есть — это точка минимума $x = 1$.

Следовательно, если $x < 1$, то $f'(x) < 0$, и, например, $f'(0) < 0$.

Отсюда имеем $f'(0) = -4(p-1)\sqrt{5-p} + \cos\frac{\pi p}{4} < 0$. С учетом того, что $p = 2 + 4k$, получаем $4(p-1)\sqrt{5-p} > 0$. Отсюда $1 < p < 5$. Таким образом, необходимое условие для $p$ значительно сузилось и стало таким: $p = 2$.

При $p = 2$ получаем $f(x) = (x-1)^4\sqrt{3} + |\operatorname{ctg} 2\pi m|(1 + m)(1-2m) + 1$. Эта функция действительно имеет точку минимума $x = 1$. Тогда осталось потребовать, чтобы $f(1) \geqslant 1$, т.е. $|\operatorname{ctg} 2\pi m|(1+m)(1-2m) \geqslant 0$.

Предложим наиболее безопасный путь решения этого неравенства: перейти к равносильной совокупности

$$\left[\begin{array}{l} |\operatorname{ctg} 2\pi m|(1+m)(1-2m) = 0, \\ |\operatorname{ctg} 2\pi m|(1+m)(1-2m) > 0. \end{array}\right.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} 2\pi m = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ \left\{\begin{array}{l} -1 < m < \dfrac{1}{2}, \\ 2\pi m \neq \pi r, \text{ где } n \in Z, r \in Z, \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{4} + \dfrac{n}{2}, \ n \in Z, \\ -1 < m < -\dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{1}{2} < m < 0, \\ 0 < m < \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

*Ответ.* $p = 2$ и $-1 < m < -\frac{3}{4}$, или $-\frac{3}{4} < m < -\frac{1}{2}$, или $-\frac{1}{2} < m < -\frac{1}{4}$, или $-\frac{1}{4} < m < 0$, или $0 < m < \frac{1}{4}$, или $\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$, или $m = \frac{1}{4} + \frac{n}{2}$, где $n \in Z$.

**IV.157.** (МГУ). При каких значениях параметров $a$ и $b$ уравнение $\left|x + \cos^2 4a - 2\sin a \cos^4 4a\right| + \left|x - \sin^2 a\right| = b\left(a + \frac{3\pi}{2}\right)$ имеет единственное решение?

*Решение.* Рассмотрим функцию $f(x) = |x - c| + |x - d| + e$ ($c$, $d$, $e$ — некоторые числа). Не нарушая общности рассуждений, положим $d > c > 0$, $e > 0$. График рассматриваемой функции схематично изображен на рис. 106. Для существования единственного корня уравнения вида $f(x) = A$ необходимо, чтобы $c = d$ (рис. 107). Тогда для того чтобы уравнение $f(x) = 0$ имело единственный корень, достаточно выполнения условий $c = d$ и $e = 0$ (рис. 108).

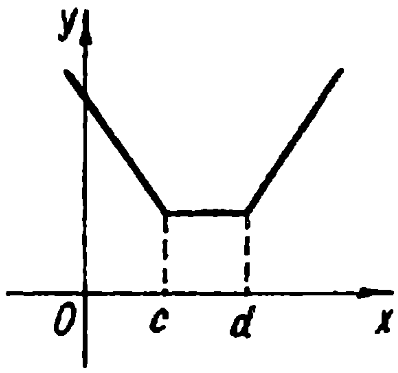


Рис. 106

Итак, для нахождения искомых значений параметров $a$ и $b$ достаточно решить систему

$$\begin{cases} \sin^2 a = 2\sin a \cos^4 4a - \cos^2 4a, \\ b\left(a + \dfrac{3\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первое из ее уравнений:

$$\sin^2 a - 2\sin a \cos^4 4a = -\cos^2 4a.$$

Добавив к обеим его частям $\cos^8 4a$, получим

$$\sin^2 a - 2\sin a \cos^4 4a + \cos^8 4a = \cos^8 4a - \cos^2 4a.$$

Тогда имеем $(\sin a - \cos^4 4a)^2 = \cos^8 4a - \cos^2 4a$. Правая часть полученного уравнения неположительна: $\cos^8 4a - \cos^2 4a = \cos^2 4a(\cos^6 4a - 1) \leq 0$, а значит, уравнение имеет решения лишь при

$$\begin{cases} \sin a = \cos^4 4a, \\ \cos 4a = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin a = \cos^4 4a, \\ \cos^6 4a = 1. \end{cases}$$

Вторая из этих систем дает $a = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. Из первой получим, что, с одной стороны, $a = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}$, а с другой — $a = \pi n$, но ни при каких целых $n$ этого быть не может.

Тогда имеем

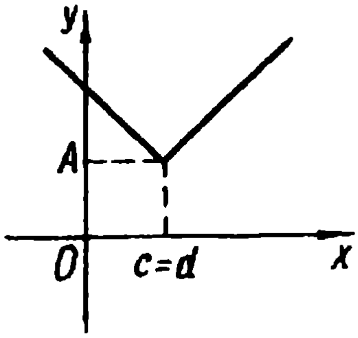



Рис. 107

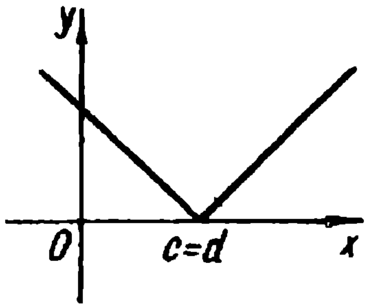



Рис. 108

$$\begin{cases} a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \; k \in Z, \\ b\left(a + \frac{3\pi}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ a = -\frac{3\pi}{2}, \\ b \in R. \end{cases}$$

*Ответ.* $a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, и $b = 0$; $a = -\frac{3\pi}{2}$ и $b \in R$.

## Упражнения

**IV.158.** (МИЭМ). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = a + 1, \\ 2xy + 2y = -a^2 - 4. \end{cases}$$

**IV.159.** (МИЭМ). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 2 - a, \\ 4xy + 4y = a^2 - 2a + 5. \end{cases}$$

**IV.160.** Решить уравнение

$$\sqrt{x + \sqrt{a^2 + 2a - 3}} + \sqrt{x + a + \sqrt{1 - 2a + 2a^2 - a^3}} = a\sqrt{1 - x}$$

**IV.161.** (МАИ). Найти все действительные значения $a$, при которых найдется хотя бы одно целое четное число $n$, удовлетворяющее уравнению

$$n^2 \cdot 4^{a+1} + 16n - 4 \cdot 2^{2a} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2a} - 4^{-a}n^2.$$

**IV.162.**(НГУ). При каких значениях параметра $a$ среди решений неравенства

$$\log_2(x-100) - \log_{\frac{1}{2}}\frac{|x-101|}{105-x} + \log_2\frac{|x-103|(105-x)}{(x-100)} > a$$

содержится единственное целое число?

**IV.163.**(НГУ). При каких значениях параметра $a$ среди решений неравенства $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2|x-150|}{(x-146)} - \log_2(151-x) + \log_{\frac{1}{2}}\frac{|x-148|(x-146)}{(151-x)} < a$ содержится единственное целое число?

**IV.164.**(МГУ). При каких значениях параметра $a$ уравнение $|x+a^2| + |x+1| = |a+1|$ имеет единственное решение?

**IV.165.**(МГУ). При каких значениях параметра $a$ уравнение $\left|x-a^3\right| + \left|x-a\right| = \left|a(a-1)\right|$ имеет единственное решение?

**IV.166.**(МГУ). При каких $b$ система

$$\begin{cases} x + 3y = 2b + 1, \\ 3xy = 4b^2 + 2b - 1, \\ x^2 + 9y^2 \leqslant -4b^2 + 2b + 2 \end{cases}$$

имеет решения?

**IV.167.**(МГУ). Найти $a$, при которых уравнение

$$\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{a^2 + 4\pi^2 + 4}{4x - x^2 - 2(a-2\pi)|x-2| + 4\pi a}\right) - \sqrt{(x - 5a + 10\pi - 34)(|\pi - x| - a + \pi + 2)} = 0$$

имеет по крайней мере одно целочисленное решение.

**IV.168.**(МГУ). Найти $a$, при которых существует единственная пара целых чисел $(x\,;y)$, удовлетворяющая уравнению $-15x^2 + 11xy - 2y^2 = 7$ и неравенствам $x < y$, $2a^2x + 3ay < 0$.

**IV.169.**(МГУ). Указать все значения параметра $d$, при которых уравнение

$$\cos^2 x - (d+1)^2\cos x - (d+1)(d+2)(d-1) = 0$$

имеет на отрезке $\left[\frac{-3\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ ровно три корня.

**IV.170.** (МГУ). Указать все значения параметра $a$, при которых уравнение

$$\sin^2 x + (a-2)^2 \sin x + a(a-2)(a-3) = 0$$

имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три корня.

**IV.171.** (МГУ). Найти все значения параметра $a$, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geqslant \dfrac{1-a}{1+a}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leqslant -2 \end{cases}$$

имеет решения.

**IV.172.** (МГУ). Найти все действительные значения $\alpha$, для каждого из которых существуют четыре целых числа $(x, y, u, v)$, удовлетворяющие равенствам $x^2 + y^2 = (107 - \alpha)(\alpha - 91)$ и $54(u^2 - v^2) = \alpha(15u + 3v - \alpha)$.

**IV.173.** (МГУ). Найти все действительные значения $\alpha$, для каждого из которых существуют четыре натуральных числа $(x, y, u, v)$, удовлетворяющие равенствам $xy(40 + xy) = (150 - \alpha)(\alpha - 90)$ и $\alpha(8u^2 + 18v^2 - \alpha) = (4u^2 - 9v^2)^2$.

**IV.174.** (КПИ). Найти все значения параметров $m$ и $p$, для которых минимальное значение функции

$$f(x) = (x+1)^8(p-1)\sqrt{5-p} + x\cos\frac{\pi p}{2} +$$

$$+ |\operatorname{tg}\pi m|(p-m)(m+1) + 3$$

не менее 3 и достигается при $x = -1$.

**IV.175.** Найти все значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases} 2y - 5x \geqslant 4a + 12, \\ x + y \geqslant -3a + 4, \\ 3y - x \leqslant 5a + 6 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

# Ответы и указания

## Глава I

**I.23.** Если $a = -2$, то $x$ — любое; если $a = 2$, то решений нет; если $a \neq \pm 2$, то $x = \frac{1}{a-2}$. **I.24.** Если $a = 1$, то $x$ — любое; если $a = 5$, то решений нет; если $a \neq 1$ и $a \neq 5$, то $x = \frac{1}{a-5}$. **I.25.** Если $a = 0$ и $b = 0$, то $x$ — любое; если $a = 0$, а $b \neq 0$, то решений нет; если $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$. **I.26.** Если $a = -2$, то решений нет; если $a \neq -2$, то $x = 2$. **I.27.** Если $a = -3$, то решений нет; если $a \neq -3$, то $x = a$. **I.28.** Если $a \neq 2$, то $x = a$. **I.29.** Если $a = -7$ или $a = 7$, то решений нет; если $a \neq \pm 7$, то $x = 7$. **I.30.** Если $a = 0$, то решений нет; если $a \neq 0$, то $x = -2a$. **I.31.** Если $a = 1$ или $a = 3$, то решений нет; если $a \neq 1$ и $a \neq 3$, то $x = a$. **I.32.** Если $a = 1$, то $x = 3$; если $a = 3$, то $x = 1$; если $a \neq 1$ и $a \neq 3$, то $x = 1$ или $x = 3$. **I.33.** Если $a = 0$, то $x < 0$ или $x > 0$; если $a = 2$, то решений нет; если $a \neq 0$ и $a \neq 2$, то $x = a$. **I.34.** Если $a = 0$, то $x < 2$ или $x > 2$; если $a = 2$, то решений нет; если $a \neq 0$ и $a \neq 2$, то $x = a$. **I.35.** Если $a < 0$, то решений нет; если $a \geqslant 0$, то $x = a^2 + 3$. **I.36.** Если $a > 0$, то решений нет; если $a \leqslant 0$, то $x = a^2$. **I.37.** Если $a = 0$, то $x \geqslant 0$; если $a \neq 0$, то $x = 0$. **I.38.** Если $a \leqslant 1$, то $x = 1$; если $a > 1$, то $x = 1$ или $x = a$. **I.39.** Если $a \leqslant 1$, то решений нет; если $a > 1$, то $x = a$. **I.40.** Если $a \leqslant -1$, то $x = -a$; если $a > -1$, то $x = 1$ или $x = -a$. **I.41.** Если $a \leqslant -1$, то решений нет; если $a > -1$, то $x = 1$. **I.42.** Если $a \leqslant 0$, то $x = 0$; если $a > 0$, то $x = a$. **I.43.** Если $a \leqslant 0$, то $x = -a$; если $a > 0$, то $x = a$ или $x = -a$. **I.44.** Если $a < 0$, то $x = a$ или $x = -a$; если $a \geqslant 0$, то $x = a$. **I.45.** Если $|a| > 1$, то $x = a$, или $x = -1$, или $x = 1$; если $|a| \leqslant 1$, то $x = 1$ или $x = -1$. **I.46.** Если $a < -1$, то $x = a$, или $x = -1$, или $x = 1$; если $-1 \leqslant a < 1$, то $x = a$ или $x = 1$; если $a \geqslant 1$, то $x = a$. **I.47.** Если $a = 0$, то $x = 0$; если $a \neq 0$, то нет решений. **I.48.** Если $a = 0$, то $x = 1$; если $a \neq 0$, то нет решений. **I.49.** Нет решений. **I.50.** Если $a \geqslant 0$, то $x = \pm a$; если $a < 0$, то нет решений. **I.51.** Если $a = 0$, то $x = 3$; если $a \neq 0$, то нет решений. **I.52.** Если $a = 0$, то $x = 3$; если $a \neq 0$, то нет решений. **I.53.** Нет решений. **I.54.** Если $a < 0$, то $a < x < 0$; если $a = 0$, то нет решений; если $a > 0$, то $0 < x < a$. **I.55.** Если $a < 0$, то $2a < x < a$; если

$a = 0$, то нет решений; если $a > 0$, то $a < x < 2a$. **I.56.** Если $a < 0$, то $x < 2a$; если $a = 0$, то $x < 0$; если $a > 0$, то $x < a$ или $a < x < 2a$. **I.57.** Если $a < 0$, то $x = a$ или $x \leqslant 2a$; если $a = 0$, то $x \leqslant 0$; если $a > 0$, то $x \leqslant 2a$. **I.58.** Если $a = 0$, то $x = 0$; если $a \neq 0$, то нет решений. **I.59.** Если $a > 0$, то $x > 0$; если $a \leqslant 0$, то нет решений. **I.60.** Если $a \leqslant 0$, то $x \geqslant 0$; если $a > 0$, то $x = 0$. **I.61.** Если $a < 0$, то $x \geqslant 0$; если $a \geqslant 0$, то $x > a^2$. **I.62.** Если $a \geqslant 0$, то $0 \leqslant x \leqslant a^2$; если $a < 0$, то нет решений. **I.63.** Если $a < 0$, то $x \geqslant 0$; если $a = 0$, то $x > 0$; если $a > 0$, то $x \geqslant a$. **I.64.** Если $a \leqslant 0$, то $x \geqslant 0$; если $a > 0$, то $x \geqslant a$. **I.65.** Если $a \leqslant 0$, то $a \leqslant x \leqslant 0$; если $a > 0$, то $x = a$. **I.66.** Если $a \leqslant -1$, то $x > -a$; если $a > -1$, то $-a < x < 1$ или $x > 1$. **I.67.** Если $a < 2$, то $a \leqslant x < 2$ или $x > 2$; если $a = 2$, то $x > 2$; если $a > 2$, то $x \geqslant a$. **I.68.** Если $a > 0$, то $2 - a < x \leqslant a + 2$; если $a \leqslant 0$, то нет решений. **I.69.** Если $a \leqslant 0$, то $x = \pm\sqrt{-a}$; если $a > 0$, то нет решений. **I.70.** Если $a > 0$, то $x = 0$ или $x \leqslant -a$; если $a \leqslant 0$, то $x \leqslant -a$. **I.71.** Если $a < 0$, то $a < x < 0$ или $x > 0$; если $a \geqslant 0$, то $x > a$. **I.72.** Если $a < 1$, то $x = a$ или $x \geqslant 1$; если $a \geqslant 1$, то $x \geqslant 1$. **I.73.** Если $a > -2$, то $-a < x < 2$ или $x < -a$; если $a \leqslant -2$, то $x < 2$. **I.74.** Если $a \leqslant 0$, то $x$ — любое; если $a > 0$, то $x \leqslant \log_2 a$. **I.75.** Если $a < 0$, то $x$ — любое; если $a = 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $x > -\log_2 a$. **I.76.** Если $a \neq 0$, то $x$ — любое; если $a = 0$, то $x < 1$ или $x > 1$. **I.77.** $a \leqslant 3$. **I.78.** $a = -2$. **I.79.** $4 < a \leqslant 5$. **I.80.** а) $a \leqslant 3$; б) $a \geqslant 5$. **I.81.** $a = -4$ или $a = -13$. **I.82.** $a = 20$. **I.83.** а) $-8 < a < -6$ или $-6 < a < 2$; б) $a = -2$, или $-\frac{1}{40} < a < 0$, или $a > 0$. **I.84.** $-\frac{19}{3} < a \leqslant -5$. **I.85.** $a \leqslant -3$. **I.86.** а) $a = 81$ или $a < 0$; б) $a = 1$ или $a \leqslant 0$; в) $0 < a < 1$ или $a > 1$; г) $a < -4$ или $a \geqslant -2$; д) $-1 \leqslant a < 1$. **I.87.** $a \geqslant -4$. **I.88.** $a \leqslant \frac{6}{5}$. **I.89.** $a \leqslant -1$ или $a \geqslant 1$. **I.90.** $a = 0$. **I.91.** $a < -\frac{1}{2}$. *Указание.* Первое уравнение или имеет бесконечно много корней, или вообще их не имеет. Второе уравнение имеет один корень или ни одного. Следовательно, о равносильности может идти речь только тогда, когда данные уравнения корней не имеют.

