ТЕМА: ОПТИМАЛЬНЫЕ ПУТИ И ПОТОКИ В СЕТЯХ

Задания

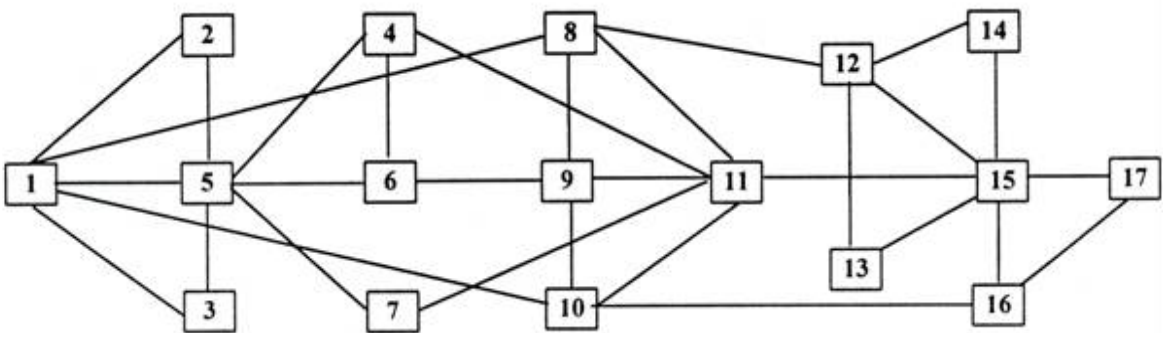
1. Для данного графа
   - составить содержательную постановку некоторой технико-экономической задачи как задачи минимизации (или максимизации) сети;
   - найти в заданном графе минимальное (или максимальное) остовное дерево с помощью алгоритмов Прима и Краскала.
   - сделать выводы в терминах постановки задачи (см. [1, стр. 97-105]).

2. Задан взвешенный ориентированный граф (сетевая модель). Для заданной сети (см. индивидуальные варианты):
   - составить содержательную постановку некоторой технико-экономической задачи как задачи о максимальном потоке;
   - найти поток, имеющий максимальную величину, с помощью алгоритма Форда-Фалкерсона и с использованием процедуры «Поиск решения» Microsoft Excel for Windows (см. [1, стр. 109-115]);
   - сделать выводы в терминах постановки технико-экономической задачи.

ВЫБОР ИНДИВИДУАЛЬНОГО ВАРИАНТА

Каждый студент выбирает себе индивидуальное задание на курсовую работу, номер которого совпадает с его номером по списку в журнале группы. Во избежание случайного дублирования индивидуальных вариантов студент обязан согласовать свой вариант с преподавателем.

ЗАДАНИЕ 1



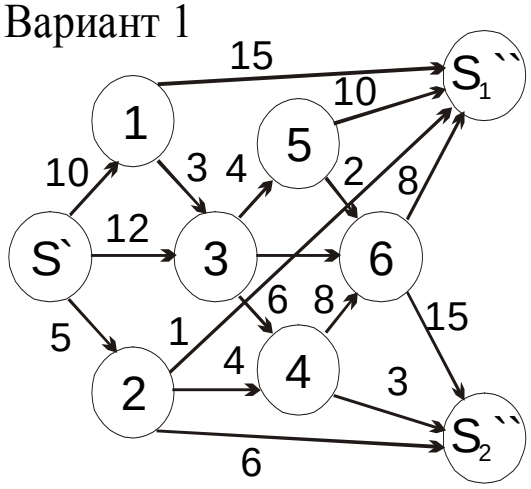
Варианты заданий:

Ребро	Вес ребра (№ варианта)													
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
(1;2)	5	12	6	14	10	9	8	13	7	5	3	14	18	4
(1;8)	2	11	17	10	12	4	9	6	7	18	5	10	2	9
(1;5)	1	4	20	15	13	7	3	6	9	22	12	5	6	12
(1;10)	2	5	9	19	21	12	17	3	4	15	14	13	14	7
(1;3)	17	8	3	5	4	2	1	18	14	2	20	2	19	28
(2;5)	22	16	1	3	6	8	5	2	3	8	6	8	3	10
(5;3)	10	2	11	7	5	10	19	1	10	9	9	19	6	1
(5;6)	3	7	5	11	16	15	4	10	5	6	18	1	9	5
(5;4)	8	9	2	1	9	3	11	5	2	10	11	11	12	16
(5;7)	3	15	13	4	10	1	15	11	8	1	10	17	10	25
(4;6)	14	10	5	9	8	13	2	4	11	5	4	5	4	3
(4;11)	5	3	1	2	2	5	6	9	9	17	7	6	7	4
(6;9)	11	4	4	8	1	2	1	7	12	13	20	2	6	18
(7;11)	10	12	5	6	7	18	10	6	17	21	1	9	22	15
(8;9)	5	4	15	8	9	8	6	10	3	12	9	12	6	17
(8;11)	7	8	2	10	12	3	17	4	12	4	17	15	16	20
(8;12)	18	9	6	3	4	5	18	20	10	9	15	8	18	16
(9;11)	3	10	9	4	18	20	20	3	6	7	3	17	2	4
(9;10)	1	3	10	13	2	6	4	6	9	13	4	10	1	7
(10;11)	7	2	4	18	9	13	7	19	26	5	3	2	7	2
(10;16)	5	7	17	2	10	7	3	14	19	17	9	8	17	10
(11;15)	16	17	12	1	3	14	12	3	15	20	2	23	8	5
(12;13)	19	12	11	19	7	10	11	7	2	10	16	10	15	17
(12;14)	3	1	8	4	4	7	7	5	1	2	19	19	5	13
(12;15)	7	7	9	9	19	9	8	10	9	1	7	4	11	2
(13;15)	4	4	3	2	1	2	15	21	6	11	6	6	10	9
(14;15)	10	14	12	7	7	1	24	9	17	7	8	5	4	12
(15;16)	11	10	5	12	9	11	18	13	11	19	3	8	2	6
(15;17)	4	3	3	10	3	3	4	10	11	4	7	12	7	15
(16;17)	8	8	7	3	10	16	9	7	5	6	2	7	6	4

