

**МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В
ИНЖЕНЕРНОЙ ПРАКТИКЕ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебном пособии рассматриваются методы вычислений, используемые в инженерной практике. Инженерные задачи отличаются большим объемом вычислительной работы, конкретным научно-техническим содержанием, разнообразием используемых методов решения, необходимостью завершения вычислительного процесса получением чисел и графиков. В пособии проведен отбор численных методов для типичных задач, встречающихся в инженерных расчетах. Описание методов ориентировано на конкретную реализацию соответствующих алгоритмов на ЭВМ. Особенности алгоритмов иллюстрируются на примерах. Даются рекомендации методологического плана по изучению тем в рамках курса математического моделирования.

1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В задачах математического моделирования очень часто возникает необходимость заменить используемую в расчетах функциональную зависимость $y(x)$ приближенной функцией $\varphi(x, \bar{a})$, по которой легко вычисляются значения исходной функции и которая в определенном смысле близка к $y(x)$. После такой замены все расчеты выполняют, используя зависимость $\varphi(x, \bar{a})$, причем близость $y(x)$ и $\varphi(x, \bar{a})$ обеспечивается подбором свободных параметров $\bar{a} = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$.

В простейшем варианте лагранжевой интерполяции, когда функция $y(x)$ задана в узлах некоторой сетки x_i , параметры \bar{a} определяют из условия совпадения $\varphi(x, \bar{a})$ со значениями функции в фиксированном числе узлов.

Получаемая при этом система уравнений имеет вид

$$\varphi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_n) = y(x_i) \equiv y_i, \quad 0 \leq i \leq n. \quad (1.1)$$

Из этой системы можно определить все a_i .

Интерполяция может быть линейной или нелинейной, в соответствии с характером зависимости функции $\varphi(x, \bar{a})$ от параметров \bar{a} .

1.1. Линейная интерполяция

При линейной интерполяции функция $\varphi(x, \bar{a})$ имеет вид

$$\varphi(x, \bar{a}) = \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x), \quad (1.2)$$

где все функции $\varphi_j(x)$ линейно независимы.

Подставляя (1.2) в (1.1), получим систему линейных уравнений для определения a_i :

$$\sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq n \quad . \quad (1.3)$$

Единственность решения обеспечивается требованием неравенства нулю определителя системы (1.3):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.4)$$

при $x_k \neq x_l$ (т.е. при любых несовпадающих узлах).

Систему функций, удовлетворяющую условию (1.4), называют чебышевской. Из различных систем функций наиболее распространены многочлены, хотя применяют также тригонометрические и экспоненциальные функции.

Если в качестве системы функций выбрать степенные функции аргумента, т.е. $\varphi_j(x) = x^j$, то определитель (1.4) окажется определителем

Вандермонда, который не равен нулю при условии $x_k \neq x_l$. Следовательно, интерполяционный полином всегда существует и он единствен.

Для практических вычислений удобно использовать многочлен $P_n(x)$ в форме интерполяционного полинома Ньютона. Введем понятие разделенных разностей функции $y(x)$, заданной в узлах x_i :

$$\begin{aligned} y(x_i, x_j) &= [y(x_i) - y(x_j)] / (x_i - x_j), \\ y(x_i, x_j, x_k) &= [y(x_i, x_j) - y(x_j, x_k)] / (x_i - x_k), \\ y(x_i, x_j, x_k, x_l) &= [y(x_i, x_j, x_k) - y(x_j, x_k, x_l)] / (x_i - x_l), \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

Правило образования таких конструкций понятно из приведенной записи. Разделенные разности первого, второго и более высоких порядков связаны с производными соответствующих порядков.

Рассмотрим разделенные разности полинома $P_n(x)$. Многочлен $P_n(x) - P_n(x_0)$ обращается в нуль при $x = x_0$, поэтому он делится нацело на $(x - x_0)$, т.е. разделенная разность первого порядка многочлена n -й степени

$$P(x, x_0) = [P_n(x) - P_n(x_0)] / (x - x_0) \quad (1.6)$$

есть многочлен степени $(n - 1)$ относительно x , а в силу симметрии - и

относительно x_0 .

Разделенная разность второго порядка

$$P(x, x_0, x_1) = [P(x, x_0) - P(x_0, x_1)] / (x - x_1) \quad (1.7)$$

по аналогии также есть многочлен, степень которого равна $(n - 2)$, т.к. разность $P(x, x_0) - P(x_0, x_1)$ делится нацело на $(x - x_1)$.

Продолжая указанный процесс, приходим к тому, что разность n -го порядка $P(x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ является константой, т.е. многочленом нулевой степени, и все разделенные разности более высокого порядка равны нулю.

Из выражений (1.6), (1.7) следует:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0) + (x - x_0)P(x, x_0) \quad , \\ P(x, x_0) &= P(x_0, x_1) + (x - x_1)P(x, x_0, x_1) \quad . \end{aligned}$$

Продолжая эти записи, получим:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0) + (x - x_0)P(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)P(x_0, x_1, x_2) + \dots \\ &+ (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})P(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.8) \end{aligned}$$

Таким образом, мы выразили многочлен n -ой степени через его значения в $(n + 1)$ узлах $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Ввиду того, что значения интерполяционного полинома в этих узлах совпадают со значениями интерполируемой функции, разделенные разности, входящие в (1.8), выражаются через узловые значения функции. В результате получается полином, называемый интерполяционным многочленом Ньютона:

$$y(x) \approx y(x_0) + \sum_{k=1}^n (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})y(x_0, \dots, x_k) \quad (1.9)$$

При вычислениях по этой формуле точность расчетов удобно оценивать, наблюдая за тем, насколько быстро убывают члены ряда. Если это происходит достаточно быстро, можно оставлять только те члены, которые больше заданной погрешности расчетов.

В (1.9) безразличен порядок нумерации узлов, что очень удобно при подключении новых узлов для построения полинома более высокого порядка.

Погрешность многочлена Ньютона оценивают по формуле

$$|y(x) - P_n(x)| < \sqrt{\frac{2n}{\pi}} M_{n+1} \left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} \quad , \quad (1.10)$$

где $M_{n+1} = \max |y^{(n+1)}(\xi)|$ - максимальное значение производной интерполируемой функции на отрезке между наименьшим и наибольшим из значений $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, а $h = x_{i+1} - x_i$ (предполагается, что шаг постоянен).

Формула (1.10) свидетельствует, что с уменьшением расстояния между узлами (шага) h погрешность представления функций полиномом Ньютона убывает как $O(h^{n+1})$.

Трудность использования (1.10) на практике состоит в том, что производные интерполируемой функции обычно неизвестны, поэтому для определения погрешности удобнее воспользоваться оценкой первого отброшенного члена.

Пример. Построить интерполяционный полином Ньютона четвертой степени для функции $y(x) = \cos(2x)$ в области значений аргумента $0 \leq x \leq \pi/4$.

Заполним таблицу разделенных разностей, вычисляемых по пяти узлам, представив для удобства вычислений $y(z) = \cos[(\pi/2)z]$, $0 \leq z \leq 1$.

z_0	$y(z_0)$	$y(z_0, z_1)$	$y(z_0, z_1, z_2)$	$y(z_0, \dots, z_3)$	$y(z_0, \dots, z_4)$
0	1				
		-0,304			
0,25	0,924		-1,128		
		-0,868		0,363	
0,5	0,707		-0,856		0,149
		-1,296		0,512	
0,75	0,383		-0,472		
		-1,532			
1	0				

Полином Ньютона

$$y(z) \approx 1 - 0,304z - 1,128z(z - 0,25) + 0,363z(z - 0,25)(z - 0,5) + 0,149z(z - 0,25)(z - 0,5)(z - 0,75)$$

Вычислим

$$y(0,6) \approx 1 - 0,182 - 0,237 + 7,623 \cdot 10^{-3} - 4,694 \cdot 10^{-3} = 0,589$$

Точное значение $y(0,6) = 0,588$, т.е. точность вычислений по приближенной формуле оказалась весьма высокой.

Помимо полинома Ньютона в практике вычислений находит применение еще один полином, называемый полиномом Эрмита. Его используют, если в узлах задана не только функция, но и ее производные различного порядка. В этом случае целесообразно осуществлять так называемую эрмитову интерполяцию, когда в узлах совпадают не только значения заданной функции, но и значения производных. Полином, обладающий указанным свойством, обозначают $H_n(x)$.

