

2.3. Исследование напряженно-деформированного состояния в зонах изгиба при различном нагружении [127]

Состояние материала в зоне изгиба, его изменение по переходам влияет на изменение ширины заготовки, что должно учитываться при проектировании оснастки, а также на условия устойчивости деформирования. При теоретическом анализе НДС в угловых зонах применяется схема плоской деформации, материал считается изотропным и несжимаемым, эффектом Баушингера пренебрегаем, компоненты тензора напряжений зависят только от одной из координат. Другие допущения будут формироваться по мере следования соответствующих задач.

При формовке угловых зон на первых переходах в открытых калибрах схема внешних воздействий близка к схеме гибки с растяжением (рис. 2.3,а), а на последних переходах, где осуществляется обжим заготовки по наружному контуру, схема внешних воздействий близка к схеме гибки с торцевым сжатием (рис. 2.3,б). В первом случае заготовка, как правило, получает утонение, а во втором – утолщение. При интенсивном деформировании формовку заготовки (даже на первых переходах) осуществляют в закрытых калибрах.

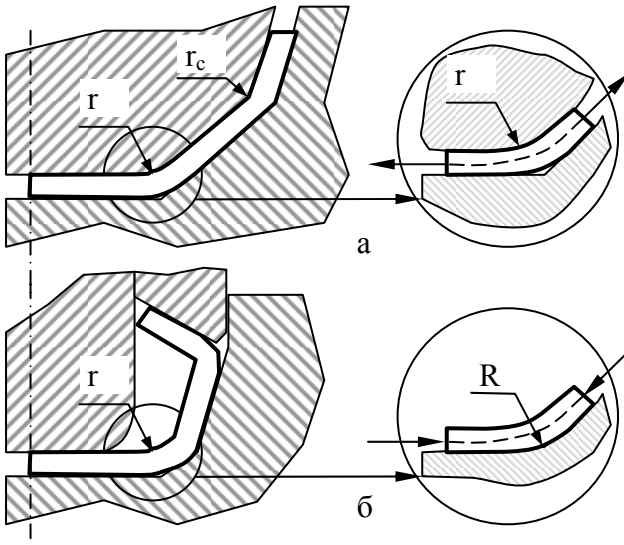


Рис. 2.3. Формовка угловых зон: а – на первых переходах; б – на последних переходах

2.3.1. Предварительные переходы – схема с растяжением [128]

На предварительных переходах, где формовка осуществляется по открытой схеме со всесторонним доступом инструмента (см. рис. 2.3,а), схему приложения сил можно представить как показано на рис. 2.4. Данное рассмотрение

относится к углам, примыкающим к стенке профиля, поскольку растягивающие силы возникают вследствие перетяжки элемента через участок инструмента, соответствующий зоне изгиба угла при донной части профиля. Однако схема растяжения присуща и углам, примыкающим к отбортовкам.

Пусть на скругленном участке верхнего ролика нагрузка от действия растягивающих сил распределена равномерно с интенсивностью p . Величину интенсивности нагрузки (давление на инструмент) можно связать с действующей силой. Действительно, в проекции на биссектрису угла действие растягивающих сил составляет величину $2N \cos[(\pi - \alpha)/2]$, а проекция распределенной нагрузки определяется интегралом:

$$\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} p r \cos \theta \cdot d\theta, \quad (2.2)$$

где α – уголгиба; θ – угол между вектором распределенной погонной силы и биссектрисой угла; r – радиус кривизны внутреннего контура зоны изгиба.

Приравнивая величину растягивающей силы и силы, определяемой интегралом (2.2), получим:

$$-2N \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} p \cdot r \cdot \cos \theta d\theta. \quad (2.3)$$

Проводя несложные преобразования левой и правой части уравнения (2.3), получим:

$$N = -p \cdot r. \quad (2.4)$$

Для вычисления смещения нейтрального слоя и последующего определения изменения толщины заготовки в угловой зоне следует рассмотреть ее напряженно-деформированное состояние.

Применим инженерный метод [129] для определения напряжений и положения нейтрального слоя по напряжениям. Уравнение равновесия угловой зоны имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \quad (2.5)$$

где $\sigma_\rho, \sigma_\theta$ – радиальное и окружное напряжение соответственно; ρ – текущее значение радиуса.

