Старков В.Н.
“165 задач с параметрами”

Содержание

При математическом моделировании различных процессов часто возникают задачи с параметрами (уравнения или неравенства, системы уравнений и неравенств, построение семейства кривых).

В курсе элементарной математики уравнения и неравенства с параметрами являются, пожалуй, самыми сложными задачами. Однако такие задачи включаются в письменный экзамен по математике многими вузами (см. литературу).

Данное методическое пособие, надеемся, послужит приобретению дополнительного опыта в решении этих важных для абитуриентов и школьников задач.

Если в выражении с двумя неизвестными $F(x,a)=0$ (или $F(x,a)>0$) переменной a придавать какое-либо фиксированное значение, то это уравнение (или неравенство) можно рассматривать как задачу с одной переменной x. Множеством решения такой задачи является множество пар чисел x,a, при подстановке которых в исходное выражение получается верное равенство (или верное неравенство). Аргументы x и a считаются неравноправными, так как при решении задач обычно стараются найти x, выраженное через a. Далее необходимо выяснить зависимость решений от значений параметра a, что является важной частью решения задачи. Иногда ее называют исследованием и отделяют от непосредственного решения.

Ниже разобраны различные задачи с параметрами, предложены задачи для самостоятельного решения, для всех задач даны ответы и указания.

1. Линейные уравнения и приводимые к ним уравнения с параметрами

Решение линейных уравнений состоит в непосредственном нахождении x через параметр a с дальнейшим анализом этого решения. Исследуются все значения a, отвечающие исходному уравнению и дающие действительные значения переменной x.

1. Решить уравнение: $2a(a-2)x = a-2$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(a-2)(2ax-1)=0$. Видим, что при $a=2$ переменная x может принимать любые значения. Значение $a=0$ приводит к уравнению $0\cdot x=-2$. Оно не имеет решений. Если $a\neq 0$ и $a\neq 2$, то из уравнения получается $x=\dfrac{1}{2a}$.

Ответ: если $a=0$, то корней нет, если $a=2$, то $x\in R$, если $a\neq 0$, $a\neq 2$, то $x=\dfrac{1}{2a}$.

2. При каком p уравнение $px=x+1$ не имеет решений?

Ответ: $p=1$.

3. Решить уравнение $(a^2-2a+1)x=a^2+2a-3$.

Ответ: если $a=1$, то $x\in R$, если $a\neq 1$, то $x=\dfrac{a+3}{a-1}$.

Указание. Перенеся все в левую часть и разложив квадратичные выражения на множители, получим произведение $(a-1)((a-1)x-(a-3))=0$, которое и дает решения.

4. Решить уравнение $\frac{a+2}{x-2}=a-1$.

Ответ: при $a=1$, $a=-2$ решений нет, при $a\neq 1$, $a\neq -2$ (из условия $x\neq 2$) $x=\frac{3a}{a-1}$.

Указание. Получив вид x через a, надо исключить некоторые значения параметра a, отвечающие условию $x\neq 2$ (знаменатель не равен нулю).

5. Решить уравнение $\frac{a+3}{a+2}=\frac{2}{x}-\frac{5}{x(a+2)}$.

Ответ: при $a=-3$, $a=\frac{1}{2}$, $a=-2$ решений нет, при $a\neq -3$, $a\neq\frac{1}{2}$ (так как $x\neq 0$), $a\neq -2$ $x=\frac{2a-1}{a+3}$.

6. Решить уравнение $1+\frac{1}{ax}=\frac{1}{x}-\frac{3}{a}$.

Ответ: при $a=-3$, $a=1$, $a=0$ решений нет, при $a\neq -3$, $a\neq 1$, $a\neq 0$ $x=\frac{a-1}{a+3}$.

7. Решить уравнение $\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{b}$.

Ответ: при $a=-b$, $b=0$ решений нет, при $a+b\neq 0$, $b\neq 0$ $x=\frac{a-b}{a+b}$.

8. Решить уравнение $\frac{1}{x}=\frac{b}{a-x}$.

Ответ: при $b\neq -1$, $a=0$ решений нет, при $b\neq -1$, $a\neq 0$ $x=\frac{a}{b+1}$, при $b=-1$, $a=0$ $x\in R\setminus\{0\}$.

9. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x-1}{6}+\frac{x}{a}+\frac{3(x+1)}{2a^2}=0$ имеет корень, больший 2?

Ответ: $a\in(-9,-3]$.

10. Решить уравнение $(a+2)x=a^2-4$.

Ответ: $x\in R$ при $a=-2$, $x=a-2$ при $a\in R$.

2. Квадратичные и сводимые к ним уравнения с параметрами

При решении таких уравнений используются известные формулы для корней квадратного уравнения, теорема Виета и условия существования действительных решений–знак дискриминанта.

11. При каких значениях параметра a уравнение $(2a+1)x^2-ax+a-2=0$ имеет два вещественных корня, из которых один больше единицы, а другой меньше единицы?

Решение. Обозначим $f(x)$ квадратный трехчлен левой части уравнения. Если $2a+1>0$, то для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы $f(1)<0$, что дает $2a-1<0$ (ветви параболы направлены вверх, 1 лежит между корнями x_1 и x_2, где график имеет точки с отрицательными ординатами). Окончательно следует решить совместно систему $\begin{cases}2a+1>0\\2a-1<0\end{cases}$, которая определяет промежуток $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$. Если же $2a+1<0$ (ветви направлены вниз), то для выполнения условия задачи нужно потребовать $f(1)>0$ (часть графика между корнями лежат выше оси абсцисс). Это дает систему $\begin{cases}2a+1<0\\2a-1>0\end{cases}$, которая не имеет решения. В случае $2a+1=0$ условие задачи также не выполнено.

Ответ: $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$.

12. Решить уравнения $ax^2+2(a+1)x+2a=0$.

Решение. Прежде всего, рассмотрим случай $a=0$. Это уже не квадратное уравнение, оно приобретает вид: $2x=0$, то есть $x=0$. Пусть теперь $a\neq 0$. Существование и число корней квадратного уравнения зависят от его дискриминанта. В нашем случае $D=(a+1)^2-2a^2=-a^2+2a+1$. Уравнение $D=0$ имеет корни: $a=1-\sqrt{2}$ и $a=1+\sqrt{2}$. Графиком $D(a)=-a^2+2a+1$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Когда $D<0$, то есть $a<1-\sqrt{2}$ или $a>1+\sqrt{2}$, то уравнение решений не имеет. Когда $D=0$, то при $a=1-\sqrt{2}$ и при $a=1+\sqrt{2}$ исходное уравнение имеет один корень $x=-\frac{a+1}{a}$. При $a=1+\sqrt{2}$ получаем $x=-\sqrt{2}$, при $a=1+\sqrt{2}$ получаем $x=\sqrt{2}$. Когда $D>0$, то есть $a\in(1-\sqrt{2},0)\cup(0,1+\sqrt{2})$ уравнение имеет два корня $x=\frac{-(a+1)\pm\sqrt{D}}{a}$.

Ответ: при $a\in(-\infty,1-\sqrt{2})$ корней нет, при $a=1+\sqrt{2}$ $x=\sqrt{2}$, при $a\in(1-\sqrt{2},0)$ $x=\frac{-(a+1)+\sqrt{-a^2+2a+1}}{a}$, $x=\frac{-(a+1)-\sqrt{-a^2+2a+1}}{a}$, при $a=0$ $x=0$, при $a\in(0,1+\sqrt{2})$ $x=\frac{-(a+1)+\sqrt{-a^2+2a+1}}{a}$, $x=\frac{-(a+1)-\sqrt{-a^2+2a+1}}{a}$, при $a=1+\sqrt{2}$ $x=-\sqrt{2}$, при $a\in(1+\sqrt{2},+\infty)$ корней нет.

Замечание. Ответ следует выписывать, перечисляя все значения параметра a в порядке возрастания.

13. При каких значениях $b>0$ корни уравнения $x^2+bx-2=0$, если их уменьшить на единицу, становятся корнями уравнения $x^2+b^2x+b-1=0$?

Ответ: $b=2$.

14. Найти наименьшее целое a, при котором уравнение $(a+1)x^2-(2a-3)x+a=0$ не имеет корней.

Ответ: $a=1$.

Указание. Параметр a находится из условия отрицательности дискриминанта уравнения $D=(2a-3)^2-4a(a+1)<0$. После упрощения и решения этого неравенства выберем наименьшее целое a.

15. Сумма квадратов корней уравнения $x^2-3ax+a^2=0$ равна 63. Найти a.

Ответ: $a=\pm 3$.

Указание. Для нахождения суммы квадратов корней уравнения $x_1^2+x_2^2$ надо воспользоваться теоремой Виета $\begin{cases} x_1+x_2=3a \\ x_1x_2=a^2 \end{cases}$. Так как $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=63$, то получим $9a^2-2a^2=63$ и $a^2=9$.

16. Уравнение $x^3-ax^2+bx-c=0$ имеет три различных корня $a, 2b, 3c$. Найдите их.

Ответ: $a=-\frac{2}{3}$, $2b=-\frac{1}{2}$, $3c=\frac{1}{2}$.

Указание. Подставив каждый корень в уравнение, получим систему для нахождения a, b, c.

17. При каком значении a уравнение $(2x-5)(1-x)=a$ имеет единственный корень?

Ответ: $a=1{,}125$.

18. При каких значениях k корни уравнения $x^2-(2k+1)x+k^2=0$ относятся как 1:4?

Ответ: $k=2$.

Указание. Найдя x_1 и x_2, необходимо рассмотреть два случая: $\frac{x_1}{x_2}=\frac{1}{4}$ и $\frac{x_2}{x_1}=\frac{1}{4}$.

19. Найти сумму кубов корней уравнения $x^2+px+q=0$, не решая его.

Ответ: $3pq-p^3$.

Указание. Воспользоваться теоремой Виета $\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1x_2=q \end{cases}$ и формулой $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$.

20. Решить уравнение $\frac{1}{2n+nx}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{2(n+3)}{x^3-4x}$.

Ответ: $x=n+2$, $x=-2n$ при $n\neq\{-4,-2,-1,0,1\}$.

Указание. После переноса и сложения дробей получим дробное выражение, числитель которого равен нулю. Найдя x, выраженное через n, потребуем, чтобы знаменатели не равнялись нулю. Отсюда найдем ограничения для n.