Вывод формулы для $H_n(x)$ производят построением по $(n + 1)$ узлам полинома Ньютона. В областях между узлами средние наклоны кривых $y(x)$ и полинома совпадают. Если сближать узлы x_i и x_{i+1} , то средний наклон будет все точнее передавать производную функции. В пределе после совпадения узлов получают искомым многочлен $P_n(x, x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$, являющийся полиномом Эрмита n -й степени:

$$H_n(x) = P_n(x, \underset{n_0}{x_0}, \underset{n_1}{x_1}, \dots, \underset{n_2}{x_2}, \dots, \underset{n_k}{x_k}),$$

$$\sum_{l=0}^k n_l = n + 1, \quad (1.11)$$

в произвольном узле x_l , имеющий производные, значения которых равны производным интерполируемой функции вплоть до порядка $n_l - 1$. Использовать формулу (1.11) в вычислениях непосредственно нельзя, так как в выражениях для разделенных разностей появляется неопределенность типа $0/0$. При кратности узлов не выше двух формулы для разделенных разностей получают предельным переходом:

$$y(x_0, x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{y(x_0) - y(x_1)}{x_0 - x_1} = y'(x_0),$$

$$y(x_0, x_0, x_1) = \frac{y(x_0, x_0) - y(x_0, x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{y'(x_0) - y(x_0, x_1)}{x_0 - x_1},$$

$$y(x_0, x_0, x_1, x_1) = \frac{y(x_0, x_0, x_1) - y(x_0, x_1, x_1)}{x_0 - x_1} =$$

$$= \frac{y'(x_0) - 2y(x_0, x_1) + y'(x_1)}{(x_0 - x_1)^2}.$$

Выражения для разделенных разностей в случае узлов кратности выше второй удобнее находить дифференцированием полинома Ньютона (1.9). В итоге запишем общее выражение:

$$y(x_0, x_0, \dots, x_0) = \frac{1}{m} y^{(m-1)}(x_0).$$

Пример. Построить полином Эрмита, передающий в двух узлах значения функции и ее первой производной:

$$P_n(x, x_0, x_0, x_1, x_1) = y(x_0) + (x - x_0)y(x_0, x_0) + (x - x_0)^2 y(x_0, x_0, x_1) +$$

$$+ (x - x_0)^2 (x - x_1)y(x_0, x_0, x_1, x_1) =$$

$$= y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{y'(x_0) - y(x_0, x_1)}{x_0 - x_1} +$$

$$+ [y'(x_0) - 2y(x_0, x_1) + y'(x_1)] \frac{(x - x_0)^2 (x - x_1)}{(x_0 - x_1)^2} .$$

В заключение данного подраздела отметим, что в практике вычислений для интерполяции полиномы степени выше пятой обычно не используют, т.е. число узлов интерполяции не превышает шести. Если при таком числе узлов не обеспечивается заданная погрешность, следует уменьшать расстояние между узлами.

1.2. Нелинейная интерполяция

Для табулирования быстроменяющихся функций требуется весьма малый шаг, т.е. возникает необходимость создавать таблицы очень больших объемов, что в ряде случаев неприемлемо. Оказывается, что преобразованием переменных $\eta = \eta(y)$ и $\xi = \xi(x)$ можно добиться того, чтобы в новых переменных график $\eta(\xi)$ был близок к прямой хотя бы на отдельных участках. В этом случае интерполяцию проводят в переменных (η, ξ) , а затем обратным интерполированием находят $y_i = y(\eta_i)$.

Преобразования $\eta(y)$ и $\xi(x)$ должны быть достаточно простыми (логарифмическая, экспоненциальная, тригонометрические и некоторые другие функции). При этом надо заботиться о том, чтобы и обратное преобразование $y(\eta)$ оказалось несложным.

Во многих задачах теплофизики, гидродинамики, оптики (особенно в задачах переноса излучения) и других областей науки и техники часто встречается степенная зависимость функции от своих аргументов. В этом случае удобны преобразования типа логарифмирования.

Пример. Получить формулу для нелинейной двухточечной интерполяции функции $y(x)$, если переменные можно преобразовать по формулам $\eta = \ln(y)$ и $\xi = x$.

Составим интерполяционный полином Ньютона на двухточечном шаблоне:

$$\eta = \eta_0 + \frac{\eta_1 - \eta_0}{\xi_1 - \xi_0} (\xi - \xi_0) .$$

В исходных переменных имеем

$$\ln(y) = \ln(y_0) + \frac{\ln(y_1) - \ln(y_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0) ,$$

и окончательно

$$y = y_0 (y_1 / y_0)^{(x-x_0)/(x_1-x_0)} .$$

1.3. Интерполяция сплайнами

Слово “сплайн” переводится как “гибкая линейка”. Такую линейку можно использовать для проведения кривых через заданную совокупность точек, изгибая и придерживая ее так, чтобы ребро проходило через все точки на плоскости. Равновесие гибкой линейки описывается уравнением $\psi''''(x) = 0$, т.е. интерполяционный полином на участке между каждой парой соседних точек имеет третью степень:

$$\psi(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \quad , \quad (1.12)$$

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad , \quad 0 \leq i \leq N .$$

В узлах значения многочлена и интерполируемой функции совпадают:

$$\psi(x_{i-1}) = y_{i-1} = a_i \quad , \quad (1.13)$$

$$\psi(x_i) = y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \quad , \quad (1.14)$$

$$h_i = x_i - x_{i-1} \quad , \quad 1 \leq i \leq N .$$

Число таких уравнений меньше числа неизвестных в два раза. Недостающие уравнения получают, приравнявая во внутренних узлах первые и вторые производные, вычисляемые по коэффициентам на соседних участках:

$$\psi'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2 \quad ,$$

$$\psi''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}) \quad , \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad ,$$

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 \quad , \quad (1.15)$$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i \quad , \quad 1 \leq i \leq N - 1 . \quad (1.16)$$

Недостающие условия можно получить, полагая, например, что вторая производная равна нулю на концах участка интерполирования:

$$\psi''(x_0) = 0 \quad , \quad c_1 = 0 \quad , \quad (1.17)$$

$$\psi''(x_N) = 0 \quad , \quad c_N + 3d_N h_N = 0 \quad , \quad (1.18)$$

Уравнения (1.13)-(1.18) позволяют определить все $4N$ неизвестных коэффициентов: a_i, b_i, c_i, d_i ($1 \leq i \leq N$).

Решение полученной системы уравнений можно сильно упростить, если привести ее к специальному виду.

Используя уравнение (1.13), можно получить все коэффициенты a_i . Из (1.16) и (1.18) следует

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \quad , \quad 1 \leq i \leq N - 1 . \quad (1.19)$$

$$d_N = -\frac{c_N}{3h_N} . \quad (1.20)$$

Из (1.14) и (1.19):

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - h_i \frac{c_{i+1} - 2c_i}{3}, \quad 1 \leq i \leq N-1. \quad (1.21)$$

Из (1.14) и (1.20):

$$b_N = \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - h_N \frac{2c_N}{3}. \quad (1.22)$$

Исключим теперь из (1.15) величины b_i и b_{i+1} с учетом (1.21), наращивая во втором случае индекс на 1, а величину d_i - с учетом (1.19). В результате получим систему уравнений для определения коэффициентов c_i :

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} &= 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right), \quad 2 \leq i \leq N-1 \\ c_{N+1} &= 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

После нахождения коэффициентов c_i остальные коэффициенты определяют по следующим формулам:

$$\begin{aligned} a_i &= y_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq N, \\ b_i &= \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - h_i \frac{c_{i+1} - 2c_i}{3}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ b_N &= \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - h_N \frac{2c_N}{3}, \\ d_i &= \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ d_N &= -\frac{c_N}{3h_N}. \end{aligned}$$

Осталось выяснить, как решать систему (1.23). Матрица этой системы трехдиагональна, т.е. все ее элементы равны нулю, кроме тех, которые находятся на главной и двух соседних диагоналях. Такие системы удобно решать методом прогонки. Суть метода в следующем.

Применение метода исключения Гаусса для решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей приводит к тому, что система уравнений преобразуется к виду, когда в каждом уравнении содержится только два неизвестных, и при обратном ходе одно из этих неизвестных выражается через другое. Поэтому применительно к (1.23) можно записать:

$$c_i = \xi_{i+1}c_{i+1} + \eta_{i+1}, \quad (1.24)$$

где ξ_{i+1}, η_{i+1} - некоторые не известные пока прогоночные коэффициенты;

$$c_{i-1} = \xi_i c_i + \eta_i \quad .$$

Подставляя последнее выражение в (1.23) и преобразуя, получим

$$c_i = -\frac{h_i}{h_{i-1}\xi_i + 2(h_{i-1} + h_i)} c_{i+1} + \frac{f_i - h_{i-1}\eta_i}{h_{i-1}\xi_i + 2(h_{i-1} + h_i)} \quad . \quad (1.25)$$

Сравнивая (1.24) и (1.25), имеем

$$\xi_{i+1} = -\frac{h_i}{h_{i-1}\xi_i + 2(h_{i-1} + h_i)}, \quad \eta_{i+1} = \frac{f_i - h_{i-1}\eta_i}{h_{i-1}\xi_i + 2(h_{i-1} + h_i)} \quad . \quad (1.26)$$

В этих формулах введено обозначение

$$f_i = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right) \quad .$$

Из условия $c_1 = 0$, следует $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = 0$.