**I.92.** $a = 1$ или $a = \frac{6 - \sqrt{11}}{25}$.

**II.8.** Если $b = 0$, то решений нет; если $b \neq 0$, то $x = \frac{b}{2}$. **II.9.** Если $b < 12$ или $b = 16$, то решений нет; если $12 \leqslant b < 13$, то $x = \log_3 (1 - \sqrt{b - 12})$ или $x = \log_3 (1 + \sqrt{b - 12})$; если $13 \leqslant b < 16$, или $b > 16$, то $x = \log_3 (1 + \sqrt{b - 12})$. **II.10.** Если $a \leqslant 1$, то $x = \log_{12}(1 + \sqrt{1 - a})$ или $x = -\log_{12}(1 + \sqrt{1 - a})$; если $a > 1$, то решений нет. **II.11.** Если $a < 0$, то $x = \log_4 \left(-\frac{3}{a}\right)$; если $0 \leqslant a < 2$, то решений нет; если $a = 2$, то $x$ — любое; если $a > 2$, то $x = \log_4 \frac{9}{25a}$. *Указание.* Сразу заметим, что при $a = 2$ корнем уравнения служит любое действительное число. Имеем

$$(a - 2)\left(\frac{5}{3}2^{2x}a + 1\right) = 2|a - 2|\sqrt{1 - 2^{2x}a}.$$

Пусть $2^{2x}a = t$. Тогда запишем $(a - 2)\left(\frac{5}{3}t + 1\right) = 2|a - 2|\sqrt{1 - t}$.

Если $a > 2$, то $\frac{5}{3}t + 1 = \sqrt{1 - t}$. Легко убедиться, что это уравнение имеет единственный корень $t = \frac{9}{25}$.

Если $a < 2$, то $\frac{5}{3}t + 1 = -\sqrt{1 - t}$. Отсюда $t = -3$. Значит, $2^{2x}a = -3$. Очевидно, что при $a \geqslant 0$ последнее уравнение решений не имеет.

**II.12.** Если $a < 0$, то $x = \log_3 \frac{2(1 - a)}{\sqrt{33} + 1}$; если $a = 0$, то $x$ — любое; если $0 < a \leqslant 1$, то решений нет; если $a > 1$, то $x = \log_3 \frac{2(a - 1)}{\sqrt{33} - 1}$.

**II.13.** Если $0 < a \leqslant \frac{1}{2}$, то $x = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}$ или $x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}$; если $\frac{1}{2} < a < 1$ или $a > 1$, то решений нет. **II.14.** Если $0 < a < \frac{1}{9}$, или $\frac{1}{9} < a < 1$, или $a > 1$, то $x = 3^{\frac{10\log_{3\sqrt{a}} a}{3}}$; если $a = \frac{1}{9}$, то решений нет. **II.15.** Если $a \leqslant -2 - 2\sqrt{2}$, или $-2 + 2\sqrt{2} \leqslant a < 1$, или $a > 1$, то $x = \operatorname{arctg}\dfrac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a - 4}}{2(1-a)} + \pi k,\ k \in Z$; если $a = 1$, то $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$; если $-2 - 2\sqrt{2} < a < -2 + 2\sqrt{2}$, то решений нет. **П.16.** Если $a < \dfrac{1}{2}$, то $x = \pi k,\ k \in Z$; если $a \geqslant \dfrac{1}{2}$, то $x = \pi k$ или $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2-a}{a+1} + \pi k,\ k \in Z$. **П.17.** Если $a < -\dfrac{2}{3}$ или $a > 2$, то $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$; если $-\dfrac{2}{3} \leqslant a \leqslant 2$, то $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$ или $x = (-1)^k\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2a}{a+2} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z$. *Указание.* Данное в условии уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0,\\ \sin 2x = a\left(1 - \dfrac{\sin 2x}{2}\right).\end{array}\right.$$

Первое уравнение (а значит и исходное) имеет решение $x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z$, при любых значениях параметра. Переписав второе уравнение совокупности в виде $\sin 2x\,(a + 2) = 2a$, нетрудно заметить, что при $a = -2$ решений нет. Если $a \neq -2$, то $\sin 2x = \dfrac{2a}{a+2}$, и существование решений обеспечивает условие $\left|\dfrac{2a}{a+2}\right| \leqslant 1$. Отсюда $-\dfrac{2}{3} \leqslant a \leqslant 2$.

Итак, при $-\dfrac{2}{3} \leqslant a \leqslant 2$ исходное уравнение, кроме найденных ранее, имеет решения вида $(-1)^k\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2a}{a+2} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z$. **П.18.** Если $a < 0$, то решений нет; если $a = 0$, то $x \leqslant 0$; если $a > 0$, то $x = 0$ или $x = \dfrac{3a}{4}$. **П.19.** Если $a = b = 0$, то $x$ — любое; если $b = 0$ и $a \neq 0$, или $b > 0$ и $a < \dfrac{b^3}{4}$, или $b < 0$ и $a > \dfrac{b^3}{4}$, то решений нет; если $b > 0$ и $a \geqslant \dfrac{b^3}{4}$ или $b < 0$ и $a \leqslant \dfrac{b^3}{4}$, то $x = \dfrac{-3b^2 - \sqrt{3b(4a - b^3)}}{6}$ или $x = \dfrac{-3b^2 + \sqrt{3b(4a - b^3)}}{6}$. **П.20.** Если $a < 0$, то решений нет; если

$a>2$, то $x=\frac{a-1}{a-2}$, $y=a-1$. **П.21.** Если $a<\sqrt{3}$, то $x=0$, $y=a+\sqrt{a^2+3}$; если $a\geqslant\sqrt{3}$, то $x=0$, $y=a+\sqrt{a^2+3}$, или $x=0$, $y=-a-\sqrt{a^2-3}$, или $x=0$, $y=-a+\sqrt{a^2-3}$. **П.22.** Если $a<0$, то $\frac{a+\sqrt{a^2-a}}{a}<x<\frac{a-\sqrt{a^2-a}}{a}$; если $0\leqslant a<1$, то $x$ — любое; если $a\geqslant 1$, то $x<\frac{a-\sqrt{a^2-a}}{a}$ или $x>\frac{a+\sqrt{a^2-a}}{a}$. **П.23.** Если $a<0$, то $-\sqrt[4]{-a}<x<0$ или $x>\sqrt[4]{-a}$; если $a>0$, то $x<0$. **П.24.** Если $0<a<1$, то $1<x<\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$; если $a>1$, то $x>\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$. **П.25.** Если $0<a<1$, то $x\leqslant\log_a\left(1+\sqrt{1+a^2}\right)$; если $a>1$, то $\log_a 2<x\leqslant\log_a\left(1+\sqrt{1+a^2}\right)$. **П.26.** Если $0<a<1$

или $a>1$, то $\frac{1}{2}<x<1$ или $x>3$. *Указание.* Преобразовав исходное неравенство к виду $\log_x\sqrt{3{,}5x-1{,}5}<1$, следует перейти к равносильной системе

$$\begin{cases}\log_x\sqrt{3{,}5x-1{,}5}<1,\\ a>0,\\ a\neq 1.\end{cases}$$

**П.27.** Если $a<0$, то $x\geqslant\frac{a}{2}$; если $a=0$, то $x\geqslant 0$; если $a>0$, то $x\geqslant-\frac{a}{2}$. **П.28.** Если $a\leqslant-\frac{1}{2}$, то $a\leqslant x\leqslant\frac{-3+\sqrt{-7-16a}}{8}$; если $-\frac{1}{2}<a\leqslant-\frac{7}{16}$, то $\frac{-3-\sqrt{-7-16a}}{8}\leqslant x\leqslant\frac{-3+\sqrt{-7-16a}}{8}$; если $a>-\frac{7}{16}$, то решений нет. **П.39.** $a<0$ или $a=1$. **П.40.** $a<-3$ или $1<a<6$. **П.41.** $a=1$ или $a=-1$. **П.42.** $\frac{11-\sqrt{3}}{4}\leqslant k\leqslant\frac{11+\sqrt{3}}{4}$ или $k=\frac{7}{2}$. *Указание.* Уравнение — следствие $x^2+(3-2k)x+$ $+4k-10=0$ имеет корни $x_1=2$ и $x_2=2k-5$. Так как первый из этих корней является решением исходного уравнения при любом $k$, то нужное значение параметра следует искать как решение совокупности

$$\left[\begin{array}{l}2k-5=2,\\(2k-5)^2-2(2k-5)-1\leqslant 0.\end{array}\right.$$

**П.43.** $2\leqslant a\leqslant 3$. **П.44.** $0<a<\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$. **П.45.** $2<a<\frac{7}{3}$, или $\frac{7}{3}<a\leqslant 3$, или $a=\frac{7}{2}$. **П.46.** $a=\frac{5}{3}$, или $2\leqslant a<\frac{5}{2}$, или $\frac{5}{2}<a<3$. **П.47.** $a\leqslant -\frac{5\pi}{3}$. **П.48.** $a=2$ или $a=4$. *Указание.* Данное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\cos 4x=0,\\\cos 4x=a-3.\end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности на отрезке $\left[\frac{\pi}{8};\ \frac{5\pi}{8}\right]$ имеет три корня. Следовательно, уравнение $\cos 4x=a-3$ на указанном отрезке должно иметь ровно один корень.

**П.49.** При $a=1$ уравнение на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ имеет два корня $x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$. На указанном отрезке уравнение имеет единственное решение, если $a<-1$ или $a\geqslant 5$. **П.50.** $a\leqslant -3$, или $a=-2$, или $a\geqslant -1$. **П.51.** $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{2}<a<1$. **П.52.** $a=1$. **П.53.** $a=-\sqrt{2}$ или $a=\sqrt{2}$. **П.54.** $b\leqslant -1$, или $b=-\frac{\pi}{4}$, или $b=0$, или $b\geqslant 1$. **П.55.** $c\leqslant -4$, или $c=-\pi$, или $c=-\frac{5\pi}{6}$, или $c>-2$. **П.56.** Если $a=3\sqrt{2}$, то $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi k$, 4 корня; если $a=-3\sqrt{2}$, то $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, 5 корней; если $a\neq\pm 3\sqrt{2}$, то $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, 9 корней.

**П.70.** $a=0$, или $a=-\frac{1}{2}$, или $a=\frac{3}{2}$. **П.71.** Если $0<a<1$, то $0<x<a^8$; если $a>1$, то $0<x<\frac{1}{a^4}$. **П.72.** Если $0<a<1$, то искомое подмножество пусто; если $a>1$, то $a<x<a^4$. **П.73.** $a=-3$, $b=2$. **П.74.** $2<a<8$. **П.75.** $-1<a<\frac{2}{5}$ или $2<a<3$. **П.76.** $a\leqslant -\sqrt{3}$ или $a\geqslant\sqrt{7}$. **П.77.** $a\leqslant -3$ или $-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$. **П.78.**

$-\frac{\sqrt{30}}{15} \leqslant a \leqslant \frac{\sqrt{30}}{15}$. **П.79.** $|a| \geqslant 2$. **П.80.** $a < 0$, или $a = 2$, или $a = 3$, или $a > 4$. **П.81.** $a = 3$, или $a = 4$, или $a < 1$, или $a > 5$. *Указание.* Несложно показать, что второе из данных в условии уравнений равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \cos x = \frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Преобразуя первое уравнение получаем

$$4\cos^2 x - 4\cos^3 x + 3\cos x = a\cos x - 2(a-4)\cos^2 x,$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ 4\cos^2 x - 2(a-2)\cos x + a - 3 = 0\end{array}\right.$$

или

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \cos x = \frac{1}{2},\\ \cos x = \frac{a-3}{2}.\end{array}\right.$$

Теперь ясно, что для выполнения условия равносильности нужно «не позволить» третьему уравнению совокупности иметь корни, отличные от $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ и $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$. Эта цель достигается одним из следующих требований:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{a-3}{2} = 0,\\ \frac{a-3}{2} = \frac{1}{2},\\ \left|\frac{a-3}{2}\right| > 1.\end{array}\right.$$

**П.82.** $a = 1$. *Указание.* Решением неравенства является луч $[-1; \infty)$. Рассмотрим два случая.

1). $2^{x+1} < a$. Имеем

$$2^{x+2} + 2^{x+1} - a = 2^{x+1} + 1,$$

$$2^{x+2} = a + 1.$$

Ясно, что в этом случае уравнение имеет не более одного решения, а значит условие задачи выполниться не может.

2). $2^{x+1} \geqslant a$. Получаем

$$2^{x+2} - 2^{x+1} + a = 2^{x+1} + 1 \text{ или } a = 1.$$

Это означает, что при $a = 1$ уравнение удовлетворяют все $x$ такие, что $2^{x+1} \geqslant a$, т.е. $x \geqslant -1$. Остается заметить, что в этом случае решения неравенства и уравнения совпадают и условие задачи выполняется. **II.83.** $a < -\sqrt{10}$, или $-\sqrt{6} < a < 0$, или $a > 12$, или $a = 3$. *Указание.* Данные уравнения соответственно равносильны таким: $\cos 2x = \frac{a^2 - 8}{2}$ и $\cos 2x = \frac{6 - a}{6}$. Теперь важно не упустить, что равносильность полученных уравнений обеспечивается не только требованием $\frac{a^2 - 8}{2} = \frac{6 - a}{6}$, но и условием

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\frac{a^2 - 8}{2}\right| > 1, \\ \left|\frac{6 - a}{6}\right| > 1. \end{array}\right.$$

**II.84.** $\frac{1}{2} < a < 1$ или $1 < a < 2$. **II.85.** Если $a \leqslant \frac{2}{3}$, то $x = 1 - a$; если $\frac{2}{3} < a \leqslant 2$, то $x = \frac{a}{2}$; если $a > 2$, то $x = a - 1$. **II.86.** Если $a \leqslant -1$, то $x = a + 1$; если $-1 < a \leqslant 1$, то $x = -a - 1$; если $a > 1$, то $x = -2a$. **II.87.** $b \leqslant -1$. **II.88.** $c \geqslant 0$. **II.89.** $a = \frac{7}{9}$, или $a = \frac{17}{5}$, или $a = 27$, или $a = \frac{2}{11}$, или $a = \frac{1}{35}$. *Указание.* Легко установить, что неотрицательными корнями данного уравнения будут все члены двух арифметических прогрессий:

$$a_n = \frac{\pi}{13a + 3}(n - 1) \text{ и } b_n = \frac{\pi}{4a + 10}(n - 1),$$

где $n$ — натуральное.

Разности этих прогрессий соответственно равны $d_1 = \frac{\pi}{13a + 3}$ и $d_2 = \frac{\pi}{4a + 10}$. Поскольку $a > 0$, то $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — возрастающие последовательности. Заметим, что $a_1 = b_1$. Если $a_2 = b_2$, то прогрессии совпадают. Если $a_2 \neq b_2$, то можно показать, что объединение последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ будет вновь давать возрастающую арифметическую прогрессию при выполнении одного из двух условий: 1) существует такое $k \in N$, что $b_k = a_2$; 2) существует такое $m \in N$, что $a_m = b_2$. Отсюда можно сделать вывод, что $\frac{d_1}{d_2} = p$ или $\frac{d_2}{d_1} = q$, где $p$ и $q$ — натуральные. Имеем $\frac{13a+3}{4a+10} = p$ или $\frac{4a+10}{13a+3} = q$. Тогда соответственно получаем $a = \frac{10p-3}{13-4p}$ или $a = \frac{10-3q}{13q-4}$. Поскольку $a > 0$, то $\frac{3}{10} < p < \frac{13}{4}$, $\frac{4}{13} < q < \frac{10}{3}$. Значит, $p = 1, 2, 3$; $q = 1, 2, 3$. **П.90.** $\frac{3\pi}{2} + 6\pi m < b \leqslant \frac{9\pi}{2} + 6\pi m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ *Указание.* Нетрудно показать, что данная в условии система равносильна такой:

$$\begin{cases} \cos(y-b) - 2\cos x = 0, \\ y - b = 3x, \\ x < 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ y = b + \frac{3\pi}{2} + 3\pi k, \quad k \in Z, \\ x < 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Теперь ясно, что количество решений исходной системы равно числу решений относительно $k$ следующей системы:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} + \pi k < 0, \\ b + \frac{3\pi}{2} + 3\pi k > 0, \\ k \in Z. \end{cases}$$

Несложный анализ показывает, что для выполнения условия нужно потребовать

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{3\pi}-\dfrac{1}{2}<-1-2m, \\ -\dfrac{b}{3\pi}-\dfrac{1}{2}\geqslant -2-2m, \quad m=0,1,2\ldots \end{cases}$$

**П.98.** $a = 0$ или $a = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2}}{4}$. **П.99.** Если $a = \dfrac{3}{16}$, то $x = -2$; если $a = \dfrac{361}{128}$, то $x = -4$; если $a = \dfrac{1}{2}$, то $x = \dfrac{1}{2}$ или $x = \pm\sqrt{5}$. **П.100.** Если $a = \dfrac{3}{16}$, то $x = -\dfrac{1}{2}$; если $a = \dfrac{3}{2}$, то $x = -2$ или $x = \pm\dfrac{\sqrt{11}}{11}$; если $a = \dfrac{297}{128}$, то $x = -\dfrac{1}{4}$. **П.101.** Если $abc = 0$ или $\dfrac{ab+ac+bc}{abc} < 0$, то

решений нет; если $\dfrac{ab+ac+bc}{abc} \geqslant 0$, то $x = a\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$, $y = b\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$, $z = c\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$ или $x = -a\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$, $y = -b\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$, $z = -c\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$. *Указание.* Рассмотрим данную систему как линейную относительно параметров $a$, $b$ и $c$. Если $xy + xz + yz = 0$, то

$$\begin{cases} y+z=0, \\ x+z=0, \\ y+x=0. \end{cases}$$

Отсюда получаем тройку $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, не входящую в область определения исходной системы.

Если $xy + xz + yz \neq 0$, то имеем

$$\begin{cases} \dfrac{(y+z)xyz}{xy+yz+zx} = b + c, \\ \dfrac{(x+z)xyz}{xy+yz+zx} = a + c, \\ \dfrac{(x+y)xyz}{xy+yz+zx} = a + b, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{x^2yz}{xy + yz + zx} = a, \\ \dfrac{y^2xz}{xy + yz + zx} = b, \\ \dfrac{z^2xy}{xy + yz + zx} = c. \end{cases}$$

Заметим, что из условия равенства нулю одного из параметров (например, $a$) сразу следует равенство нулю двух других, что противоречит условию задачи.