21. При каких значениях параметра a уравнение $4x^2-6ax+3=0$ не имеет действительных корней?

Ответ: $a\in\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

22. Найти все значения k, при которых один корень уравнения $(k+1)x^2+2(3k+5)x+5(2k+5)=0$ меньше -3, а другой –больше 1?

Ответ: $k\in\left(-\frac{36}{17},-1\right)$.

Указание. Числа -3 и 1 лежат между корнями уравнения. Если левую часть исходного уравнения рассматривать как функцию $f(x)$, то оба значения $f(-3)$ и $f(1)$ будут или положительными, или отрицательными в зависимости от знака коэффициента $k+1$ при x^2. Решение задачи получится из решения системы $\begin{cases} k+1<0 \\ f(-3)>0 \\ f(1)>0 \end{cases}$

23. Определить a так, чтобы один из корней уравнения $x^2-\frac{15}{4}x+a=0$ был квадратом другого.

Ответ: $-15{,}625$ или $3{,}375$.

24. При каких p $x_1^3+x_2^3=65$, если x_1 и x_2 –корни уравнения $x^2+p=5x$.

Ответ: 1.

25. При каком значения k корни уравнения $x^4+(3k-5)x^2+(k+1)^2=0$ составляют арифметическую прогрессию?

Ответ: $k=\frac{5}{19}$ или $k=-25$.

26. При каких значениях параметра a отношение корней уравнения $x^2+ax+a+2=0$ равно 2?

Ответ: $a=6$ или $a=-\frac{3}{2}$.

Указание. Рассмотреть два случая $\frac{x_1}{x_2}=2$ и $\frac{x_2}{x_1}=2$.

27. Решить уравнение $(a+1)x^2-(a-1)x-2a=0$.

Ответ: при $a=-1$ $x=-1$, при $a\neq-1$ $x=-1$ или $x=\frac{2a}{a+1}$.

28. Решить уравнение $x^2-4ax+3a^2=0$.

Ответ: при $a=0$ $x=0$, при $a\neq 0$ $x=a$ или $x=3a$.

29. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $x^2-6ax+2-2a+9a^2=0$ больше 3?

Ответ: $a>\frac{11}{9}$.

30. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $x^2-ax+2=0$ принадлежат отрезку [0, 3]?

Ответ: $2\sqrt{2}\le a\le\frac{11}{3}$.

31. В уравнении $x^2-2x+a=0$ определить то значение a, при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию $7x_2-4x_1=47$.

Ответ: $a=-15$.

32. При каком значении a уравнения $x^2+ax+8=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют общий корень?

Ответ: $a=-6$.

33. Решить уравнение $\dfrac{5a}{y+a}+\dfrac{4a}{y+2a}+\dfrac{3a}{y+3a}=8$.

Ответ: $y=0$, $y=\dfrac{a}{4}\left(-9\pm\sqrt{5}\right)$, $a\neq 0$.

34. Решить уравнение $ax^2=a^2$.

Ответ: $x=\pm\sqrt{a}$ при $a>0$, $x\in R$ при $a=0$, нет решений при $a<0$.

35. Решить уравнение $(x^2-a^2)^2=4ax+1$.

Ответ: $x=a\pm 1$ при любом a.

36. Решить уравнение $(k-5)x^2+3kx-(k-5)=0$.

Ответ: при $k\neq 5$ $x=\dfrac{-3k\pm\sqrt{13k^2-40k+100}}{2(k-5)}$, при $k=5$ $x=0$.

37. Решить уравнение $a^2+\dfrac{a^2-b^2}{x^2-2x}=\dfrac{b^2(x+2)}{x-2}$.

Ответ: $x=\dfrac{a+b}{a-b}$ или $x=\dfrac{a-b}{a+b}$ при $a^2\neq b^2$ и $a^2\neq 9b^2$.

38. Решить уравнение $\dfrac{2a+b}{a+x}-\dfrac{2a-b}{a-x}=\dfrac{2a}{b}$.

Ответ: $x=b-a$ или $x=b+a$ при $a\neq 0$ и $b^2\neq 4a^2$, $x\in R$ при $a=0$, $x=3a$ при $b=2a\neq 0$, $x=-3a$ при $b=-2a\neq 0$.

39. Решить уравнение $\dfrac{(a-x)^4+(x-b)^4}{(a+b-2x)^2}=\dfrac{a^4+b^4}{(a+b)^2}$.

Ответ: $x=0$, $x=a+b$, $x=\dfrac{2ab}{a+b}$, $x=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$ при $a\neq\pm b$.

40. В каком промежутке должен изменяться параметр m, чтобы оба корня уравнения $x^2-2mx+m^2-1=0$ были заключены между -2 и 4?

Решение. Корни уравнения $x=m\pm\sqrt{m^2-m^2+1}=m\pm 1$. По условию имеем $\begin{cases}-2<m+1<4\\-2<m-1<4\end{cases}$ или $\begin{cases}-3<m<3\\-1<m<5\end{cases}$.

Ответ: $-1<m<3$.

41. В уравнении $2x^2-ax+1=0$ определить a таким образом, чтобы корни уравнения были действительными числами, а сумма квадратов корней равнялась $2a$.

Ответ: $a=2(2+\sqrt{5})$.

42. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2+2ax+4=0$ имеет два одинаковых корня.

Ответ: $a=0, a=4$.

43. Решить уравнение $x^2+2x-8=a$.

Ответ: $x=-1\pm\sqrt{a+9}$ при $a\geq -9$.

44. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2-3x+2a+3=0$ удовлетворяют условию $5x_1+3x_2=23$.

Ответ: $a=-\dfrac{31}{2}$.

45. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2+2x+4a=0$ имеет единственное решение.

Ответ: $a=\pm\dfrac{1}{2}$.

46. При каких значениях параметра a уравнение $(a+5)x^2+(2a-3)x+(a-10)=0$ имеет корни одного знака?

Ответ: $a \in \left[-\frac{209}{8},-5\right) \cup (10,+\infty)$.

47. Решить уравнение $x\sqrt{x}-2x+a^2-a=\sqrt{x}(a^2-a-1)$.

Ответ: $x=1$ при любом a, $x=a^2$ или $x=(1-a)^2$ при $0 \le a \le 1$, при $a<0$ или $a>1$ решений нет.

Указание. Группировка $(x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x})+(a^2-a)(1-\sqrt{x})=0$ дает $(1-\sqrt{x})[\sqrt{x}(1-\sqrt{x})+a^2-a]=0$.

48. Определить коэффициенты p и q из условия, что многочлен $6x^4-7x^3+px^2+3x+2$ делится без остатка на x^2-x+q.

Ответ: $q=-2, p=-12$ либо $q=-1, p=-7$.

49. Найти целые значения p, при которых уравнение $x^2+px-3p=0$ имеет целые корни.

Ответ: уравнение будет иметь целые корни при $p=-16$ или при $p=-12$.

50. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2+px+12=0$ обладают свойством $x_2-x_1=1$. Найти p.
Ответ: –7 или 7.

3. Уравнения с параметрами, содержащие модуль

При решении таких уравнений используются правила раскрытия модуля $|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \ge 0 \\ -f(x), \text{ если } f(x) \le 0 \end{cases}$.

51. Сколько корней в зависимости от параметра a имеет уравнение $x^2+5(x+1)+3|x-a|+a=0$?

Решение. Изобразим на плоскости (x,a) все точки, удовлетворяющие данному уравнению. Если $x \ge a$, то $a=\frac{1}{2}(x^2+8x+5)$ (1), если $x<a$, то $a=-\frac{1}{4}(x^2+2x+5)$ (2). Точки пересечения парабол найдем из решения системы $\begin{cases} a=\frac{1}{2}(x^2+8x+5) \\ a=-\frac{1}{4}(x^2+2x+5) \end{cases}$. Они таковы: А $A(-5,-5), B(-1,-1)$ и они лежат на прямой $a=x$ (см. рис.1).

Ответ: при $a=-1$ или $a=-\frac{11}{2}$ единственное решение, при $-\frac{11}{2}<a<-1$ два решения (горизонтальная прямая, соответствующая этим значениям параметра, пересекает наш график дважды), при $a<-\frac{11}{2}$ или $a>-1$ нет решений.

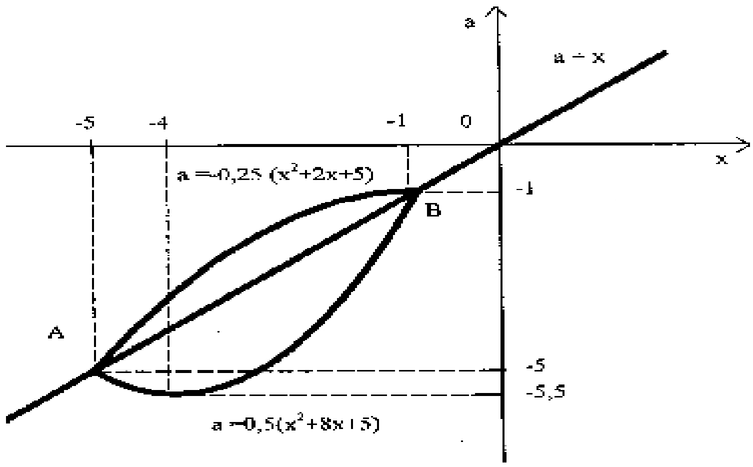

Рис. 1 (к задаче № 51)

52. Решить уравнение $x^2 = 2|x-a| - 2|x-2|$.

Ответ: при $a \le 0$ $x = 2 - \sqrt{-2a}$, $x = \sqrt{-2a+1}$, при $0 < a < 2$ решений нет, при $2 \le a \le 4$ $x = \pm\sqrt{2a-4}$, при $a \ge 4$ $x = -\sqrt{2a-4}$ $x = -2 + \sqrt{8+2a}$.

53. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + x + a - 1 = 0$ имеет два различных действительных корня x_1 и x_2, удовлетворяющих неравенству $\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| > 1$?

Ответ: $a \in (0,1) \cup \left(1, \frac{6}{5}\right)$.

54. Решить уравнение $(4a-15)x^2 + 2a|x| + 4 = 0$.

Ответ: $x = \pm\frac{a + \sqrt{a^2 - 18a + 60}}{15 - 4a}$ при $a < \frac{15}{4}$, решений нет при $a \ge \frac{15}{4}$.

55. При каких a уравнение $x^2 - 2|x| = a$ имеет 4 корня ?