Теперь алгоритм решения (1.23) выглядит следующим образом. По формулам (1.26) при известных ξ_2 , η_2 , равных нулю, вычисляют прогоночные коэффициенты ξ_{i+1} , η_{i+1} ($2 \leq i \leq N$) (прямой ход). Затем по формулам (1.24) при условии $c_{N+1} = 0$ определяют все c_i (обратный ход).

1.4. Многомерная интерполяция

В различных приложениях широко используют двумерные и трехмерные таблицы. Например, теплофизические свойства различных веществ зависят от температуры и давления, а оптические характеристики - еще и от длины волны излучения.

При многомерной интерполяции из-за громоздкости таблиц необходимо брать достаточно большие шаги по аргументам, т.е. сетка узлов, на которой строят таблицу, получается довольно грубой. Поэтому требуется вводить преобразование переменных $\eta = \eta(y)$, $\xi = \xi(x)$, $\varphi = \varphi(z)$, подбирая подходящие формулы. При удачном выборе таких формул можно использовать в новых переменных интерполяционный полином невысокой степени.

Осуществляя многомерную интерполяцию, следует помнить, что расположение узлов не может быть произвольным. Например, при интерполяции полиномом первой степени $P_1(x, y)$ узлы не должны лежать на одной прямой в плоскости. Действительно, определитель системы трех уравнений

$$z_i = a + bx_i + cy_i \quad , \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (1.27)$$

записывается в виде

$$\Delta = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \quad . \quad (1.28)$$

Условие размещения трех точек на одной прямой выглядит следующим образом:

$$\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2} .$$

После простых преобразований имеем

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0 , \quad (1.29)$$

т.е. если узлы лежат на одной прямой, то определитель (1.28) обращается в нуль и построить полином $P_1(x, y)$ вида (1.27) невозможно. Проверять условия подобного типа достаточно сложно, поэтому на практике стремятся строить регулярные сетки, как правило, прямоугольные и равномерные, когда узлы являются точками пересечения двух взаимно перпендикулярных систем параллельных прямых. На этой сетке проводят простую последовательную интерполяцию: сначала по строкам, а затем по столбцам.

При последовательной интерполяции завышается степень интерполяционного полинома. При треугольной конфигурации расположения узлов степень многочлена будет минимальной. Многочлен n -й степени в форме Ньютона в этом случае можно представить как обобщение одномерного варианта записи:

$$P_n(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-1} z(x_0, \dots, x_i, y_0, \dots, y_j) \prod_{p=0}^{i-1} (x - x_p) \prod_{q=0}^{j-1} (y - y_q) . \quad (1.30)$$

Пример. Записать многочлен Ньютона первой и второй степени для двумерной интерполяции функции $z = z(x, y)$.

Из (1.30) получаем:

$$P_1(x, y) = z(x_0, y_0) + z(x_0, y_0, y_1)(y - y_0) + z(x_0, x_1, y_0)(x - x_0),$$

$$z(x_0, y_0, y_1) = \frac{z(x_0, y_0) - z(x_0, y_1)}{y_0 - y_1} , \quad z(x_0, x_1, y_0) = \frac{z(x_0, y_0) - z(x_1, y_0)}{x_0 - x_1}$$

$$P_2(x, y) = z(x_0, y_0) + z(x_0, y_0, y_1)(y - y_0) +$$

$$+ z(x_0, y_0, y_1, y_2)(y - y_0)(y - y_1) + z(x_0, x_1, y_0)(x - x_0) +$$

$$+ z(x_0, x_1, y_0, y_1)(x - x_0)(y - y_0) + z(x_0, x_1, x_2, y_0)(x - x_0)(x - x_1) .$$

В ряде случаев приходится использовать нерегулярные сетки. Тогда ограничиваются интерполяционным полиномом первой степени $z = a + bx + cy$ и его коэффициенты находят по трем узлам:

$$z_i = a + bx_i + cy_i , \quad 1 \leq i \leq 3 .$$

Коэффициенты a, b, c нет необходимости вычислять, так как первый столбец является линейной комбинацией трех других столбцов. В результате из этих столбцов можно составить определитель, который будет равен нулю. Раскрывая этот определитель по первому столбцу, получим зависимость $z = z(x, y)$.

2. СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

При интерполировании функции строят некоторую новую функцию, совпадающую с заданной в фиксированных узлах. В ряде случаев целесообразно приближать функции не по точкам, а в среднем, например, когда необходимо иметь аналитическую зависимость для широкого диапазона значений аргумента, а не только в окрестности некоторого узла, или когда значения функции в узлах определены неточно.

Пусть имеется множество функций $\varphi(x)$, принадлежащих линейному пространству функций. Под близостью в среднем интерполируемой и интерполирующей функций будем понимать результат оценки интеграла

$$I = \left\{ \int_a^b \rho(x)[y(x) - \varphi(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

где $\rho(x)$ - весовая функция.

Такое приближение называют среднеквадратичным. Можно рассмотреть две задачи:

1 - подобрать функцию $\varphi(x)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$I \leq \varepsilon; \quad (2.2)$$

2 - найти наилучшее приближение, т.е. такую функцию $\bar{\varphi}(x)$, чтобы было справедливым соотношение

$$\int_a^b \rho(x)[y(x) - \bar{\varphi}(x)]^2 dx = \inf \int_a^b \rho(x)[y(x) - \varphi(x)]^2 dx. \quad (2.3)$$

Далее займемся отысканием наилучшего приближения.

Разложим функцию $\varphi(x)$ по системе линейно независимых функций $\varphi_k(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x). \quad (2.4)$$

Доказано, что в любом линейно нормированном пространстве при линейной аппроксимации вида (2.4) наилучшее приближение существует, хотя оно может быть не единственным.

В дальнейшем для сокращения записи будем пользоваться определением скалярного произведения в пространстве функций L_2 :

$$(f, \varphi) = \int_a^b \rho(x) f(x) \varphi(x) dx.$$

Подставляя (2.4) в условие (2.3), получим

$$((y - \varphi), (y - \varphi)) = (y, y) - 2 \sum_{k=1}^n a_k (y, \varphi_k) + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n a_k a_m (\varphi_k, \varphi_m) = \min.$$

Дифференцируя это выражение по a_k и приравнявая производные нулю, получим

$$\sum_{m=1}^n (\varphi_k, \varphi_m) a_m = (y, \varphi_k) \quad , \quad 1 \leq k \leq n \quad . \quad (2.5)$$

Определитель этой системы есть определитель Грама функций $\varphi_k(x)$. В силу их линейной независимости этот определитель не равен нулю. Следовательно, из системы (2.5) можно найти коэффициенты a_k , определяющие функцию $\varphi(x)$ согласно (2.4) и минимизирующие интеграл (2.3) от погрешности $|y(x) - \varphi(x)|$. Таким образом, наилучшее среднеквадратичное приближение существует и оно единственно.

При использовании ортонормированной системы функций $\varphi_k(x)$ система (2.5) упрощается: $a_k = (y, \varphi_k) = \int_a^b \rho(x) y(x) \varphi_k(x) dx$, т.е. a_k являются коэффициентами Фурье, а наилучшее приближение есть ряд Фурье, обрываемый на каком-то члене.

В тех случаях, когда функции $\varphi_k(x)$ не ортогональны, при $n \rightarrow \infty$ определитель Грама уменьшается, приближаясь к нулю. Тогда система (2.5) становится плохо обусловленной и ее решение дает большую погрешность. В этой ситуации обычно берут не более пяти-шести членов в сумме (2.4).

В качестве $\varphi_k(x)$ чаще всего используют полиномы Лежандра, Чебышева, Лагерра, Эрмита, ортогональные с заданным весом.

Рассмотрим частный случай, когда необходимо найти наилучшее приближение функции, заданной таблично. Для вещественных функций, заданных на конечном множестве точек, скалярное произведение определяется формулой

$$(f, \varphi) = \sum_{i=1}^N \rho_i f(x_i) \varphi(x_i) \quad , \quad \rho_i > 0 \quad , \quad (2.6)$$

где N - число заданных узлов.

Условие наилучшего среднеквадратичного приближения записывается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^N \rho_i [y(x_i) - \varphi(x_i)]^2 = \min \quad . \quad (2.7)$$

Полагая $\varphi(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$, где $n < N$, и подставляя этот многочлен в (2.7), приходим к системе (2.5), в которой скалярные произведения вычисляются согласно (2.6). Описанная процедура аппроксимации носит название метода наименьших квадратов.

Наиболее употребительный вариант метода наименьших квадратов соответствует случаю степенного вида функций $\varphi_k(x)$, т.е. $\varphi_k(x) = x^k$, причем $0 \leq k \leq n$.