При $abc \neq 0$ последнюю систему перепишем так:

$$\begin{cases} \dfrac{xy + yz + zx}{x^2yz} = \dfrac{1}{a}, \\ \dfrac{xy + yz + zx}{y^2xz} = \dfrac{1}{b}, \\ \dfrac{xy + yz + zx}{z^2xy} = \dfrac{1}{c}. \end{cases}$$

Сложив полученные уравнения, имеем

$$\left(\frac{xy + yz + zx}{xyz}\right)^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Остальное — просто.

**П.102.** Если $abc \leqslant 0$, то решений нет; если $abc > 0$, то $x = \dfrac{\sqrt{abc}}{b}$, $y = \dfrac{\sqrt{abc}}{c}$, $z = \dfrac{\sqrt{abc}}{a}$ или $x = -\dfrac{\sqrt{abc}}{b}$, $y = -\dfrac{\sqrt{abc}}{c}$, $z = -\dfrac{\sqrt{abc}}{a}$. **П.103.** $x = \dfrac{b + c - a}{2}$; $y = \dfrac{a + c - b}{2}$; $z = \dfrac{a + b - c}{2}$. **П.104.** Если $a = 0$, то $x = \dfrac{\pi k}{2}$; если $a \neq 0$, то $x = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 4a + \dfrac{\pi k}{2}$ или $x = \operatorname{arctg} 2a + \pi k$, $k \in Z$. **П.105.** Если $a = 0$, то $x \geqslant -\dfrac{1}{4}$; если $0 < a < 2$, то $x \leqslant \dfrac{-2 - \sqrt{4 - 2a}}{2a}$ или $x \geqslant \dfrac{-2 + \sqrt{4 - 2a}}{2a}$; если $a \geqslant 2$, то $x$ — любое. **П.106.** Если $a = 0$, то $x \leqslant \dfrac{1}{2}$; если $0 < a < 1$, то $x \leqslant \dfrac{1 - \sqrt{1 - a}}{a}$ или $x \geqslant \dfrac{1 + \sqrt{1 - a}}{a}$; если $a \geqslant 1$, то $x$ — любое. **П.107.** $y < 4x - 2x^2$. **П.108.** $y < x^2 - x$. **П.109.** Множество точек координатной плоскости $xy$, координаты которых удовлетворяют неравенству $xy \geqslant -1$. *Указание.* Перепишем исходное неравенство так: $a^2 - 2a(x + y) + x^2 + y^2 - 2 \leqslant 0$. Полученное неравенство как квадратное относительно $a$ должно иметь хотя бы одно решение. Отсюда $\frac{1}{4}D = (x + y)^2 - (x^2 + y^2 - 2) \geqslant 0$. **П.110.** а) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$ или $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2}$. *Указание.* Представить данное уравнение как квадратное относительно $\sqrt{3}$.

б) $x = \sqrt{2}$ или $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}$. *Указание.* Представить данное уравнение как квадратное относительно $\sqrt{2}$. **П.120.** $0 < a < 1$ или $\sqrt{2} < a < \dfrac{\sqrt{17} - 1}{2}$. **П.121.** $1 < a \leqslant \sqrt{3}$, или $\dfrac{1 + \sqrt{13}}{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{6}$, или $a = 3$. **П.122.** $a = -2; -1; 0; 1$. **П.123.** $a = -2; -1; 0; 1$. **П.124.** $-2 \leqslant a < 0$ или $0 < a \leqslant \frac{4}{3}$. **П.125.** $a < -9$ или $a > \frac{13}{12}$. **П.126.** $\frac{2}{3} \leqslant a < 1$. **П.127.** Если $a \leqslant -1$ или $a > \frac{\pi}{2} - 2$, то решений нет; если $-1 < a \leqslant \frac{\pi}{2} - 2$, то $x = \log_2(a + 1)$, $y = 5$, $z = \sin(a + 2)$. **П.128.** Если $p < 0$ или $0 < p < 2$, то решений нет; если $p = 0$, то $x = 0$; если $p \geqslant 2$, то $x = 2\sqrt{p - 1}$. *Указание.* Легко заметить, что при $p < 0$ уравнение решений не имеет, а при $p = 0$ $x = 0$. При условии $p > 0$ и $x > 0$ сделаем замену $x = p\cos t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Имеем

$$\sqrt{p(1 - \cos t)} + \sqrt{p(1 + \cos t)} = p\cos t,$$

$$\sqrt{2p}\sin\frac{t}{2} + \sqrt{2p}\cos\frac{t}{2} = p\cos t,$$

$$\sqrt{2p}\left(\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right) - p\left(\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right)\left(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right) = 0.$$

Перейдем к совокупности

$$\left[\begin{aligned} &\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2} = 0, \\ &p\left(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right) = \sqrt{2p}. \end{aligned}\right.$$

Первое уравнение не имеет корней, принадлежащих отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Используя второе уравнение, найдем $p\cos t$. Имеем

$$p^2(1 - \sin t) = 2p,\ p - p\sin t = 2,\ p\sin t = p - 2.$$

Возведем обе части последнего равенства в квадрат при условии $p \geqslant 2$. Получаем

$$p^2\sin^2 t = p^2 - 4p + 4,\ -p^2\sin^2 t = -p^2 + 4p - 4,\ p^2\cos^2 t = 4p - 4.$$

Отсюда с учетом всех ограничений $p\cos t = 2\sqrt{p-1}$.

**П.129.** $|a| \geqslant \sqrt{2}$. *Указание.* Заметим, что при $a = 0$ система решений не имеет. При $a \neq 0$ произведем замену $x = |a|\cos t$, $y = |a|\sin t$, где $t \in [0; 2\pi)$. Имеем

$$\begin{cases} a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2, \\ a^2\cos t\sin t\,(2a^2\cos^2 t - a^2) = 1. \end{cases}$$

Ясно, что исходная система будет иметь решения, если будет иметь решения уравнение

$$a^4\cos t\sin t\cos 2t = 1.$$

Отсюда $\sin 4t = \frac{4}{a^4}$. Теперь достаточно потребовать, чтобы $\frac{4}{a^4} \leqslant 1$.

**П.141.** $a \geqslant \frac{1}{3}$. **П.142.** $a = -3; -2; -1; 0$. **П.143.** $k = -1$, или $k = 0$, или $k = 1$. *Указание.* Данное уравнение равносильно такому: $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 3k$. Задача свелась к тому, чтобы найти область значений функции $f(t) = 4t^2 - 4t - 3$ на отрезке $[-1; 1]$. Легко установть, что $\max\limits_{[-1;1]} f(t) = f(-1) = 5$, $\min\limits_{[-1;1]} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -4$. Следовательно, $-4 \leqslant f(t) \leqslant 5$ на $[-1; 1]$. Значит, $-4 \leqslant 3k \leqslant 5$.

**П.144.** $a > \frac{3}{82}$. **П.145.** $2 < a \leqslant 3$. **П.146.** Если $k = 2$, то $x = \cos\frac{\pi^2}{4}$, $y = 1$ или $x = \cos\frac{\pi^2}{4}$, $y = -1$; если $k \neq 2$, то решений нет. **П.147.** $-1 < a < 2 - 2\sqrt{2}$ или $4 \leqslant a < 2 + 2\sqrt{2}$. *Указание.* Достаточно найти все $a$, при которых неравенство $\log_{5+4a-a^2}(5-a)(4+\sin x) \leqslant 1$ выполняется при всех $x$. Поскольку $3(5-a) \leqslant (5-a)(4+\sin x) \leqslant 5(5-a)$, то при $5 + 4a - a^2 > 1$ $\log_{5+4a-a^2}(5-a)(4+\sin x) \leqslant \log_{5+4a-a^2}5\times$

$\times(5-a)$, а при $0<5+4a-a^2<1$ $\log_{5+4a-a^2}(5-a)(4+\sin x) \leqslant$ $\leqslant \log_{5+4a-a^2}3(5-a)$.

Итак, искомые значения параметра — это все решения совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5+4a-a^2>1,\\ \log_{5+4a-a^2}5(5-a)\leqslant 1,\end{cases}\\ \begin{cases}0<5+4a-a^2<1,\\ \log_{5+4a-a^2}3(5-a)\leqslant 1.\end{cases}\end{array}\right.$$

**П.148.** $b=2$. *Указание*. Начнем со случая $b>0$. Если найдутся $b$, удовлетворяющие условию задачи, то отпадет необходимость рассматривать случай, когда $b<0$. Если $a=0$, то подходит любое значение $b$. Если $a\neq 0$, то имеем $\sin x \leqslant \frac{a^2+1}{|a|b}$. Поскольку это неравенство должно выполняться при всех $x$, то потребуем, чтобы $\frac{a^2+1}{|a|b}\geqslant 1$. Отсюда $|a|^2-|a|b+1\geqslant 0$. Дискриминант квадратного относительно $|a|$ трехчлена должен быть неположительным, чтобы последнее неравенство выполнялось для любого $a$. Имеем $b^2-4\leqslant 0$. **П.149.** $a=\frac{1}{16}$. **П.150.** $a=\frac{1}{5}$. **П.151.** $1\leqslant a\leqslant\frac{17}{5}$. **П.152.** $a=2\sqrt{2}$. **П.153.** $p=-1$ или $p=\frac{1}{3}$. **П.154.** Если $a=2$, то $x=-1$; если $a\neq 2$, то решений нет. **П.155.** Если $a=\frac{4n}{4k+1}$, то $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$; если $a\neq\frac{4n}{4k+1}$, то решений нет; $k$, $n$ — целые. **П.156.** Если $a=-\frac{1}{14}$, то $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $y=6\pi n$, $k\in Z$, $n\in Z$; если $a\neq-\frac{1}{14}$, то решений нет. **П.157.** Если $a=-1$ или $a=3$, то $x=\pi+4\pi k$, $y=2\pi n$, $k\in Z$, $n\in Z$; если $a\neq -1$ и $a\neq 3$, то решений нет. **П.158.** $\alpha=\frac{9\pi}{5}$; $\frac{17\pi}{5}$; $5\pi$. **П.159.** Если $a=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, то $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$; если $a=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, то $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; если $a\neq\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, то решений нет; $k$, $n$ — целые. **П.160.** $a=6m-1$, или $a=6m$, или $a=6m+2$, или $a=6m+3$, где $m\in Z$. *Указание*. Исследовав функцию

$f(t) = \left|12t - 5\right| - \left|12t - 7\right| + \left|24t + 13\right|$ на луче $[0; \infty)$, устанавливаем, что $\min\limits_{[0;\infty)} f(t) = f(0) = 11$. В то же время $11 - \sqrt{\sin\frac{\pi(x - 2y - 1)}{3}} \leqslant 11$. Отсюда можно сделать вывод, что первое уравнение исходной системы равносильно системе

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi y}{2} = 0, \\ \sin\frac{\pi(x - 2y - 1)}{3} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 + 2k, \\ x = 4k + 3n + 3, \ k \text{ и } n \text{ — целые.} \end{cases}$$

Обозначив в уравнении

$$2(x^2 + (y - a)^2) - 1 = 2\sqrt{x^2 + (y - a)^2 - \frac{3}{4}}$$

$x^2 + (y - a)^2 = z$, легко получить $z = 1$.

Итак, исходная система равносильна такой:

$$\begin{cases} y = 1 + 2k, \\ x = 4k + 3n + 3, \\ x^2 + (y - a)^2 = 1, \ k \text{ и } n \text{ — целые.} \end{cases}$$

Из последнего уравнения следует, что $|x| \leqslant 1$ и $|y - a| \leqslant 1$, а из первых двух — $x \in Z$ и $y \in Z$. Рассмотрим три случая:

1). $x = -1$. Тогда $k = \frac{-3n - 4}{4}$ и, т.к. $k \in Z$, то $n = -4m$, а $k = 3m - 1$, откуда $y = 6m - 1$. В этом случае, подставляя найденные значения для $x$ и $y$ в третье уравнение последней системы, получаем $a = 6m - 1$.

2). $x = 0$. Имеем $k = \frac{-3n - 3}{4}$. Очевидно равенство возможно лишь при $n = -4m - 1$. Тогда $k = 3m$ и $y = 6m + 1$. Для этого случая находим $a = 6m$ или $a = 6m + 2$.

3). $x = 1$. Здесь $k = \frac{-3n - 2}{4}$, $n = -4m - 2$, $k = 3m + 1$. Отсюда $y = 6m + 3$ и $a = 6m + 3$. **П.168.** $x = \frac{(3\sqrt{a} - \sqrt{a^2 - 8})^2}{32}$. **П.169.** Если $0 < a \leqslant \sqrt{5}$, то уравнение имеет один корень; если

$a \leqslant 0$ или $a > \sqrt{5}$, то корней нет. *Указание.* Имеем $\sqrt{2x+8} - \sqrt{2x+3} = a$. Отсюда $\frac{2x + 8 - (2x + 3)}{\sqrt{2x+8} + \sqrt{2x+3}} = a$, $\frac{5}{\sqrt{2x+8} + \sqrt{2x+3}} = a$. Функция $f(x) = \frac{5}{\sqrt{2x+8} + \sqrt{2x+3}}$ убывает на $D(f) = \left[-\frac{3}{2}; \infty\right)$. Тогда $\max f = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \sqrt{5}$. **П.170.** $x = a$. *Указание.* Имеем $\sqrt[5]{x+a} + \sqrt[5]{x-a} = \sqrt[5]{2a}$. **П.171.** $x = a$. **П.172.** Если $a + b > 0$ и $ab \geqslant 0$, то $x = 0$; если $a + b = 0$, то $x = a^2$; если $a + b < 0$ или $a + b > 0$ и $ab < 0$, то решений нет. **П.173.** Если $a < 0$, то решений нет; если $a = 0$, то $x = 0$, $y = 0$; если $a > 0$, то $x = \sqrt{2a}$, $y = 2a + \sqrt{2a}$ или $x = -\sqrt{2a}$, $y = 2a - \sqrt{2a}$. *Указание.* Перепишем первое уравнение системы в следующем виде: $x + 2a + 3^{x+2a} = y + 3^y$. Несложно показать, что функция $f(t) = t + 3^t$ монотонно возрастает на всей числовой прямой. Отсюда следует, что $x + 2a = y$. Итак, исходная система равносильна такой:

$$\begin{cases} y = x + 2a, \\ y = x^2 + x. \end{cases}$$

**П.174.** Если $a < 0$, то $x = -\frac{a^2+3}{2a}$, $y = \frac{a^2-3}{2a}$; если $a \geqslant 0$, то решений нет. *Указание.* Перепишем первое уравнение системы так: $\log_3(y - 2a) + y - 2a = \log_3(x - a) + x - a$. Теперь, убедившись в том, что функция $y = \log_3 t + t$ — монотонна, перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} y - 2a = x - a, \\ x^2 - y^2 = 3, \\ x - a > 0. \end{cases}$$

**П.175.** $x = 1$. *Указание.* Пусть $x^2 - 2x + 1 = t$, $t \geqslant 0$. Тогда можно записать $\log_a(2t + a^{t+4}) \leqslant 4$. Поскольку $a > 1$, то $2t + a^{t+4} \leqslant a^4$. Отсюда $t \leqslant a^4(1 - a^t)$. Так как $t \geqslant 0$ и $a > 1$, то $a^t \geqslant 1$. Следовательно, для $t$ есть одна возможность: $t = 0$. **П.176.** $a = \frac{1}{2}$ или $a = 1$. **П.177.** $a = \frac{1}{2}$. **П.178.** $a = \frac{2}{3}$. **П.189.** $a = \frac{3}{2}$. **П.190.** $a = -2$ или $a = 4$. **П.191.** $a = 0$. **П.192.** $a \notin Q$. **П.193.** $a \notin Q$. **П.194.** $b \in Q$.

*Указание.* Если $b$ — рациональное число, то данная в условии функция периодическая. Действительно, пусть $b = \frac{m}{n}$, где $m$ и $n$ — целые и $n \neq 0$. Тогда несложно убедиться, что $2\pi n$ — период функции $y = \cos x + \cos\frac{m}{n}x$. Теперь покажем, что при $b \notin Q$ данная функция периодической не является. Предположим противное, а именно: $b \notin Q$, и существует число $T \neq 0$ такое, что равенство $\cos x + \cos bx = \cos(x + T) + \cos b(x + T)$ верно при всех действительных $x$. Подставляя в последнее равенство $x = 0$, получим $\cos T + \cos bT = 2$. Отсюда

$$\begin{cases} \cos T = 1, \\ \cos bT = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = 2\pi k, \\ bT = 2\pi n, \ k \text{ и } n \text{ — целые.} \end{cases}$$

Теперь, с учетом $T \neq 0$ имеем $b = \frac{n}{k}$, что противоречит предположению $b \notin Q$. **П.195.** $a = 3$ или $a = 1$. **П.196.** $a = -1$; $0$; $\frac{1}{3}$. **П.197.** $-\frac{1}{12} \leqslant a \leqslant 0$. **П.211.** Если $a < 0$, то решений нет; если $a = 0$ или $a > 4$, то 2 решения; если $0 < a < 4$, то 4 решения; если $a = 4$, то 3 решения. **П.212.** Если $a < 0$ или $a > 1$, то решений нет; если $a = 0$, то 3 решения; если $0 < a < 1$, то 4 решения; если $a = 1$, то 2 решения. **П.213.** Если $a < 3$, то решений нет; если $a = 3$, то $1 \leqslant x \leqslant 2$ или $4 \leqslant x \leqslant 5$; если $3 < a < 5$, то 4 решения; если $a = 5$, то 3 решения; если $a > 5$, то 2 решения. **П.214.** Если $a < 2$, то $x = 3 \pm \sqrt{6 - 2^a}$, если $a = 2$, то $x = 3$ или $x = 3 \pm \sqrt{2}$; если $2 < a < \log_2 5$, то $x = 3 \pm \sqrt{6 - 2^a}$ или $x = 3 \pm \sqrt{2^a - 4}$; если $a = \log_2 5$, то $x = 2$ или $x = 4$; если $a > \log_2 5$, то решений нет. **П.215.** $a = -1$ или $a = -\frac{1}{2}$. **П.216.** $a = -\frac{3}{4}$ или $a < -1$. **П.217.** Если $a \leqslant -1$, то решений нет; если $-1 < a \leqslant 1$, то $x < \frac{a - 1}{2}$; если $a > 1$, то $x < \frac{a + 1}{2}$. **П.218.** Если $a = 0$, то $-1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{5}$; если $a = \frac{7}{20}$, то $-1 \leqslant x \leqslant \frac{4}{5}$. **П.219.** $a = -2$ или $a = -\frac{1}{8}$. Если $a = -2$, то

$x = -1, \frac{15}{17}, \frac{17}{15}$; если $a = -\frac{1}{8}$, то $x = -\frac{1}{136}, 0, \frac{1}{120}$. **П.220.** $a = -2$. **П.221.** $a = -7$. **П.222.** $c = \frac{11}{3}$. **П.223.** $-\frac{1}{4} < a \leqslant 0$. **П.224.** Если $a < -3$, то решений нет; если $-3 \leqslant a \leqslant -2$, то $\frac{2 - \sqrt{a+3}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{2 + \sqrt{a+3}}{2}$; если $a > -2$, то $-\frac{a}{4} \leqslant x \leqslant \frac{2 + \sqrt{a+3}}{2}$. **П.225.** Если $a \leqslant -1$, то $a \leqslant x < \frac{-1 + \sqrt{-3-4a}}{2}$; если $-1 < a \leqslant -\frac{3}{4}$, то $\frac{-1 - \sqrt{-3-4a}}{2} < x < \frac{-1 + \sqrt{-3-4a}}{2}$; если $a > -\frac{3}{4}$, то решений нет.