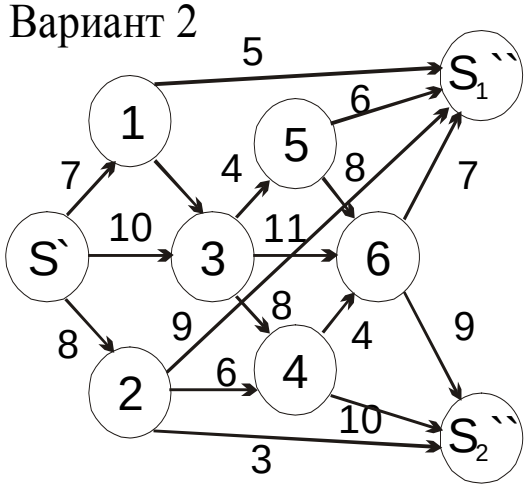
Ребро	Вес ребра (№ варианта)												
	15	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
(1;2)	12	11	17	3	12	8	3	5	6	12	17	5	14
(1;8)	10	3	2	9	17	9	8	17	8	10	3	15	23
(1;5)	5	9	6	12	10	4	19	13	23	5	1	8	1
(1;10)	16	17	23	16	3	15	3	14	4	8	9	19	9
(1;3)	7	15	19	19	7	13	17	6	15	2	4	3	17
(2;5)	3	3	10	20	8	18	10	10	14	9	17	10	12
(5;3)	8	4	4	7	20	12	13	2	8	5	15	3	3
(5;6)	15	8	8	2	12	16	9	3	18	14	8	7	5
(5;4)	17	6	9	3	5	7	3	7	2	16	13	14	8
(5;7)	18	15	20	7	8	3	7	4	5	10	14	19	17
(4;6)	20	19	17	10	12	6	12	16	9	28	9	10	10
(4;11)	5	2	3	11	9	18	19	11	14	3	5	2	3
(6;9)	8	21	6	5	2	3	6	19	1	6	17	1	6
(7;11)	16	10	3	7	5	17	18	26	23	9	14	38	4
(8;9)	19	18	9	9	7	11	13	17	7	16	2	15	9
(8;11)	3	20	17	3	14	10	17	2	18	17	7	17	23
(8;12)	5	3	13	2	18	4	5	7	3	11	3	10	11
(9;11)	7	8	15	6	1	8	9	15	6	7	9	3	18
(9;10)	10	17	5	16	9	2	16	19	8	3	16	8	19
(10;11)	3	14	2	14	10	3	12	1	1	9	10	5	5
(10;16)	1	10	2	12	11	7	10	6	9	2	11	23	8
(11;15)	18	8	7	1	14	11	5	4	16	8	9	5	12
(12;13)	25	10	10	4	6	3	8	7	10	10	7	8	17
(12;14)	10	4	11	1	3	8	13	18	2	10	3	3	28
(12;15)	6	12	19	2	19	6	7	3	7	22	2	6	13
(13;15)	8	19	14	6	3	17	5	12	1	6	8	19	11
(14;15)	13	4	11	9	7	15	14	10	8	15	16	12	5
(15;16)	15	7	7	11	5	10	9	8	11	9	19	7	3
(15;17)	7	2	4	18	2	1	10	5	5	4	16	11	8
(16;17)	9	1	2	15	8	8	25	2	6	8	4	2	9