Система уравнений (2.5) при этом принимает вид

$$\sum_{m=0}^n (x^k, x^m) a_m = (y, x^k), \quad 0 \leq k \leq n, \quad (2.8)$$

где $(x^k, x^m) = \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^{k+m}$, $(y, x^k) = \sum_{i=1}^N \rho_i y_i x_i^k$.

Пример. Методом наименьших квадратов аппроксимировать сеточную функцию линейной зависимостью вида $\varphi(x) = a_0 + a_1 x$.

В данном случае $n = 1$. Тогда система уравнений (2.8) имеет вид

$$\begin{aligned} (x^0, x^0) a_0 + (x^0, x^1) a_1 &= (y, x^0), \\ (x^1, x^0) a_0 + (x^1, x^1) a_1 &= (y, x^1). \end{aligned}$$

Скалярные произведения в полученной системе записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} (x^0, x^0) &= \sum_{i=1}^N \rho_i, & (x^1, x^0) &= \sum_{i=1}^N \rho_i x_i, & (x^1, x^1) &= \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^2 \\ (y, x^0) &= \sum_{i=1}^N \rho_i y_i, & (y, x^1) &= \sum_{i=1}^N \rho_i y_i x_i. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sum_{i=1}^N \rho_i y_i \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^2 - \sum_{i=1}^N \rho_i x_i \sum_{i=1}^N \rho_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^N \rho_i \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^N \rho_i x_i)^2}, \\ a_1 &= \frac{\sum_{i=1}^N \rho_i \sum_{i=1}^N \rho_i x_i y_i - \sum_{i=1}^N \rho_i x_i \sum_{i=1}^N \rho_i y_i}{\sum_{i=1}^N \rho_i \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^N \rho_i x_i)^2}. \end{aligned}$$

Система функций x^k не ортогональна, поэтому при больших n задача (2.8) плохо обусловлена, в связи с чем на практике ограничиваются значениями $n \leq 5$.

3. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рассмотрим интегрирование функций с использованием формул Гаусса, обладающих наивысшей алгебраической точностью. Простейшие формулы трапеций, средних, Симпсона приведены в виде краткой сводки.

3.1. Квадратурная формула Гаусса

Пусть функция задана на стандартном интервале $[-1;1]$. Задача состоит в том, чтобы подобрать точки t_1, t_2, \dots, t_n и коэффициенты A_1, A_2, \dots, A_n так, чтобы квадратурная формула

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) \quad (3.1)$$

была точной для всех полиномов наивысшей возможной степени.

Ввиду того, что имеется $2n$ параметров A_i и t_i ($i = 1, 2, \dots, n$), а полином степени $2n - 1$ определяется $2n$ коэффициентами, эта наивысшая степень в общем случае $N = 2n - 1$.

Запишем полином в виде $f(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k t^k$ и подставим в (3.1). Получим

$$\int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{2n-1} a_k t^k dt = \sum_{i=1}^n A_i \sum_{k=0}^{2n-1} a_k t_i^k, \\ \sum_{k=0}^{2n-1} a_k \int_{-1}^1 t^k dt = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k \sum_{i=1}^n A_i t_i^k.$$

Приравнявая выражения при одинаковых коэффициентах a_k получим

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \sum_{i=1}^n A_i t_i^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1, \\ \int_{-1}^1 t^k dt = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k + 1} = \begin{cases} \frac{2}{k + 1} & , \quad k = 2 \cdot j \\ 0 & , \quad k = 2 \cdot j + 1 \end{cases}, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Итак, A_i и t_i находят из системы $2n$ уравнений

$$\sum_{i=1}^n A_i = 2,$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n A_i t_i &= 0, \\
\sum_{i=1}^n A_i t_i^2 &= \frac{2}{3}, \\
&\dots\dots\dots \\
\sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-1} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Система (3.2) нелинейная, и ее решение найти довольно трудно. Рассмотрим еще один прием нахождения A_i и t_i . Свойства полиномов Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

таковы:

$$1) \quad P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$2) \quad \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \delta_{mn} N_m, \quad N_m = \frac{2}{2n+1};$$

3) полином Лежандра $P_n(x)$ имеет n различных и действительных корней, расположенных на интервале $[-1; 1]$.

Составим по узлам интегрирования многочлен n -й степени

$$w_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k).$$

Функция $f(x) = w_n(x) P_m(x)$ при $m \leq n - 1$ есть многочлен степени не выше $2n - 1$. Значит для этой функции формула Гаусса справедлива:

$$\int_{-1}^1 w_n(x) P_m(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i w_n(x_i) P_m(x_i) = 0, \tag{3.3}$$

так как $w_n(x) = 0$.

Разложим $w_n(x)$ в ряд по ортогональным многочленам Лежандра:

$$w_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k P_k(x),$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 w_n(x) P_m(x) dx &= \int_{-1}^1 \left[\sum_{k=0}^n b_k P_k(x) \right] P_m(x) dx = b_m N_m = 0, \\
& m \leq n - 1,
\end{aligned}$$

т.е. все коэффициенты $b_m = 0$ при $m \leq n - 1$. Значит $w_n(x)$ с точностью до численного множителя совпадает с $P_n(x)$. Таким образом, узлами формулы Гаусса являются нули многочлена Лежандра степени n .

Зная t_i , из линейной теперь системы первых n (3.2) легко найти коэффициенты A_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Определитель этой системы есть определитель Вандермонда.

Формулу $\int_{-1}^1 f(t)dt = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i)$, в которой t_i - нули полинома Лежандра

$P_n(t)$, а A_i определяют из (3.3), называют квадратурной формулой Гаусса.

Пример. Вывести квадратурную формулу Гаусса для случая трех ординат ($n = 3$).

Полином Лежандра третьей степени

$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t).$$

Корни:

$$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Из (3.2) имеем

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= 2, \\ -\sqrt{\frac{3}{5}}A_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}A_3 &= 0, \\ \frac{3}{5}A_1 + \frac{3}{5}A_3 &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$A_1 = A_3 = \frac{5}{9}, \quad A_2 = \frac{8}{9}.$$

Тогда

$$\int_{-1}^1 f(t)dt = \frac{1}{9}[5f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{\frac{3}{5}})].$$

Рассмотрим теперь применение квадратурной формулы Гаусса для вычисления интеграла с не единичными пределами $\int_a^b f(x)dx$:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t.$$

Получим

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt ,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) ,$$

где

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i , i = 1,2, \dots ,n ;$$

t_i - нули полинома Лежандра $P_n(t)$, т.е. $P_n(t_i) = 0$.

Остаточный член формулы Гаусса с узлами выражается формулой

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) .$$

Отсюда следует

$$R_2 = \frac{1}{135} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi) ,$$

$$R_3 = \frac{1}{15750} \left(\frac{b-a}{2}\right)^7 f^{(6)}(\xi) ,$$

$$R_4 = \frac{1}{3472875} \left(\frac{b-a}{2}\right)^9 f^{(8)}(\xi)$$

и т.д.

3.2. Простейшие формулы

Приведем сводку ряда простейших формул, используемых в практике численного интегрирования.

Формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \dots + f_{N-1} + \frac{1}{2}f_N\right) ,$$

$$R \approx -\frac{1}{12}h^2 \int_a^b f''(x)dx = O(h^2) , \quad (3.4)$$

$$h = x_i - x_{i-1} = const ,$$

где R - погрешность формулы; f_i - значения интегрируемой функции в узлах.

Формула средних:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^N f_{i-\frac{1}{2}},$$

$$R \approx \frac{1}{24} h^2 \int_a^b f''(x)dx = O(h^2).$$

Формула Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} (f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}),$$

$$R \approx -\frac{1}{180} h^4 \int_a^b f^{(4)}(x)dx = O(h^4). \quad (3.5)$$

4. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

4.1. Метод ячеек

Рассмотрим двукратный интеграл по прямоугольной области

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \approx Sf(\bar{x}, \bar{y}), \quad (4.1)$$

где $S = (b - a)(d - c)$, $\bar{x} = \frac{a + b}{2}$, $\bar{y} = \frac{c + d}{2}$.