Ответ: $a \in (-1,0)$.

Указание. Построим график функции $y = x^2 - 2|x|$ и исследуем все возможности пересечения его с горизонталью $y = a$.

56. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x - \frac{a}{2} = 2\left|\,2|x| - a^2\right|$ имеет три различных корня.

Ответ: при $a = -1$ $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{10}$, $x_3 = \frac{5}{6}$, при $a = -\frac{1}{4}$ $x_1 = -\frac{1}{20}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{12}$.

57. Решить уравнение $|x-a| + |x+a+1| = 3$.

Ответ: если $a = 1$ или $a = -2$, то $-2 \le x \le 1$, если $-2 \le a \le 1$, то $x = -2$ или $x = 1$.

58. Решить уравнение $x|x+1| = a$.

Решение. Построим графики $a(x)$ для $x \le -1$ и для $x \ge -1$. Затем найдем неизвестное x из уравнений $x^2 + x - a = 0$ и $x^2 + x + a = 0$. Передвигаясь по оси Oa вверх, фиксируя $a = const$, выписываем значения x в виде ветвей парабол (см. рис.2).

Ответ: если $a>0$, то $x=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+4a}\right)$, если $a=0$, то $x=0$ или $x=-1$, если $-\frac{1}{4}\le a<0$, то $x=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{1+4a}\right)$, $x=\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{1-4a}\right)$, если $a<-\frac{1}{4}$, то $x=\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{1-4a}\right)$.

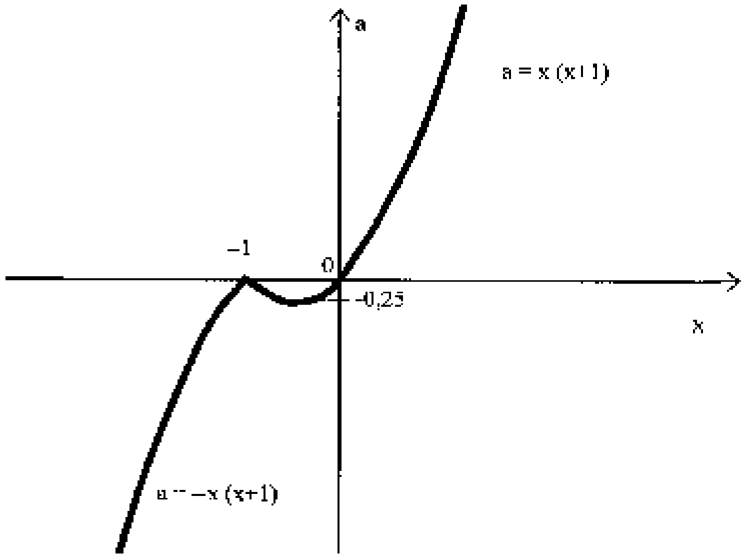

Рис.2 (к задаче №58)

4. Системы уравнений с параметрами

При решении систем уравнений с параметрами используются все известные способы решения систем уравнений: подстановка, преобразование уравнений и т. п.

59. Решить систему уравнений $\begin{cases}5x+my=2m+1\\(m+1)x+4y=9\end{cases}$ при всех значениях параметра m.

Ответ: решений нет, если $m=-5$, бесконечное множество решений, если $m=4$.

60. При каких m система $\begin{cases}2x+(m-1)y=3\\(m+1)x+4y=-3\end{cases}$ не имеет решений?

Ответ: 3.

61. Сколько действительных решений имеет система $\begin{cases}|x|+|y|=1\\x^2+y^2=a\end{cases}$

Ответ: нет решений при $0\le a\le\frac{1}{2}$ или при $a>1$, четыре решения при $a=\frac{1}{2}$, $a=1$, восемь решений при $\frac{1}{2}<a<1$.

Указание. Задача решается графически. Геометрическим местом точек, координаты которых удовлетворяют второму уравнению, является окружность с радиусом $\sqrt{a}$ с центром в начале координат. Первое уравнение представляет собой квадрат, вершины которого лежат в точках (1,0), (0,1), (–1, 0), 0,–1). Его стороны можно построить, избавляясь определенным образом от модулей в каждом квадранте. Задача сводится к определению числа точек пересечения окружности с указанным квадратом. Если диаметр $2\sqrt{a}$ меньше стороны квадрата, равной $\sqrt{2}$, или больше диагонали квадрата, равной 2, то точек пересечения нет. Если является вписанным или описанным для этой окружности, то $a=\frac{1}{2}$ или $a=1$. Окружность может также пересекать все стороны квадрата по два раза, тогда решений будет восемь.

62. Найти все значения параметра a, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases}x+y=a\\2x-y=3\end{cases}$, удовлетворяют также неравенству $x>y$.

Ответ: $a < 6$.

63. Найти все действительные значения m, при которых система $\begin{cases} x - y = m(1+xy) \\ 2 + x - y + xy = 0 \end{cases}$ имеет действительные решения.

Ответ: $m \in \left[\frac{-6-2\sqrt{3}}{3}, -1\right) \cup \left(-1, \frac{-6+2\sqrt{3}}{3}\right]$.

64. Найти b так, чтобы при любых a система $\begin{cases} 3x + y = a \\ ax - y = b \end{cases}$ имела хотя бы одно решение.

Ответ: $b = 3$.

65. При каких значениях параметра a графики функций $y = 2ax + 1$, $y = (a-6)x^2 - 2$ не пересекаются?

Ответ: $-6 < a < 3$.

66. При каких значениях параметра k система $\begin{cases} 3x - 6y = 1 \\ 5x - ky = 2 \end{cases}$ имеет решения $x < 0$, $y < 0$.

Ответ: $10 < k < 12$.

67. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax - 3ay = 2a + 3 \end{cases}$: а) имеет единственное решение, б) имеет бесконечное множество решений, в) не имеет решений?

Ответ: а) $a \neq 0$, $a \neq -3$, $a = 2$, $a = -\frac{1}{2}$, б) $a = -3$, в) $a = 0$.

68. Найти все действительные значения k, при которых решения системы $\begin{cases} x - 2y = k \\ 3x + y = 8 \end{cases}$ удовлетворяют условиям $x > \frac{1}{k}$, $y > 0$.

Ответ: $-8 - \sqrt{71} < k < 0$ $-8 + \sqrt{71} < k < \frac{8}{3}$.

Указание. Найдя x и y, составим систему неравенств для них и найдем k.

69. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2x + 2(a-1)y = a - 4 \\ 2|1+x| + ay = 2 \end{cases}$ имеет единственное решение. Найти это решение.

Ответ: $\left\{\left(\frac{a(4-a)}{2a-4}, \frac{a-4}{a-2}\right) \middle| \quad a \in \left[\frac{2}{3}, 3-\sqrt{5}\right]\right\}$, $\left\{\left(\frac{a^2-12a+8}{2(3a-2)}, \frac{a}{3a-2}\right) \middle| \quad a \in \left(3-\sqrt{5}, 2\right]\right\}$.

70. Решить систему уравнений $\begin{cases} |x+y| = x - y + a \\ |x-y| = x + y + b \end{cases}$

Ответ: если $a = -b$, то $y = \frac{a}{2}$, $x \geq \left|\frac{a}{2}\right|$, если $a > -b$, то $x = -\frac{b}{a}$, $y = \frac{a}{2}$, если $a = b > 0$, то $x = -\frac{a}{2}$, $y \leq \frac{a}{2}$, если $b > |a|$, то $x = -\frac{a}{2}$, $y = -\frac{b}{2}$.

71. Найти все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} x^2 + 10x + y^2 + 6y + 7 = 0 \\ x^2 + 6x + y^2 + 6ay + 9a^2 - 24 = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение. Единственность решения системы обеспечивает касание первой окружности $(x+5)^2 + (y+3)^2 = 27$ и второй окружности $(x+3)^2 + (y+3a)^2 = 33$. Расстояние между их центрами равно сумме радиусов $\sqrt{4 + (3-3a)^2} = \sqrt{27} + \sqrt{33}$, что и дает $a = 1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{56 + 18\sqrt{11}}$.

Ответ: $a = 1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{56 + 18\sqrt{11}}$.

72. При каких значениях k решения системы $\begin{cases} x + ky = 3 \\ kx + 4y = 6 \end{cases}$ находятся вне окружности $x^2 + y^2 = 1$?

Ответ: $-2-3\sqrt{5}<k<3\sqrt{5}-2$ ($k=2$ также удовлетворяет задаче, хотя система и вырождается в прямую $x+2y+3$)

5. Иррациональные уравнения с параметрами

Надо помнить, что избавление от радикалов чаще всего приводит к появлению лишних корней, непосредственная же проверка решений уравнения с параметрами бывает слишком громоздкой. Решая уравнения с параметром, необходимо сначала выразить неизвестную величину через параметр, затем сделать проверку, анализируя полученные выражения для каждого допустимого значения параметра. Область определения надо выписывать как можно более полно.

73. Решить уравнение $\sqrt{\frac{3}{2}x-a}=a-x$.

Ответ: $x=\frac{1}{4}\left(4a+3-\sqrt{8a+9}\right)$, $a\geq 0$.

74. Решить уравнение $\sqrt{x^2+1+x\sqrt{x-a}}-1=x$.

Решение. При $x=0$ левая часть исходного уравнения имеет вид $\sqrt{0^2+1+0\sqrt{0-a}}-1$. Это выражение имеет смысл и равно 0 только при $a\leq 0$. При $x=4+a$ левая часть исходного уравнения может быть преобразована к виду $\sqrt{(4+a)^2+1+(4+a)\sqrt{4+a-a}}-1=\sqrt{16+8a+a^2+1+8+2a}-1=$

$\sqrt{a^2+10a+25}-1=\sqrt{(a+5)^2}-1=|a+5|-1=\begin{cases} a+5-1=a+4, & a\geq -5 \\ -a-5-1=-a-6, & a<-5 \end{cases}$ Ответ: $x=0$ при $a\in(-\infty,-5)$, $x=0$ или $x=a+4$ при $a\in[-5,0]$, $x=a+4$ при $a\in(0,+\infty)$.

75. Решить уравнение $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-3}=a$

Ответ: $x=5\pm\frac{a}{2}\sqrt{8-a^2}$ при $a\in[2,2\sqrt{2}]$.

76. Решить уравнение $\sqrt{2x-1}-x+a=0$.