**П.226.** Если $a < 0$, то решений нет; если $a = 0$, то $x = 2$; если $0 < a < 1$, то $x = a + 2 \pm 2\sqrt{a}$; если $a \geqslant 1$, то $x = a + 2 + 2\sqrt{a}$. **П.227.** $-2 \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}$. **П.228.** $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{3}{2}$. **П.229.** $a = -4$ или $a = 2$. **П.230.** Если $a < 1$, то $\min\limits_{[-3;\ 1]} y = 1 - a$, $\max\limits_{[-3;\ -1]} y = 3 - a$; если $1 < a < 2$, то $\min\limits_{[-3;\ -1]} y = 0$, $\max\limits_{[-3;\ -1]} y = 3 - a$; если $a = 2$, то $\min\limits_{[-3;\ -1]} y = 0$, $\max\limits_{[-3;\ -1]} y = 1$; если $2 < a < 3$, то $\min\limits_{[-3;\ -1]} y = 0$, $\max\limits_{[-3;\ -1]} y = a - 1$; если $a > 3$, то $\min\limits_{[-3;\ -1]} y = a - 3$, $\max\limits_{[-3;\ -1]} y = a - 1$. **П.231.** Если $b < 3$ или $b \geqslant 7$, то решений нет; если $b = 3$, то $3 \leqslant x < 5$; если $3 < b < 7$, то $x = \frac{3+b}{2}$. **П.232.** Если $|a| > 3$, то нет решений; если $|a| = 3$, то одно решение; если $|a| < 3$, то два решения. **П.233.** $-\frac{13}{4} < a < 3$. *Указание.* Ясно, что среди решений неравенства найдутся отрицательные, если вершина «уголка» (рис. 109) будет принадлежать промежутку $AB$ (не включая его концы). Координаты точки $A$ можно найти, воспользовавшись тем, что прямая $y = x - a$ является касательной к параболе $y = 3 - x^2$. Очевидно, что точка $B$ имеет координаты $x = 3$, $y = 0$.

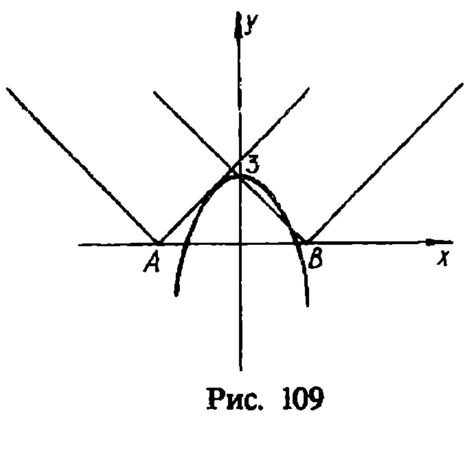


Рис. 109

**II.234.** $-\frac{9}{4} < a < 2$. **II.235.** $-2 \leqslant a \leqslant 1$. **II.236.** $a < -\frac{16}{3}$ или $a > \frac{4}{3}$. **II.237.** $a \leqslant \frac{1}{3}$. *Указание.* Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2 - \sqrt{x} \geqslant |x + 4a| + 2a, \\ x \neq -4a. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая.

1). $a \geqslant 0$. Тогда функции $y = 2 - \sqrt{x}$ и $y = |x + 4a| + 2a$ на координатной плоскости $xy$ задают соответственно «полупараболу» и семейство «уголков», вершины которых расположены во второй четверти (рис. 110). В этом случае исходное неравенство будет иметь решения, если ордината точки пересечения прямой $y = x + 6a$ с осью $y$ не превосходит 2. Тогда имеем $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{3}$.

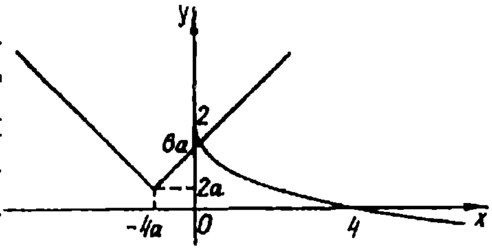



Рис. 110

2). $a < 0$. Из рис. 111 понятно, что решения будут существовать, если вершина «уголка» расположена ниже «полупараболы».

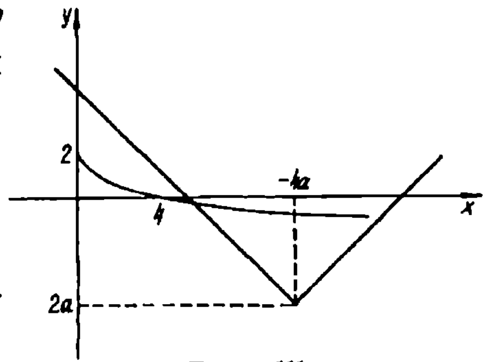



Рис. 111

Ясно, что нужно потребовать

$$2 - \sqrt{-4a} \geqslant 2a.$$

Несложно убедиться, что это неравенство выполняется при всех отрицательных $a$. **II.238.** $a < -1$ или $a > 2$. *Указание.* Переформулируем условие так: найти $a$, при котором неравенство $x^2 + |x - a| + |x - 1| > 2$ выполняется для всех $x$. Имеем: $x^2 + |x - 1| - 2 > -|x - a|$. На рис. 112 изображены графики фунции $y = x^2 + |x - 1| - 2$ и

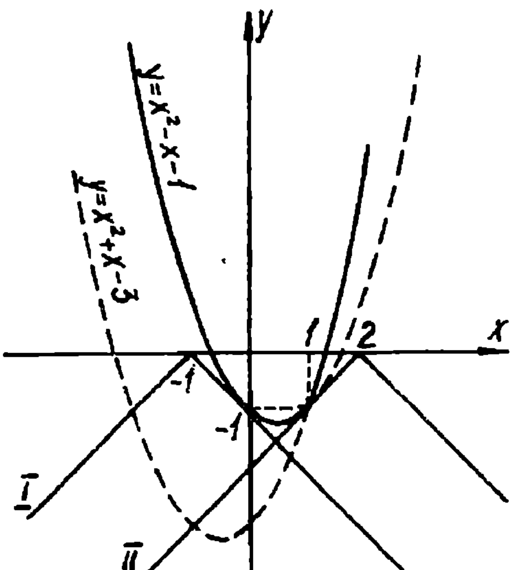



Рис. 112

два представителя семейства «уголков» $y = -|x-a|$: I — прямая $y = -x + a$ является касательной к параболе $y = x^2 - x - 1$; II — на прямой $y = x - a$ лежит точка $(1; -1)$. Ясно, что условие задачи будет выполнено, если вершина «уголка» принадлежит одному из лучей $(-\infty; -1)$ или $(2; +\infty)$. **П.239.** $-\frac{8}{3} < a < -1$ или $0 < a < \frac{5}{3}$. *Указание.* Достаточно решить задачу: найти $a$, при которых неравенство $3|x-a| + |x^2 + x - 2| < 2$ имеет хотя бы одно решение.

**П.249.** $a = 5 - 2\sqrt{6}$. **П.250.** Если $a \leqslant -3$ или $a \geqslant 4$, то $x = \frac{1}{3-a}$; если $-3 < a < 3$, то $x = \frac{1}{3-a}$ или $x = -\frac{7}{3+a}$; если $3 \leqslant a < 4$, то $x = -\frac{7}{3+a}$. **П.251.** Если $k \leqslant -1$ или $k > 1$, то 1 решение; если $-1 < k < -\frac{1}{3}$ или $k = 0$, то 2 решения; если $k = -\frac{1}{3}$, то 3 решения; если $-\frac{1}{3} < k < 0$, то 4 решения. **П.252.** Если $k = 4$, то $x = 1$; если $k < 0$, то $x = \frac{k - 2 + \sqrt{k^2 - 4k}}{2}$. **П.253.** $k \leqslant -1$ или $k \geqslant \frac{1}{2}$. **П.254.** $a = \pm\sqrt[4]{15}$. **П.255.** $a = \frac{1}{2}$ или $a < 0$. **П.256.** $c = -1$ или $-\frac{2}{3} \leqslant c < -\frac{1}{3}$. **П.257.** $-12 + 2\sqrt{33} \leqslant a \leqslant 10 - 2\sqrt{21}$, или $a \leqslant -12 - 2\sqrt{33}$, или $a \geqslant 10 + 2\sqrt{21}$. **П.258.** $a < -\frac{1}{2}$ или $a > 6 + 2\sqrt{10}$. *Указание.* Найти $a$, при которых неравенство $ax - |x^2 + 6x + 8| > 2$ имеет хотя бы одно решение — более удобная формулировка данной задачи. Перепишем неравенство в виде $|x^2 + 6x + 8| < ax - 2$. На рис. 113 изображены график функции $y = |x^2 + 6x + 8|$ и две прямые семейства $y = ax - 2$. Положению I соответствует $a = -\frac{1}{2}$, а положению II (момент касания) —

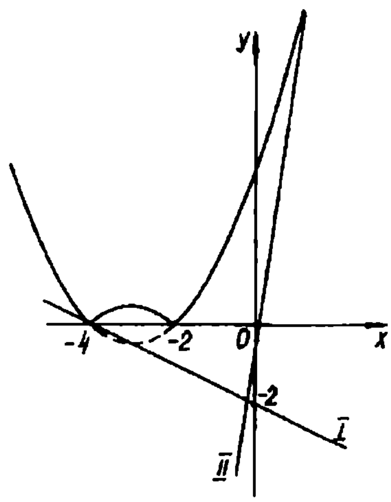


Рис. 113

$a = 6 + 2\sqrt{10}$. Очевидно неравенство будет иметь решения, если прямые I и II поворачивать соответственно по и против часовой стрелки до вертикального положения. **П.259.** $a > \frac{1}{2}$. **П.260.** $a < -4$, или $a > 4$, или $a = \pm 2$. **П.261.** $-\frac{3}{2} < a < \frac{1}{2}$ или $2 < a < \frac{13}{2}$. **П.262.** $-2 \leqslant a < 0$. *Указание.* Если пара $(-y; x)$ является решением данного неравенства, то $|2x - ay| + ay \leqslant 2$. Следовательно, условие задачи будет выполнено в том случае, когда множество решений системы $\begin{cases} y \leqslant 1, \\ y \geqslant -ax - 1, \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$ содержится

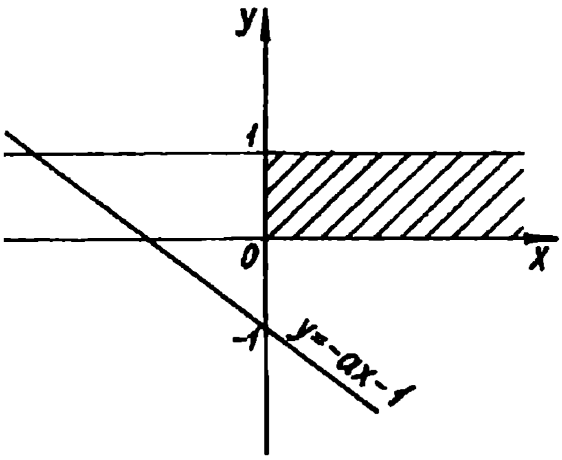


Рис. 114а

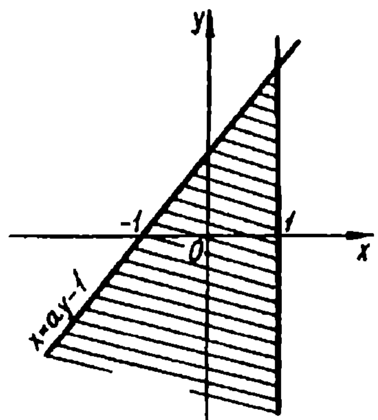


Рис. 114б

среди решений системы $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x \geqslant ay - 1. \end{cases}$

Легко проверить, что $a = 0$ условию не удовлетворяет. На рис. 114а,б и 115а,б штриховкой показаны решения указанных

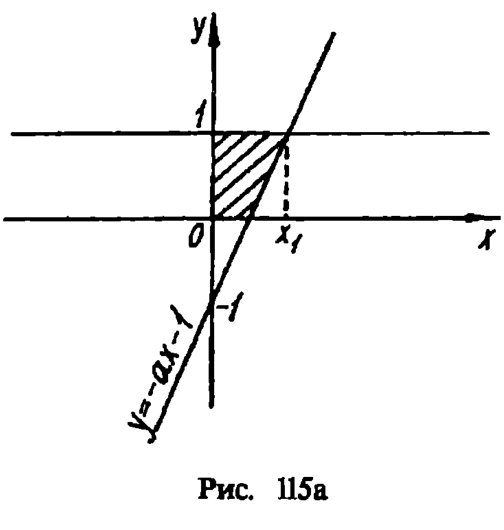


Рис. 115а

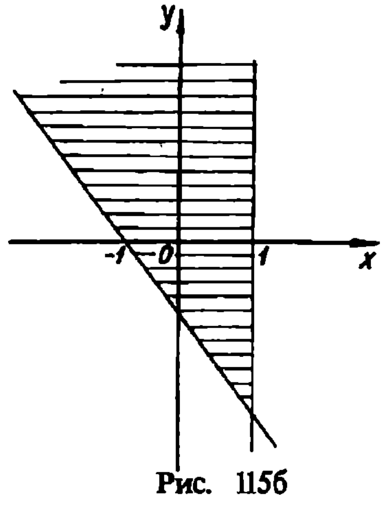


Рис. 115б

систем, соответствующие случаям $a > 0$ (рис. 114а,б) и $a < 0$ (рис. 115 а, б). Ясно, что среди положительных $a$ нужных значений нет.

При $a < 0$ условие задачи будет выполнено, если для абсциссы $x_1$ точки пересечения прямых $y = 1$ и $y = -ax - 1$ потребовать $x_1 = -\frac{2}{a} \leqslant 1$. II.271. Если $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $a > 1$, то решений нет; если $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $a = 1$, то 4 решения; если $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$, то 8 решений. II.272. $\frac{\sqrt{5}}{5} < a < \frac{1}{2}$. II.273. $a = \frac{5}{2}$. II.274. $a = \frac{7}{3}$. *Указание.* Ясно, что при $a < \frac{7}{3}$ система решений не имеет.

При $a > \frac{7}{3}$ на координатной плоскости $(x; y)$ первое уравнение системы задает пару параллельных прямых, а второе — окружность с центром в точке (0;0) и радиусом $R = \sqrt{3(2+a)}$ (рис. 116). Так как прямые $y = x + \sqrt{6a-14}$ и $y = x - \sqrt{6a-14}$ симметричны относительно центра окружности, то они имеют с ней равное количество общих точек. Понятно, что условию удовлетворяют те значения $a$, при которых прямые являются касательными.

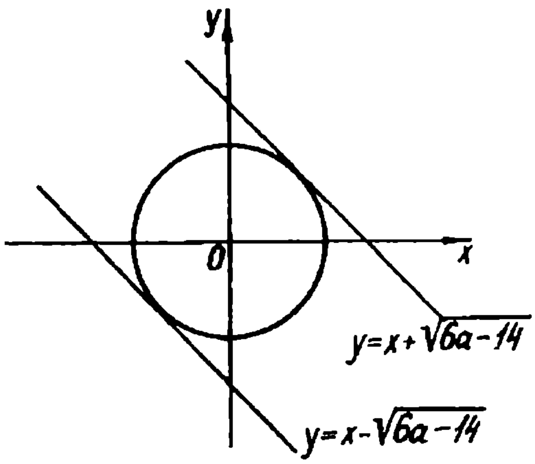


Рис. 116

Условие касания можно найти, потребовав от системы $\begin{cases} x - y = \sqrt{6a-14}, \\ x^2 + y^2 = 3\,(2+a) \end{cases}$ иметь единственное решение. Несложно убедиться, что таких $a$ не существует. Остается рассмотреть случай $a = \frac{7}{3}$. II.275. $a = -\frac{1}{2}$ или $a = -\frac{1}{16}$. *Указание.* Перепишем данную систему в виде $\begin{cases} \sqrt{|3x|} + \sqrt{|y-7|} = 1, \\ (3x)^2 + (y-7)^2 = -2a. \end{cases}$ Произведя замены $3x = t$, $y - 7 = z$, получаем $\begin{cases} \sqrt{|t|} + \sqrt{|z|} = 1, \\ t^2 + z^2 = -2a. \end{cases}$ Ясно, что число решений полученной системы равно числу решений исходной. Очевидно, что при $a \geqslant 0$ решений нет. На рис. 117 изображены график уравнения $\sqrt{|t|} + \sqrt{|z|} = 1$ и две из семейства окружностей $t^2 + z^2 = -2a$, соответствующие тем случаям, когда окружность и «розетка» имеют 4 общие точки.