Для повышения точности разобьем область на прямоугольные ячейки:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \approx \sum_i S_i f(\bar{x}_i, \bar{y}_i). \quad (4.2)$$

Оценим погрешность интегрирования:

$$f(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + (x - \bar{x})f'_x + (y - \bar{y})f'_y + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^2 f''_{xx} + \\ + \frac{1}{2}(x - \bar{x})(y - \bar{y})f''_{xy} + \frac{1}{2}(y - \bar{y})^2 f''_{yy} + \dots$$

где все производные берутся в центре ячейки. Для (4.1)

$$R = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy - Sf(\bar{x}, \bar{y}) \approx \frac{1}{24} S[(b - a)^2 f''_{xx} + (d - c)^2 f''_{yy}].$$

Пусть теперь в обобщенной квадратурной формуле (4.2) стороны прямоугольника разбиты соответственно на N и M равных частей. Тогда погрешность этой формулы для единичной ячейки

$$R_i \approx \frac{1}{24} S_i \left[\left(\frac{b - a}{N} \right)^2 f''_{xx} + \left(\frac{d - c}{M} \right)^2 f''_{yy} \right].$$

Суммируя погрешность по всем ячейкам, получим суммарную погрешность

$$R_\Sigma = \frac{1}{24} \left[\left(\frac{b - a}{N} \right)^2 \iint_G f''_{xx} dx dy + \left(\frac{d - c}{M} \right)^2 \iint_G f''_{yy} dx dy \right] = O(N^{-2} + M^{-2}),$$

т.е. формула имеет второй порядок точности.

Обобщим формулу ячеек на более сложные области. Используем (4.1), где под S понимается площадь области, а \bar{x}, \bar{y} рассматриваются как координаты центра тяжести сложной области:

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \iint_G x dx dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{S} \iint_G y dx dy.$$

Практическую ценность этот подход имеет только для областей простой формы (треугольник, правильный многоугольник, трапеция), центр тяжести и

площадь которых легко определить. Понятно, что данный подход годится и для области, ограниченной ломаной линией, так как ее всегда можно разбить на прямоугольники и треугольники.

Если граница области G криволинейная, то формулу (4.2) применяют, накладывая на область G прямоугольную сетку. Все ячейки разделяют на внутренние и граничные. Площадь внутренней ячейки равна произведению ее сторон. Площадь граничной ячейки вычисляют приближенно, заменяя в пределах данной ячейки истинную границу области хордой. Значения этих площадей подставляют в (4.2).

Погрешность формулы (4.2) при этом будет такой. В каждой внутренней ячейке ошибка составляет $O(N^{-2})$, в каждой граничной ячейке относительная ошибка есть $O(N^{-1})$, так как центр тяжести прямоугольной ячейки не совпадает с центром тяжести входящей в интеграл части. Но граничных ячеек примерно в N раз меньше чем внутренних. Поэтому общая погрешность будет $O(N^{-2})$, т.е. имеем второй порядок точности.

Можно граничные ячейки вообще не включать в сумму. Погрешность при этом будет $O(N^{-1})$.

4.2. Последовательное интегрирование

Рассмотрим интеграл по прямоугольной области, разбитой сеткой на ячейки:

$$I = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx ,$$

где

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy .$$

Каждый однократный интеграл вычисляют на данной сетке по квадратурным формулам:

$$I = \sum_i A_i F(x_i) , \quad F(x_i) = \sum_j \bar{A}_j f(x_i, y_j) ,$$

$$I = \sum_i \sum_j A_i \bar{A}_j f(x_i, y_j) = \sum_i \sum_j g_{ij} f(x_i, y_j) .$$

Для разных направлений можно использовать квадратурные формулы разных порядков точности (трапеций, Симпсона и т.д.).

Можно использовать формулы Гаусса, тогда

$$g_{ij} = \frac{1}{4} (b - a)(d - c) \gamma_i \gamma_j ,$$

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \xi_i, \quad y_j = \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2} \xi_j, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

где $\xi_i, \xi_j, \gamma_i, \gamma_j$ - нули многочленов Лежандра и веса формулы Гаусса.

Теперь пусть область интегрирования ограничена непрерывными однозначными кривыми

$$y = \varphi(x), \quad y = \psi(x) \quad (\varphi(x) < \psi(x))$$

и двумя вертикалями $x = a$ и $x = b$.

Имеем

$$I = \iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \int_a^b F(x) dx,$$

где

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

Отсюда

$$I = \sum_{i=1}^n A_i F(x_i), \quad F(x_i) = \int_{\varphi(x_i)}^{\psi(x_i)} f(x_i, y) dy \approx \sum_{j=1}^m B_{ij} f(x_i, y_j),$$

$$I = \iint_G f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_i B_{ij} f(x_i, y_j),$$

где A_i, B_{ij} - известные постоянные.

Пример. Получить кубатурную формулу типа формулы Симпсона.

Пусть сначала областью интегрирования будет прямоугольник:

$$h = \frac{b-a}{2}, \quad k = \frac{d-c}{2}.$$

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \\ &= \frac{k}{3} \left[\int_a^b f(x, y_0) dx + 4 \int_a^b f(x, y_1) dx + \int_a^b f(x, y_2) dx \right] \end{aligned}$$

Вновь применим к каждому интегралу формулу Симпсона:

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy &= \frac{kh}{9} \{ [f(x_0, y_0) + 4f(x_1, y_0) + f(x_2, y_0)] + \\ &\quad + 4[f(x_0, y_1) + 4f(x_1, y_1) + f(x_2, y_1)] + \\ &\quad + [f(x_0, y_2) + 4f(x_1, y_2) + f(x_2, y_2)] \} \end{aligned}$$

или

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \frac{kh}{9} \{ f(x_0, y_0) + f(x_2, y_0) + f(x_0, y_2) + f(x_2, y_2) + 4[f(x_1, y_0) + f(x_0, y_1) + f(x_2, y_1) + f(x_1, y_2)] + 16f(x_1, y_1) \}.$$

Таким образом, получим кубатурную формулу Симпсона.

Для повышения точности интегрирования вводят более мелкую сетку. Если область интегрирования криволинейная, то строят прямоугольник R , стороны которого параллельны осям координат. Вспомогательная функция

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in G \\ 0, & (x, y) \in R - G \end{cases}.$$

В таком случае, очевидно

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_G f^*(x, y) dx dy.$$

Последний интеграл может быть вычислен по общей кубатурной формуле.

5. ЗАДАЧА КОШИ

5.1. Общие замечания

Обыкновенными дифференциальными уравнениями называются уравнения с одной независимой переменной. Если независимых переменных больше, чем одна, то уравнение называется дифференциальным уравнением с частными производными.

С помощью обыкновенных дифференциальных уравнений строятся модели движения систем взаимодействующих частиц, электротехнических процессов в электрических цепях, кинетики химических реакций, процессов заселения уровней энергии в высокотемпературных средах и многих других объектов и процессов.

К задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений сводятся некоторые задачи для уравнений в частных производных, когда многомерное уравнение позволяет провести разделение переменных (например, при вычислении энергетического спектра частиц в полях определенной симметрии).

Обыкновенное дифференциальное уравнение любого порядка при помощи замены переменных может быть сведено к системе уравнений первого порядка. Рассмотрим пример.

Дифференциальное уравнение третьего порядка

$$a(x) \frac{d^3 v}{dx^3} + b(x) \frac{d^2 v}{dx^2} + c(x) \frac{dv}{dx} + d(x)v = f(x)$$

заменой переменных

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v_2, \quad \frac{dv}{dx} = v_1,$$

приводится к следующей системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dv}{dx} = v_1,$$

$$\frac{dv_1}{dx} = v_2,$$

$$a(x) \frac{dv_2}{dx} = -b(x)v_2 - c(x)v_1 - d(x)v + f(x).$$

В общем виде преобразование выглядит следующим образом: дифференциальное уравнение n -го порядка

$$v^{(n)}(x) = \varphi\left(x, v, v', v'', \dots, v^{(n-1)}\right),$$

заменой переменных

$$v^{(k)} \equiv v_k$$

сводятся к системе n уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} v'_k &= v_{k+1}, & 0 \leq k \leq n-2, \\ v'_{n-1}(x) &= \varphi(x, v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}), \end{aligned}$$

где обозначено $v_0 \equiv v$.

В соответствии с изложенным далее будут рассматриваться системы уравнений первого порядка:

$$v'_k(x) = \varphi_k(x, v_1, v_2, \dots, v_n), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Решение системы n -го порядка зависит от n параметров c_1, c_2, \dots, c_n .

Единственное решение получается при использовании дополнительных условий для искомой функции. В зависимости от того, каким образом ставятся данные условия, различают три типа задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: задача Коши, краевая задача и задача на собственные значения.

В задаче Коши все дополнительные условия ставятся в одной точке:

$$v_k(x_0) = v_{k,0}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Решение отыскивается в некотором интервале $x_0 \leq x \leq x_l$.

Если правые части φ_k уравнений непрерывны в некоторой окрестности начальной точки $(x_0, v_{1,0}, v_{2,0}, \dots, v_{n,0})$ и удовлетворяют условию Липшица по переменным v_k , то решение задачи Коши существует, единственно и непрерывно зависит от координат начальной точки, т.е. задача является корректной. Условие Липшица формулируется следующим образом

$$\begin{aligned} & \left| \varphi_k(x, v_{1,l}, v_{2,l}, \dots, v_{n,l}) - \varphi_k(x, v_{1,m}, v_{2,m}, \dots, v_{n,m}) \right| \leq \\ & \leq L \left\{ |v_{1,l} - v_{1,m}| + |v_{2,l} - v_{2,m}| + \dots + |v_{n,l} - v_{n,m}| \right\}, \end{aligned}$$

для любых точек $(x, v_{1,l}, v_{2,l}, \dots, v_{n,l}), (x, v_{1,m}, v_{2,m}, \dots, v_{n,m})$.