Ответ: при $a<0$ решений нет, при $a\in[0,\frac{1}{2}]$ $x=a+1\pm\sqrt{2a}$, при $a\geq\frac{1}{2}$ $x=a+1+\sqrt{2a}$.

77. Решить уравнение $x\sqrt{x}-2x+a^2-a=\sqrt{x}(a^2-a-1)$.

Ответ: при $a<0$ решений нет, при $a\in[0,1]$ $x=a^2$ или $x=(1-a)^2$, при $a>1$ решений нет.

78. Решить уравнение $\sqrt[m]{(1+x)^2}-\sqrt[m]{(1-x)^2}=\sqrt[m]{1-x^2}$.

Ответ: при m четном одно решение $x=\frac{(1+\sqrt{5})^m-2^m}{(1+\sqrt{5})^m+2^m}$, при m нечетном два решения $x=\frac{(1\pm\sqrt{5})^m-2^m}{(1\pm\sqrt{5})^m+2^m}$.

79. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{-8x-x^2-15}=ax+7$ имеет единственное решение?

Ответ: $a\in\left(\frac{7}{5},\frac{7}{3}\right)\cup\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

80. Найти вещественные решения уравнения $x\sqrt{x}+\sqrt{x^3-2}=b$

Ответ: если $b\geq\sqrt{2}$, то $x=\sqrt[3]{\left(\frac{b^2+2}{2b}\right)^2}$, если $b<\sqrt{2}$, то решений нет.

81. Решить уравнение $\sqrt{x-2a}-\sqrt{x-a}=2$.

Ответ: ответ: если $a\leq -4$, то $x=\frac{1}{16}\left(a^2+24a+16\right)$, если $a>-4$, то решений нет.

82. Решить уравнение $\sqrt{\frac{a^2}{a+x}+\sqrt{x+2a}}=\sqrt{x+a}$.

Ответ: если $a<0$, то $x=-2a$, если $a=0$, $x\in R$, если $a>0$, то решений нет.

83. Решить уравнение $x+\sqrt{x(a-x)}=1$ при $a>0$.

Ответ: решений нет при $0<a<2\sqrt{2}-2$, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $a=2\sqrt{2}-2$, $x=\frac{1}{4}(a+2\pm\sqrt{a^2+4a-4})$ при $2\sqrt{2}-2<a\le 1$, $x=\frac{1}{4}(a+2-\sqrt{a^2+4a-4})$ при $a>1$.

84. Решить уравнение $\sqrt{2x+2}-\sqrt{x-2}=a$.

Ответ: решений нет при $a<\sqrt{3}$, $x=5$ при $a=\sqrt{3}$, $x=3a^2-4\pm 2a\sqrt{2a^2-6}$ при $\sqrt{3}<a\le\sqrt{6}$, $x=3a^2-4+2a\sqrt{2a^2-6}$ при $a>\sqrt{6}$.

85. Решить уравнение $x-\sqrt{a-x^2}=1$.

Решение. На плоскости xOa строим множество точек, координаты которых удовлетворяют системе $\begin{cases} a=2x^2-2x+1 \\ x\ge 1 \\ x^2\le a \end{cases}$

Ответ: уравнение имеет единственный корень $x=\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}$ при $a\ge 1$ и не имеет корней при $a<1$.

86. Решить уравнение $\left(\sqrt{a-x^2}-\frac{1}{2}\right)^2=x^2-x+\frac{1}{4}$.

Ответ: решений нет при $a<0$, $x=\sqrt{\frac{a}{2}}$ при $0\le a\le\frac{1}{2}$,
$x\in\left\{\sqrt{\frac{a}{2}},\frac{1-\sqrt{2a-1}}{2},\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}\right\}$ при $\frac{1}{2}<a\le 1$, $x=\frac{1-\sqrt{2a-1}}{2}$ или $x=\sqrt{\frac{a}{2}}$ при $a>1$.

87. Решить уравнение $x\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1}=a$.

Ответ: $a>2$, $x=a$, $-2<a\le -1$, $x=-a$.

88. Решить уравнение $\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$.

Ответ: $x=\frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}$ при $0\le p\le\frac{4}{3}$.

89. Решить уравнение $\sqrt{a^2-x\sqrt{a^2+x^2}}=a-x.$

Ответ: решений нет при $a<0$, $x\in(-\infty,0]$ при $a=0$, $x=0$ или $x=\frac{3}{4}a$ при $a>0$.

90. Решить уравнение $\sqrt{x-\sqrt{x-a}}=a.$

Ответ: решений нет при $a<0$, $x=a^2+a$ или $x=a^2-a+1$ при $0\le a\le 1$, $x=a^2+a$ при $a>1$.

91. Решить уравнение $\sqrt{3x+5}-\sqrt{x-2}=a$

Ответ: при $a\in\left(\sqrt{11},+\infty\right)$ $x=\frac{1}{2}\left(2a^2-7+a\sqrt{3a^2-22}\right)$,
при $a\in\left[\frac{\sqrt{66}}{3},\sqrt{11}\right]$ $x=\frac{1}{2}\left(2a^2-7\pm a\sqrt{3a^2-22}\right)$, при $a\in\left(-\infty,\frac{\sqrt{66}}{3}\right)$ решений нет .

92. Решить уравнение $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+2ax}{1-2ax}}=1$.

Ответ: $x=0$ при $a\ne 0$, $x\in R$ при $a=0$.

93. Решить уравнение $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-7}=a$.

Ответ: если $a<2$, то решений нет , если $a\ge 2$, то $x=\frac{a^4+20a^2+16}{4a^2}$.

94. Решить уравнение $x^2-\sqrt{a-x}=a$.

Ответ: $x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+a}$ при $a\geq 2$.

95. Решить уравнение $\sqrt{3x+2a}-\sqrt{x-2}=4$.

Ответ: при $a>9$ решений нет, при $a=9$ $x=6$, при $5\leq a<9$ $x=15-a\pm 4\sqrt{9-a}$, при $a<5$ $x=15-a+4\sqrt{9-a}$.

6. Линейные неравенства и неравенства, приводимые к линейным. Системы неравенств

При решении неравенств параметрами используются все правила преобразования неравенств.

96. Решить неравенство $\frac{1}{x}>\frac{1}{a}$.

Ответ: $a>0$, $0<x<a$, $a<0$, $x<a$ или $x>0$.

97. Решить неравенство $\frac{ax}{a-2}-\frac{x-1}{3}<\frac{2x+3}{4}$.

Ответ: $x\in R$ при $a=-10$, $x>\frac{5(a-2)}{2(a+10)}$ при $-10<a<2$, $x<\frac{5(a-2)}{2(a+10)}$ при $a<-10$ или при $a>2$.

98. Решить неравенство $3(2a-x)<ax+1$.

Ответ: при $a=-3$ $x\in R$, при $a<-3$ $x<\frac{6a-1}{a+3}$, при $a>-3$ $x>\frac{6a-1}{a+3}$.

99. Решить неравенство $a^2+ax<1-x$.

Ответ: нет решений при $a=-1$, $x\in(-\infty,1-a)$ при $a>-1$, $x\in(1-a,+\infty)$ при $a<-1$.

100. При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases}ax+1>0\\ x+a>0\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

Ответ: $a>-1$.

101. При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases}ax-1<0\\ x>4a\end{cases}$ не имеет решений?

Ответ: $a\geq\frac{1}{2}$.

7. Квадратичные неравенства с параметрами

При решении таких неравенств используется метод интервалов.

102. При каких значениях параметра a всякое решение неравенства $x^2-3x+2<0$ будет одновременно решением неравенства $ax^2-(3a+1)x+3>0$?

Решение. На плоскости $x0a$ множество точек (x,a), удовлетворяющих уравнению $ax^2-(3a+1)x+3=0$, то есть $ax(x-3)=x-3$, изображается прямой $x=3$ и обоими ветвями гиперболы $a=\frac{1}{x}$. Точки, удовлетворяющие второму из неравенств, изображаются заштрихованной областью. Ясно, что отрезок $1<x<2$ (решение первого неравенства) целиком попадает в эту область при $a\leq\frac{1}{2}$ (см. рис.3).

Ответ: $a\leq\frac{1}{2}$.

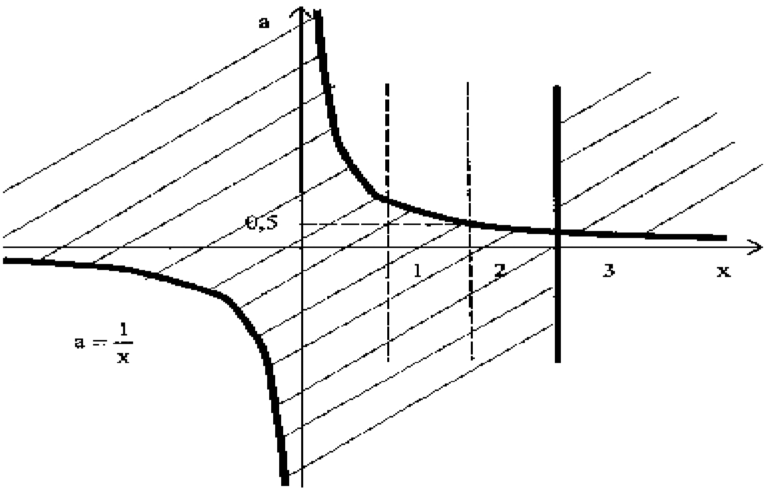

Рис. 3 (к задаче № 102)

103. При каких действительных значениях m неравенство $x^2+mx+m^2+6m<0$ выполняется при всех $x\in(1,2)$?

Ответ: $\frac{-7-\sqrt{45}}{2}\le m\le -4+2\sqrt{3}$.

104. При каких a неравенство $(a-3)x^2-(a+3)x+a+3>0$ выполняется при всех x?

Ответ: $a\ge 5$.

105. Решить неравенство $\left|x^2-a^2\right|>2a^2$.

Ответ: $|x|>a\sqrt{3}$.

106. Решить неравенство $\frac{(x-a)^2+x(x-a)+x^2}{(x-a)^2-x(x-a)+x^2}<\frac{19}{7}$.

Ответ: при $a<0$ $x\in(3a,-2a)$, при $a=0$ решений нет, при $a>0$ $x\in(-2a,3a)$.

107. Для каждого неотрицательного значения параметра a решить неравенство $4a^3x^4+4a^2x^2+32x+a+8\ge 0$.