ЗАДАНИЕ 2

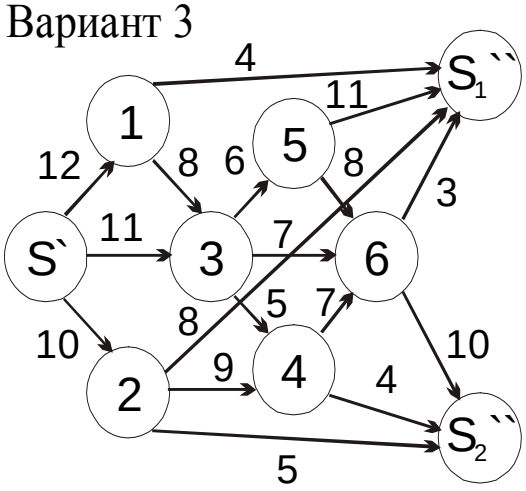
Вариант 1



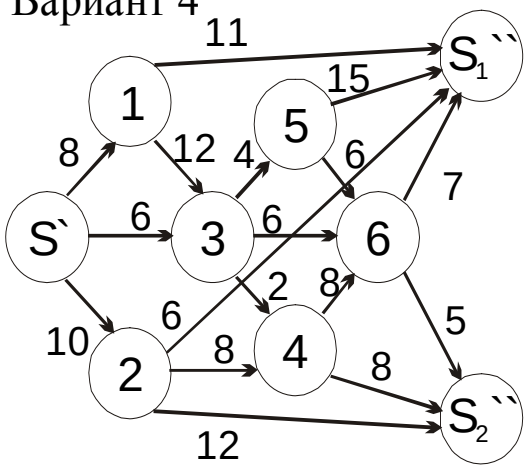
Вариант 2



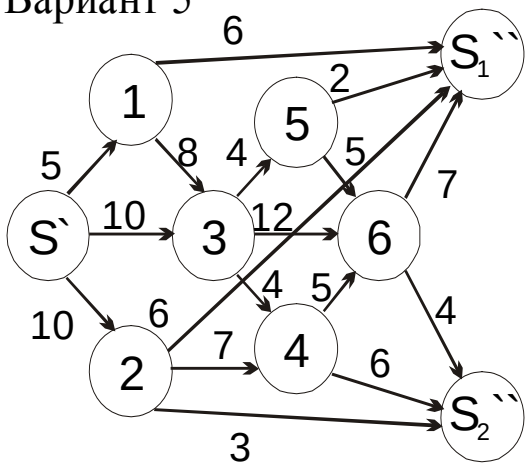
Вариант 3



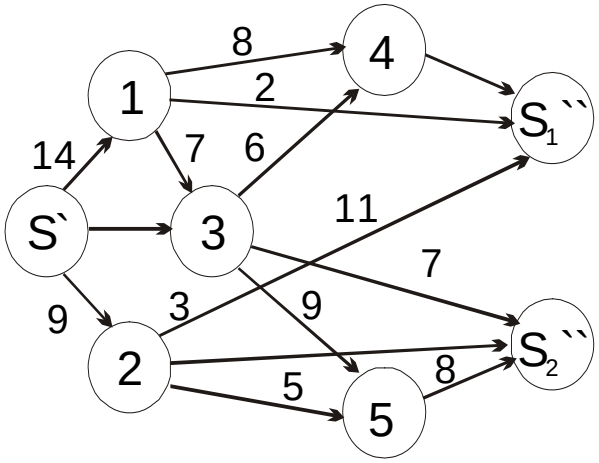
Вариант 4



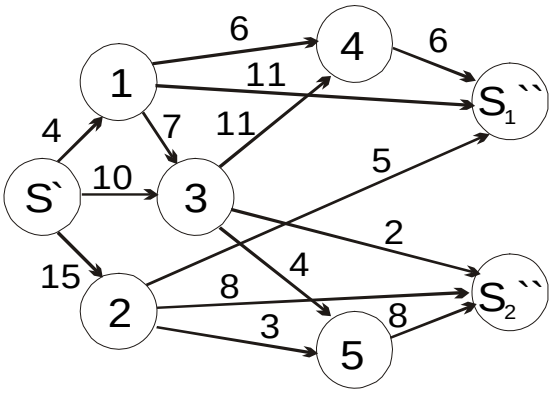
Вариант 5



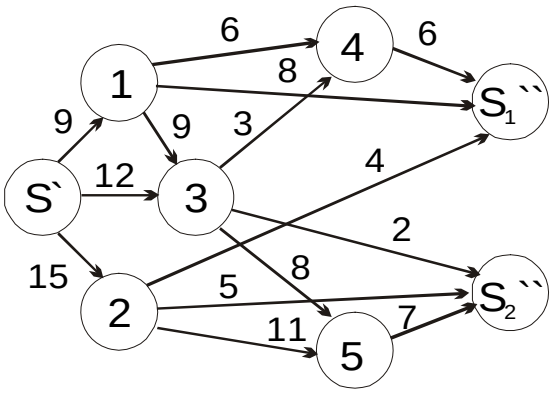
Вариант 6



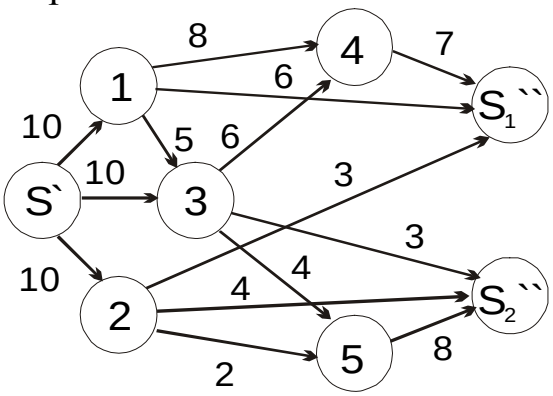
Вариант 7



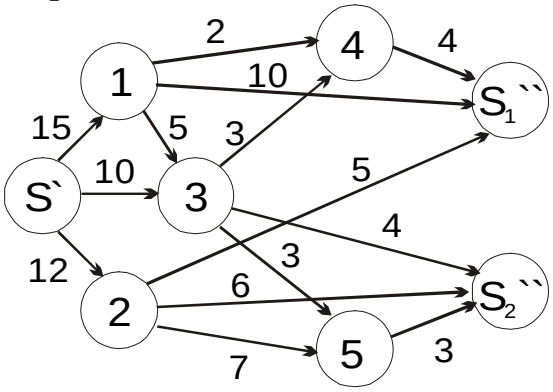
Вариант 8



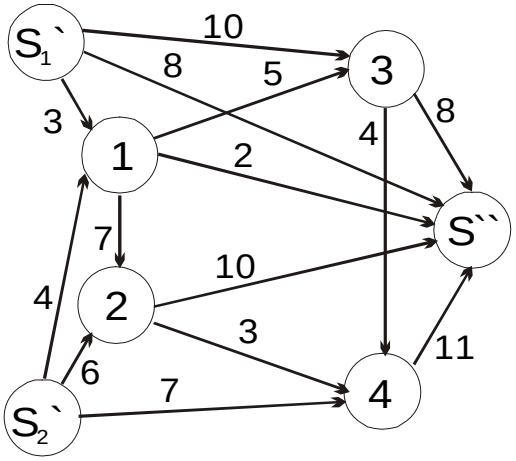
Вариант 9



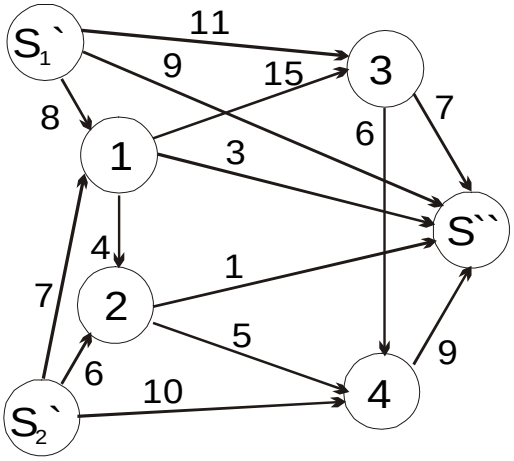
Вариант 10



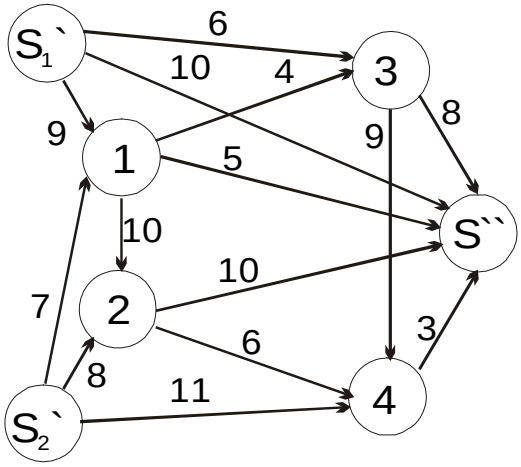
Вариант 11



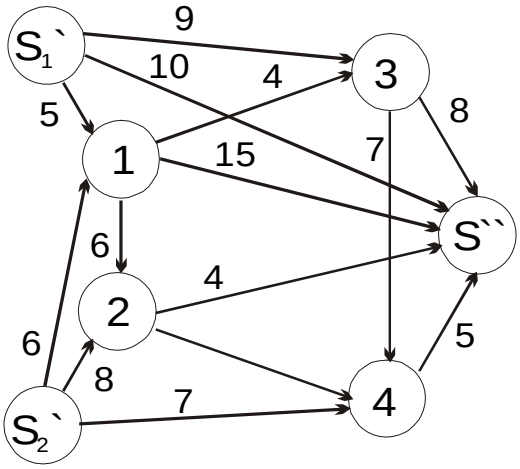
Вариант 12



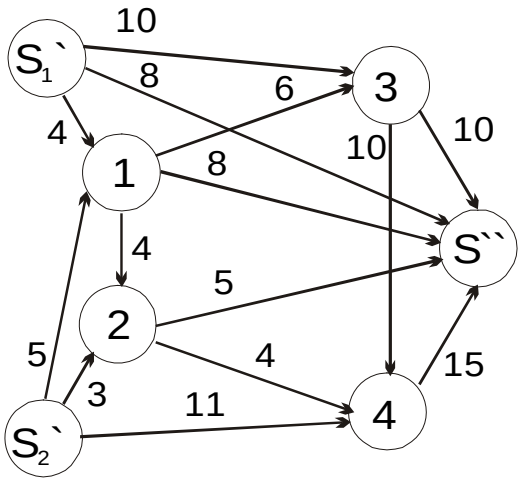
Вариант 13



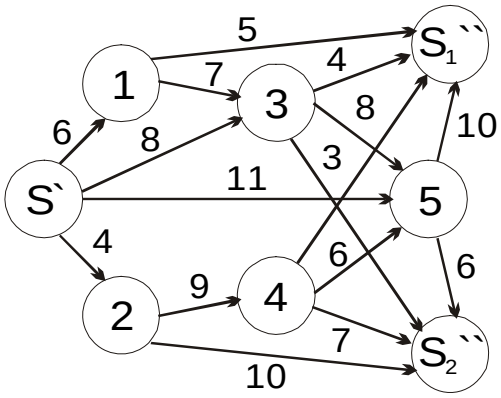
Вариант 14



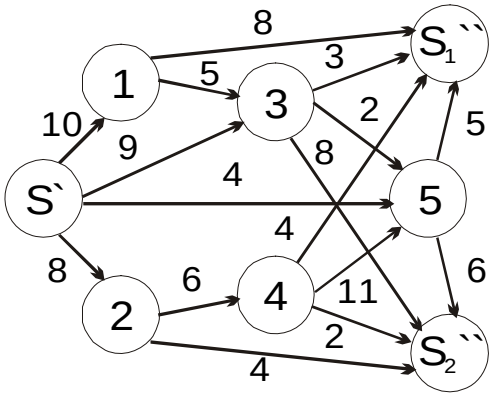
Вариант 15



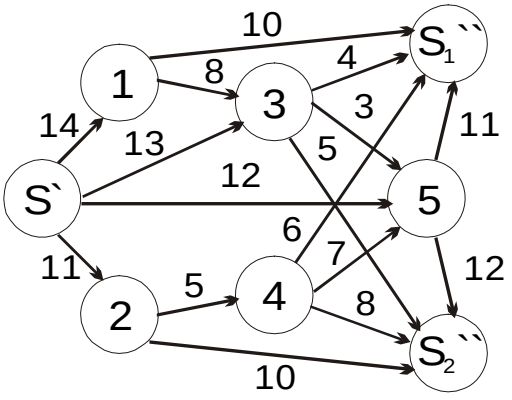