Упрощенное условие пластичности можно записать в виде:

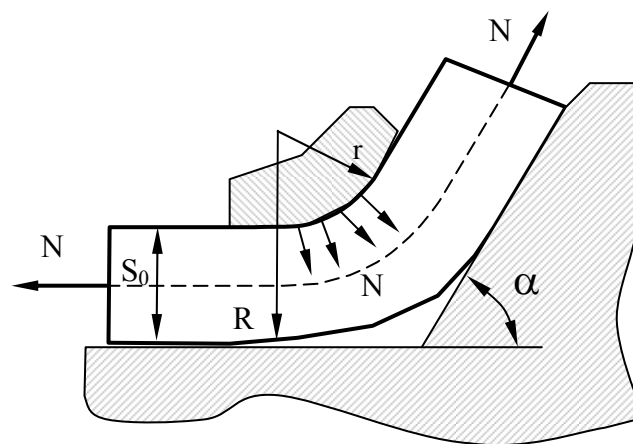


Рис. 2.4. Схема приложения сил в угловой зоне на предварительных переходах

$$\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta} = \sigma_{\tau}^* \text{ (зона сжатия)}, \quad (2.6)$$

$$\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta} = -\sigma_{\tau}^* \text{ (зона растяжения)}, \quad (2.7)$$

где σ_{τ}^* – модифицированный предел текучести материала заготовки.

Граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{\rho}(\rho = r) = -p \text{ (зона сжатия)}, \quad (2.8)$$

$$\sigma_{\rho}(\rho = R) = 0 \text{ (зона растяжения)}, \quad (2.9)$$

где R – радиус кривизны наружного контура зоны изгиба.

Используя соотношения (2.5), (2.6) и (2.8), получим распределение радиальных напряжений в сжатой зоне:

$$\sigma_{\rho}^{pc} = \sigma_{\tau}^* \cdot \ln \frac{r}{\rho} - p. \quad (2.10)$$

Интегрируя уравнение (2.5) с использованием условий (2.7) и (2.9), получим решение для зоны растяжения:

$$\sigma_{\rho}^{pp} = \sigma_{\tau}^* \cdot \ln \frac{\rho}{R}. \quad (2.11)$$

«Сшивая» решения (2.10) и (2.11), получим значение радиуса кривизны нейтрального слоя:

$$\rho_n = \sqrt{rR} \cdot \exp\left(-\frac{p}{2\sigma_{\tau}^*}\right). \quad (2.12)$$

Приближенное значение давления p можно получить из условий перетяжки материала через участок верхнего ролика, соответствующий положению зоны изгиба, примыкающей к смыкающейся полке. Погонная сила $|N|$, возникающая в зоне перетяжки, определяется соотношением:

$$|N| = \frac{\sigma_{\tau}^* \cdot s_0^2}{2(r_c + s_0/2)}, \quad (2.13)$$

где r_c – радиус скругления ролика в зоне изгиба, примыкающей к отбортовке.

Из соотношений (2.4) и (2.13) получим формулу для приближенного вычисления давления:

$$p = \frac{\sigma_{\tau}^* \cdot s_0^2}{2r(r_c + s_0/2)}. \quad (2.14)$$

Из формулы (2.15) с учетом зависимости (2.14) получим значение радиуса кривизны нейтрального слоя:

$$\rho_n^p = \sqrt{rR} \cdot \exp\left(-\frac{s_0^2}{4r(r_c + s_0/2)}\right). \quad (2.15)$$

Отметим, что положение нейтрального слоя определяется исключительно геометрическими характеристиками заготовки и не зависит от ее механических

свойств. Конечно, следует иметь в виду, что входящие в формулу (2.15) радиусы r и r_c определяются выбранной технологией профилирования, точнее, схемой формообразования.

2.3.2. Последние переходы – схема со сжатием [130]

Рассмотрим далее изгиб с торцевым сжатием, характерный для последних переходов, где осуществляется обжим заготовки по наружной поверхности и в некоторых переходах с приложением сил к торцам отбортовок. Для выявления положения нейтрального слоя напряжений, используемого далее при вычислении изменения толщины зоны изгиба, применим, как и ранее, решение уравнения равновесия (2.5) с условием пластичности (2.7).

Граничные условия для случая посадки наружного контура зоны изгиба на инструмент формулируются в виде:

$$\sigma_\rho(\rho = r) = 0 \text{ (зона сжатия),} \quad (2.16)$$

$$\sigma_\rho(\rho = R) = -q \text{ (зона растяжения),} \quad (2.17)$$

где q – давление инструмента на заготовку по наружному контуру зоны изгиба.