Ответ: при $0<a<2$ $x<\frac{1}{2a}(-2-\sqrt{4-2a})$ или $x\ge\frac{1}{2a}(-2+\sqrt{4-2a})$, при $a\ge 2$ $x\in R$.

108. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $3-|x-a|>x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное значение.

Ответ: $-\frac{13}{4}<a<3$.

Указание. Записав неравенство в виде $3-x^2>|x-a|$, построить и исследовать графики функций, стоящих в левой и правой частях неравенства.

109. При каких значениях параметра a неравенство $(x+a)(x+3a-5)>0$ выполняется при всех x, принадлежащих $[1,4]$?

Решение. Построим области, где множители левой части имеют один знак, и вертикальную полосу $[1,4]$. Следует выбрать $a=const$ таковыми, чтобы эта полоса имела наибольшую ширину (см. рис.4).

Ответ: $a<-3,\quad a>\frac{4}{3}$.

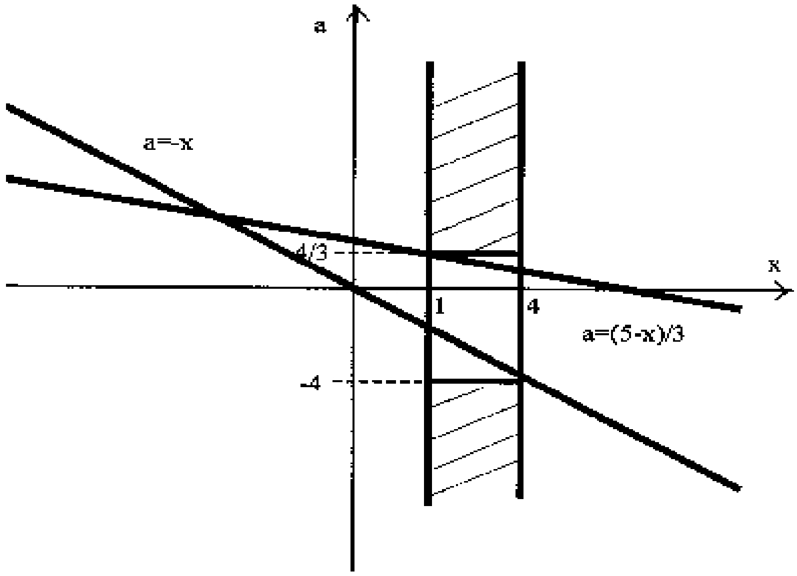

Рис. 4 (к задаче №109)

110. При каких значениях параметра a неравенство $(x-3a)(x-a-3)<0$ выполняется при всех x, принадлежащих $[1,3]$?

Ответ: $0<a<\frac{1}{3}$.

111. При каком значении параметра p система неравенств $\begin{cases} x^2+2x-2\le p \\ x\ge p \end{cases}$ имеет единственное решение?

Решение. Рассмотрим координатную плоскость (x,p). Исходная система неравенств задает фигуру, заштрихованную на рисунке. Интересующие нас значения p соответствуют горизонтальным прямым $p=const$, имеющим с этой фигурой ровно одну общую точку. Это прямые $p=-3$ и $p=1$ (см. рис.5).

Ответ: $p\in\{-3,1\}$.

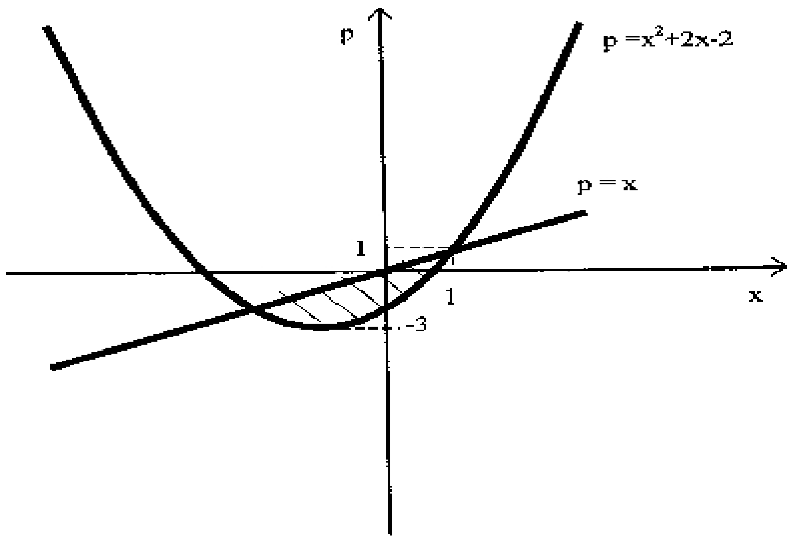

Рис.5 (к задаче №111)

112. Найти все значения a при которых система неравенств $\begin{cases} x^2+4x+3 \le a \\ x^2-2x \le 3-6a \end{cases}$ имеет единственное решение.

Ответ: $a=1$, $a=0$.

113. Решить систему неравенств с параметром $\begin{cases} 12-x^2 \ge a \\ |x| \ge a \end{cases}$ Указание. Лучше всего воспользоваться графическим представлением неравенств на плоскости координат (x,a). Построим графики функций $a=12-x^2$ и $a=|x|$ (см. рис. 6).

Теперь следуя вдоль оси a вверх, считываем границы изменения переменной x, которые находим из уравнения $x^2=12-a$ и $x=a$, $x=-a$. Итак, при $a \le 0$ $x \in [-\sqrt{12-a}, \sqrt{12-a}]$, при $0<a \le 3$ $x \in [-\sqrt{12-a}, -a] \cup [a, \sqrt{12-a}]$, при $a>3$ решений нет.

Ответ: $[-\sqrt{12-a}, \sqrt{12-a}]$ при $a \le 0$, $[-\sqrt{12-a}, -a] \cup [a, \sqrt{12-a}]$ при $0<a \le 3$, решений нет при $a>3$.

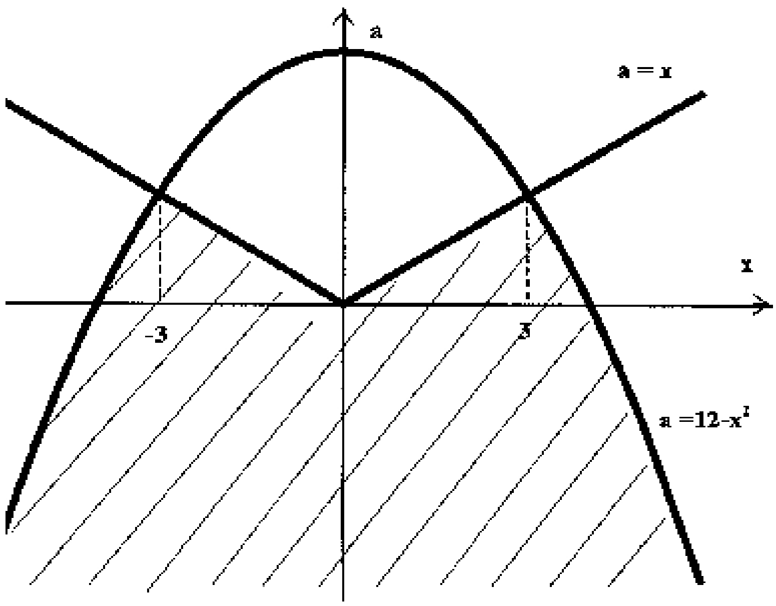

Рис. 6 (к задаче№113)

114. Решить систему неравенств с параметром $\begin{cases} x \le a \\ |x^2-2x| \ge a \end{cases}$

Ответ: $x \in (-\infty, a]$ при $a \le 0$, $x \in (-\infty, 1-\sqrt{1+a}] \cup [1-\sqrt{1-a}, a]$ при $0<a \le 1$, $x \in (-\infty, 1-\sqrt{1+a}]$ при $1<a<3$, $x \in (-\infty, 1-\sqrt{1+a}] \cup [1+\sqrt{1+a}, a]$ при $a \ge 3$.

115. Решить неравенство $|2x^2+x-a-8| \le x^2+2x-2a-4$.

Решение. Перепишем неравенство, используя схему $|A| \le B \Rightarrow -B \le A \le B$, $-(x^2+2x-2a-4) \le 2x^2+x-a-8 \le x^2+2x-2a-4$. Это двойное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} x^2-x-4+a \le 0 \\ x^2+x-4-a \ge 0 \end{cases}$. Для каждого из неравенств надо найти корни их левых частей

$x^2-x-4+a=0$ $\quad x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{17-4a})$ и $x^2+x-4-a=0$ $\quad x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{17+4a})$. Система неравенств $\begin{cases} x^2-x-4+a\le 0 \\ x^2+x-4-a\ge 0 \end{cases}$ имеет решение $\begin{cases} \frac{1}{2}(1-\sqrt{17-4a})\le x\le \frac{1}{2}(1+\sqrt{17-4a}) \\ \left[\begin{array}{l} x\ge \frac{1}{2}(-1+\sqrt{17+4a}) \\ x\le \frac{1}{2}(-1-\sqrt{17+4a}) \end{array}\right. \end{cases}$

Выписать ответ в виде объединения интервалов в данном случае весьма трудно, так как положение границ интервалов зависит от значений параметра. Удобнее использовать графический метод. Перепишем систему неравенств в виде $\begin{cases} a\le -x^2+x+4 \\ a\le x^2+x-4 \end{cases}$. Рассмотрим координатную плоскость (x,a), где a изменяется по оси ординат, а x –по оси абсцисс. Построим графики функций (1): $a(x)=-x^2+x+4$ и (2): $a(x)=x^2+x-4$. Сначала найдем точки пересечения графиков с осью Ox: $-x^2+x+4=0$ $\quad x=-\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{17})$ и $x^2+x-4=0$ $\quad x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{17})$. Затем найдем абсциссу вершины параболы, она равна среднему арифметическому абсцисс точек пересечения с осью Ox: для (1) $x_в=\frac{1}{2}$, $\quad a(x_в)=\frac{17}{4}$, для (2) $x_в=-\frac{1}{2}$, $a(x_в)=-\frac{17}{4}$. Наконец, нам потребуются точки пересечения графиков, для чего следует решить систему уравнений $\begin{cases} -x^2+x+4=a \\ x^2+x-4=a \end{cases}$. Ее решения (2, 2) и (–2, –2).

