Метод Ритца – Тимошенко.

Условие стационарности функционала $\delta Э = 0$ формулирует континуальную вариационную задачу с бесконечным числом компонент перемещений, определяющих разыскиваемые функции-экстремали. Идея метода состоит в том, чтобы от континуальной формулировки перейти к дискретной, когда функционал $Э = Э(u, v, w)$ заменяется функцией $Э = Э(\alpha_i)$ (i=1,2,…,n), зависящей от конечного числа аргументов α_i. После этого задача определения экстремалей функционала перейдёт в стандартную задачу исследования указанной функции дискретного числа аргументов на экстремум.

В общем случае трёхмерного тела для перемещений u, v, w заданы выражением в виде суммы:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \begin{bmatrix} f_{ui}(x, y, z) \\ f_{vi}(x, y, z) \\ f_{wi}(x, y, z) \end{bmatrix}, \qquad (2.1.1)$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ - неизвестные числа (обобщенные перемещения), подлежащие определению; $f_1, \ldots, f_n$ - базисные функции, которыми задаются так, чтобы они удовлетворяли условиям закрепления тела.

Подставляя (2.1.1) в функционал для линейно деформируемых систем

$$Э = \frac{1}{2} \iiint_V \left[\left(A^T \vec{u}\right)^T D \left(A^T \vec{u}\right) \right] dV - \iint_S \vec{p}^T \vec{u} dS - \iiint_V \vec{g}^T \vec{u} dV,$$

где D - матрица закона Гука $(\vec{\sigma} = D\vec{\varepsilon})$ $D = \begin{bmatrix} 2G+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}$,

A – матрица оператора дифференцирования $A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$,

$g^T=[X,Y,Z]$ - вектор интенсивности объёмной внешней нагрузки (например, вес или сила инерции), после вычисления определённых интегралов от функций f_i и их производных получают его в виде квадратичной формы

$$Э=U+П=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}r_{ij}\alpha_j\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}R_{iP}\alpha_i. \tag{2.1.2}$$

При этом можно убедиться, расписав упомянутые определённые интегралы, что всегда $r_{ij}=r_{ji}$. Из условия $\delta Э=\sum_{i=1}^{n}(\partial Э/\partial\alpha_i)\delta\alpha_i=0$ ввиду произвольности вариаций $\delta\alpha_i$, получено n уравнений

$$\frac{\partial Э}{\partial\alpha_i}=\frac{\partial U}{\partial\alpha_i}+\frac{\partial П}{\partial\alpha_i}=0(i=1,2,\dots,n), \tag{2.1.3}$$

которые в случае линейно деформируемой системы с учётом (2.1.2) образуют систему n алгебраических линейных уравнений относительно обобщённых перемещений α_i:

$$\left.\begin{array}{l} r_{11}\alpha_1+\dots+r_{1n}\alpha_n+R_{1P}=0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_{n1}\alpha_1+\dots+r_{nn}\alpha_n+R_{nP}=0. \end{array}\right\} \tag{2.1.4}$$

Из (2.1.4) выделяют матрицу и вектор

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix};\vec{R}_P=\begin{bmatrix} R_{1P} \\ \dots \\ R_{nP} \end{bmatrix}. \tag{2.1.5}$$

Матрица R называется **матрицей жёсткости**, соответствующей вектору обобщённых перемещений $\vec{\alpha}=[\alpha_1,\dots\alpha_n]^T$. Она симметрична относительно главной диагонали, так как $r_{ij}=r_{ji}$. Произведение $R\vec{\alpha}=\vec{S}$ даёт вектор обобщённых упругих сил. Вектор $\vec{R}_P$ - это вектор обобщённых внешних сил. Поэтому равенства (2.1.3) и (2.1.4), которые могут быть записаны кратко в виде

$$\vec{S}+\vec{R}_P=0, \tag{2.1.6}$$

приобретают простой механический смысл, а именно: если деформированное тело (или система тел) находится в равновесии, то суммарная обобщённая сила, отвечающая каждому из возможных перемещений α_i, равна нулю. При этом суммарная обобщённая сила состоит из упругой силы $S_i = \partial U / \partial \alpha_i$ и внешней обобщённой силы $R_{iP} = \partial \Pi / \partial \alpha_i$.