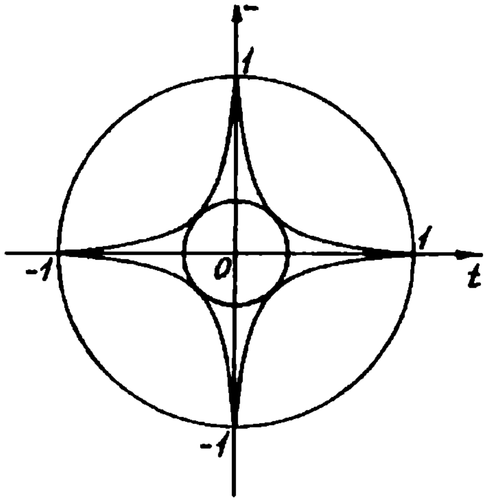


Рис. 117

Одно из значений параметра можно найти, заметив, что радиус большей окружности равен 1, т.е. $\sqrt{-2a} = 1$. Условие касания проще всего найти воспользовавшись тем, что точки касания принадлежат биссектрисам координатных углов, т.е.

$$\begin{cases} \sqrt{|t|} + \sqrt{|z|} = 1, \\ t^2 + z^2 = -2a, \\ t = z. \end{cases}$$

**П.276.** $a = \frac{1}{16}$ или $a = \frac{1}{128}$.

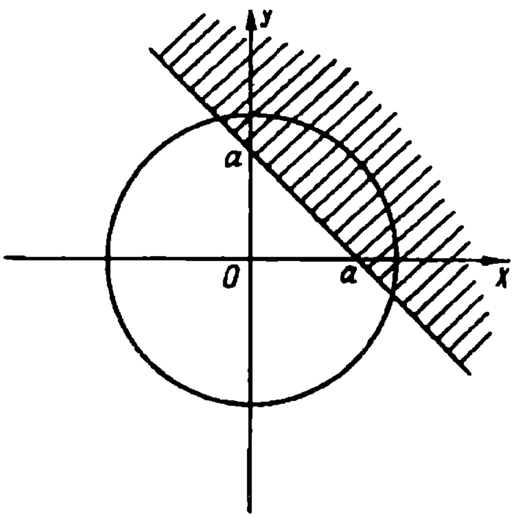


Рис. 118

**П.277.** $0 < a < \sqrt{\frac{2}{3}}$. *Указание.* Заметим, что при $a \geqslant 1$ данная система решений не имеет. При $0 < a < 1$уравнение системы на координатной плоскости $(x; y)$ задает окружность с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом $R = \sqrt{1 - a^2}$. Неравенству системы удовлетворяют координаты точек, расположенных выше прямой $y = a - x$ (рис. 118). Очевидно нужные значения $a$ можно найти, потребовав от системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - a^2, \\ x + y = a \end{cases}$ иметь два различных решения. **П.278.** $a \leqslant -\frac{5\sqrt{5}}{4}$ или $a \geqslant \frac{5\sqrt{5}}{4}$. **П.279.** $\frac{a\sqrt{5}}{5} < x \leqslant -a$. **П.80.** $a = \pm\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)$. **П.281.** $a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leqslant x \leqslant 2a$. *Указание.*

Перепишем данное неравенство в виде $\sqrt{a^2-(a-x)^2} \geqslant a-x$. Теперь, сделав замену $a-x=t$, переходим к неравенству $\sqrt{a^2-t^2} \geqslant t$. На рис. 119 показаны графики функций $y=\sqrt{a^2-t^2}$ и $y=t$. Ясно, что решением неравенства будут все точки отрезка $[-a; t_2]$, где $t_2$ — больший корень уравнения $\sqrt{a^2-t^2}=t$. **II.282.** Если

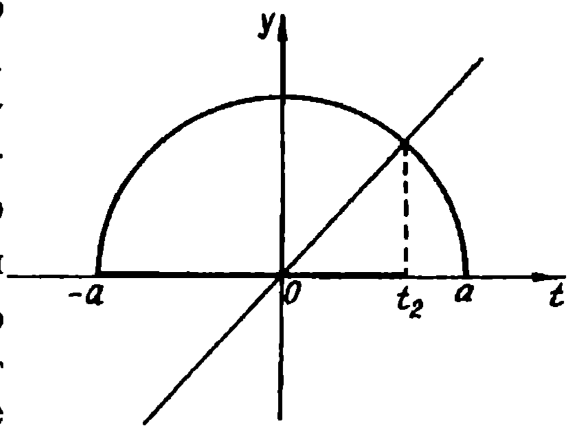



Рис. 119

$a<-8$, то 4 решения; если $a=-8$, то 3 решения; если $-8<a<0$, то 2 решения; если $a=0$, то 1 решение; если $a>0$, то решений нет. **II.283.** Если $a<-2$ или $a>2$, то $x=3$; если $a=-2$, то $x \geqslant -3$; если $a=2$, то $-4 \leqslant x \leqslant -3$; если $-2<a<2$, то $x=-3$ или $x=-\dfrac{3a+10}{a+2}$. **II.284.** $a=2$. **II.285.** а) $a=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$; б) $a>\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$; в) $0<a<\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$. **II.286.** $a<0$ или $a=\dfrac{1}{3}$. **II.287.** Если $a \leqslant -4$, то $x=\dfrac{1 \pm \sqrt{1-2a}}{a}$; если $-4<a<0$, то $x=\dfrac{-1+\sqrt{1-6a}}{a}$ или $x=\dfrac{1-\sqrt{1-2a}}{a}$; если $a=0$, то $x=-3$ или $x=1$; если $0<a<\dfrac{1}{6}$, то $x=\dfrac{-1 \pm \sqrt{1-6a}}{a}$ или $x=\dfrac{1 \pm \sqrt{1-2a}}{a}$; если $a=\dfrac{1}{6}$, то $x=-6$ или $x=6 \pm 2\sqrt{6}$; если $\dfrac{1}{6}<a<\dfrac{1}{2}$, то $x=\dfrac{1 \pm \sqrt{1-2a}}{a}$; если $a=\dfrac{1}{2}$, то $x=2$; если $a>\dfrac{1}{2}$, то решений нет.

**II.288.** $a<-\dfrac{3+\sqrt{5}}{16}$. **II.289.** $\dfrac{1}{4}<\beta<1$ или $1<\beta<\sqrt{2}$. *Указание.* Заметим, что при $\beta=0$

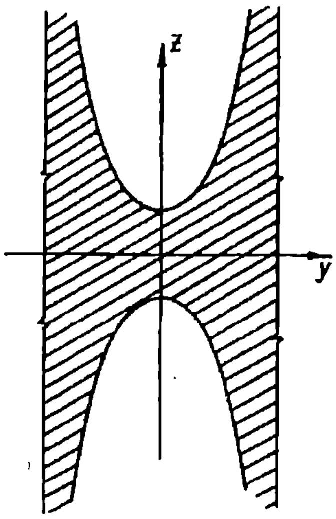



Рис. 120

любая пара вида ($y$; 0) является решением данного неравенства.

Рассмотрим два случая.

1). $\beta < 0$. На рисунке 120 штриховкой показано множество точек, координаты ($y$; $z$) которых удовлетворяют исходному неравенству. Ясно, что здесь, так же как в случае $\beta = 0$, существует бесконечно много целочисленных точек.

2). $\beta > 0$. На рисунках 121 и 122 показаны ситуации, при которых существует три пары ($y$; $z$), удовлетворяющих условию.

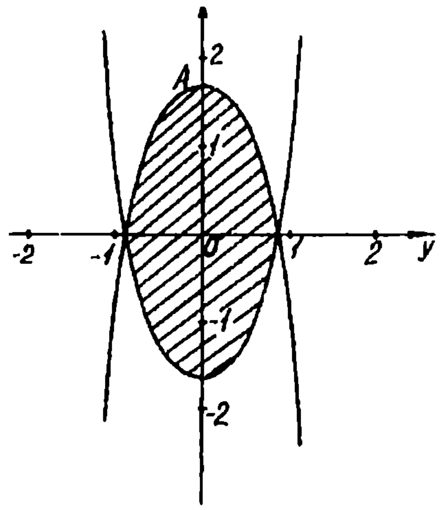



Рис. 121

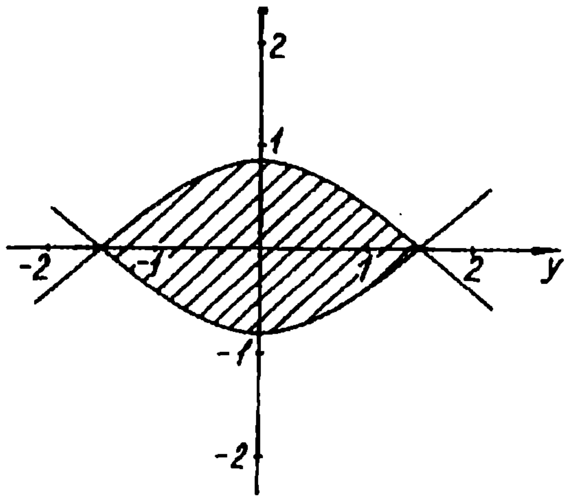



Рис. 122

В первом случае (рис. 121) нужные значения $\beta$ можно найти, потребовав, чтобы вершина $A$ параболы $z = \beta^2 - \beta^3 y^2$ принадлежала промежутку (1;2) оси $z$. Во втором случае потребуем, чтобы точка $B$ ($\sqrt{\beta}$; 0) принадлежала промежутку (1; 2). Ясно, что при других значениях $\beta$ целочисленных решений будет не меньше пяти (пять при $\beta = 1$). **II.296.** $a \neq -1$ и $a \neq \frac{9}{4}$. **II.298.** $a = -\frac{2}{3}$. **II.299.** $a = -7$. **II.300.** $\alpha = 6, \beta = 2$ или $\alpha = -2, \beta = -6$. **II.301.** $-2 < a < 4$. **II.302.** $a = -2$, $b = -7$. *Указание.* Заметим, что вторая система имеет единственное решение при любых значениях $a$ и $b$. Ясно, что для выполнения условия равносильности необходимо, чтобы все четыре прямые, задаваемые уравнениями обеих систем, имели общую точку. Эту точку несложно найти, решив систему

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x + 3y = 3. \end{cases}$$

Отсюда $x = 3$, $y = 0$. Теперь, подставляя найденные значения $x$ и $y$ в первые уравнения данных систем, получаем $a = 2$, $b = 5$

или $a = -2$, $b = -7$. Здесь важно не забыть проверить найденные значения параметров. Ведь не исключена возможность, что первая из данных в условии систем имеет бесконечно много решений. **П.303.** $a = 0$, $b = 0$, $c = \frac{9}{4}$ или $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$. **П.304.** $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{2}{3}$. **П.305.** $b = 3$. *Указание.* Заметим, что если $a \neq -3$, то данная система имеет единственное решение при любых значениях $b$. Поэтому достаточно найти такие $b$, чтобы система имела решение при $a = -3$. **П.306.** $-1 \leqslant a < 0$. **П.323.** 1) $-4 \leqslant a \leqslant 4$. 2) $a = -4$ или $a = 4$. 3) $-4 \leqslant a < -3$. 4) $2 < a \leqslant 4$. 5) $-4 \leqslant a \leqslant -\frac{7}{2}$ или $-\frac{5}{4} \leqslant a \leqslant 4$. 6) $-\frac{13}{4} < a < \frac{7}{16}$. 7) $-\frac{25}{8} \leqslant a \leqslant -\frac{1}{12}$. 8) $\frac{1}{4} < a \leqslant 4$ или $-4 \leqslant a < -3$. **П.324.** $a = -3$ или $a = 1$. **П.325.** $a = 0$ или $a = 4$. **П.326.** $a = \pm 1$. **П.327.** $a = -1$ или $a = -\frac{3}{4}$. *Указание.* Перепишем данное в условии уравнение в виде $a^2 + 2a(1 - x^2) + x^4 - 6x^2 + 4x = 0$. Рассматривая последнее уравнение как квадратное относительно $a$, получаем

$$\left[\begin{array}{l} a = x^2 + 2x - 2, \\ a = x^2 - 2x. \end{array}\right.$$

Теперь уже несложно, построив в плоскости $(x; a)$ график полученной совокупности, найти искомые значения параметра. **П.328.** Если $a < -9$, то решений нет; если $a = -9$, то одно решение; если $-9 < a < -6$, то 2 решения; если $a = -6$ или $a = -5$, то 3 решения; если $-6 < a < -5$ или $a > -5$, то 4 решения. **П.329.** $\frac{3}{2} < a < \frac{5}{3}$. **П.330.** $a = 0$ или $a = 1$. *Указание.* Очевидно $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a \neq 0$. Тогда, умножив обе части уравнения на $a$, получаем $a|1 - ax| = a + (1 - 2a)ax + a^2x^2$. Сделаем замену $ax = t$. Имеем $a|1 - t| = a + (1 - 2a)t + t^2$, $a(|t - 1| + 2t - 1) = t^2 + t$.

Ясно, что при $a \neq 0$ число корней полученного уравнения равно числу корней исходного.

Единственный корень уравнения $|t-1|+2t-1=0$, а именно $t=0$, также является корнем полученного уравнения при любом $a$. Следовательно, остается найти значения параметра, при которых уравнение $a=\dfrac{t^2+t}{|t-1|+2t-1}$ не имеет решений.

Проще всего это сделать, построив график функции $a(t)=\dfrac{t^2+t}{|t-1|+2t-1}$. П.331. Если $a<-1$, то $x=a$ или $x=-1$; если $-\dfrac{1}{2}<a<0$, то $x=a$ или $x=-2a^2$. П.332. $-\dfrac{\sqrt{42}}{14}<p\leqslant-\dfrac{\sqrt{14}}{14}$ или $\dfrac{\sqrt{14}}{14}\leqslant p<\dfrac{\sqrt{42}}{14}$. П.333. $a\geqslant\dfrac{1}{2}$. П.334. $a>-1$. П.335. $\dfrac{10}{3}\leqslant a\leqslant 4$. П.336. $a=1-\sqrt{2}$ или $a\leqslant-1$. П.337. $-3<a\leqslant\dfrac{13}{4}$. П.338. $-2<a<0$. П.339. $-\sqrt{2}<a<-\dfrac{16}{17}$ или $0<a<\sqrt{2}$. П.340. $q\leqslant 0$ или $q\geqslant 12$.

*Указание.* На рис. 123 штриховкой показаны все точки плоскости, координаты $x$ и $q$ которых удовлетворяют неравенству $(x^2-q)(q-2x-8)>0$. Очевидно искомые значения параметра $q$ те, при которых ни одна из точек указанных областей не принадлежит «полосе» $-2\leqslant x\leqslant 2$. П.341. $a=1$ или $a=\dfrac{7}{4}$. П.342. $a>\dfrac{1}{2}$. П.343. $a=-\dfrac{1}{2}$. П.344. $a\leqslant-1$, или $-\dfrac{1}{6}\leqslant a\leqslant\dfrac{7}{2}$, или $a\geqslant 7$. *Указание.* На рис. 124 штриховкой показаны все точки, координаты которых удовлетворяют данному неравенству. Ясно, что условие задачи будет выполняться в том случае, когда $a$ принадлежит отрезку $BC$ или одному из лучей $(-\infty; A]$ и

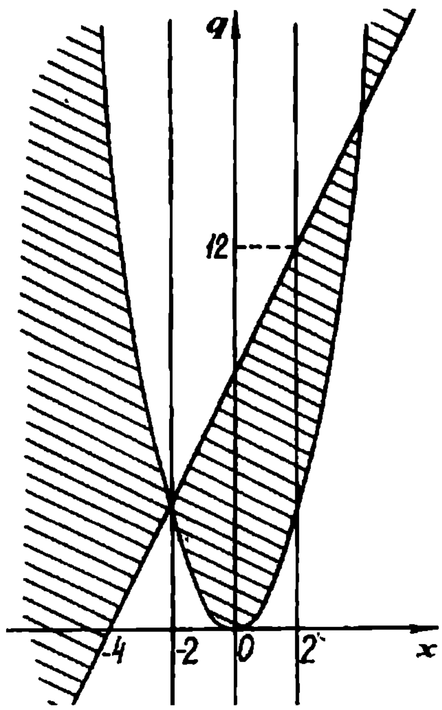


Рис. 123

$[D; +\infty)$. Координаты точек $A$, $B$, $C$, $D$ являются решениями соответственно систем

$$\begin{cases} 6a + x + 2 = 0, \\ x = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a + x - 2 = 0, \\ x = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 3x + 2 = 0, \\ x = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 3x - 2 = 0, \\ x = 4. \end{cases}$$

**II.345.** $-2 < a \leqslant 0$, или $\frac{3}{2} < a < 2$, или $\frac{5}{2} < a < 3$,

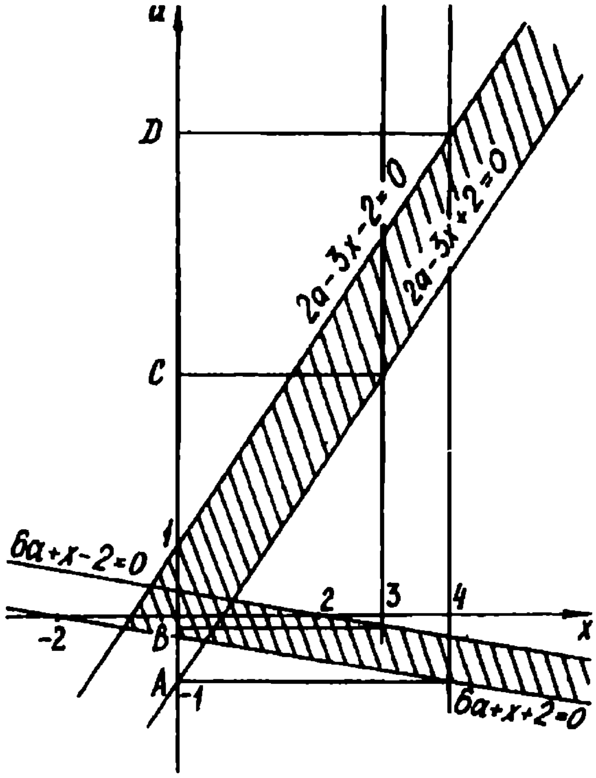



Рис. 124

или $a > \frac{15}{2}$. **II.346.** Если $a \leqslant -8$ или $a \geqslant 1$, то решений нет; если $-8 < a \leqslant 0$, то $-\frac{a+6}{2} < x < -2 + \sqrt{1-a}$; если $0 < a < 1$, то $-2 - \sqrt{1-a} < x < -2 + \sqrt{1-a}$. **II.347.** Если $a > \frac{9}{4}$ или $a \leqslant 0$, то решений нет; если $2 < a \leqslant \frac{9}{4}$, то $\frac{1-\sqrt{9-4a}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{9-4a}}{2}$; если $0 < a \leqslant 2$, то $\frac{1-\sqrt{9-4a}}{2} \leqslant x < 1 - \sqrt{4-2a}$. **II.348.** Если $a \leqslant -4$, то решений нет; если $a > -4$, то $2a + 3 < x \leqslant \frac{7a+13}{3}$. **II.349.** Если $a \leqslant 2$, то решений нет; если $a > 2$, то $2a - 1 < x \leqslant \frac{19a-14}{8}$. **II.350.** Если $a < 1$, то решений нет; если $a = 1$, то $x = 2$; если $a > 1$, то $x = a + 1$ или $x = 3a - 1$. *Указание.* С рис. 125 (на нем изображен

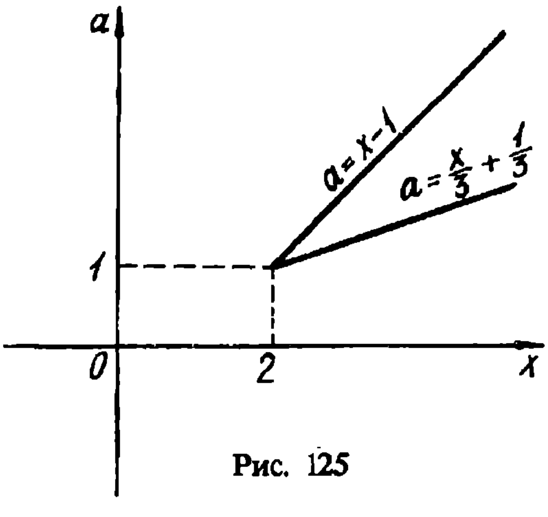



Рис. 125

график данного уравнения) несложно «снять» ответ.

