Принцип возможных сил Кастильяно

Вместо того чтобы рассматривать возможные перемещения от положения равновесия, можно, как предположил Кастильяно, варьировать напряжения. В отличие от принципа Лагранжа, в котором состояние тела характеризуется *функциями перемещений*, в принципе Кастильяно определяющими являются *напряжения*. Для этого принципа вычисляют возможную работу, которую совершают *виртуальные силы* $\delta F_i, \delta R_i$, и *напряжения* $\delta\sigma_{ij}$ на действительных перемещениях u_i, независимо от действительных сил напряжений, удовлетворяющих равновесию тела. В каждой точке тела заданы перемещения и соответствующее им напряжённое состояние, удовлетворяющее уравнениям равновесия внутри тела и граничным условиям на поверхности S_σ.

Виртуальные силы $\delta F_i, \delta R_i$ и напряжения $\delta\sigma_{ij}$ являются статически допустимыми функциями, для которых справедливы уравнения равновесия внутри тела и граничные условия на его поверхности:

$\delta\sigma_{ij,j} + \rho\delta F_i = 0$ в объёме V, $\delta\sigma_{ij} l_j = \delta R_i$ на S. (1.9)

Величины $\delta\sigma_{ij}$ и δR_i на S_u являются произвольными. В каждой задаче теории упругости таких систем напряжений существует бесконечно много, поскольку эта задача статически неопределима. Действительно в три уравнения равновесия (1.9) входит шесть неизвестных функций напряжений. Принцип Кастильяно из всех статически возможных напряжений выделяет такие, которые обеспечивают не только равновесие, но и совместность деформаций тела, и таким образом, являются искомым единственным решением задачи теории упругости.

Предположим дополнительно, что вариации δR_i принимают нулевые значения на той части поверхности, где заданы поверхностные силы R_i, т.е. на S_σ.

Для формулировки принципа определяется величина *виртуальной дополнительной работы δA* внешних виртуальных сил и виртуально дополнительной работы виртуальных внутренних напряжений δW*:*

$$\begin{aligned} \delta A^* &= \int_{S_u} u_i \delta R_i dS + \int_V u_i \rho \delta F_i dV, \\ \delta W^* &= \int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Покажем равенство работ (1.10) для тела, находящегося в равновесии. Оно следует, например, из вариационных уравнений равновесия (1.9). Умножив их на u_i, просуммировав по i и проинтегрировав по объему тела, получим

$$\int_V u_i (\delta\sigma_{ij,j} + \rho \delta F_i) dV = 0. \tag{1.11}$$

Преобразуем первое слагаемое в подынтегральной функции

$$u_i \delta\sigma_{ij,j} = (u_i \delta\sigma_{ij})_{,j} - u_{i,j} \delta\sigma_{ij}.$$

Тогда, на основании теоремы Гаусса-Остроградского и вариационных граничных условий в (1.9), из (1.11) следует

$$\int_S u_i \delta R_i dS - \int_V u_{i,j} \delta\sigma_{ij} dV + \int_V u_i \rho \delta F_i dV = 0. \tag{1.12}$$

Для первого слагаемого интегрирование по всей поверхности тела S следует заменить интегрированием по части поверхности S_u, так как возможные поверхностные силы на границе S_σ обращаются в нуль.

Выражение

$$\int_{S_u} u_i \delta R_i dS + \int_V u_i \rho \delta F_i dV = \int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV, \qquad (1.13)$$

или

$$\delta A^* = \delta W^*$$

представляет собой математическую формулировку *принципа возможных сил для любого де формируемого тела:* при всяком виртуальном изменении напряжённого состояния тела сумма работ приращений всех внешних сил $\delta F_i, \delta R_i$, производимых на действительных перемещениях тела, равна приращению дополнительной работы возможных внутренних напряжений.

Как правило, $\delta F_i = 0$, так как объёмные силы обычно задаются постоянными. Равенство (1.13) справедливо для любого упругого тела, независимо от свойств материала, и если оно выполнено, то тело находится в равновесии.

Следствие. Так как перемещения и деформации не варьируются, то из принципа возможных сил (1.13), вынося знак вариации за скобку, получим выражение

$$\delta_\sigma \left[\int_V \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV - \int_{S_u} u_i R_i dS - \int_V u_i \rho F_i dV \right] = 0. \qquad (1.14)$$

Здесь индекс при δ_σ указывает, что варьируются только напряжения и силы. Первый интеграл в скобках представляет собой дополнительную потенциальную энергию деформации, а остальные – дополнительный потенциал внешних сил. Суммарную величину обозначим через П* и назовём *дополнительной потенциальной энергией тела:*

$$П^* = \int_V \varepsilon_{ij}\sigma_{ij}dV - \int_{S_u} u_i R_i dS - \int_V u_i \rho F_i dV. \qquad (1.15)$$

С помощью (1.15) уравнению (1.14) можно придать вид

$$\delta_\sigma П^* = 0.$$

Равенство нулю первой вариации дополнительной потенциальной энергии системы означает, что она принимает стационарное значение для тех сил и напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия, которые соответствуют истинному деформированному состоянию.

На основании этого принципа можно также заключить, что в случае устойчивого равновесия экстремальное значение П* соответствует минимуму (*принцип Кастильяно*), т.е. среди всех напряжённых состояний, которые удовлетворяют уравнениям равновесия, действительным является такое, для которого дополнительная энергия достигает минимума.

Вариационный принцип в динамике. Принцип Гамильтона.

Вариационное уравнение для упругого тела при динамических нагрузках можно получить из вариационного принципа Лагранжа (1.5), добавив к массовым силам силы инерции:

$$\int_{S_\sigma} R_i \delta u_i dS + \int_V \rho(F_i - \ddot{u}_i)\delta u_i dV = \int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV. \qquad (1.16)$$

Уравнение (1.16) и выражает собой *принцип виртуальных работ в динамике*.
Оно справедливо как для упругого, так и для не упругого тела, а также для линейных и нелинейных соотношений между напряжениями и деформациями. Введение закона Гука сужает принцип виртуальных работ до линейно упругих тел. Введение энергии деформации W (1.16) позволяет придать уравнению (1.16) форму

$$\int_{S_\sigma} R_i \delta u_i dS + \int_V \rho (F_i - \ddot{u}_i) \delta u_i dV = \delta W. \tag{1.17}$$

Из уравнений (1.16), (1.17) вытекает, что виртуальная работа внешних сил и сил инерции равна вариации энергии деформации. Нужно отметить, что в случае смешанных граничных условий поверхностный интеграл, входящий в вариационные уравнения, берётся только по той части поверхности S_σ, где заданы напряжения.

Из принципа виртуальных работ (1.17) для поля перемещений можно вывести так называемый *принцип Гамильтона.* Согласно ему переход системы из одного возможного состояния в другое за любой промежуток времени $[t_1,t_2]$ происходит таким образом, что функционал действия по Гамильтону принимает стационарное значение, т.е.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (\delta K + \delta W - \delta A) dt = 0,$$

где К – кинетическая энергия всей системы; W – потенциальная энергия деформации всей системы; А – работа внешних сил.