Из соотношений (2.16) и (2.17) получаем значение радиального напряжения для сжатой зоны:

$$\sigma_\rho^{cc} = -\sigma_\tau^* \cdot \ln \frac{r}{\rho}. \quad (2.18)$$

Используя формулы (2.5), (2.7) и (2.17), получим также радиальное напряжение для зоны растяжения:

$$\sigma_\rho^{cp} = -\sigma_\tau^* \cdot \ln \frac{R}{\rho} - q. \quad (2.19)$$

«Сшивание» решений (2.18) и (2.19) дает формулу для определения радиуса кривизны нейтрального слоя напряжений:

$$\rho_n = \sqrt{rR} \cdot \exp\left(\frac{q}{2\sigma_\tau^*}\right). \quad (2.20)$$

Как и в случае растяжения, связь погонной силы торцевого сжатия T и давления инструмента на заготовку по наружному контуру зоны изгиба дается формулой:

$$|T| = qR. \quad (2.21)$$

Для приближенного подсчета величины давления q рассмотрим схему подгибки и обжима заготовки (рис. 2.5). Погонная сила N создает изгибающий момент, необходимый для приведения примыкающего к отбортовке угловой зоны в пластическое состояние, что выражается следующим уравнением:

$$\frac{\sigma_\tau^* \cdot s_0^2}{4} = rT', \quad (2.22)$$

где T' – сила подгибки отбортовки.

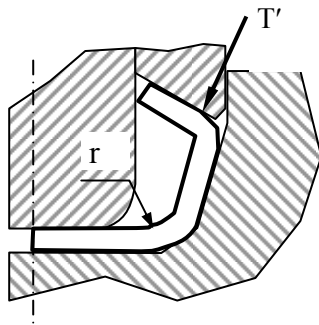


Рис. 2.5. Схема обжима заготовки в роликах

Отметим, что сила в формуле (2.22) дает минимальное значение реальной силы торцового поджатия T . Из рис. 2.5 видно, что при контакте торца заготовки с верхним роликом часть эффективной силы, осуществляющей подгибку полок, будет компенсирована составляющей силы трения между верхним роликом и торцом заготовки. Кроме того, в общем случае вектор силы T' может располагаться под некоторым углом к боковой подгибаемой полке. Так, действующая сила торцового поджатия будет представлена только некоторой составляющей T . Из соотношений (2.21) и (2.22) давление по наружной поверхности зоны изгиба определяется формулой:

$$q = \frac{\sigma_{\tau}^* \cdot s_0^2}{4rR}. \quad (2.23)$$

Подставляя значение q из формулы (2.23) в соотношение (2.20), получим зависимость для расчета положения нейтрального слоя напряжений при обжиме заготовки в последних переходах:

$$\rho_{\text{н}}^c = \sqrt{rR} \cdot \exp\left(\frac{s_0^2}{4rR}\right). \quad (2.24)$$

Значение нейтрального слоя напряжений в соответствии с формулой (2.24) подлежит использованию при расчете изменения толщины заготовки.

2.3.3. Расчет скоростей перемещений и изменения толщины заготовки в зонах изгиба [131]

Для определения изменения толщины зоны изгиба обратимся к скоростям и деформациям, сопровождающим процесс формообразования заготовки. Согласно работам [106, 108], скорости перемещения материала в радиальном и окружном направлениях соответственно могут быть представлены зависимостями:

$$u = -\frac{1}{2\alpha} \left(\rho + \frac{\rho_{\text{н}}^2}{\rho} \right), \quad (2.25)$$

$$v = \rho \frac{\theta}{\alpha}, \quad (2.26)$$

где α – суммарный угол подгибки; ρ , θ – текущие координаты, определяющие положение рассматриваемой точки.

Эти скорости совместимы с девиатором напряжений и отвечают условиям плоской деформации. В последнем легко убедиться, используя определение скоростей деформации в полярной системе координат:

$$\dot{\epsilon}_{\rho} = \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad (2.27)$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right), \quad (2.28)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\rho\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right). \quad (2.29)$$

Подстановка скоростей из формул (2.25) и (2.26) в определения (2.27) – (2.29) приводит к следующему результату:

$$\dot{\varepsilon}_\rho = -\frac{1}{2\alpha} \left(1 - \frac{\rho_H^2}{\rho^2} \right), \quad (2.30)$$

$$\dot{\varepsilon}_\rho = \frac{1}{2\alpha} \left(1 - \frac{\rho_H^2}{\rho^2} \right), \quad (2.31)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\rho\theta} = 0. \quad (2.32)$$

Из формул (2.30) – (2.32) видно, $\dot{\varepsilon}_\rho, \dot{\varepsilon}_\theta$ что являются главными скоростями деформации и, кроме того, выполняется условие несжимаемости материала заготовки. Следовательно, значения скоростей (2.25), (2.26) являются допустимыми для описания процесса деформирования. Радиальные скорости представляют собой приращения радиуса ρ за единицу времени, однако в случае деформирования заготовки в роликах целесообразнее взять в качестве параметра нагружения приращение угла подгибки $\Delta\alpha$.