**П.351.** Если $a < -2$, то $\frac{1-\sqrt{17-4a}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{17-4a}}{2}$; если $-2 \leqslant a < 2$, то $\frac{-1-\sqrt{17+4a}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{17-4a}}{2}$; если $a \geqslant 2$, то $\frac{-1-\sqrt{17+4a}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{-1+\sqrt{17+4a}}{2}$. **П.352.** Если $0 < a < 1$, то $x < -2$, или $-\frac{2a}{a+1} \leqslant x \leqslant 1-\sqrt{1-a}$, или $x \geqslant 1+\sqrt{1-a}$; если $a \geqslant 1$, то $x < -2$ или $x \geqslant -\frac{2a}{a+1}$. **П.353.** Если $a < 0$, то решений нет; если $a = 0$, то $x > 0$; если $a > 0$, то $-\frac{4a}{3} \leqslant x < -a$ или $x > 0$. **П.354.** Если $0 < a < 1$, то $2 < x < 1+\sqrt{1+a}$; если $a > 1$, то $x > 1+\sqrt{1+a}$. **П.355.** Если $0 < a < 1$, или $1 < a < 2$, или $a = 3$, то $x = a+2$; если $2 < a < 3$ или $a > 3$, то $x = a+2$ или $x = a-2$; если $a = 2$, то решений нет. **П.356.** Если $p \leqslant -8$ или $p = -2$, то решений нет; если $-8 < p \leqslant -3$, то $\frac{p-4}{6} \leqslant x < 1-\sqrt{1-p}$; если $-3 < p < -2$, то $\frac{p-4}{6} \leqslant x < -1$; если $p > -2$, то $-1 < x \leqslant \frac{p-4}{6}$. **П.357.** Если $a < -1$, то $x > -a$; если $-1 \leqslant a < -\frac{1}{4}$, то $x > 1$; если $-\frac{1}{4} \leqslant a < 0$, то $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ или $x > 1$; если $a = 0$, то $0 < x < 1$ или $x > 1$; если $0 < a < 1$, то $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \leqslant x < 1$ или $x \geqslant \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$; если $1 \leqslant a < 2$, то $-a < x < -1$, или $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \leqslant x < 1$, или $x \geqslant \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$; если $a \geqslant 2$, то $-a < x \leqslant \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$, или $-1 < x < 1$, или $x \geqslant \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. **П.358.** Если $p \leqslant -2$, то решений нет; если $-2 < p < 0$, то $1-\sqrt{1-2p} \leqslant x < p+1$; если $p > 0$, то $x < \frac{p}{2}$.

**III.14.** $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ или $\alpha = \pi - \mathrm{arctg}2 + 2\pi n$, где $n$ и $k$— целые.

**III.15.** $a \geq \frac{3}{4}$. **III.16.** $a > 6$. **III.17.** $a < -6$. **III.18.** $a = -2$ или $a > -\frac{1}{6}$. **III.19.** $-5 < a < 1$. **III.20.** $a = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6$. **III.21.** $p > 2$. **III.22.** $-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} < a < -\sqrt{3}$ или $\sqrt{3} < a < \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

**III.23.** $a = 0$ или $1 \leq a < 4$.

**III.24.** $a = -\frac{17}{48}$. **III.25.** $-\sqrt{\frac{7}{5}}$. **III.26.** $0 < a < 1$.

**III.27.** Множество точек, координаты $(a;\ b)$ которых удовлетворяют условиям $\begin{cases} |a-b| > 1, \\ |a-2b| > 1. \end{cases}$ **III.28.** Заштрихованные области (рис. 126) и лучи $(-\infty;\ -2)$ и $(2;\ \infty)$ оси абсцисс. *Указание.* Данное уравнение равносильно совокупности

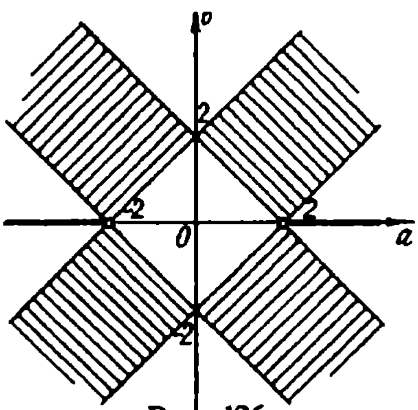


Рис. 126

$$\left[\begin{aligned} &x^2 - (a+b)x + 1 = 0, \\ &x^2 - (a-b)x + 1 = 0. \end{aligned}\right.$$

Ясно,что точки, координаты $(a;\ b)$ которых удовлетворяют одной из систем $\begin{cases} |a+b| > 2, \\ |a-b| < 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} |a+b| < 2, \\ |a-b| > 2, \end{cases}$ следует включить в ответ. Здесь важно не упустить, что при $b = 0$ и $|a| > 2$ каждое из уравнений совокупности имеет по паре различных решений, однако эти пары в точности совпадают. **III.29.** $a = \frac{11}{12}$, или $a = 1$, или $a = 3$. **III.30.** $a = \frac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}$, или $a = -\frac{1}{2}$, или $a = 1$. **III.31.** $q \leq 0$. *Указание.* Данное уравнение имеет решение при $p^2 \geq 4q$. Последнее неравенство выполняется при всех $p$ при условии неположительности правой части. **III.32.** $|a| \leqslant \frac{1}{2}$. **III.33.** $0 \leqslant a \leqslant 2$. **III.34.** $b = 2a$, $d = -a$, $c = 0$. **III.35.** $a = -4$, $b$ — любое или $a = 4$, $b = 2$. **III.36.** $a = 50$. *Указание.* Условие задачи равносильно такому: при каких значениях $a$ каждое из неравенств $(50 + a)x^2 - 2x + \frac{1}{100} > 0$ и $(50 - a)x^2 + \frac{1}{100} \geqslant 0$ выполняется для любых $x$. Для первого из полученных неравенств нужные значения для $a$ найдем, решив систему $\begin{cases} a + 50 \geqslant 0, \\ 1 - \dfrac{50 + a}{100} \leqslant 0. \end{cases}$ Отсюда $a \geqslant 50$. Для второго неравенства очевидно нужно потребовать $a \leqslant 50$. **III.42.** $-6 \leqslant a < -4$. **III.43.** Если $a < -2$, то $\min\limits_{[-1;1]} y(x) = y(-1) = 3 + 2a$, $\max\limits_{[-1;1]} y(x) = y(1) = 3 - 2a$; если $-2 \leqslant a < 0$, то $\min\limits_{[-1;1]} y(x) = y(x_0) = 1 - \frac{a^2}{2}$, $\max\limits_{[-1;1]} y(x) = y(1) = 3 - 2a$; если $0 \leqslant a < 2$, то $\min\limits_{[-1;1]} y(x) = y(x_0) = 1 - \frac{a^2}{2}$, $\max\limits_{[-1;1]} y(x) = y(-1) = 3 + 2a$; если $a \geqslant 2$, то $\min\limits_{[-1;1]} y(x) = y(1) = 3 - 2a$, $\max\limits_{[-1;1]} y(x) = y(-1) = 3 + 2a$. **III.44.** Если $a \leqslant 0$, то $-6a^2 - a + 2$; если $0 < a < \frac{8}{5}$, то $2 - 6a + \frac{a^2}{4}$; если $a \geqslant \frac{8}{5}$, то $19a - 6a^2 - 14$. **III.45.** $a = -\frac{7}{2}$. **III.46.** $a = -2$ или $a = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$. **III.47.** Если $a < -2\sqrt{3}$, то $-a\sqrt{3} - 2$; если $-2\sqrt{3} \leqslant a \leqslant -2$, то $1 + \frac{a^2}{4}$; если $-2 < a < 0$, то $-a$; если $a = 0$, то $0$; если $0 < a < 2$, то $a$; если $2 \leqslant a \leqslant 2\sqrt{3}$, то $1 + \frac{a^2}{4}$; если $a > 2\sqrt{3}$, то $a\sqrt{3} - 2$. **III.48.** $|a| > \frac{7\sqrt{3}}{12}$. **III.49.** $a < -\frac{\sqrt{129} + 15}{2}$ или $a > \frac{\sqrt{129} - 15}{2}$. **III.50.** $a = 5$. **III.51.** $a = 0$. **III.52.** $-\frac{3}{2} < a < -\frac{1}{2}$, или $-\frac{1}{4} < a < 0$, или $a > 1$.

III.53. $-2 < a < 0$ или $-5 - 2\sqrt{2} < a < -5 + 2\sqrt{2}$. *Указание.* Для того, чтобы вершина $A(x_0; y_0)$ параболы была расположена выше (ниже) прямой $y = kx + b$, должно выполняться условие $y_0 > kx_0 + b$ $(y_0 < kx_0 + b)$. Эти соображения в данной задаче позволяют найти нужные значения для $a$ как решения совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} -a^2 > 2a, \\ 1 - \dfrac{(a+3)^2}{4} < 2\left(\dfrac{a+3}{2}\right), \end{cases} \\ \begin{cases} -a^2 < 2a, \\ 1 - \dfrac{(a+3)^2}{4} > 2\left(\dfrac{a+3}{2}\right). \end{cases}\end{array}\right.$$

III.54. $a = \frac{7}{16}$. *Указание.* Прямая $x = \frac{1}{4}$ является осью симметрии графика $y = \left| -2x^2 + x + a \right|$. Двигая график вдоль оси симметрии, несложно понять, что в зависимости от параметра данная функция принимает наибольшее значение либо в точке $x = \frac{1}{4}$, либо в точке $x = 1$, причем $y\left(\frac{1}{4}\right) = \left|a + \frac{1}{8}\right|$, $y(1) = |a - 1|$. Сравнивая выражения $\left|a + \frac{1}{8}\right|$ и $|a - 1|$, получаем, что при $a < \frac{7}{16}$ $\max\limits_{[0;1]} y(x) = y(1) = |a - 1|$, при $a \geqslant \frac{7}{16}$ $\max\limits_{[0;1]} y(x) = y\left(\frac{1}{4}\right) = \left|a + \frac{1}{8}\right|$. Теперь, исследуя функцию $f(a) = \begin{cases} |a-1| & \text{при } a < \frac{7}{16}, \\ \left|a + \frac{1}{8}\right| & \text{при } a \geqslant \frac{7}{16}, \end{cases}$ легко получить $\min f(a) = f\left(\frac{7}{16}\right) = \frac{9}{16}$. III.64. $\frac{a^3 - 18a^2 + 9a}{27}$. III.65. $0 < a < 1$ или $1 < a < \frac{6}{5}$. III.66. $a = 2$. III.67. $a = 2$. III.68. $-\frac{1}{2} < a < 0$ или $0 < a < \frac{\sqrt{5}}{5}$. III.69. $a = 1$ или $a = 2$. *Указание.* Так как корни данного уравнения существуют при условии $\frac{D}{4} = a^4 - 5a^2 + 4 \geqslant 0$, то задача сводится к поиску таких значений параметра, при которых функция

$f(a) = 6a - 2a^2$ принимает наибольшее значение на множестве $(-\infty; -2]\cup[-1; 1]\cup[2; \infty)$. **III.70.** Множество точек, координаты $(p; q)$ которых удовлетворяют условиям $\begin{cases} p^2 - q \geqslant 0, \\ 2p^2 - q = 1. \end{cases}$

**III.71.** 8. **III.72.** Если $-\frac{3\sqrt{2}}{4} < a \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{4}$, то $x = -2a - \sqrt{9 - 4a^2}$; если $\frac{3\sqrt{2}}{4} < a \leqslant \frac{3}{2}$, то $x = -2a \pm \sqrt{9 - 4a^2}$; при других $a$ отрицательных корней нет. **III.73.** $-\frac{1}{4} \leqslant k \leqslant \frac{1}{4}$. **III.74.** $a < -15$, или $a = -9$, или $a \geqslant 15$. *Указание.* Данная система равносильна такой: $\begin{cases} 9y^2 + 8ay + 225 - a^2 = 0, \\ x = \frac{4y - a}{5}, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$ Теперь ясно, что задача свелась к поиску тех значений параметра, при которых первое уравнение полученной системы имеет единственное неотрицательное решение.

Рассмотрим три случая.

1). $D = 0$. Имеем $a = 9$ или $a = -9$. Условию удовлетворяет только $a = -9$.

2). Корни уравнений имеют разные знаки, т.е. $225 - a^2 < 0$.

3). Один из корней равен нулю, другой отрицательный: $\begin{cases} 225 - a^2 = 0, \\ \frac{8a}{9} > 0. \end{cases}$ Отсюда $a = 15$. **III.75.** $p \leqslant 0$ или $p = \frac{25}{4}$. **III.76.** $a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **III.77.** $a \geqslant 2$. **III.78.** $a < -1$ или $a > 3$. **III.79.** $0 < a < \frac{1}{8}$. **III.80.** $a = \frac{8}{65}$. **III.81.** а) нет; б) $S = \frac{9}{2}$. **III.97.** $a = 1$ или $a > \frac{3}{2}$. **III.98.** $a \geqslant \frac{5}{2}$. **III.99.** $|a| \geqslant \sqrt{6}$, или $|a| \leqslant \frac{1}{3}$, или $|a| = \sqrt{\frac{2}{3}}$. **III.100.** $a \geqslant 4$. **III.101.** $a = 0$. **III.102.** $a \leqslant \frac{1}{2}$. **III.103.** $-1 < k < 0$ или $0 < k < \frac{1}{2}$. **III.104.** $a < 0$. **III.105.** Множество точек с координатами $(a; b)$, удовлетворяющими условиям

$\begin{cases} |b| \leqslant 1, \\ a^2 + b^2 \leqslant 9. \end{cases}$ **III.106.** $a = -1$, или $1 < a < 3$, или $4 < a \leqslant 6$. **III.107.** $a = 20$. **III.108.** $4 < k < 5$. **III.109.** $0 < k < 3^4$ или $k > 3^{12}$. **III.110.** $-2 < a \leqslant \frac{1}{4}$. **III.111.** $a \geqslant \frac{1}{2}$. **III.112.** $-21$. **III.113.** $2 < a < 5$. **III.114.** $a > 15 + 4\sqrt{17}$. **III.115.** $-\frac{16}{7} \leqslant m < -2$. **III.116.** $0{,}9799 < a < 1$. **III.117.** $-\frac{4}{5} < m < -\frac{3}{4}$ или $m > 12$. **III.118.** $a < \frac{1}{4}$ или $a > 1$. **III.119.** $0 < a \leqslant \frac{12}{7}$ или $a = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$. **III.120.** $\frac{16}{17} \leqslant a \leqslant 2$. **III.121.** $m > \frac{16}{9}$. **III.122.** $k \geqslant \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$. **III.123.** $-2 \leqslant k \leqslant -\frac{1}{2}$. **III.124.** $m \leqslant \frac{13}{19}$. **III.133.** $a \geqslant \frac{7}{4}$. **III.134.** $-\frac{9}{8} \leqslant a \leqslant 5$. **III.135.** $a \leqslant -5 - 4\sqrt{2}$ или $a > 0$. **III.136.** $a \leqslant -\frac{5}{4}$. **III.137.** $-1 \leqslant a < \frac{1}{2}$ или $\frac{3}{2} < a \leqslant 2$. **III.138.** $\frac{1}{16} \leqslant a \leqslant 1$. **III.139.** $a = \frac{3}{2}$ или $3 \leqslant a \leqslant \frac{7}{2}$. **III.140.** Если $a < -2$, то $x = 1 - \sqrt{a^2 - 2a + 5}$ или $x = 1 + \sqrt{a^2 + 4a + 8}$; если $-2 \leqslant a < -\frac{1}{2}$, то $x = 1 - \sqrt{a^2 - 2a + 5}$ или $x = 1 - \sqrt{a^2 + 4a + 8}$; если $a = -\frac{1}{2}$, то $x = -\frac{3}{2}$; если $-\frac{1}{2} < a \leqslant 1$, то $x = 1 - \sqrt{a^2 - 2a + 5}$ или $x = 1 - \sqrt{a^2 + 4a + 8}$; если $a > 1$, то $x = 1 + \sqrt{a^2 - 2a + 5}$ или $x = 1 - \sqrt{a^2 + 4a + 8}$. Уравнение имеет единственное решение при $a = -\frac{1}{2}$. *Указание.* Произведя замену $(x - 3)\sqrt{\frac{x + 1}{x - 3}} = t$, получаем $t^2 + 3t - (a - 1)(a + 2) = = 0$. Отсюда $t = a - 1$ или $t = -a - 2$.