5.2. Методы решения

Можно выделить три метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений: точные, приближенные и численные.

Точные методы предусматривают получение решения в виде комбинации элементарных функций или в виде квадратур от последних. Возможности точных методов ограничены.

Приближенные методы сводятся к построению последовательности

функций $w_n(x)$, имеющих пределом искомую функцию $v(x)$. Обрывая эту последовательность на каком-то k , получают приближенное решение.

Наиболее универсальными методами решения являются численные. Их основной недостаток - возможность получения только частного решения.

Следует иметь в виду следующее обстоятельство. Успех от применения численного метода сильно зависит от обусловленности задачи, т.е. задача должна быть хорошо обусловлена, а именно, малые изменения начальных условий должны приводить к малому изменению решения. В противном случае (слабой устойчивости) малые погрешности в начальных данных или погрешности численного метода могут приводить к большим погрешностям в решении.

Рассмотрим пример. Решим уравнение

$$\frac{dv}{dx} = \lambda \cdot v$$

с начальным условием $v(x_0) = v_0$.

Имеем $v(x) = v_0 e^{\lambda(x-x_0)}$.

При $v_0 = 0$ получается решение $v(x) = 0$. Если предположить, что v_0 не равно строго нулю, а имеет небольшое отклонение от нуля, например,

$v_0 = 10^{-6}$, тогда при больших x будет иметь место следующая ситуация.

Если $\lambda < 0$, то $v(x)$ при увеличении x стремится к нулю, т.е. к невозмущенному решению. В этом случае решение называется асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Однако при $\lambda > 0$ с увеличением x $v(x)$ неограниченно возрастает, а именно, например, при $x = 100$, $x_0 = 0$, $\lambda = 1$, $v(100) = 10^{-6} e^{1(100-0)} = 2,7 \cdot 10^{37}$.

Таким образом, решение оказывается неустойчивым.

Далее будут рассматриваться алгоритмы решения задачи Коши на примере одного уравнения первого порядка $v'(x) = \varphi(x, v)$. Обобщение на случай системы n уравнений осуществляется заменой $v(x)$ на $\bar{v}(x)$ и $\varphi(x, v)$ на $\bar{\varphi}(x, \bar{v})$, где

$$\bar{v}(x) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{vmatrix}, \quad \bar{\varphi}(x, \bar{v}) = \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \cdot \\ \varphi_n \end{vmatrix}.$$

5.2.1. Метод Пикара

Данный метод является представителем класса приближенных методов

решения.

Идея метода чрезвычайно проста и сводится к процедуре последовательных приближений для решения интегрального уравнения, к которому приводится исходное дифференциальное уравнение.

Пусть поставлена задача Коши

$$\begin{aligned} v'(x) &= \varphi(x, v(x)) \quad , \\ x_0 &\leq x \leq x_l \quad , \\ v(x_0) &= v_0 \quad . \end{aligned} \tag{5.1}$$

Проинтегрируем выписанное уравнение

$$v(x) = v_0 + \int_{x_0}^x \varphi(t, v(t)) dt \quad . \tag{5.2}$$

Процедура последовательных приближений метода Пикара реализуется согласно следующей схеме

$$y_s(x) = v_0 + \int_{x_0}^x \varphi(t, y_{s-1}(t)) dt \quad , \tag{5.3}$$

причем $y_0(t) = v_0$.

Пример. Решить методом Пикара уравнение

$$\begin{aligned} v'(x) &= x^3 + v^3 \quad , \\ v(0) &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Решение этого уравнения не выражается через элементарные функции.

$$y_1(x) = 0 + \int_0^x t^3 dt = \frac{x^4}{4} \quad ,$$

$$y_2(x) = 0 + \int_0^x [t^3 + \left(\frac{t^4}{4}\right)^3] dt = \frac{x^4}{4} \left(1 + \frac{1}{4^2 \cdot 13} x^9\right) \quad ,$$

$$y_3(x) = 0 + \int_0^x \left\{ t^3 + \left[\frac{t^4}{4} \left(1 + \frac{1}{4^2 \cdot 13} t^9\right) \right]^3 \right\} dt =$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^{13}}{4^3 \cdot 13} \left(1 + \frac{3}{4^2 \cdot 22} x^9 + \frac{3}{4^4 \cdot 13 \cdot 31} x^{18} + \frac{1}{4^6 \cdot 13^2 \cdot 40} x^{27}\right)$$

и т.д.

Видно, что при $x \leq 1$ ряд быстро сходится. Метод удобен, если интегралы можно взять аналитически.

Докажем сходимость метода Пикара. Пусть в некоторой ограниченной области $g(x, v)$ правая часть $\varphi(x, v)$ непрерывна и, кроме того, удовлетворяет условию Липшица по переменной v т.е.

$$|\varphi(x, v_1) - \varphi(x, v_2)| \leq L|v_1 - v_2| \quad ,$$

где L - некоторая константа.

В силу ограниченности области $g(x, v)$ имеют место неравенства

$$|x - x_0| \leq l_1, \quad |v - v_0| \leq V .$$

Вычтем из (5.3) формулу (5.2), получим для модулей правой и левой частей:

$$|y_s(x) - v(x)| = \left| \int_{x_0}^x \varphi(t, y_{s-1}(t)) dt - \int_{x_0}^x \varphi(t, v(t)) dt \right| ,$$

или

$$|y_s(x) - v(x)| \leq \int_{x_0}^x |\varphi(t, y_{s-1}(t)) - \varphi(t, v(t))| dt .$$

Окончательно, используя условие непрерывности Липшица, получим

$$|z_s(x)| \leq L \int_{x_0}^x |z_{s-1}(t)| dt , \quad (5.4)$$

где $z_s(x) = y_s(x) - v(x)$ - погрешность приближенного решения.

Последовательное применение формулы (5.4) при $s = 1, 2, \dots$ дает следующую цепочку соотношений при учете того, что

$$\begin{aligned} |z_0(x)| &= |v_0 - v(x)| \leq V , \\ |z_1(x)| &\leq LV|x - x_0| , \\ |z_2(x)| &\leq \frac{1}{2} L^2 \cdot V |(x - x_0)^2| , \\ &\dots\dots\dots \\ |z_s(x)| &\leq \frac{1}{s!} L^s \cdot V |(x - x_0)^s| . \end{aligned}$$

Т.к. $|x - x_0| \leq l_1$, то имеем

$$|z_s(x)| \leq \frac{1}{s!} L^s \cdot V \cdot l_1^s = \frac{1}{s!} V \cdot (L \cdot l_1)^s .$$

Заменяя $s!$ по формуле Стирлинга, окончательно получим оценку погрешности приближенного решения

$$|z_s(x)| \leq \frac{V}{\sqrt{2\pi s}} \left(\frac{e l_1 L}{s} \right)^s . \quad (5.5)$$

Из (5.4) следует, что при $s \rightarrow \infty$ модуль погрешности $|z_s(x)| \rightarrow 0$, т.е. приближенное решение равномерно сходится к точному.

5.2.2. Методы Рунге-Кутты

Данные методы являются численными.

На практике применяются методы Рунге-Кутты, обеспечивающие построение разностных схем (методов) различного порядка точности. Наиболее употребительны схемы (методы) второго и четвертого порядков. Их мы и рассмотрим ниже.

Предварительно введем некоторые понятия и определения. Сеткой на отрезке $[a, b]$ называется фиксированное множество точек этого отрезка ω_N . Функция, определенная в данных точках, называется сеточной функцией. Координаты точек x_i удовлетворяют условиям

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-2} < x_{N-1} < x_N = b .$$

Точки $x_i \in \omega_N$ являются узлами сетки. Равномерной сеткой на $[a, b]$ называется множество точек

$$\omega_h = \{x_i = a + ih\} , \quad i = 0, 1, 2, \dots, N ,$$

где $h = \frac{b-a}{N}$ - шаг сетки.

При решении дифференциальных уравнений приближенным методом основным является вопрос о сходимости. Применительно к разностным методам традиционно более употребительно понятие сходимости при $h \rightarrow 0$. Обозначим значения сеточной функции y_i значения точного решения дифференциального уравнения (5.1) в узле i - $v(x_i)$ (y_i являются приближенными значениями $v(x_i)$). Сходимость при $h \rightarrow 0$ означает следующее. Фиксируем точку x и строим совокупность сеток ω_h таким образом, что $h \rightarrow 0$ и $x_i = a + ih = x$ (при этом $i \rightarrow \infty$). Тогда считают, что численный метод сходится в точке x , если $|y_i - v(x_i)| \rightarrow 0$

при $h \rightarrow 0$, $x_i = x$. Метод сходится на отрезке $[a, b]$, если он сходится в каждой точке $x \in [a, b]$. Говорят, что метод имеет p -й порядок точности, если можно найти такое число $p > 0$, что $|y_i - v(x_i)| = O(h^p)$ при $h \rightarrow 0$.