После того как мы построим кривые (1) и (2), следует обратить внимание на то, что последний вид системы неравенств выражает для координаты a требование быть меньше, чем соответствующие ординаты парабол. В нашем случае множество точек, отвечающих системе неравенств, расположено одновременно ниже обеих кривых. Заштрихованная область является графическим решением исходной системы неравенств (см. рис. 7).

Теперь можно выписать ответ. Будем двигаться по оси Oa в сторону убывания. Видим, что заштрихованная область расположена ниже горизонтали $a=2$. Значит, при $a>2$ решений нет. От $a=2$ до $a=-2$ область заключена между ветвями парабол: при $-2<a\le 2$ получаем $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{17+4a})\le x\le \frac{1}{2}(1+\sqrt{17-4a})$. Далее, от $a=-2$ до $a=-\frac{17}{4}$ имеются две части области, заключенные между различными парами ветвей парабол $\frac{1}{2}(1-\sqrt{17-4a})\le x\le \frac{1}{2}(-1-\sqrt{17+4a})$ или $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{17+4a})\le x\le \frac{1}{2}(1+\sqrt{17-4a})$. И, наконец, при $a<-\frac{17}{4}$

$\frac{1}{2}(1-\sqrt{17-4a})\le x\le \frac{1}{2}(1+\sqrt{17-4a})$.

Ответ: при $a>2$ решений нет, при $-2<a\le 2$ $\quad \frac{1}{2}(-1+\sqrt{17+4a})\le x\le \frac{1}{2}(1+\sqrt{17-4a})$, при $-\frac{17}{4}\le a\le -2$

$\frac{1}{2}(1-\sqrt{17-4a})\le x\le \frac{1}{2}(-1-\sqrt{17+4a})$ или $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{17+4a})\le x\le \frac{1}{2}(1+\sqrt{17-4a})$,

при $a<-\frac{17}{4}$ имеем $\frac{1}{2}(1-\sqrt{17-4a})\le x\le \frac{1}{2}(1+\sqrt{17-4a})$.

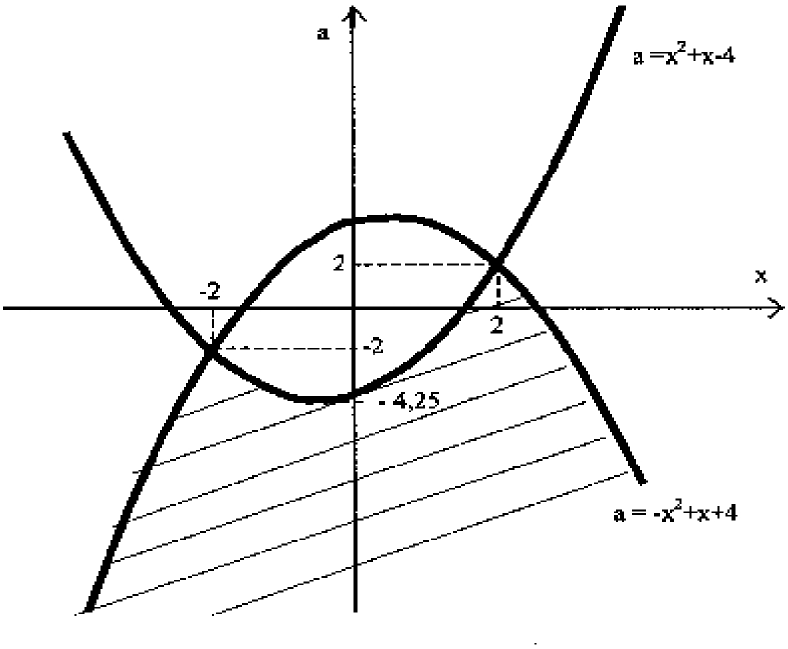

Рис.7 (к задаче №115)

8. Иррациональные неравенства с параметрами

При решении иррациональных неравенств надо помнить, что возводить неравенство можно только, если обе его части положительны. Получается система неравенств, куда обязательно следует включить преобразованное неравенство и область определения левой и правой частей исходного неравенства. Если же хотя бы одна часть неравенства отрицательна, то необходимость в возведении отпадает и надо исследовать истинность исходного неравенства в его области определения.

116. Решить неравенство $\sqrt{2x+m} \ge x$.

Ответ: при $m < -1$ решений нет, при $m = -1$ $x = 1$, при $-1 < m \le 0$ $x \in [1-\sqrt{1+m}, 1+\sqrt{1+m}]$, при $m > 0$ $x \in [-\frac{m}{2}, 1+\sqrt{1+m}]$.

117. Решить неравенство $x + \sqrt{a-x} > 0$, $a > 0$.

Решение. Неравенство определено при $x \le a$. Запишем неравенство в виде $\sqrt{a-x} > -x$. При $0 \le x \le a$ неравенство справедливо, так как в левой части стоит неотрицательная величина. При $x < 0$ исходное неравенство равносильно следующему: $a - x > x^2$. Решая последнее неравенство совместно с условием $x < 0$, получим $\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2} < x < 0$.

Ответ: $\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2} < x \le a$.

118. Решить неравенство $2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0$.

Ответ: при $a = 0$ решений нет, при $a \ne 0$ $-\frac{|a|}{\sqrt{5}} \le x \le |a|$.

119. Решить неравенство $\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{x+a}} < \sqrt{x+2a}$.

Ответ: $\begin{cases} a < 0 \\ x > -2a \end{cases}$ или $\begin{cases} a > 0 \\ x > -a \end{cases}$ или $\begin{cases} a = 0 \\ x \in \varnothing \end{cases}$

120. Решить неравенство $\sqrt{a+x} < a - \sqrt{x}$.

Ответ: при $a \le 1$ решений нет, при $a > 1$ $x \in [0, \frac{1}{4}(a-1)^2)$.

121. Решить неравенство $\sqrt{-x} > ax + 2x$.

Ответ: при $a < -2$ $x \in (-\frac{1}{(a+2)^2}, 0)$, при $a \ge -2$ $x \in (-\infty, 0)$.

122. Решить неравенство $\sqrt{x-a} - \sqrt{-x-a} > -a$.

Ответ: при $a \le -4$ или $a \ge 0$ решений нет, при $-2 < a < 0$ $x \in [a, -a]$, при $-4 < a \le -2$ $x \in \left(\frac{a}{2}\sqrt{-a^2-4a}, -\frac{a}{2}\sqrt{-a^2-4a}\right)$.

123. Решить неравенство $x + 4a \ge 5\sqrt{ax}$.

Ответ: при $a < 0$ решений нет, при $a = 0$ $x \ge 0$, при $a > 0$ $0 \le x \le a$ или $x \ge 16a$.

124. Решить неравенство $\sqrt{2(x - \sqrt{x^2 - a^2})} > \frac{x+a}{5\sqrt{x-a}}$.

Ответ: $x \in \left(\frac{24 - 5\sqrt{5}a}{11}a, \frac{24+5\sqrt{5}}{11}a\right)$.

125. Решить неравенство $\sqrt{x+a} \ge x + 1$.

Ответ: при $a < \frac{3}{4}$ решений нет, при $\frac{3}{4} \le a \le 1$ $x \in \left[\frac{1}{2}(-1-\sqrt{4a-3}), \frac{1}{2}(-1+\sqrt{4a-3})\right]$, при $a > 1$ $x \in \left[-a, \frac{1}{2}(-1+\sqrt{4a-3})\right]$.

126. Решить неравенство $\sqrt{\frac{3}{4}a^2 + ax - x^2} \ge 2 - x$ для $a > 0$.

Ответ: решений нет , если $0 < a < \frac{8\sqrt{2}-4}{7}$, $x = \frac{6+2\sqrt{2}}{7}$, если $a = \frac{8\sqrt{2}-4}{7}$, $\frac{4+a-\sqrt{7a^2+8a-16}}{4} \le x \le \frac{4+a+\sqrt{7a^2+8a-16}}{4}$, если $\frac{8\sqrt{2}}{7} < a \le \frac{4}{3}$, $\frac{4+a-\sqrt{7a^2+8a-16}}{4} \le x \le \frac{3a}{2}$, если $a > \frac{4}{3}$.

127. Решить неравенство $2\sqrt{x+a} > x + 1$.

Ответ: при $a \le 0$ решений нет, при $0 < a \le 1$ $1 - 2\sqrt{a} < x, 1 + 2\sqrt{a}$, при $a > 1$ $-a \le x < 1 + 2\sqrt{a}$.

128. Решить неравенство $\sqrt{2ax - x^2} \ge a - x$.

Ответ: при $a < 0$ $x \in \left[a(1+\frac{\sqrt{2}}{2}), 0\right]$, при $a \ge 0$ $x \in \left[a(1-\frac{\sqrt{2}}{2}), 2a\right]$.

129. Решить неравенство $x - \sqrt{a - 2x} < 0$ при $a > 0$.

Ответ: $x < -1 + \sqrt{a+1}$.

130. Решить неравенство $\sqrt{x-a} \ge 2x + 1$.

Ответ: решений нет , если $a > -\frac{7}{16}$, $\frac{-3-\sqrt{-7-16a}}{8} \le x \le \frac{-3+\sqrt{-7-16a}}{8}$, если $-\frac{1}{2} < a \le -\frac{7}{16}$, $a \le x \le \frac{-3+\sqrt{-7-16a}}{8}$, если $a \le -\frac{1}{2}$.

9. Уравнения и неравенства с параметрами, содержащие логарифмы

При решении таких неравенств следует учитывать область определения выражений и правила потенцирования логарифмических неравенств $\log_a f(x) < \log_a g(x)$: $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a > 1 \\ f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$.

131. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $8^x = \dfrac{3a-2}{4-a}$ имеет положительные корни.

Решение. Должно выполняться неравенство $\dfrac{3a-2}{4-a} > 0$ (1), так как $8^x > 0$ всегда. Прологарифмируем исходное уравнение по основанию 8, получим $x = \log_8 \dfrac{3a-2}{4-a}$. Требование положительности корня x приводит к неравенству $\dfrac{3a-2}{4-a} > 1$, которое поглощает неравенство (1). Приведя его к виду $\dfrac{2a-3}{a-4} < 0$ и решая методом интервалов, получим ответ.

Ответ: $a \in \left(\dfrac{3}{2}, 4\right)$.

132. Найти все действительные значения параметра b, при которых уравнение $\dfrac{3^{2x}}{9^x - 3^{x+1} + 2} = b$ имеет только одно решение.