Поэтому приращение произвольного радиуса на основании (2.25) можно представить в виде:

$$\Delta\rho = -\frac{1}{2\alpha} \left(\rho + \frac{\rho_H^2}{\rho} \right) \cdot \Delta\alpha. \quad (2.33)$$

Взяв разность виртуальных приращений наружного и внутреннего радиусов на основании формулы (2.31) и отнеся ее к толщине заготовки, получим:

$$\frac{\Delta s}{s_0} = -\frac{\Delta\alpha}{2\alpha} \left(1 - \exp\left(\frac{\eta}{\sigma_T^*} \right) \right), \quad (2.34)$$

где η принимает значение p в случае растяжения и q – в случае сжатия.

Формулу (2.34) можно переписать для указанных двух случаев с учетом зависимостей (2.15) и (2.24) в следующей форме:

$$\frac{\Delta s}{s_0} = -\frac{\Delta\alpha}{2\alpha} \left(1 - \exp\left(\frac{s_0^2}{4r(r_c + s_0/2)} \right) \right), \quad (2.35)$$

$$\frac{\Delta s}{s_0} = -\frac{\Delta\alpha}{2\alpha} \left(1 - \exp\left(\frac{s_0^2}{4rR} \right) \right). \quad (2.36)$$

Для расчета утонения или утолщения, например, для k -го перехода, согласно формулам (2.35) и (2.36) надлежит вводить обозначения:

$$\alpha = \alpha_k, \Delta\alpha = \alpha_k - \alpha_{k-1},$$

где α_{k-1} , α_k – углы подгибки на предшествующем и текущем переходах соответственно.

На рис. 2.6 приведен график, выполненный на основе зависимости (2.35), а на рис. 2.7 – график, выполненный на основе зависимости (2.36).

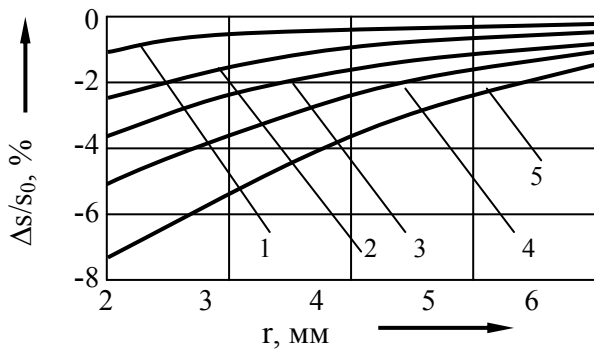


Рис. 2.6. Зависимость утонения от внутреннего радиуса и угла подгибки: 1, 2, 3, 4, 5 – $\Delta\alpha = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ$ соответственно

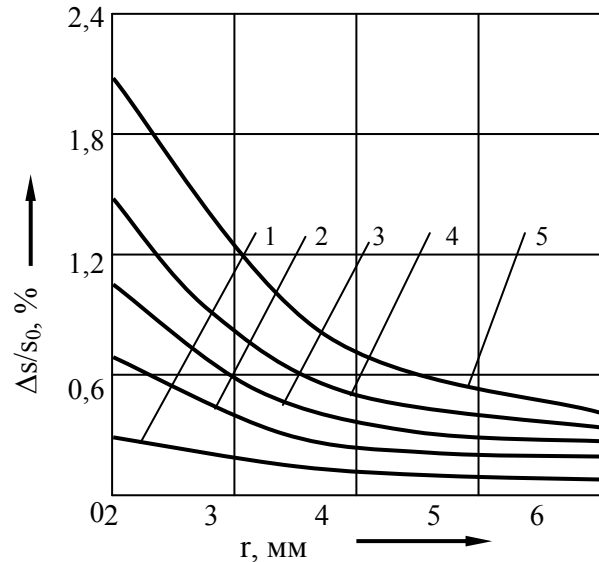


Рис. 2.7. Зависимость утолщения от внутреннего радиуса и угла подгибки: 1, 2, 3, 4, 5 – $\Delta\alpha = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ$ соответственно

Разработанная модель дает весьма близкие результаты к экспериментальным данным по утонению угловых зон на первых переходах при традиционном профилировании, где среднее утонение составляет 2 – 3%, хотя формообразование МИД и ТП существенно различаются. Особенность деформирования заготовки при МИД в первом переходе обусловлена тем, что здесь происходит монотонное изменение радиуса ее кривизны от бесконечности до конечного значения на готовом профиле. В этом случае значительное утонение заготовки обусловлено схемой деформирования, большим углом подгибки и отсутствием предварительного упрочнения угловых зон. При интенсивном деформировании изменение радиусов на последующих переходах незначительно в отличие от традиционного профилирования, при котором радиусы кривизны участков будущих угловых зон изменяются монотонно.