Рассмотрим уравнение $(x - 3)\sqrt{\frac{x + 1}{x - 3}} = b$.

Если $b = 0$, то $x = -1$. Если $b < 0$, то данное уравнение равносильно системе $\begin{cases}(x-3)(x+1) = b^2,\\ x \leqslant -1.\end{cases}$

Решая уравнения системы, находим $x = 1 + \sqrt{4 + b^2}$ или $x = 1 - \sqrt{4 + b^2}$. Ясно, что подходит только второе значение для $x$.

Если $b > 0$, то равносильная система выглядит так:

$$\begin{cases}(x-3)(x+1) = b^2,\\ x > 3.\end{cases}$$

Решением последней будет $x = 1 + \sqrt{4 + b^2}$. Теперь уже несложно понять, что совокупность

$$\left[\begin{array}{l}(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = a - 1,\\ (x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = -a - 2,\end{array}\right.$$

равносильная исходному уравнению, может иметь единственное решение лишь при условии $a - 1 = -a - 2$.

**III.141.** $-1 < \beta < 1$. **III.142.** $\alpha \leqslant -1$ или $\alpha \geqslant 1$. **III.143.** $a < -\dfrac{1 + \sqrt{34}}{2}$ или $a \geqslant 2$. **III.144.** $-\dfrac{1}{2} \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2}$. **III.145.** $a < -\sqrt{6} - 2$ или $a > \sqrt{2}$. **III.146.** $a < -2\sqrt{2} - 2$ или $a > 2$. **III.147.** $a \geqslant \dfrac{1}{2}$. **III.148.** $-6 \leqslant a \leqslant 1$. **III.149.** Если $a = -1$, то $x = -\arcsin\dfrac{\pi}{4}$, или $x = \pi + \arcsin\dfrac{\pi}{4}$, или $x = -\pi + \arcsin\dfrac{\pi}{4}$, или $x = 2\pi - \arcsin\dfrac{\pi}{4}$; если $a = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 1}{2\operatorname{ctg} 1 + 1}$, то $x = \dfrac{\pi}{2}$ или $x = -\dfrac{3\pi}{2}$.

**III.150.** $\dfrac{1}{3} \leqslant a \leqslant 1$. *Указание.* Для того чтобы корень уравнения $\log_3(x - 2) = b$ был меньше 3, должно выполняться условие $b < 0$. Тогда, потребовав от уравнения $(a - 1)t^2 - 2(a + 1)t + a - 3 = 0$ иметь только отрицательные корни, найдем нужные значения для $a$. **III.151.** $0 < a < \dfrac{1}{4}$. **III.152.** $a > -1$. **III.153.** $a < \dfrac{19}{3}$. **III.154.** $m > -\dfrac{3}{2}$.

## Глава IV

**IV.6.** $y=\frac{1}{4}(x+2)^2$. **IV.7.** $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{9}{16}$. **IV.8.** $\frac{1}{4}$. **IV.9.** $\frac{1}{2}$. **IV.10.** $a\leqslant 10$ или $a=4-\sqrt{15}$. **IV.11.** $a=\frac{1}{2}$. **IV.12.** $a=-7\frac{13}{16}$, $b=18\frac{1}{4}$ или $a=-8\frac{3}{16}$, $b=19\frac{3}{9}$. **IV.13.** $x_2<-1$ или $x_2>-\frac{7}{11}$. **IV.14.** $k=-\frac{1}{2}$. $S_{MAB}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **IV.15.** $y=x-1$. **IV.16** $0<a<1$. **IV.24.** $a=-\frac{4}{3}$ или $a=-\frac{8}{3}$. **IV.25.** $a=3$. **IV.26.** $-3<a<-2$. **IV.27.** $2<a<\frac{21}{8}$. **IV.28.** $-1<m<3$. **IV.29.** $0<a<1$ или $1<a<4$. *Указание.* Имеем $f(x)=-\frac{1}{2}(a-1)(a-2)\sin\frac{x}{2}+(a-1)$. Найдем значения $a$, при которых уравнение $f(x)=0$ не имеет решений. Рассматривая случаи $a=1$ и $a=2$, получаем $f(x)=0$ и $f(x)=1$ соответственно. Очевидно условию удовлетворяет только $a=2$. Если $a\neq 1$ и $a\neq 2$, то имеем $\sin\frac{x}{2}=\frac{2}{a-2}$. Теперь нужные значения $a$ найдем, решив неравенство $\left|\frac{2}{a-2}\right|>1$. **IV.30.** $a>1$. *Указание.* Имеем $f(x)=ax^2+2(a+2)x+a-1$. При $a=0$ $f(x)=4x-1$ и данная функция достигает минимума в точке $x=\frac{1}{4}$, что не удовлетворяет условию.

Пусть $a\neq 0$. Обозначим $x_1$ и $x_2$ $(x_2>x_1)$ корни квадратного трехчлена

$ax^2+2(a+2)x+a-1$.

Рассмотрим два случая.

1). $a>0$ (рис. 127). Ясно, что условие будет выполняться, если $x_2<0$. Нужные значения $a$ проще

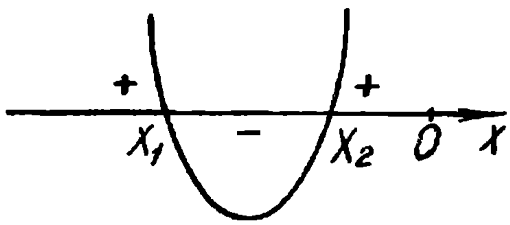



Рис. 127

всего найти, используя теорему Виета. Имеем

$$\begin{cases} (a+2)^2 - a(a-1) > 0, \\ \dfrac{a-1}{a} > 0, \\ \dfrac{2(a+2)}{a} > 0. \end{cases}$$

С учетом $a > 0$, получаем $a > 1$.

2). $a < 0$. (рис. 128). Ясно, что здесь нужно потребовать $x_1 < 0$. Соответствующие этому требованию условия можно получить, используя идеи, знакомые читателю по главе III.

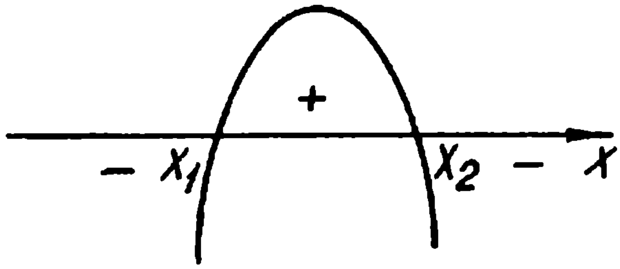



Рис. 128

**IV.31.** Если $0 < a \leqslant \dfrac{\pi}{6}$ или $\dfrac{5\pi}{6} \leqslant a < 4$, то $x = \pi n$ или $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1+2\sin a}{2}\right) + \pi n$; если $\dfrac{\pi}{6} < a < \dfrac{5\pi}{6}$, то $x = \pi n$, где $n \in Z$. **IV.32.** Функция определена только при $a = -\dfrac{1}{3}$. При $a = -\dfrac{1}{3}$ $f'(x) = \left(\dfrac{7^x - 7^{-x}}{7^x + 7^{-x}} - \dfrac{1}{3}\right)\ln 7$, $x = \dfrac{1}{2}\log_7 2$ — критическая точка. **IV.33.** $-2-\sqrt{5} \leqslant a < -2 - \sqrt{\dfrac{13}{3}}$, или $-2-\sqrt{\dfrac{21}{5}} \leqslant a \leqslant -2-\sqrt{3}$, или $-2+\sqrt{3} \leqslant a < 0$, или $0 < a < -2+\sqrt{\dfrac{21}{5}}$, или $-2+\sqrt{\dfrac{13}{3}} < a \leqslant -2+\sqrt{5}$. $f'(x) = a^2 + 4a - \cos x$. **IV.34.** $a \leqslant -\dfrac{1}{3}$ или $a \geqslant \dfrac{2}{3}$. **IV.35.** $a \leqslant -\dfrac{25}{21}$ или $a \geqslant 0$. **IV.36.** $a = -\dfrac{9}{5}$, $b > \dfrac{36}{5}$ или $a = \dfrac{81}{25}$, $b > \dfrac{400}{243}$.

*Указание.* Имеем $f'(x) = 5a^2x^2 + 4ax - 9$. Легко убедиться, что $a = 0$ условию задачи не удовлетворяет. Теперь при $a \neq 0$, решая уравнение $f'(x) = 0$, находим $x = \dfrac{1}{a}$ или $x = -\dfrac{9}{5a}$.

Рассмотрим два случая.

1). $a > 0$. В этом случае $x = -\frac{9}{5a}$ — точка максимума. Отсюда $a = \frac{81}{25}$. Очевидно для выполнения условия достаточно потребовать $\min f(x) = f\left(\frac{1}{a}\right) = f\left(\frac{25}{81}\right) > 0$.

2). $a < 0$. Здесь точкой максимума является $x = \frac{1}{a}$. Тогда $a = -\frac{9}{5}$, а нужные значения $b$ находятся из условия $\min f(x) = f\left(-\frac{9}{5a}\right) = f(1) > 0$.

**IV.37.** $a = -2$, $b < -\frac{11}{27}$ или $a = 3$, $b < -\frac{1}{2}$. **IV.38.** Если $p < 0$, то $\frac{32p^3}{27} + p < a < p$; если $p = 0$, то нужных $a$ не существует; если $p > 0$, то $p < a < \frac{32p^3}{27} + p$. *Указание.* Заметим, что при $p = 0$ нужных $a$ не существует. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + 2px^2 + p - a$ $(p \neq 0)$. Найдем критические точки этой функции.

$$f'(x) = 3x^2 + 4px = x(3x + 4p).$$

Точки $x = 0$ и $x = -\frac{4p}{3}$ — точки экстремумов. Функция $f(x)$ (а значит и исходное уравнение) будет иметь три корня, если $\max f(x) \cdot \min f(x) < 0$, т.е. $f(0) \cdot f\left(-\frac{4p}{3}\right) < 0$. На рисунках 129 и 130 изображен график функции для случаев $p < 0$ и $p > 0$

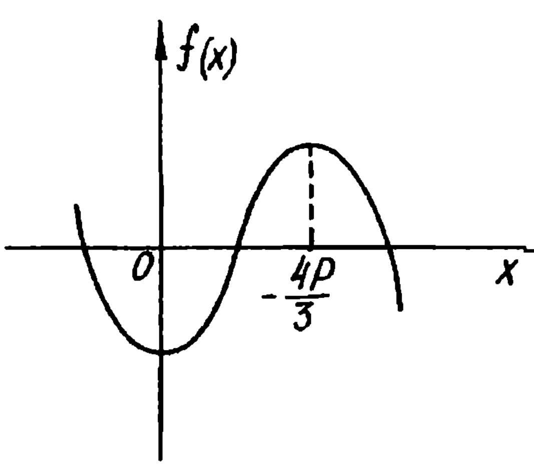



Рис. 129

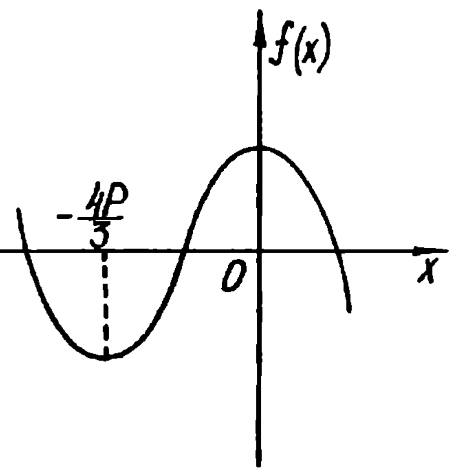



Рис. 130

соответственно. IV.39. $q > 0$, $|p| > 2\sqrt[4]{4q}$. *Указание.* Требование задачи равносильно такому: при каких $p$ и $q$ уравнение $f'(x) = g'(x)$ имеет четыре различных действительных корня. Указанное уравнение имеет вид $4x^4 - 4px^3 + p^2x^2 - q = 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = 4x^4 - 4px^3 + p^2x^2 - q$. Ясно, что при $p = 0$ условие задачи выполняться не может.

При $p \neq 0$ функция имеет три экстремума: $x = 0$ и $x = \frac{p}{2}$ — точки минимума, $x = \frac{p}{4}$ — точка максимума. Условие задачи выполняется лишь в том случае, когда значения функции $\varphi$ в точках минимума отрицательны, а в точке максимума положительно (на рисунках 131 и 132 изображен график функции $\varphi$ для

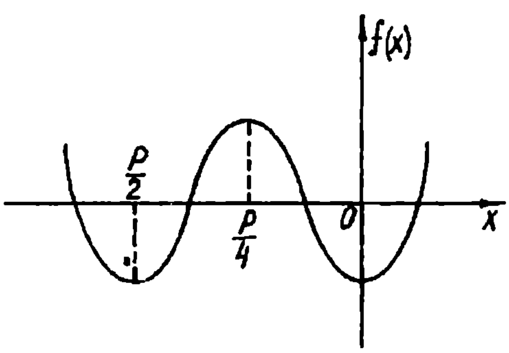



Рис. 131

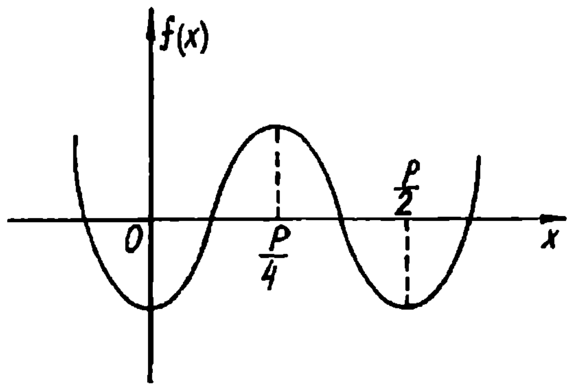



Рис. 132

$p < 0$ и $p > 0$ соответственно), т.е. искомые значения $p$ и $q$ — решения системы $\begin{cases} \varphi\left(\frac{p}{2}\right) < 0, \\ \varphi(0) < 0, \\ \varphi\left(\frac{p}{4}\right) > 0. \end{cases}$ IV.46. $-4 \leq a \leq \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$ или $a > 1$.

IV.47. Если $c \leq -\frac{3}{4}$, то $f(x)$ убывает на $R$; если $-\frac{3}{4} < c < 7$, то $f(x)$ убывает на промежутке $\left[\log_5 \sqrt{\frac{4c+3}{7-c}};\ \infty\right)$; при остальных $c$ интервалов убывания нет.

IV.48. Если $c \leqslant -\frac{4}{3}$, то интервалов возрастания нет; если $-\frac{4}{3} < c < 3$, то $f(x)$ возрастает на промежутке $\left(-\infty; \frac{1}{2}\log_5\frac{3c+4}{3-c}\right)$; если $c \geqslant 3$, то $f(x)$ возрастает на $R$. IV.49. $a \leqslant -3$. IV.50. $a \leqslant 1$. IV.51. $a < -2-\sqrt{5}$ или $a > \sqrt{5}$. IV.52. $b < -3-\sqrt{3}$ или $b > \sqrt{3}-1$. *Указание.* Имеем $f'(x) = 2\cos 2x + 8(b+2)\sin x - (4b^2 + 16b + 6)$.

Условие задачи будет выполняться, если потребовать $f'(x) < 0$ для всех $x$. Тогда $2(1-2\sin^2 x) + 8(b+2)\sin x - (4b^2 + 16 + 6) < 0$. После очевидных преобразований получаем $(\sin x - (b+2+\sqrt{3}))\cdot(\sin x - (b+2-\sqrt{3})) > 0$. Теперь ясно, что искомые $b$ — решения совокупности $\left[\begin{array}{l} b+2+\sqrt{3} < -1, \\ b+2-\sqrt{3} > 1. \end{array}\right.$ IV.53. $a \geqslant 1$. IV.54. $a \geqslant 1$. IV.55. $a \geqslant 3$. IV.56. $a \leqslant -\frac{9+\sqrt{17}}{2}$ или $a \geqslant \frac{-9+\sqrt{17}}{2}$. IV.57. $a \leqslant 1$ или $a \geqslant 2$. IV.58. $-1 \leqslant a \leqslant 3$. IV.59. $a \leqslant -\frac{4}{15}$, $b$ — любое или $-\frac{4}{15} < a < 0$, $b \leqslant 0$. *Указание.* Имеем $f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 - 3b^2x^2 = x^2(5ax^2 + 4bx - 3b^2)$. Учитывая условие $a < 0$, достаточно рассмотреть три случая.

1). Уравнение $5ax^2 + 4bx - 3b^2 = 0$ не имеем корней: $\frac{D}{4} = 4b^2 + 15ab^2 < 0$. Этому требованию удовлетворяет любая пара вида $\begin{cases} a < -\frac{4}{15}, \\ b \neq 0. \end{cases}$

2). Указанное уравнение имеет один корень. Этому случаю соответствуют пары $\begin{cases} a = -\frac{4}{15}, \\ b \text{ — любое} \end{cases}$ или $\begin{cases} b = 0, \\ a < 0. \end{cases}$

3). Уравнение имеем два неположительных корня. Соответствующие требования можно найти, используя теорему Виета:

$$\begin{cases} -\dfrac{3b^2}{5a} \geq 0, \\ \dfrac{4b}{5a} > 0, \\ a < 0, \\ 4b^2 + 15ab^2 > 0. \end{cases}$$

**IV.60.** $q \geq \frac{1}{5}$. **IV.68.** $a = 1$. **IV.69.** $a = 2 + 2\sqrt{2}$. **IV.70.** $a \geq 1$. **IV.71.** $a \geq \dfrac{20 + 4\sqrt{7}}{3\sqrt{3\sqrt{7} - 3}}$. **IV.72.** $|a| = \sqrt{2}$. **IV.73.** $a \geq \frac{3}{4}$. **IV.74.** Если $a \leq -\frac{3}{2}$ или $a \geq 0$, то $\max\limits_{[-a^2;\, a^2]} f(x) = a^6 + \frac{3}{2}a^5 + 1$; если $-\frac{3}{2} \leq a \leq 0$, то $\max\limits_{[-a^2;\, a^2]} f(x) = 1$. **IV.75.** Если $b \leq \frac{2}{3}$, то $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x) = b^2 - 24b + 16$; если $b \geq \frac{2}{3}$, то $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x) = b^2$. **IV.76.** Если $b \leq 2$, то $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x) = f(-2) = -\dfrac{1}{3b^2 - 8b + 16}$; если $b \geq 2$, то $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x) = f(0) = -\dfrac{1}{3b^2}$. *Указание.* При $b = 0$ $f(x) = -\dfrac{1}{x^4}$ и $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x) = f(-2) = -\dfrac{1}{16}$. При $b \neq 0$ уравнение $2bx^2 - x^4 - 3b^2 = 0$ не имеет корней, а значит функция $f(x) = \dfrac{1}{2bx^2 - x^4 - 3b^2}$ непрерывна и достигает своего наибольшего значения на отрезке $[-2; 1]$. Имеем $f'(x) = \dfrac{4x^3 - 4xb}{(2bx^2 - x^4 - 3b^2)^2}$.