Решение. Введем новую переменную $y = 3^x > 0$. Перепишем уравнение в виде $\dfrac{y^2}{y^2 - 3y + 2} = b$. Ясно, что $b \neq 0$. Преобразуя уравнение к квадратному $(b-1)y^2 - 3by + 2b = 0$, следует учесть ОДЗ: $y^2 - 3y + 2 \neq 0$, т.е. $y \neq 1, y \neq 2$.

При $b = 1$ уравнение приводится к линейному и мы получаем единственное решение задачи $y = \dfrac{2}{3}$. Пусть теперь $b \neq 1$. Решения квадратного уравнения y_1 и y_2 зависят от знака дискриминанта $D = b(b+8)$. Когда $D = b(b+8) = 0$, корни совпадают $y_1 = y_2 = \dfrac{3b}{2(b-1)}$. Положительность корня обеспечивает значение $b = -8$. Пусть $D = b(b+8) > 0$. Для того чтобы показательное уравнение имело единственное решение, надо потребовать, чтобы квадратное уравнение имело единственный положительный корень. Для такого дискриминанта имеем два корня, поэтому второй корень может иметь отрицательное значение, т.е корни имеют разные знаки, а это возможно только при $y_1 \cdot y_2 < 0$. По теореме Виета $y_1 \cdot y_2 = \dfrac{2b}{b-1} < 0$. Из системы требований $\begin{cases} b(b+8) > 0 \\ \dfrac{2b}{b-1} < 0 \end{cases}$ получаем $0 < b < 1$. Объединяя все результаты, получим ответ.

Ответ: $b \in \{-8\} \cup (0, 1]$.

133. Определить при каком значении p уравнение $p \cdot 5^x - 6 \cdot 5^{-x} = 4$ имеет единственное решение.

Ответ: $p > 0$.

134. При каких значениях a уравнение $\log_{x^2-1}(x + a) = 1$ не имеет решений?

Решение. Для того чтобы пара чисел (x,a) удовлетворяла данному уравнению необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $\begin{cases} x+a=x^2-1 \\ x+a>0 \\ x^2-1\neq 1 \end{cases}$

Точки, координаты которых на плоскости xOa удовлетворяют этим условиям,–это точки параболы $a=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$, расположенные выше прямой $a=-x$, кроме точек с абсциссами $x=\pm\sqrt{2}$, т.е. кроме точек $(\sqrt{2},1-\sqrt{2})$ и $(-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$ (см. рис.8). Проекции всех этих точек на ось Oa заполняют луч $a>-1$ кроме одной точки $a=1-\sqrt{2}$: $\begin{cases} a=-x \\ a=x^2-x-1 \end{cases} \Rightarrow x^2-1=0, x=\pm1$. Точка же $a=1+\sqrt{2}$ соответствует все-таки одному решению $x=1+\sqrt{2}$ на левой ветви параболы.

Ответ: при $a\leq -1$ и при $a=1-\sqrt{2}$ решений нет.

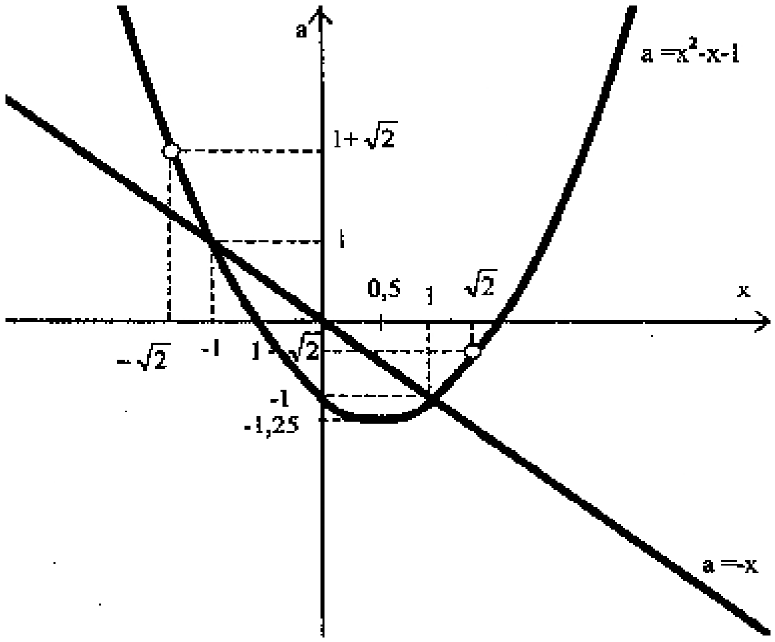

Рис. 8 (к задаче № 134)

135. Решить уравнение $5\log_5 a+\log_a x-4\log_{25} x=4$.

Ответ: $x=5^{\frac{4}{3+\log_a 5}}$ при $a>0, a\neq 1, a\neq \frac{1}{125}$.

136. Решить уравнение $a^{\frac{1}{\log_4 a^2}}=x^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{x}}(x^2-x)}$.

Ответ: $x=2$ при $a>0, a\neq 1$.

137. Решить уравнение $\log_{\sqrt{2-x^2}}(2x^2+a)=4$.

Ответ: $x=\pm\sqrt{3-\sqrt{5+a}}$, если $a\in(-4,-1)\cup(-1,4]$.

138. При каких значениях параметра a уравнение $\log_3\left(9^x+9a^3\right)=x$ имеет два решения?

Ответ: $0<a<\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$.

139. Решить уравнение $\sqrt{\log_x(ax)}\cdot\log_a x=-\sqrt{2}$

Ответ: $x=\frac{1}{a^2}$ при $a>0, a\neq 1$.

140. Найти наибольшее значение a, при котором уравнение $\lg(x+3)=0{,}5\lg(ax)$ имеет единственный корень.

Ответ: 12.

141. Найти все значения x, при которых выполняется неравенство $x^{\log_a x}<a$.

Решение. Неравенство имеет смысл при $x>0$ и $a>0, a\neq 1$. Пусть $0<a<1$. Логарифмируя исходное неравенство по основанию $a<1$, получим $(\log_a x)^2>1$, что распадается на два неравенства: $\log_a x<-1$ или $\log_a x>1$. Первое из них дает: $x>\frac{1}{a}$, а второе: $0<x<a$. Пусть теперь $a>1$. После логарифмирования исходного неравенства, получим $(\log_a x)^2<1$, т.е. $-1<\log_a x<1$ и, значит, $\frac{1}{a}<x<a$.

Ответ: если $0<a<1$, то $0<x<a$ или $x>\frac{1}{a}$, если $a>1$, то $\frac{1}{a}<x<a$.

142. Найти все действительные значения параметра a, при которых каждое решение неравенства $\log_{\frac{1}{2}} x^2 \geq \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ является решением неравенства $49x^2-4a^4\leq 0$.

Ответ: $a\leq -\sqrt{7}, a\geq \sqrt{7}$.

143. Найти все значения параметра c, при которых неравенство $1+\log_2(2x^2+2x+\frac{7}{2})\geq \log_2(cx^2+c)$.

Ответ: $0<c\leq 8$.

144. Решить неравенство $\frac{1}{\log_a(x-3)}>1$.

Ответ: при $0<a<1$ $x\in(a+3,4)$, при $a>1$ $x\in(4,a+3)$.

145. Решить неравенство $\log_{x+p}2<\log_x 4$, где $0<p<\frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1-2p+\sqrt{1-4p}}{2}<x<1-p$ или $\frac{1-2p-\sqrt{1-4p}}{2}>x>0$ или $x>1$.

146. Решить неравенство $\log_a x+\log_a(x-2)>1$.

Ответ: если $0<a<1$, то $2<x<1+\sqrt{1+a}$, если $a>1$, то $x>1+\sqrt{1+a}$, при $a\leq 0$ левая часть неравенства неопределена.

147. Решить систему и исследовать решения при всех значениях параметра a

$$\begin{cases}\left(\log_{\frac{1}{y}} x+\log_{\frac{1}{x}} y\right)\left(\log_{\frac{x}{y}} xy+\log_{xy}\frac{y}{x}\right)=\frac{20}{3}. \\ x^2+y=a\end{cases}$$

Ответ: при $a\leq 0$ и при $a=2$ решений нет, при $0<a<2$ одно решение $\left(\sqrt{\frac{a}{2}},\frac{a}{2}\right)$, при $a>2$ три решения $\left(\sqrt{\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}},\sqrt{\frac{a\mp\sqrt{a^2-4}}{2}}\right)$ и $\left(\sqrt{\frac{a}{2}},\frac{a}{2}\right)$.

10. Тригонометрические уравнения, неравенства и системы уравнений с параметрами

При решении таких уравнений используются обычные способы преобразования тригонометрических выражений, формулы тригонометрии, ограниченность синуса и косинуса $|\cos x|\leq 1, |\sin x|\leq 1$.

148. Сколько решений имеет уравнение $\cos x\cdot ctgx-\sin x=a\cos 2x$ на отрезке $0\leq x\leq 2\pi$?

Решение. Уравнение определено при $0 < x < \pi, \pi < x < 2\pi$. Преобразуем его к виду $\cos 2x\left(\frac{1}{\sin x} - a\right) = 0$. Это уравнение распадается на два: а) $\cos 2x = 0$. На заданном отрезке это уравнение имеет четыре решения независимо от значения параметра: $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$. б) $\sin x = \frac{1}{a}$. При $-1 < a < 1$ это уравнение не имеет решений. При $|a| = 1$ (либо $a = 1$, либо $a = -1$) имеется одно решение либо $x = \frac{\pi}{2}$, либо $x = \frac{3\pi}{2}$. При $|a| > 1$ имеем два решения на заданном отрезке. Заметим, что при $|a| = \sqrt{2}$ эти решения совпадают с решениями первого уравнения. В ответе перечислим возможное количество решений в зависимости от a.

Ответ: 4 решения при $|a| < 1$ и $|a| = \sqrt{2}$, 5 решений при $|a = 1|$, 6 решений при $|a| > 1, |a| \neq \sqrt{2}$.

149. Найти наибольшее положительное a, при котором уравнение $2\sin^2 x + 3\sin x = a$ имеет решение.

Ответ: 5.

150. Сколько решений имеет уравнение $a \cdot ctgx - 1 = \cos 2x$ на отрезке $0 \leq x \leq 2\pi$?