Введем далее понятие невязки или погрешности аппроксимации разностного уравнения, заменяющего заданное дифференциальное уравнение, на решении исходного уравнения, т.е. невязка ψ_i представляет собой результат подстановки точного решения уравнения (5.1) $v(x)$ в разностное уравнение. Например, (5.1) можно заменить следующим простейшим разностным уравнением

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \varphi(x_i, y_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad y_0 = v_0.$$

Тогда невязка определится следующим выражением

$$\psi_i = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \varphi(x_i, y_i).$$

Приближенное решение не совпадает вообще говоря с u_i , поэтому невязка ψ_i в i -ой точке не равна нулю. Вводят следующее определение: численный метод аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение, если $\psi_i \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, и имеет p -й порядок точности, если $\psi_i = O(h^p)$.

Доказывается, что порядок точности численного метода решения дифференциального уравнения совпадает с порядком аппроксимации при достаточно общих предположениях.

Теперь перейдем к анализу схем Рунге-Кутты. Сначала обратимся к схемам второго порядка точности.

Используя формулу Тейлора, решение дифференциального уравнения (5.1) можно представить в виде

$$v_{n+1} = v_n + h_n v'_n + \frac{1}{2} h_n^2 v''_n + \dots, \quad (5.6)$$

где обозначено $v_n = v(x_n)$, $v'_n = v'(x_n)$, $h_n = x_{n+1} - x_n$.

Отметим, что согласно (5.1) $v'_n = \varphi(x_n, v_n)$, $v''_n = \varphi'_x(x_n, v_n) \varphi'_v(x_n, v_n)$.

Далее удерживаем только выписанные члены ряда. Представим вторую производную следующим образом

$$v''_n = (v'_n)' = \frac{\varphi(\tilde{x}, \tilde{v}) - \varphi(x_n, v_n)}{\Delta x},$$

где \tilde{x} , \tilde{v} - пока неизвестные величины. Пусть

$$\tilde{x} = x_n + \gamma h, \quad \tilde{v} = v_n + \delta h.$$

Обозначим приближенное значение решения в узле с номером n через y_n (именно это решение будет получаться после того, как мы ограничим ряд членами с порядком не выше второго).

Имеем

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_n \varphi(x_n, y_n) + \frac{1}{2} h_n^2 \left[\frac{\varphi(x_n + \gamma h_n, y_n + \delta h_n) - \varphi(x_n, y_n)}{\Delta x} \right] = \\ &= y_n + h_n [\beta \varphi(x_n, y_n) + \alpha \varphi(x_n + \gamma h_n, y_n + \delta h_n)]. \end{aligned}$$

Введенные здесь параметры α, β, γ и δ подлежат определению.

Разлагая правую часть в ряд Тейлора и приводя подобные члены, получим последовательно

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_n \{ \beta \cdot \varphi(x_n, y_n) + \alpha \cdot [\varphi(x_n, y_n) + \\ &+ \varphi'_x(x_n, y_n) \gamma h_n + \varphi'_y(x_n, y_n) \delta h_n] \} = \end{aligned}$$

$$= y_n + (\alpha + \beta)h_n\varphi(x_n, y_n) + \alpha h_n^2[\gamma\varphi'_x(x_n, y_n) + \delta\varphi'_y(x_n, y_n)] . \quad (5.7)$$

Условием выбора параметров α, β, γ и δ поставим близость выражения (5.7) ряду (5.6), тогда

$$\alpha + \beta = 1 , \quad \alpha\gamma = \frac{1}{2} , \quad \alpha\delta = \frac{1}{2}\varphi(x_n, y_n) .$$

Один параметр остается свободным. Пусть это будет α , тогда

$$\beta = 1 - \alpha , \quad \gamma = \frac{1}{2\alpha} , \quad \delta = \frac{1}{2\alpha}\varphi(x_n, y_n)$$

и окончательно из (5.7) с учетом найденных отношений для β, γ и δ получим

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left\{ (1 - \alpha)\varphi(x_n, y_n) + \right. \\ \left. + \alpha\varphi\left(x_n + \frac{1}{2\alpha}h_n, y_n + \frac{h_n}{2\alpha}\varphi(x_n, y_n)\right) \right\} . \quad (5.8)$$

Соотношение (5.8) описывает однопараметрическое семейство двучленных формул Рунге-Кутты.

В специальной литературе доказывается, что если $\varphi(x, y)$ непрерывна и ограничена вместе со своими вторыми производными, то приближенное решение схемы (5.8) равномерно сходится к точному решению с погрешностью $O(\max h_n^2)$, т.е. схема (5.8) обладает вторым порядком точности.

В практике расчетов используют формулы (5.8) при значениях параметра $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$.

Случай $\alpha = \frac{1}{2}$.

Из (5.8) выводим

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left[\varphi(x_n, y_n) + \varphi\left(x_n + h, y_n + h\varphi(x_n, y_n)\right) \right] , \quad (5.9)$$

Применение формулы (5.9) сводится к следующей последовательности шагов:

1. Вычисляется грубо значение функции \bar{y}_{n+1} (по схеме ломаных)

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + h_n\varphi(x_n, y_n) .$$

2. Определяется наклон интегральной кривой в точке (x_{n+1}, y_{n+1})

$$\bar{y}'_{n+1} = \varphi(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) .$$

3. Находится среднее значение производной функции на шаге h_n

$$y'_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [\varphi(x_n, y_n) + \bar{y}'_{n+1}] ,$$

4. Рассчитывается значение функции в $(n + 1)$ -м узле

$$y_{n+1} = y_n + h y'_{n+\frac{1}{2}} .$$

Данная схема имеет специальное название "предиктор - корректор".

Случай $\alpha = 1$.

Согласно (5.8) получаем

$$y_{n+1} = y_n + h_n \varphi \left[x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} \varphi(x_n, y_n) \right] .$$

Задача решается посредством следующих шагов:

1. Вычисляется значение функции в половинном узле

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h_n}{2} \varphi(x_n, y_n) .$$

2. Определяется значение производной в узле $n + \frac{1}{2}$

$$y'_{n+\frac{1}{2}} = \varphi \left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_{n+\frac{1}{2}} \right) .$$

3. Находится значение функции в $(n + 1)$ -м узле

$$y_{n+1} = y_n + h_n y'_{n+\frac{1}{2}} .$$

Помимо рассмотренных выше двучленных схем широкое распространение в практике расчетов имеют схемы Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Ниже даются без вывода соответствующие формулы

$$y_{n+1} = y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) / 6 ,$$

$$k_1 = h_n \varphi(x_n, y_n) , \quad k_2 = h_n \varphi(x_n + h_n / 2, y_n + k_1 / 2) , \quad (5.10)$$

$$k_3 = h_n \varphi(x_n + h_n / 2, y_n + k_2 / 2) , \quad k_4 = h_n \varphi(x_n + h_n, y_n + k_3) .$$

Схемы с большим числом членов практически не применяются. Пяти-членные формулы обеспечивают четвертый порядок точности, шестичленные формулы имеют шестой порядок, но их вид весьма сложен.

Погрешности приведенных схем Рунге-Кутты определяются максимальными значениями соответствующих производных.

Оценку погрешностей легко получить для частного случая правой части дифференциального уравнения

$$\varphi(x, v) \equiv \varphi(x) .$$

В этом случае решение уравнения может быть сведено к квадратуре и

все схемы разностного решения переходят в формулы численного интегрирования. Например, схема (5.9) принимает вид

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2} [\varphi(x_n) + \varphi(x_{n+1})],$$

то есть имеет вид формулы трапеций, а схема (5.10) переходит в схему

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2} [\varphi(x_n) + 4\varphi(x_n + h_n / 2) + \varphi(x_n + h_n)],$$

представляющую собой формулу Симпсона с шагом $\frac{h_n}{2}$.

Мажорантные оценки погрешности формул трапеций и Симпсона известны (см. раздел 3.2). Из (3.4) и (3.5) видно, что точность схем Рунге-Кутты достаточно высока.

Выбор той или иной из приведенных схем для решения конкретной задачи определяется следующими соображениями. Если функция $\varphi(x, v)$ в правой части уравнения непрерывна и ограничена, а также непрерывны и ограничены ее четвертые производные, то наилучший результат достигается при использовании схемы (5.10). В том случае, когда функция $\varphi(x, v)$ не имеет названных выше производных, предельный (четвертый) порядок схемы (5.10) не может быть достигнут, и целесообразным оказывается применение более простых схем.