Таким образом, разработанная модель изменения толщины криволинейных участков заготовки в зависимости от расклада силовых факторов устанавливает тенденцию к увеличению утонения или утолщения с уменьшением радиуса изгиба и с увеличением угла подгибки. Уточненный расчет ширины заготовки по разработанной модели позволяет избежать ошибок при разработке технологического оснащения, сократить сроки и затраты на освоение технологии, повысить качество профилей за счет предотвращения потери устойчивости подгибаемых элементов.

2.4. Исследование зоны плавного перехода [132, 133]

Основной особенностью МИД является одновременная формовка всех элементов профиля, что позволяет существенно уменьшить число переходов по сравнению с традиционным профилированием. Одним из существенных ограничений этой технологии является переформовка заготовки из-за больших углов подгибки элементов, при которых длина зоны плавного перехода (ЗПП) простирается за пределы предшествующего перехода. При проектировании технологии эффект переформовки заготовки далеко не всегда удастся прогнозировать. Поэтому важной задачей является разработка модели ЗПП для упрочняющегося материала с целью выбора предельных углов подгибки, не допускающих переформовки заготовки.

Будем использовать вариационный метод, определив предварительно работу пластической деформации полки, угловой зоны и дна профиля.

Рассмотрим подгибаемую полку приведенных размеров, смежную с дном профиля (рис.2.8) на одном из технологических переходов, опустив индексацию переходов. Будем считать, что в данном переходе (скажем, k -м) угол подгибки равен θ_k , а в межклетьевом пространстве текущий угол подгибки является функцией $\theta(x_2)$. При этом следует иметь в виду, что k ($k-1$)-му переходу суммарный угол подгибки будет составлять α_{k-1} , а к k -му переходу – $\alpha_k = \alpha_{k-1} + \theta_k$. При подгибке полки примем следующие допущения: 1) материал заготовки – несжимаемый, упрочняемый по степенному закону; 2) ширина полки не изменяется, а срединная поверхность полки описывается линейчатой поверхностью; 3) пренебрегаем сдвиговыми деформациями в плоскости полки; 4) пренебрегаем размерами угловой зоны в сравнении с шириной полки.

Уравнение срединной поверхности полки в выбранной системе координат будет иметь вид:

$$x_1 - \frac{C}{2} = v \cdot \cos \theta(u), \quad x_2 = u, \quad x_3 = v \cdot \sin \theta(u), \quad (2.37)$$

где x_1, x_2, x_3 – декартовы координаты; C – ширина донной части профиля; v, u – криволинейные координаты.

Вычислим предварительно деформации полки при подгибке, для чего найдем коэффициенты первой квадратичной формы ее срединной поверхности, задаваемой уравнениями (2.37):

$$E = \frac{\partial x_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u} = 1 + v^2 \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2; \quad F = \frac{\partial x_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0; \quad G = \frac{\partial x_i}{\partial v} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial v} = 1, \quad (2.38)$$

где E, F, G – коэффициенты первой квадратичной формы.

Длина дуги dS в криволинейной системе координат дается выражением:

$$dS = \sqrt{E \cdot (du)^2 + 2F \cdot du \cdot dv + G \cdot (dv)^2}. \quad (2.39)$$

Продольная деформация e_u для точек, равноудаленных от зоны изгиба, с учетом формул (2.38) – (2.39) определяется соотношением ($dv = 0$):

$$e_u = \ln\left(\frac{dS|_{dv=0}}{du}\right) = \ln(\sqrt{E}) = \frac{1}{2} \cdot \ln E. \quad (2.40)$$

Логарифмическая деформация e_v в направлении координаты v с учетом соотношений (2.38) – (2.39) вычисляется по формуле:

$$e_v = \ln\left(\frac{dS|_{du=0}}{dv}\right) = \ln(\sqrt{G}) = 0. \quad (2.41)$$