Ответ: 2 решения при $a = 0$ и $|a| > 1$, 4 решений при $|a = 1|$, 6 решений при $0 < |a| < 1$.

151. Найти все значения p, при которых уравнение $cosx + \sqrt{1+p}\sin x = 1 + \sqrt{1-p}$ имеет решение.

Решение. Область определения для параметра p: $-1 \leq p \leq 1$(подкоренные выражения). Применим метод введения вспомогательного аргумента. Поделив обе части уравнения на $\sqrt{2+p}$, слева получим $\sin(x+\varphi)$ либо $\cos(x-\varphi)$, а справа получим $\frac{1+\sqrt{1-p}}{\sqrt{2+p}}$. Заметим, что неизвестную x искать не надо. Условия для p получаем из ограниченности синуса или косинуса: $-1 \leq \frac{1+\sqrt{1-p}}{\sqrt{2+p}} \leq 1$. Учитывая, что эта дробь положительна, получим $1 + \sqrt{1-p} \leq \sqrt{2+p}$. Отсюда $p \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ или $p \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и окончательно $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq p \leq 1$.

Ответ: $\frac{1+\sqrt{1-p}}{\sqrt{2+p}}$.

152. Найти все значения p, при которых уравнение $\sqrt{p}cosx - 2\sin x = \sqrt{2} + \sqrt{2-p}$ имеет решение.

Ответ: $\sqrt{5} - 1 \leq p \leq 2$.

153. Решить уравнение $a(\cos x - \sin x) = \cos 2x$.

Решение. Исходное уравнение распадается на два: $\left[\begin{array}{ll} \sin x = \cos x & (1) \\ \sin x + \cos x = a & (2) \end{array}\right.$. Уравнение (1) независимо от значения a дает серию решений $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$. Уравнение (2) после деления на $\sqrt{2}$ преобразуем к виду $cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Если $|a| > \sqrt{2}$, то уравнение (2) решений не имеет . Если $|a| \leq \sqrt{2}$, то имеем $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{a}{\sqrt{2}} + 2\pi n$.

Ответ: если $|a| > \sqrt{2}$, то $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, если $|a| \leq \sqrt{2}$, то $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ или $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{a}{\sqrt{2}} + 2\pi n$.

154. Решить уравнение $\sin^2 x + a\cos^2 2x = \frac{1}{2}$

Решение. Воспользовавшись тождеством $\frac{1}{2}-\sin^2 x=\frac{1}{2}\cos 2x$, преобразуем уравнение $a\cos^2 2x=\frac{1}{2}cos2x$ или $\cos 2x(a\cos 2x-\frac{1}{2})=0$. Таким образом, решениями уравнения являются множества $x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\pi n$, удовлетворяющие $\cos 2x=0$, а также решения уравнения $a\cos 2x=\frac{1}{2}$. Если $a=0$, то решений нет. При $a\neq 0$ оно равносильно уравнению $\cos 2x=\frac{1}{2a}$. Это уравнение имеет решение при условии $\left|\frac{1}{2a}\right|\le 1$, т.е. $a\ge\frac{1}{2}$ или $a\le-\frac{1}{2}$. Эти решения задаются формулой $x=\frac{1}{2}\left(\pm\arccos\frac{1}{2a}+2\pi m\right)$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\pi n$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2a}+\pi m$ при $a\ge\frac{1}{2}$ или $a\le-\frac{1}{2}$, $n,m\in Z$.

155. Решить уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x=a$.

Ответ: $2x=(-1)^k\arcsin(1-\sqrt{3-2a})+k\pi$ при $-\frac{1}{2}\le a\le\frac{3}{2}$.

156. Решить уравнение $(1+n)\cos x\frac{\cos(2x-\alpha)}{\cos(x-\alpha)}=1+n\cos 2x$.

Ответ: $x=k\pi$ при $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{1}{2}\left(\alpha+(-1)^k\arcsin(n\sin\alpha)+k\pi\right)$ при $|n\sin\alpha|<1, n\neq 1$.

157. Найти все значения параметра b, при каждом из которых неравенство $\cos^2 x+2b\sin x-2b<b^2-4$ выполняется для любого x.

Ответ: $b<-2-\sqrt{8}, b>2$.

158. Определить все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos^4 x-(a+2)\cos^2 x-(a+3)=0$ имеет решения и найти эти решения.

Ответ: при $-3\le a\le -2$ $x=\pm\frac{1}{2}\arccos 2a+5+k\pi$.

159. Решить уравнение $\sin^2 x+a\sin^2 2x=\sin\frac{\pi}{6}$.

Ответ: $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1+\sqrt{1+16a^2}}{4a}+k\pi$ при $a\neq 0$, $x=\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2}$ при $a=0$.

160. Решить уравнение $\sin^6 x+\cos^6 x=a$.

Решение. Преобразуем

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left[\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-3\sin^2 x\cos^2 x\right]=$$
$$1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{8}(1-\cos 4x)=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

Данное уравнение принимает вид $5+3\cos 4x=8a$. Отсюда $\cos 4x=\frac{8a-5}{3}$. Надо потребовать $-1\le\frac{8a-5}{3}\le 1$, что дает $\frac{1}{4}\le a\le 1$.

Ответ: $x=\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{8a-5}{3}+\frac{1}{2}n\pi$, если $\frac{1}{4}\le a\le 1$, при остальных a решений нет.

161. Решить уравнение $7\sin x+3\cos x=a$

Ответ: при $-\sqrt{58}\le a\le\sqrt{58}$ $x=-\arcsin\frac{3}{\sqrt{58}}+(-1)^n\arcsin\frac{a}{\sqrt{58}}+n\pi$, $n\in Z$.

162. Решить уравнение $tg3x=atgx$.

Ответ: $x=n\pi$, $x=k\pi\pm arctg\sqrt{\frac{a-3}{3a-1}}$, если $a<\frac{1}{3}$ и $a\ge 3$.

163. Решить уравнение $\cos 3x=a\cos x$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}(2n+1)$, $x=k\pi\pm\arccos\sqrt{\frac{a+3}{4}}$, если $-3\le a\le 1$.

164. Найти действительные решения системы $\begin{cases} \sin x + \sin y = 2 - \dfrac{2}{a-1} \\ \cos(x-y) - \cos(x+y) = 2 - \dfrac{4}{a-1} \end{cases}$

Решение. Преобразуем левую часть второго уравнения по формуле $cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\sin\alpha \sin\beta$.

Тогда получим $\sin x \sin y = \dfrac{a-3}{a-1}$. Теперь мы имеем систему $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{2(a-2)}{a-1} \\ \sin x \sin y = \dfrac{a-3}{a-1} \end{cases}$. Она напоминает по виду теорему Виета для приведенного квадратного уравнения (произведение корней равно свободному члену, а сумма корней–второму коэффициенту с противоположным знаком). В таком случае $\sin x$ и $\sin y$ являются корнями квадратного уравнения $(a-1)z^2 - 2(a-2)z + a - 3 = 0$, Решая его, находим $z = 1$, $z = \dfrac{a-3}{a-1}$, с очевидными ограничениями для синусов $-1 \le \dfrac{a-3}{a-1} \le 1$, что дает $a \ge 2$.

Ответ найдем из рассмотрения двух возможностей: $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin y = \dfrac{a-3}{a-1} \end{cases}$ или $\begin{cases} \sin y = 1 \\ \sin x = \dfrac{a-3}{a-1} \end{cases}$

Ответ: при $a < 2$ решений нет, при $a \ge 2$ $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y = (-1)^k \arcsin\dfrac{a-3}{a-1} + k\pi \end{cases}$ или $\begin{cases} x = (-1)^k \arcsin\dfrac{a-3}{a-1} + n\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi \end{cases}$

165. Найти действительные решения системы $\begin{cases} \sin x + \cos y = 2 - \dfrac{3}{a+1} \\ \sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 - \dfrac{6}{a+1} \end{cases}$

Ответ: при $a < \dfrac{1}{2}$ решений нет, при $a \ge \dfrac{1}{2}$ $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y = \pm\arccos\dfrac{a-2}{a+1} + 2k\pi \end{cases}$ или $\begin{cases} x = (-1)^k \arcsin\dfrac{a-2}{a+1} + n\pi \\ y = 2n\pi \end{cases}$

11. Использованная литература

1. Башмаков М.И. Уравнения и неравенства. Изд. 2-е, перераб. (Библиотека физмат. Школы. Вып.5).-М.; Наука, 1976.-96 с.
2. Башмаков М.И., Боревич З.И. Конкурсные задачи по математике (в помощь поступающим в высшие учебные заведения). Изд. 2-е, дополн.-Л.: изд-во Ленинградского ун-та, 1970.-94 с.
3. Говоров В.Н., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В., Смирнова С.Ф. Сборник конкурсных задач по математике.-М.: Наука, 1986.-384 с.
4. Ермаков С.М., Сабанеев В.С. Варианты письменных работ по математике (с решениями и ответами).-Л.: изд-во Ленинградского ун-та, 1972.-84 с.
5. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практимум по решению математических задач. Алгебра. Тригонометрия.-М.: Просвещение, 1984.-288 с.
6. Матвеев Н.М. Варианты письменных работ и билеты для устных экзаменов по математике. Изд. 2-е, исправл. и дополн..-Л.: изд-во Ленинградского ун-та, 1966.-72 с.
7. Математика. Решение задач с параметрами. Пособие для абитуриентов и старшеклассников/ Составители Жаржевский А.Я., Фельдман Я.С.-СПб: изд-во «Агенство ИГРЕК», 1995.-211с.
8. Норин А.В. и др. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. Учебное пособие.-СПб: Питер, 2003.-223 с.
9. Сборник задач по математике для поступающих во втузы/Под ред. М.И.Сканави.-М.: Высшая школа, 1988.-452 с.
10. Седнева Л.Е., Сванидзе Н.В. Математика. Учебно-методическое пособие для слушателей заочных подготовительных курсов.-СПб.:изд-во СПбГАСУ, 1998.-208 с.
11. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочное пособие по методам решения задач по математике (для средней школы).-М.:Наука, 1984.-416 с.

12. Чирский В.Г., Шавгулидзе Е.Т. Уравнения элементарной математики. Методы решения.-М.: Наука, 1992-176 с.
13. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике, Решение задач. Уч.пособ. для 10 кл. ср. школы.-М.: Просвещение , 1989.-252 с.
14. Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами. Книга для учителя.-М.: Просвещение, 1986.-128 с.