Вариант 16



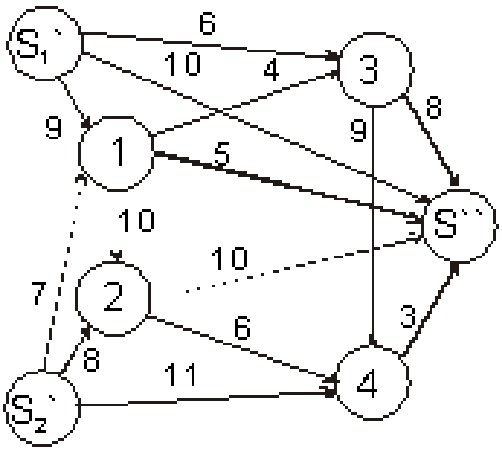
Вариант 17



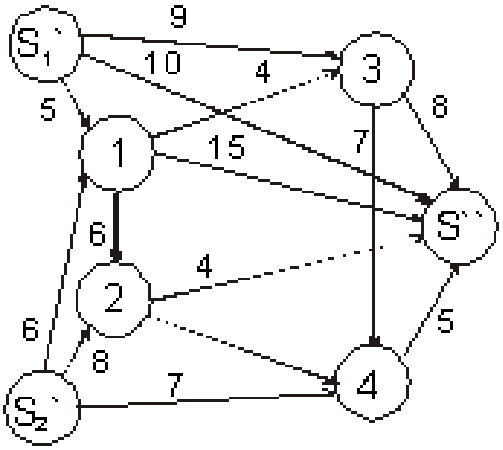
Вариант 18



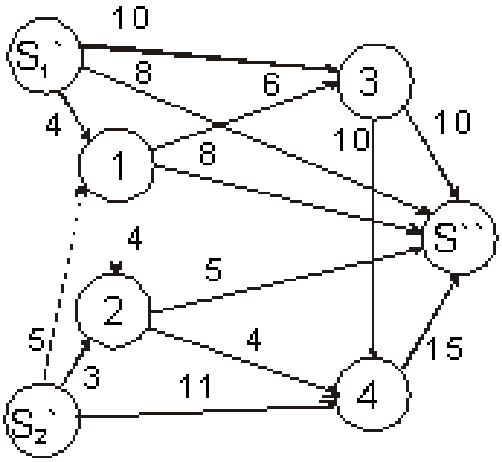
Вариант 19



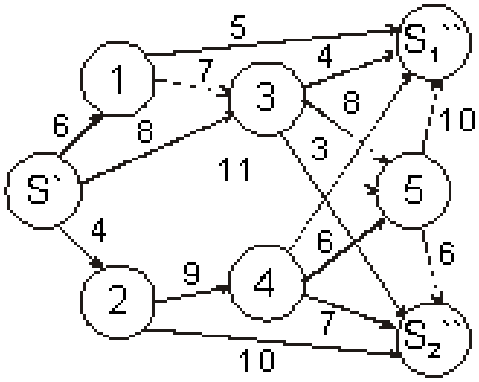
Вариант 20



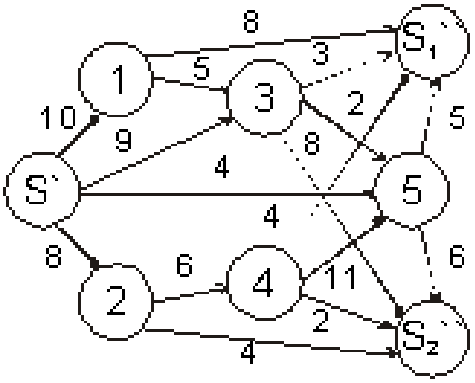
Вариант 21



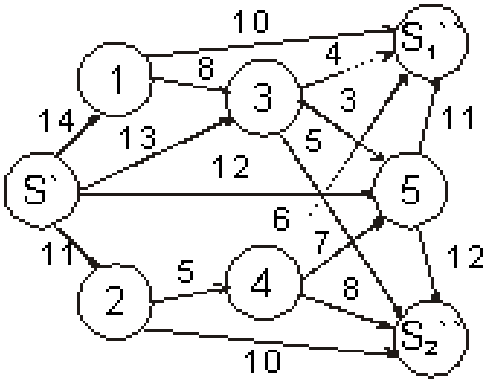
Вариант 22



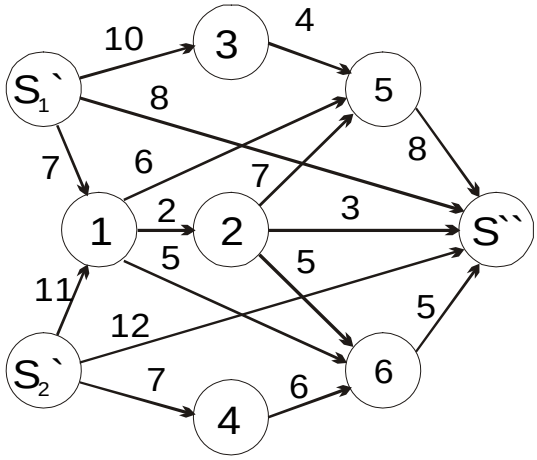
Вариант 23



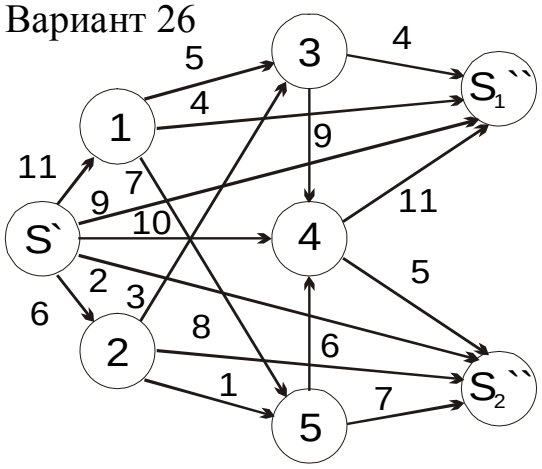
Вариант 24



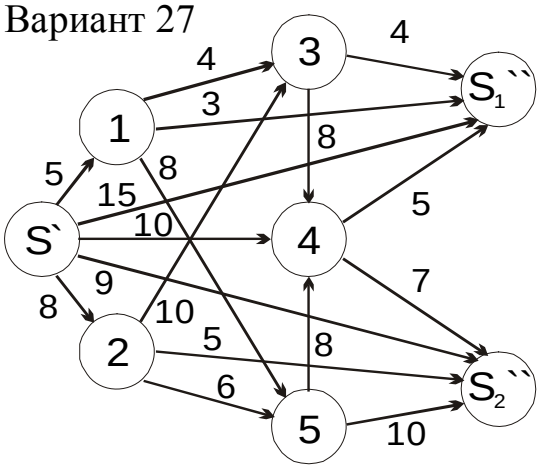
Вариант 25



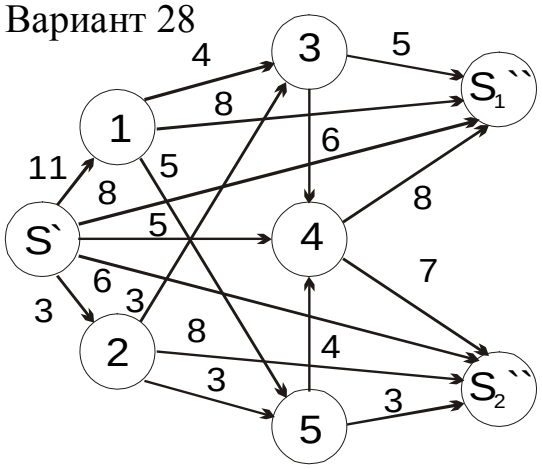
Вариант 26



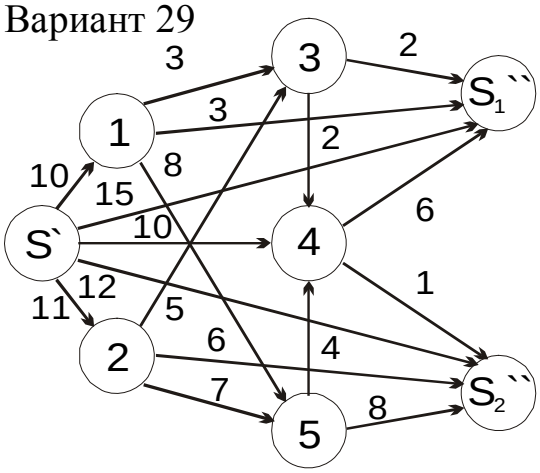
Вариант 27



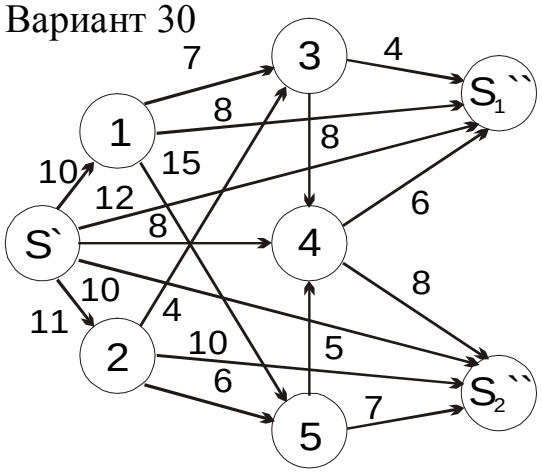
Вариант 28



Вариант 29



Вариант 30



ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЛБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ №1

Для данного графа (см. рис. 1)

- составить содержательную постановку некоторой технико-экономической задачи как задачи минимизации (или максимизации) сети;
- найти в построенном графе минимальное (или максимальное) остовное дерево с помощью алгоритмов Прима и Краскала.

сделать выводы в терминах постановки задачи

РЕШЕНИЕ.

Содержательная постановка задачи

Агрофирма «Рассвет» планирует создание мелиоративной системы для орошения полей. Известно будущее расположение полевых насосных станций и возможная коммуникационная сеть трубопроводов, соединяющих их как между собой, так и с основным резервуаром. Разработать оптимальную схему прокладки трубопровода минимальной протяженности, позволившую соединить каждую насосную станцию с основным резервуаром (либо непосредственно, либо через другие насосные станции), если известна длина трубопроводов (в км.), соединяющих все станции между собой и с основным резервуаром.