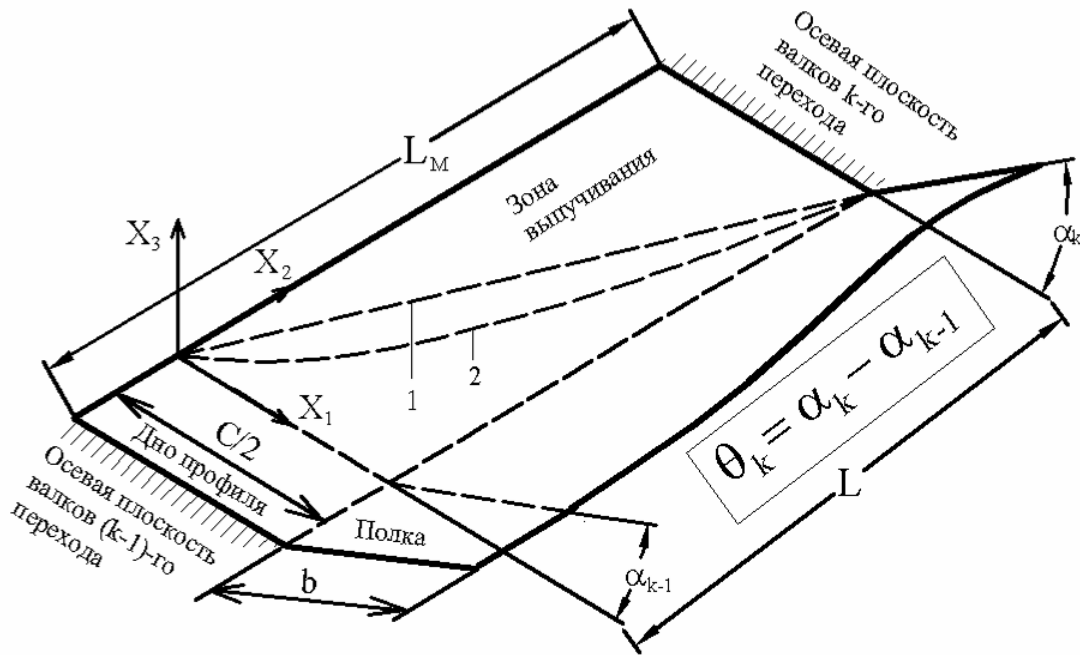


Рис.2.8. Геометрия ЗПП и расположение локальной системы координат:

- 1 – аппроксимация реальной границы пластической области;
- 2 – реальная граница пластической области

Учитывая допущение о несжимаемости материала, из формул (2.40) и (2.41) получаем формулу для определения деформации по толщине полки:

$$e_n = -e_u - e_v = -e_u. \quad (2.42)$$

Интенсивность деформаций e_i с учетом формулы (2.42) можно найти:

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \ln\left(1 + v^2 \cdot \left(\frac{\partial\theta(u)}{\partial u}\right)^2\right). \quad (2.43)$$

Удельную работу деформации полки A_n^{y0} с учетом степенного упрочнения можно получить интегрированием приращения удельной работы:

$$A_n^{y0} = \int \sigma_i \cdot de_i = \frac{1}{m+1} \cdot A \cdot e_i^{m+1} \approx \frac{A}{m+1} \cdot \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot v^2 \cdot \left(\frac{\partial\theta(u)}{\partial u}\right)^2 \right]^{m+1}, \quad (2.44)$$

где σ_i – интенсивность напряжений; A , m – параметры упрочнения; e_i – интенсивность деформаций, определяемая формулой (2.43).

Для вычисления удельной работы, связанной с формированием угловой зоны, следует сделать некоторые предварительные замечания. При использовании метода интенсивного деформирования схема формовки предусматривает постоянную величину радиуса зон изгиба на каждом из переходов, что вовсе не означает отсутствие энергетических затрат, идущих на формообразование этих зон. Во-первых, в каждой клетке происходит нагружение будущих угловых зон по крайней мере до уровня пластического состояния; во-вторых, размер угловых зон изменяется уже в межклетьевом пространстве вследствие изменения угла подгибки. Поэтому сформулируем допущения для угловой зоны: 1) принимается схема плоской деформации ($e_u = 0$); 2) радиус кривизны срединной поверхности остается постоянным практически на всех этапах деформирования; 3) работа деформирования сжатой зоны равна работе деформирования растянутой зоны; 4) элементарные площадки при изгибе сохраняют свои площади: $\alpha \cdot \rho \cdot d\rho = \alpha \cdot \rho_c \cdot d\rho_c$, где $d\rho$, $d\rho_c$ – приращения радиусов кривизны вблизи произвольной точки и вблизи срединного слоя соответственно.

Координаты произвольной точки угловой зоны в межклетьевом пространстве задаются следующими соотношениями (рис. 2.9):

$$x_1 - \frac{C}{2} = \rho \cdot \sin\left(\frac{\theta(u)}{2} + \gamma\right) - \rho_c \cdot \sin\left(\frac{\theta(u)}{2}\right); \quad x_2 = u; \quad x_3 = \rho_c - \rho \cdot \cos\left(\frac{\theta(u)}{2}\right), \quad (2.45)$$

где ρ – текущий радиус; ρ_c – радиус срединной поверхности угловой зоны; γ – текущий угол, отсчитываемый от биссектрисы угла.