Рассмотрим два случая.

1). $b < 0$. В этом случае при $x \in (-\infty; 0]$ функция $f(x)$ убывает, а при $x \in [0; \infty)$ возрастает. Тогда, учитывая четность функции $f$, несложно понять, что $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x) = f(-2) = \dfrac{1}{8b - 16 - 3b^2}$.

2). $b > 0$. Здесь $x = 0$ — точка максимума, $x = \sqrt{b}$ и $x = -\sqrt{b}$ — точки минимума функции $f$. Остается из трех значений $f(0)$,

$f(-2)$ и $f(1)$ выбрать наибольшее. **IV.77.** $\frac{1-a^2}{3}$ при всех значениях $a$. **IV.78.** $a=9$. **IV.79.** $c<-17$ или $c>15$. **IV.80.** $b=\frac{7}{47}$. **IV.86.** Если $a<-\frac{16\sqrt{5}}{125}$ или $a>\frac{16\sqrt{5}}{125}$, то один корень: если $a=\pm\frac{16\sqrt{5}}{125}$, то два корня; если $-\frac{16\sqrt{5}}{125}<a<\frac{16\sqrt{5}}{125}$, то три корня. **IV.87.** $a<-3$. **IV.88.** $0<a<\frac{4}{e^2}$. **IV.89.** Если $a<-\frac{3}{4}$ или $a>\frac{3}{4}$, то одно решение; если $-\frac{3}{4}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}$, то два решения. **IV.90.** $x_0=3$. **IV.91.** $\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\leqslant a<\frac{19\sqrt{19}-28}{108}$. **IV.92.** $a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ или $a>1$. **IV.93.** $a<-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ или $a>2$. **IV.94.** $a\geqslant\frac{3}{4}$. **IV.95.** $a=\frac{(\sqrt[3]{5}-1)^3}{2}$. **IV.105.** Таких $a$ не существует. **IV.106.** $b=0$ или $b=\operatorname{tg}1$. **IV.107.** $q=|p|$. **IV.108.** $a=2$. **IV.110.** $a=-3$ или $a=-2$. **IV.111.** $a=\frac{4}{3}$. **IV.112.** $a=-1$ или $a=\frac{4}{3}$. **IV.113.** $a=0$, $0<b\leqslant 1$. **IV.114.** $a=-2$, $b=-2$. **IV.115.** $a=-3$ или $-2<a<2$. **IV.116.** Центр вписанной окружности имеет координаты $\left(-\frac{1}{4};0\right)$. **IV.117.** $a=1$ или $a=4$. **IV.119.** $a=-2$. **IV.120.** $a=-\frac{1}{4}$. **IV.121.** $a=-\frac{9}{4}$. **IV.122.** $p=2$. **IV.131.** $m=3$ или $m=4$. **IV.132.** $a=-7$ или $0\leqslant a\leqslant 7$. **IV.133.** $a=3$. **IV.134.** $a=-9$, или $a=-5$, или $-4\leqslant a\leqslant 1$. **IV.135.** $0\leqslant a\leqslant 3$, или $a=5$, или $a=6$. **IV.136.** $0\leqslant a\leqslant 1$, или $a=3$, или $a=4$, или $a>5$. **IV.137.** $a=-1$, или $a=0$. **IV.138.** $a=-4$. **IV.139.** $a=1$. **IV.140.** $a=-8$, $b=-1$. **IV.141.** $a=-6$, $b=7$. **IV.142.** $x=1$. **IV.143.** $x=5$. **IV.144.** $a=0$, $b=0$ или $a=1$, $b=0$. *Указание.* Подставив в данное равенство «выгодную» точку $x=0$, получаем $\cos b^2=b^2+1$. Отсюда $b=0$. При $b=0$ данное в условии равенство становится таким: $a(\cos x-1)=\cos ax-1$. Теперь потребовать выполнения последнего равенства при $x=2\pi$ представляется естественным. Имеем $\cos 2\pi a=1$; $a=k$, где $k\in Z$. Круг поиска нужных значений $a$ сжался до множества целых чисел. Испытаем еще одну (третью!) пробную точку. При $x = \frac{\pi}{2}$ имеем $\cos\frac{\pi a}{2} = 1 - a$. Теперь с учетом $a \in Z$ получаем для $a$ лишь три возможности: $a = 0$, или $a = 1$, или $a = 2$. Остается из трех пар $(a; b)$: $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(2; 0)$ выбрать подходящие.

**IV.145.** $a = 1$, $b = 0$. **IV.146.** $-2 \leqslant x < 0$ или $x = 2$. **IV.147.** $a = 1$. **IV.148.** $b = \frac{1}{2}$ или $b = 1$. **IV.149.** $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. **IV.158.** Если $a = 2$, то $x = 1$, $y = -2$; если $a \neq 2$, то решений нет. **IV.159.** Если $a = -1$, то $x = 1$, $y = 1$; если $a \neq -1$, то решений нет. **IV.160.** Если $a = 1$, то $x = 0$; если $a \neq 1$, то решений нет. *Указание.* В область определения данного уравнения входят лишь те $a$, которые удовлетворяют системе $\begin{cases} a^2 + 2a - 3 \geqslant 0, \\ 1 - 2a + 2a^2 - a^3 \geqslant 0. \end{cases}$ Отсюда $a = 1$. **IV.161.** $a = \log_4\frac{8 \pm \sqrt{55}}{6}$ или $a = \log_4\frac{16 \pm \sqrt{31}}{30}$. **IV.162.** $0 \leqslant a < \log_2 3$. *Указание.* Существуют лишь два целых числа, входящие в область определения данного уравнения — $x = 102$ и $x = 104$. Тогда искомые $a$ — решения совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 2 - \log_{1/2}\frac{1}{3} + \log_2\frac{3}{2} > a, \\ \log_2 4 - \log_{1/2} 3 + \log_2\frac{1}{4} \leqslant a, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \log_2 2 - \log_{1/2}\frac{1}{3} + \log_2\frac{3}{2} \leqslant a, \\ \log_2 4 - \log_{1/2} 3 + \log_2\frac{1}{4} > a. \end{cases} \end{array}\right.$$

**IV.163.** $-\log_2 6 < a < -1$. **IV.164.** $a = -1$. *Указание.* Построив график функции $y = |x + a^2| + |x + 1|$, несложно понять, что для выполнения условия задачи необходимо $a^2 = 1$. Достаточным условием является равенство нулю правой части уравнения. **IV.165.** $a = 0$ или $a = 1$. **IV.166.** $b = \frac{1}{2}$. *Указание.* Для существования $x$ и $y$, удовлетворяющих уравнениям системы, необходимо, чтобы уравнение $t^2 - (2b + 1)t + 4b^2 + 2b - 1 = 0$ имело решение.

Потребовав $D \geqslant 0$, получаем $-\frac{5}{6} \leqslant b \leqslant \frac{1}{2}$. Из уравнений системы имеем $x^2 + 9y^2 = -4b^2 + 3$. Подставляя это значение в неравенство, получаем $-4b^2 + 3 \leqslant -4b^2 + 2b + 2$. Отсюда $b \geqslant \frac{1}{2}$. Осталось убедится, что при $b = \frac{1}{2}$ система имеет решение. **IV.167.** $a = 2\pi - 8$, или $a = 2\pi - 1$, или $a = 2\pi$. **IV.168.** $-\frac{13}{3} < a \leqslant -\frac{19}{5}$.

**IV.169.** $d = 1$, или $d = -1$, или $d = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. *Указание.* На рисунке 133 изображен график функции $y = \cos x$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ясно, что для выполнения условия задачи необходимо, чтобы один из корней уравнения $t^2 - (d+1)^2 t - (d+1)(d+2)(d-1) = 0$ (*) был равен 0, 1 или $-1$.

Рассмотрим случай, когда один из корней указанного квадратного уравнения равен нулю. Тогда для $d$ есть три возможности.

1). $d = -1$. Имеем $\cos^2 x = 0$. Очевидно это уравнение обладает нужным свойством.

2). $d = -2$. Тогда $\cos^2 x - \cos x = 0$. Легко убедиться, что это уравнение на указанном отрезке имеет четыре корня.

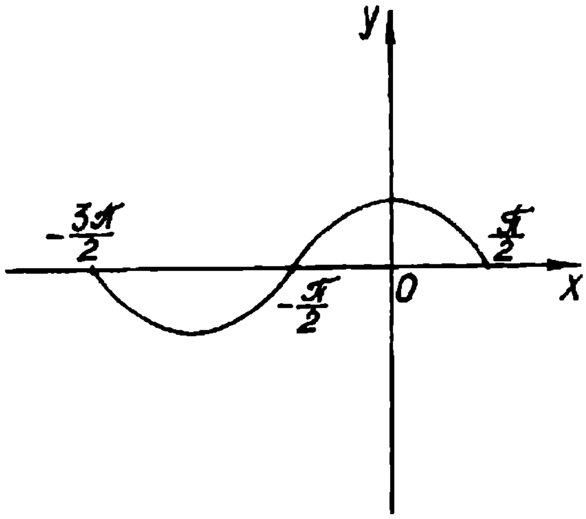



Рис. 133

3). $d = 1$.Здесь уравнение $\cos^2 x - 4\cos x = 0$ равносильно уравнению $\cos x = 0$, и $d = 1$ следует включить в ответ.

Найдем $d$, при которых один корней уравнения (*) равен 1. Имеем $1 - (d+1)^2 - (d+1)(d+2)(d-1) = 0$. Отсюда $\left[\begin{array}{l} d = -2, \\ d = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$ Отметим, что здесь есть возможность избежать неприятной проверки найденных значений параметра, воспользовавшись теоремой Виета.

Действительно, если 1 и $t_2$ — корни уравнения (*), то $1 + t_2 = (d + 1)^2$ или $t_2 = d^2 + 2d$. Очевидно условие задачи будет выполнено, если $|t_2| < 1$ и $t_2 \neq 0$. Несложно убедиться, что подходит только $d = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. Если $-1$ и $t_2$ корни уравнения (*), то $t_2 = (d + 1)^2 + 1 \geq 1$, и нужных $d$ очевидно не существует. **IV.170.** $a = 0$, или $a = 2$, или $a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. **IV.171.** $a < -1$. *Указание.* Перепишем данную систему в виде

$$\begin{cases} -x^2 - 2xy + 7y^2 \leq \dfrac{a-1}{a+1}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2. \end{cases}$$

Теперь, умножая первое неравенство на 2 и складывая его со вторым, получаем неравенство-следствие $x^2 + 6xy + 9y^2 \leq$ $\leq -\frac{4}{a+1}$. Итак, для того, чтобы исходная система имела решения, необходимо $a < -1$. Покажем, что это условие является достаточным.

Действительно, так как $-1 > \frac{1-a}{1+a}$ при $a < -1$, то решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 = -1, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 = -2 \end{cases}$$

при таких значениях $a$ будут также решениями исходной системы неравенств. Осталось убедиться, что полученная система уравнений имеет решения. **IV.172.** $a = 99$. **IV.173.** $a = 100$. **IV.174.** $p = 1$, $-1 \leq m < -\frac{1}{2}$, или $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$, или $\frac{1}{2} < m \leq 1$, или $m = k$, $k \in Z$, $k \neq -1, 0, 1$; $p = 3$, $-1 \leq m < -\frac{1}{2}$, или $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$, или $\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}$, или $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$, или $\frac{5}{2} < m \leq 3$, или $m = k$, $k \in Z$, $k \neq -1, 0, 1, 2, 3$; $p = 5$, $-1 \leq m < -\frac{1}{2}$, или $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$, или $\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}$, или $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$, или $\frac{5}{2} < m < \frac{7}{2}$, или $\frac{7}{2} < m < \frac{9}{2}$, или $\frac{9}{2} < m \leq 5$, или $m = k$, $k \in Z$, $k \neq -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$. **IV.175.** $a = 1$.

## Список условных обозначений и принятых сокращений

$N$ — множество натуральных чисел
$Z$ — множество целых чисел
$Q$ — множество рациональных чисел
$R$ — множество действительных чисел
БГУ — Белорусский государственный университет
ВГУ — Воронежский государственный университет
ГГУ — Горьковский государственный университет
ДГУ — Днепропетровский государственный университет
ДПИ — Донецкий политехнический институт
КГПИ — Киевский государственный педагогический институт
КГУ — Киевский государственный университет
КПИ — Киевский политехнический институт
ЛГУ — Ленинградский государственный университет
ЛПИ — Ленинградский политехнический институт
ЛТИ — Ленинградский технологический институт
ЛЭТИ — Ленинградский электротехнический институт
МАИ — Московский авиационный институт
МАТИ — Московский авиационный технологический институт
МВТУ — Московское высшее техническое училище
МГИ — Московский горный институт
МГТУ — Московский государственный технический университет
МГУ — Московский государственный университет
МИИГАиК — Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии
МИИТ — Московский институт инженеров транспорта
МИНГП — Московский институт нефтехимической и газовой промышленности
МИРЭиА — Московский институт радиотехники, электроники и автоматики
МИСиС — Московский институт стали и сплавов
МИТХТ — Московский институт тонкой химической технологии
МИФИ — Московский инженернофизический институт
МЭСИ — Московский экономико-статистический институт
НГУ — Новосибирский государственный университет
РПИ — Рижский политехнический институт
СГУ — Саратовский государственный университет

## Список использованной и рекомендуемой литературы


1. *Вишенський В. О., Перестюк М. О., Самойленко А. М.* Задачі з математики. К.: Вища шк., 1985. — 264 с.

2. *Габович И. Г., Горнштейн П. И.* Сколько корней имеет уравнение? // Квант. — 1985. — № 3. — С. 43-46.

3. *Говоров В. М., Дыбов П. Т., Мирошин Н. В., Смирнова С. Ф.* Сборник конкурсных задач по математике (с методическими указаниями и решениями): Учеб. пособие. — 2-е изд. — М.: Наука, 1986. — 384 с.

4. *Голубев В. И., Гольдман А. М., Дорофеев Г. В.* О параметрах — с самого начала // Репетитор. — 1991. — № 2. — С. 3-13.

5. *Голубев В. И.* Абсолютная величина числа в конкурсных экзаменах по математике. — Львов, 1991. — 96 с. — (Квантор; № 8).

6. *Горделадзе Ш. Х., Кухарчук М. М., Яремчук Ф. П.* Збірник конкурсних задач з математики: Навч. посібник. — 3-є вид., — К.: Вища шк., 1988. — 328 с.

7. *Горнштейн П. И.* Тригонометрия помогает алгебре // Квант. — 1989. — № 5. — С. 68-70.

8. *Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С.* // Необходимые условия в задачах с параметрами // Там же — 1991. № 11. — С. 44-49.

9. *Дорофеев Г. В.* О задачах с параметрами, предлагаемых на вступительных экзаменах в вузы // Математика в школе. — 1983. — № 4. — С. 36-40.

10. *Дорофеев Г. В.* Квадратный трехчлен в задачах. — Львов, 1991. — 103 с. — (Квантор; № 2).

11. *Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х.* Пособие по математике для поступающих в вузы. — М.: Наука, 1976. — 638 с.

12. *Дорофеев Г. В.* Как расположены корни трехчленов? // Квант. — 1986. — № 7. — С. 45-49.

13. *Дорофеев Г. В.* Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными // Там же. — 1973. — № 9. — С. 63-67.

14. *Дорофеев Г. В., Затакавай В. В.* Решение задач, содержащих параметры. — М.: Науч.-пед. об-ние «Перспектива», 1990. — Ч. 2. — 38 с.

15. *Марков В. К.* Метод координат и задачи с параметрами. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970. — 146 с.

16. *Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К.* Задачи вступительных экзаменов по математике. — М.: Наука, 1986. — 512 с.

17. *Планирование* учебного материала для IX класса с углубленным изучением математики: (Метод. рекомендации) / Сост.: Галицкий М. Г., Гольдман А. М., Звавич Л. И. — М.: Б. И., 1990. — 172 с.

18. *Пятьсот* четырнадцать задач с параметрами // Под ред. Тынянкина С. А. — Волгоград: Б. И., 1991. — 160 с.

19. *Сборник* задач по математике для поступающих в вузы: Учеб. пособие / Дыбов П. Т., Забоев А. И., Иванов А. С., Калиниченко Д. Ф., Шолохов Н. В.; Под ред. Прилепко А. И. — М.: Высш. шк., 1983. — 239 с.

20. *Цыпкин А. Г., Пинский А. И.* Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. — 2-е изд. перераб. и доп. — М.: Наука, 1989. — 576 с.

21. *Шарыгин И. Ф.* Факультативный курс по математике. Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк. — М.: Просвещение, 1989. — 252 с.

22. *Шарыгин И. Ф., Голубев В. И.* Факультативный курс по математике. Решение задач: Учеб. пособие для 11 кл. сред. шк. — М.: Просвещение, 1991. — 384 с.

23. *Ястребинецкий Г. А.* Задачи с параметрами. — М.: Просвещение, 1986. — 128 с.

Учебное издание

**Горнштейн Павел Исидорович,**
**Полонский Виталий Борисович,**
**Якир Михаил Семенович**

**ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ**

Художник *Курдюмов М. Л.*

ИД № 03253 от 15.11.2000. Подписано в печать 02.02.2005.
Печать офсетная. Формат 84×108/32.
Тираж 10 000 экз. Заказ 2805.

ООО «Илекса», 105187, г. Москва, Измайловское ш., 48-а.
Заказы по телефону: в Москве (095) 365-30-55.

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г. Чехов Московской области
Тел. (272) 71-336. Факс (272) 62-536

# ЗАДАЧИ

## С ПАРАМЕТРАМИ