Математическая модель:

Построим математическую модель данной задачи в виде сети (рис. 1):

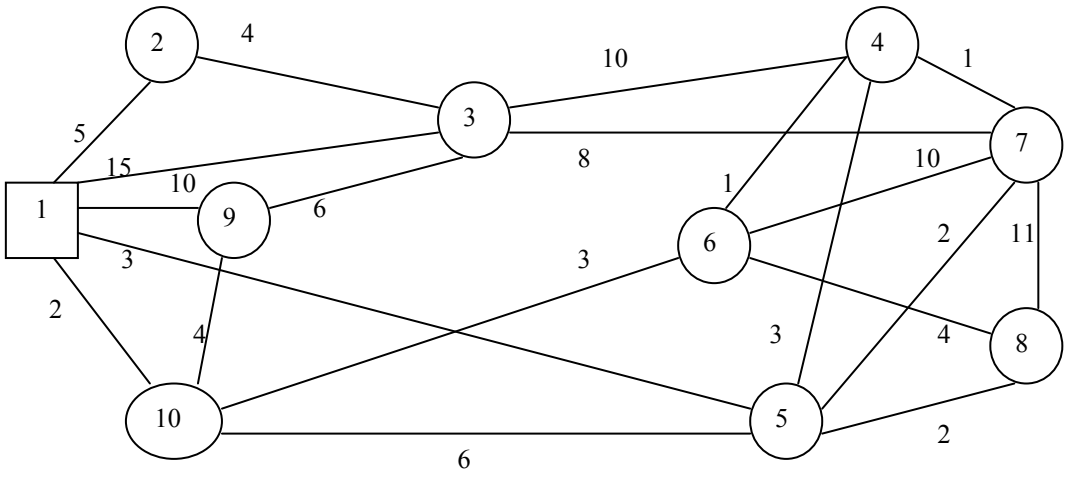


Рис. 1. Сетевая модель задачи

Пусть вершина 1 сети соответствует основному резервуару, а вершины 2-10 – насосным станциям. Ребра, связывающие пару вершин сети, обозначают трубопроводы, а их вес – длину данного трубопровода. Найти в заданной сети остовное дерево минимального веса, связывающее вершину 1 со всеми остальными вершинами сети.

Решение:

Решим исходную задачу с помощью построенной математической модели с **алгоритмом Краскала**. Для этого упорядочим ребра по возрастанию их весов:

Ребро, l	$(4,7)^{*}$	$(4,6)^{*}$	$(1,10)^{*}$	$(5,7)^{*}$	$(5,8)^{*}$	$(1,5)^{*(-)}$	$(6,10)^{-(*)}$	$(4,5)^{-}$	$(9,10)^{*}$	$(2,3)^{*}$
Вес ребра, $w(l)$	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4
Ребро, l	$(6,8)^{-}$	$(1,2)^{*}$	$(3,9)^{-}$	$(5,10)^{-}$	$(3,7)^{-}$	$(1,9)^{-}$	$(3,4)^{-}$	$(6,7)^{-}$	$(7,8)^{-}$	$(1,3)^{-}$
Вес ребра, $w(l)$	4	5	6	6	8	10	10	10	11	15

Знаком «*»отмечены ребра, включаемые в остовное дерево, знаком «-» - не включаемые.

Таким образом, данная задача имеет два оптимальных решения (остовные деревья минимального веса), построенные на рис. 2:

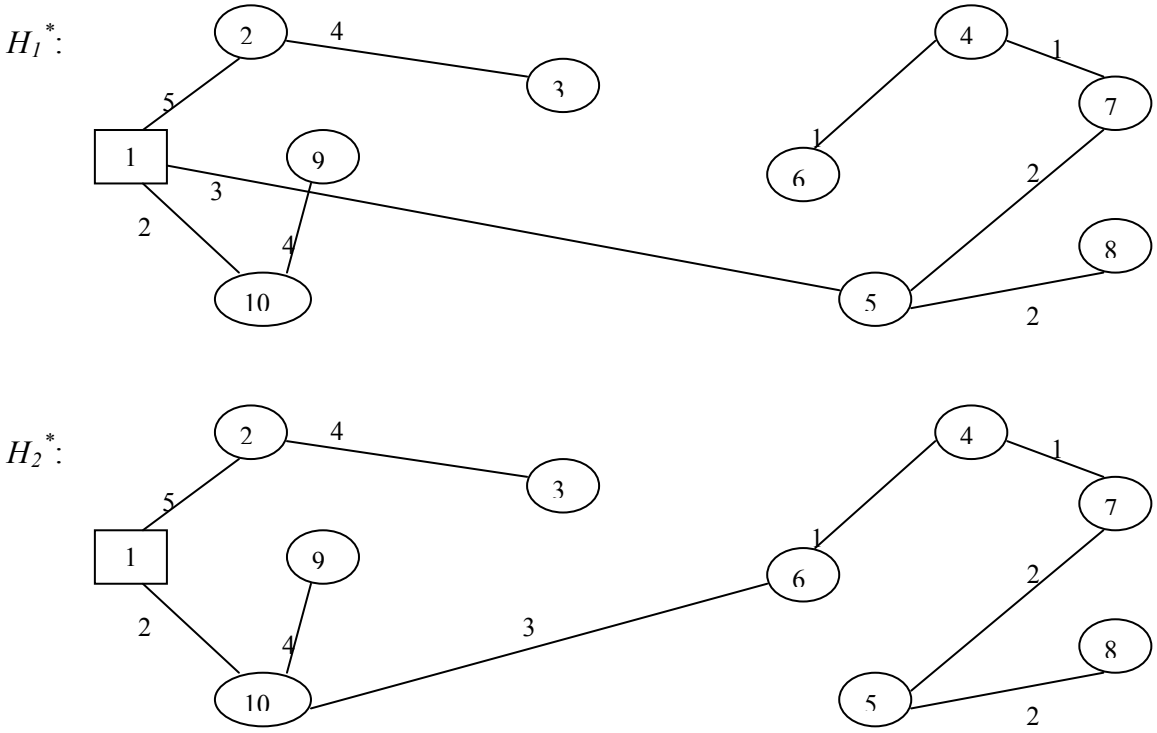


Рис. 2. Оптимальные решения задачи

Рассчитаем вес минимального остовного дерева:

$$w(l) = 1+1+2+2+2+3+4+4+5 = 24$$

Ответ:

Для прокладки мелиоративной системы потребуется минимум 24 км. трубопровода, уложенного так, как показано на рис. 2.