Для определения деформаций найдем предварительно коэффициенты первой квадратичной формы с учетом соотношений (2.45):

$$E = \frac{\partial x_i}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \rho} = 1, \quad F = \frac{\partial x_i}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \gamma} = \rho \cdot \sin(\theta + 2\gamma), \quad G = \frac{\partial x_i}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \gamma} = \rho^2. \quad (2.46)$$

Длина дуги для этого случая определяется формулой:

$$dS = \sqrt{E \cdot (d\rho)^2 + 2 \cdot F \cdot d\rho \cdot d\gamma + G(d\gamma)^2}. \quad (2.47)$$

Окружные логарифмические деформации с использованием зависимостей (2.46) и (2.47) вычисляются так:

$$e_\gamma = \ln\left(\frac{dS|_{d\rho=0}}{d\gamma \cdot \rho_c}\right) = \ln\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right), \quad (2.48)$$

а радиальная компонента деформации с учетом третьего допущения вычисляется следующим образом:

$$e_\rho = \ln\left(\frac{dS|_{d\gamma=0}}{d\rho_c}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{(d\rho)^2 \cdot \rho_c}}{\rho \cdot d\rho}\right) = \ln\left(\frac{\rho_c}{\rho}\right). \quad (2.49)$$

Из формул (2.48) и (2.49) следует, что

$$e_\rho = -e_\gamma. \quad (2.50)$$

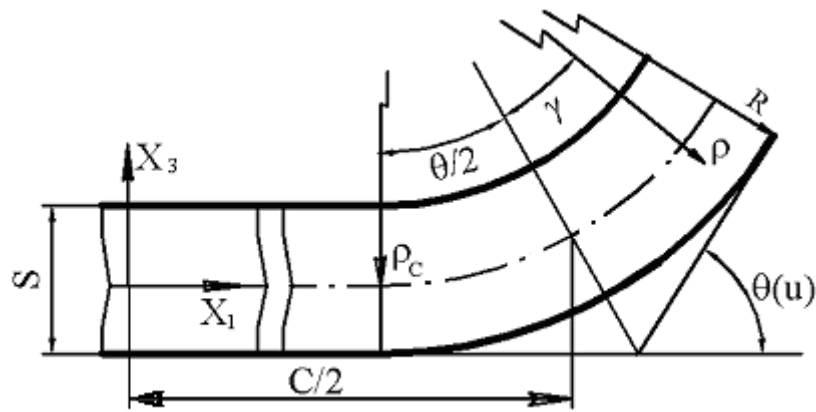


Рис. 2.9. Параметры угловой зоны

Принимая во внимание первое допущение и формулу (2.50), можно констатировать, что для угловой зоны условие несжимаемости также выполняется.

Следуя логике вычисления удельной работы формообразования полки, найдем удельную работу деформирования угловой зоны:

$$A_{yz}^{y\delta} = \frac{A}{m+1} \cdot e_i^{m+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \ln \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) \right)^{m+1}. \quad (2.51)$$

При подгибке полки происходит передача в донную часть профиля сил, заставляющих ее выпучиваться и приходить в пластическое состояние, причем зона выпучивания обычно не простирается далее зоны плавного перехода. На рис.2.8 показана пластическая зона донной части профиля, для которой разумными являются следующие допущения: 1) работа выпучивания мала в сравнении с работой пластического сжатия; 2) длина пластической области в донной части профиля равна протяженности зоны плавного перехода подгибаемой полки; 3) боковые границы пластической области в донной части профиля близки по форме к ветвям некоей параболы, которые могут быть аппроксимированы линейной зависимостью с углом подгибки в качестве аргумента.

В этом случае удельную работу пластического деформирования дна профиля можно представить соотношением:

$$A_{\delta}^{y\delta} = \frac{A}{m+1} \cdot e_{np}^{m+1}, \quad (2.52)$$

где e_{np} – величина предельной упругой деформации.

Последующая задача состоит в определении полной работы пластической деформации полки, угловой зоны и донной части профиля. Полная работа формообразования полки определяется на основе формулы (2.44), полученной с учетом разложения в ряд Тейлора логарифмической функции (2.43) с удержанием члена первого порядка малости:

$$A_n^{полн} = \int_0^L \int_0^b \int_0^S A_n^{y\delta} dS \cdot dv \cdot du = W \int_0^L \left(\frac{\partial \theta(u)}{\partial u} \right)^{2m+2} du, \quad (2.53)$$

где L – протяженность зоны плавного перехода; S – толщина заготовки.

В формуле (2.53) величина W дается следующей формулой:

$$W = \frac{A \cdot S \cdot b^{2m+3}}{(m+1)(2m+3)} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{m+1}. \quad (2.54)$$

Полная работа пластического деформирования угловой зоны вычисляется с использованием формулы (2.51):

$$A_{yz}^{полн} = 2 \int_0^b \int_{\rho_c}^R A_{yz}^{y\theta} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot du = \frac{2A}{m+1} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{m+1} \cdot \int_{\rho_c}^R \left[\ln\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) \right]^{m+1} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot \int_0^L \theta(u) du, \quad (2.55)$$

где R – радиус кривизны наружного контура зоны изгиба.