ЗАДАНИЕ 2.

Задан взвешенный ориентированный граф (сетевая модель). Для заданной сети:

- составить содержательную постановку некоторой технико-экономической задачи как задачи о максимальном потоке;
- найти поток, имеющий максимальную величину, с помощью алгоритма Форда-Фалкерсона;
- сделать выводы в терминах постановки технико-экономической задачи.

РЕШЕНИЕ:

Содержательная постановка задачи

Международный олимпийский комитет выбрал город *«N»* для проведения очередных олимпийских игр. Данный город имеет два международных аэропорта, связанных с городом сетью шоссейных дорог. Известны пассажиропропускные способности каждой из этих дорог, которые различаются и обусловлены их технико-эксплуатационными особенностями. Необходимо определить такое распределение пассажиропотока по заданной сети дорого, чтобы общее количество пассажиров, выезжающих из двух аэропортов в город в единицу времени, было максимальным.

Математическая модель:

Пусть S_1', S_2' - два аэропорта города; S'' - город *«N»*; *вершины 1-4* – пригороды города *«N»*, через которые проходит сеть дорог; *дуги сети* – сеть шоссейных дорог, соединяющих аэропорты с городом; *вес дуги* – максимальный пассажиропоток, проходящий по дороге за единицу времени.

Математическая модель представлена на рис. 3:

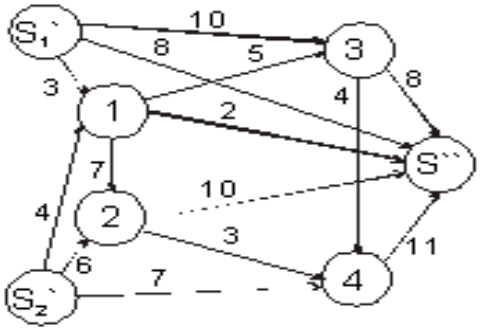


Рис. 3. Сетевая модель задачи

Решим данную задачу как задачу о максимальном потоке в сети с помощью алгоритма Форда-Фалкерсона.

Ориентированные пути из фиктивного истока $S^{/}$ в сток $S^{//}$:

1) $S^{/} \to S_2^{/} \to 4 \to S^{//}, \quad \alpha_1 = \min\{17;7;11\} = 7, \quad (S_2^{/};4)\downarrow;$
2) $S^{/} \to S_2^{/} \to 1 \to 2 \to S^{//}, \quad \alpha_2 = \min\{10;4;7;10\} = 4, \quad (S_2^{/};1)\downarrow;$
3) $S^{/} \to S_2^{/} \to 2 \to S^{//}, \quad \alpha_3 = \min\{6;6;6\} = 6, \quad (S^{/};S_2^{/}),(S_2^{/};2),(2;S^{//})\downarrow;$
4) $S^{/} \to S_1^{/} \to 3 \to S^{//}, \quad \alpha_4 = \min\{21;10;8\} = 8, \quad (3;S^{//})\downarrow;$
5) $S^{/} \to S_1^{/} \to 3 \to 4 \to S^{//}, \quad \alpha_5 = \min\{13;2;4;4\} = 2, \quad (S_1^{/};3)\downarrow;$
6) $S^{/} \to S_1^{/} \to S^{//}, \quad \alpha_6 = \min\{11;8\} = 8, \quad (S_1^{/};S^{//})\downarrow;$
7) $S^{/} \to S_1^{/} \to 1 \to 3 \to 4 \to S^{//}, \quad \alpha_7 = \min\{3;3;5;2;2\} = 2, \quad (3;4),(4;S^{//})\downarrow;$
8) $S^{/} \to S_1^{/} \to 1 \to S^{//}, \quad \alpha_8 = \min\{1;1;2\} = 1, \quad (S^{/};S_1^{/}),(S_1^{/};1)\downarrow.$

Решение оформим на сетевой модели (рис. 4).

Величина максимального потока, найденного с помощью данного алгоритма, равна:

$$\rho_{\max} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 = 7 + 4 + 6 + 8 + 2 + 8 + 2 + 1 = 38.$$

Оптимальное решение данной задачи, т.е. поток максимальной величины, показано на рис. 5.

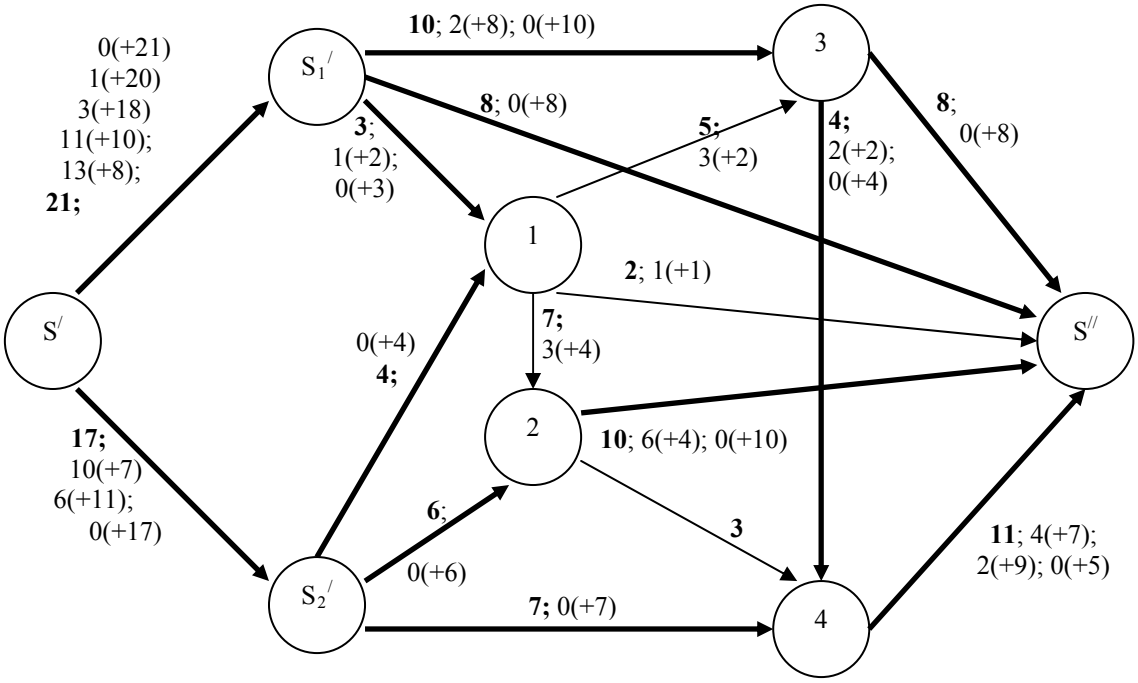


Рис. 4. Решение задачи о максимальном потоке алгоритмом Форда-Фалкерсона

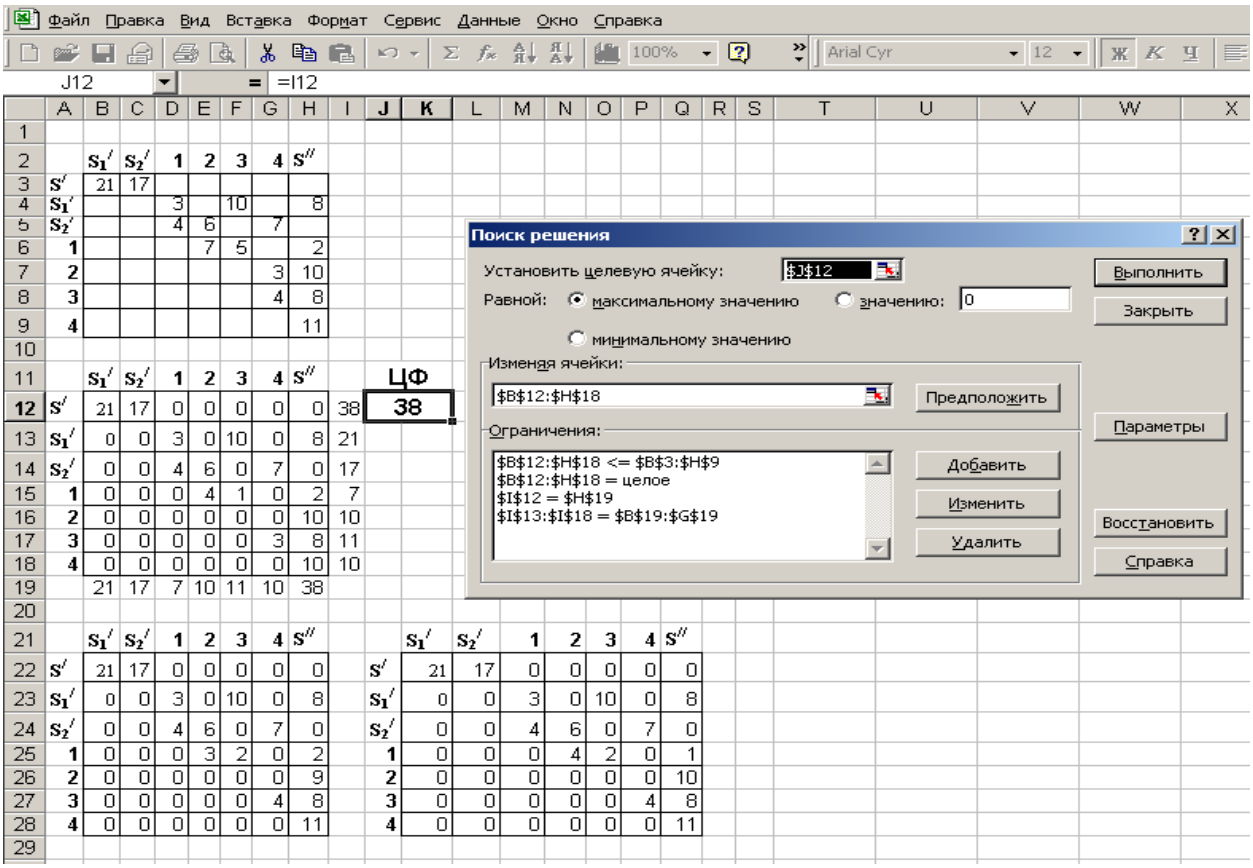


Рис. 6. Оптимальные решения задачи (максимальный поток) с помощью процедуры «Поиск решения»

Оптимальные решение задачи о максимальном потоке с помощью процедуры «Поиск решения» Microsoft Excel for Windows показаны на рис. 6:

Как видно из рис. 6 данная задача имеет три оптимальных решения.

Ответ:

Транспортировку пассажиров из аэропортов в город необходимо осуществлять согласно схеме, показанной на рис. 7 (или на рис. 8). При этом количество перевозимых пассажиров будет наибольшим и составит 38, например, тысяч человек в час.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическое программирование. Конспект лекций для студентов экономических специальностей дневного и заочного отделений /Глущевский В.В., Исаенко А.Н. – Запорожье: ЗГИА, 2003. – 150с.
2. Исследование операций. Методические указания к выполнению практических и лабораторных заданий (тема: "Решение задач линейного программирования с использованием Microsoft EXCEL for WINDOWS") для студентов ЗГИА экономических специальностей дневного и заочного отделений /Глущевский В.В., Исаенко А.Н. – Запорожье: ЗГИА, 2003. – 40с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування: Навч.-метод. Посібник для самост. Вивч. Диск. – к.: КНЕУ, 2001. – 248с.
2. Г.Г. Цегелик. Лінійне програмування.- Л.: «Світ», 1995. – 216 с.
3. Зайченко Ю.П. Исследование операций: Учеб. пособие для студентов вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Вища школа. Главное изд-во, 1979. 392 с.
4. И. А. Акулич. Математическое программирование в примерах и задачах. - М.: «Высшая школа», 1986.- 319 с.
5. Индивидуальные задания для выполнения контрольных работ по курсу «Математическое программирование» (Линейное программирование) для студентов экономических специальностей всех форм обучения.// Сост.: Глущевский В.В., ст. преподаватель, Исаенко А.Н., ст. преподаватель, - Запорожье: ЗГИА, 2002г. – 66с.
6. Лекции по теории графов /Под ред. Емеличева В.А. и др. - М.: Наука, 1990.
7. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. - М.: Мир, 1981.
8. Сакович В.А. Исследование операций (детерминированные методы и модели): Справочное пособие. - Мн.: Выш. шк., 1984.-256с.
9. Таха Х. Введение в исследование операций: в двух книгах. Кн.1,2 Пер. с англ. - М.: Мир, 1985.
10. Хазанова Л.Э. Математическое программирование в экономике: Учебное пособие. – М.: Издательство БЕК, 1998. – 141с.