В формуле (2.55) подынтегральное выражение, содержащее логарифм, может быть разложено в ряд Тейлора с удержанием первого члена ряда:

$$\ln \sum_{i=1}^n \left[\frac{\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^i}{i \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^i} \right] \approx \frac{\rho - \rho_c}{\rho}. \quad (2.56)$$

Анализ соотношения (2.56) при $\rho = R$ показывает, что второй и несколько последующих членов не превышают в сумме 10% от величины первого члена. Учитывая также, что m существенно меньше единицы, интеграл, содержащий логарифмическую функцию, после проведения интегрирования принимает следующее значение (при $R \approx \rho_c + S/2$):

$$\int_{\rho_c}^R \left[\ln\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) \right]^{m+1} \cdot \rho \cdot d\rho \approx \frac{1}{m+1} \cdot \left(\frac{S}{2}\right)^{2+m}. \quad (2.57)$$

Принимая во внимание формулу (2.57), полная работа пластического деформирования угловой зоны обретает вид:

$$A_{yz}^{полн} = Y \cdot \int_0^L \theta(u) \cdot du, \quad (2.58)$$

где $Y = \frac{2A}{1-m^2} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{m+1} \cdot \left(\frac{S}{2}\right)^{m+2}$.

Полная работа пластического деформирования донной части профиля с учетом формулы (2.52) и допущения об аппроксимации границы пластической области принимает следующий вид:

$$A_o^{полн} = \int_0^L Z \cdot \theta(u) \cdot du, \quad (2.59)$$

где $Z = \frac{A}{m+1} \cdot e_{np}^{m+1} \cdot S \cdot \eta$ (здесь $\eta = C/(2 \cdot \theta_k)$ согласно третьему допущению).

Полная функция работ для правой половины профиля определяется на основе формул (2.53), (2.58) и (2.59):

$$A^{полн} = \int_0^L \left[W \cdot \left(\frac{\partial \theta(u)}{\partial u} \right)^{2m+2} + (Y + Z) \cdot \theta(u) \right] \cdot du . \quad (2.60)$$

Теперь надлежит решить вариационную задачу с подвижной границей:

$$\delta A^{полн} = \delta \int_0^L \xi(\dot{\theta}, \theta, u) \cdot du , \quad (2.61)$$

где ξ равно подынтегральной функции в формуле (2.60).

Решение задачи (2.61) сводится к интегрированию уравнения Эйлера [134]:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \theta} - \frac{d}{du} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \dot{\theta}} \right] = 0 ,$$

которое принимает следующий вид:

$$\frac{d(\dot{\theta})^{2m+1}}{du} = \zeta , \quad (2.62)$$

где $\zeta = \frac{Y + Z}{W \cdot (2m + 2)}$.

Решение дифференциального уравнения (2.62) в окончательном виде представляется функцией:

$$\theta(u) = D \cdot (\zeta \cdot u + C_1)^B + C_2 , \quad (2.63)$$

где C_1, C_2 – константы, подлежащие определению.

Здесь $D = \frac{2m+1}{\zeta \cdot (2m+2)}$, $B = \frac{2m+2}{2m+1}$.

Граничные условия для определения констант в решении (2.63) формулируются таким образом:

$$\theta(u)|_{u=0} = 0; \quad \frac{d\theta}{du}|_{u=0} = 0 .$$

После удовлетворения указанным граничным условиям решение (2.63) приобретает вид:

$$\theta(u) = D(\zeta \cdot u)^B . \quad (2.64)$$

Для определения протяженности ЗПП необходимо использовать условие $\theta(u)|_{u=L} = \theta_k$, откуда следует:

$$L = \left(\frac{\theta_k}{D} \right)^{\frac{1}{B}} \cdot \frac{1}{\zeta} . \quad (2.65)$$

Рассмотрим предельные случаи для модели (2.65). Если положить $C = 0$ ($Z = 0$), то получаем модель Гунна-Полухина для формовки уголка из упрочняющейся полосы [107]. Полагая $m = 0$ (неупрочняющийся материал заготовки), легко показать, что предлагаемая модель в точности совпадает с моделью

Бхаттачария-Коллинза [4] и с моделью ЗПП при стесненном изгибе для случая формовки изотропной полосы с постоянным радиусомгиба и одинаковым средним диаметром формирующих роликов смежных переходов [5].

Таким образом, разработанная модель ЗПП, учитывающая упрочнение материала и прогиб донной части профиля при формообразовании профиля с использованием МИД, позволяет гарантировать отсутствие переформовки заготовки путем ограничения углов подгибки полок, а также сократить число переходов.