Помимо схем Рунге-Кутты практический интерес представляют многошаговые методы, которые можно описать следующей системой уравнений

$$\frac{a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_m y_{n-m}}{h} = b_0 \varphi_n + b_1 \varphi_{n-1} + \dots + b_m \varphi_{n-m}, \quad (5.11)$$

где $n = m, m+1, \dots$, а a_k, b_k - числовые коэффициенты, $k = 0, 1, 2, \dots, m$, $a_0 \neq 0$.

Согласно данному уравнению расчет начинается с $n = m$. В этом случае получается соотношение вида

$$\frac{a_0 y_m + a_1 y_{m-1} + \dots + a_m y_0}{h} = b_0 \varphi_m + b_1 \varphi_{m-1} + \dots + b_m \varphi_0,$$

т.е. для начала счета надо иметь m начальных значений $y_i, i = 0, 1, 2, \dots, m-1$. Эти значения y_i приходится вычислять каким-либо другим методом, например, методом Рунге-Кутты.

Среди многошаговых методов наиболее распространен метод Адамса, схема реализации которого следует из (5.11) при $a_0 = -a_1 = 1$ и $a_k = 0$ для $k = 2, 3, \dots, m$:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \sum_{k=0}^m b_k \varphi_{n-k}.$$

При $b_0 = 0$ метод Адамса оказывается явным, а при $b_0 \neq 0$ - неявным.

5.2.3. Неявные методы

Введем понятие устойчивости разностного метода. Для этого рассмотрим уже упоминавшееся разностное уравнение многошагового метода

$$\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{h} y_{n-k} = \sum_{k=0}^m b_k \varphi(x_{n-k}, y_{n-k}), \quad n = m, m+1, \dots \quad (5.12)$$

Однородное разностное уравнение, соответствующее (5.12), имеет вид

$$\sum_{k=0}^m a_k y_{n-k} = 0. \quad (5.13)$$

Говорят, что уравнение (5.13) устойчиво по начальным данным, если существует постоянная M , не зависящая от n , такая, что при любых начальных данных y_0, y_1, \dots, y_{m-1} имеет место неравенство

$$|y_n| \leq M \cdot \max_{0 \leq j \leq m-1} |y_j|, \quad n = m, m+1, \dots$$

Вопрос устойчивости по начальным данным решается путем рассмотрения корней так называемого характеристического уравнения, получаемого из (5.13), если решение этого уравнения искать в виде $y_{n-k} = q^{n-k}$. Подставляя данное y_{n-k} в (5.13) и сокращая на q^{n-m} , получим характеристическое уравнение для нахождения q :

$$a_0 q^m + a_1 q^{m-1} + \dots + a_{m-1} q + a_m = 0. \quad (5.14)$$

Справедлива следующая теорема. Для устойчивости уравнения (5.13) по начальным данным необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие корней, а именно: все корни q_1, q_2, \dots, q_m характеристического уравнения должны располагаться внутри или на границе единичного круга комплексной плоскости, причем на границе не должно быть кратных корней.

Доказывается следующее утверждение. Пусть $0 \leq nh \leq T$, условие корней выполнено, $|y_i - v(x_i)| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$, и разностное уравнение (5.12) аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение (5.1). Тогда решение разностной задачи (5.12) сходится при $h \rightarrow 0$ к решению исходной задачи (5.1). Говоря другими словами, из аппроксимации и устойчивости по начальным данным следует сходимость на ограниченном отрезке $[0, T]$.

Сформулированное условие устойчивости, базирующееся на анализе расположения корней характеристического уравнения (5.14), является весьма общим. Конкретизируем вопрос об устойчивости разностного уравнения применительно к асимптотически устойчивым решениям уравнения (5.1). Пусть $\varphi(x, v(x)) = \lambda \cdot v(x)$, $\lambda < 0$, т.е.

$$\frac{dv}{dx} = \lambda \cdot v(x). \quad (5.15)$$

Решение этого уравнения асимптотически устойчиво, т.е. при любых $x > 0$ справедлива оценка

$$|v(x+h)| \leq |v(x)|. \quad (5.16)$$

Логично потребовать, чтобы и разностное уравнение давало решение, обладающее свойством (5.16). Используя явный метод Эйлера первого порядка аппроксимации, получим разностный аналог (5.15)

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \lambda \cdot y_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.17)$$

или

$$y_{n+1} = (1 + h\lambda)y_n, \quad \text{т.е. } q = 1 + h\lambda.$$

Оценка (5.16) будет выполнена для (5.17) только в том случае, если $|q| \leq 1$, так как тогда $|y_{n+1}| \leq |y_n|$. Из $|q| \leq 1$ следует ограничение на шаг h :

$$0 \leq h \leq \frac{2}{|\lambda|}.$$

Разностный метод (5.12) называется абсолютно устойчивым, если устойчивость имеет место при любых $h > 0$, и условно устойчивым, если она может быть обеспечена только введением ограничений на шаг h .

В качестве примера абсолютно устойчивого метода традиционно рассматривается неявный метод Эйлера, имеющий первый порядок аппроксимации

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \lambda \cdot y_{n+1}. \quad (5.18)$$

Из (5.18) следует

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - h\lambda} = \frac{y_n}{1 + h|\lambda|},$$

т.е. $|q| = \frac{1}{1 + h|\lambda|} < 1$ всегда, при любых $h > 0$.

Условная устойчивость приводит к необходимости выбирать малые значения шага h , что является недостатком явного метода. Неявный метод, лишенный данного ограничения, имеет другой довольно существенный недостаток,

обусловленный необходимостью решения на каждом шаге алгебраического уравнения (или системы уравнений, в общем случае нелинейных).

Запишем разностное уравнение (5.12) для задачи (5.15):

$$\sum_{k=0}^m (a_k - \mu b_k) y_{n-k} = 0, \quad n = m, m+1, \dots, \quad (5.19)$$

где $\mu = h\lambda$ - в общем случае комплексный параметр.

Характеристическое уравнение для (5.19) имеет вид

$$\sum_{k=0}^m (a_k - \mu b_k) q^{m-k} = 0. \quad (5.20)$$

При малых μ корни (5.20) близки к корням (5.13).

Областью устойчивости метода (5.12) называется множество точек комплексной плоскости $\mu = h\lambda$, для которых данный метод, примененный к уравнению специального вида (5.15), является устойчивым.

Для явного метода Эйлера условие устойчивости $|1 + \mu| \leq 1$ при комплексном $\mu = \mu_0 + i\mu_1$ ($\mu_0 = \operatorname{Re} \mu$, $\mu_1 = \operatorname{Im} \mu$) выглядит следующим образом: $(\mu_0 + 1)^2 + \mu_1^2 \leq 1$, т.е. областью устойчивости является круг единичного радиуса, центр которого находится в точке $(-1; 0)$ комплексной плоскости.

Для неявного метода Эйлера условие $\frac{1}{|1 - \mu|} \leq 1$ соответствует неравенству

$(1 - \mu_0)^2 + \mu_1^2 \geq 1$, т.е. областью устойчивости является внешняя область круга единичного радиуса с центром в точке $(1; 0)$.

Разностный метод называется A -устойчивым, если область его устойчивости включает левую полуплоскость $\operatorname{Re} \mu < 0$ (или $h \cdot \operatorname{Re} \lambda < 0$). Следует обратить внимание на то, что уравнение (5.15) асимптотически устойчиво при $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Следовательно A -устойчивый разностный метод является абсолютно устойчивым (т.е. устойчивым при любых $h > 0$), если устойчиво решение исходного дифференциального уравнения.

Из приведенного выше рассмотрения видно, что неявный метод Эйлера обладает свойством A -устойчивости, а явный метод - нет.

Рассмотрим еще один неявный метод более высокого порядка аппроксимации (второго):

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{1}{2} [\varphi(x_{n+1}, y_{n+1}) + \varphi(x_n, y_n)]. \quad (5.21)$$

Этот метод получается заменой интеграла от правой части (5.1) на длине шага по формуле трапеций. Применительно к уравнению (5.15) метод (5.21) выглядит следующим образом:

$$y_{n+1} = \frac{1 + 0,5\mu}{1 - 0,5\mu} y_n,$$

т.е. $\left| \frac{1 + 0,5\mu}{1 - 0,5\mu} \right| \leq 1$, если $\operatorname{Re} \mu \leq 0$, т.е. метод (5.21) относится к A – устойчивым.

Существует доказательство следующих положений:

- среди методов (5.12) не существует явных A – устойчивых методов;
- среди неявных линейных многошаговых методов нет A – устойчивых методов, имеющих порядок точности выше второго.

A – устойчивые разностные схемы весьма эффективны при решении так называемых жестких систем уравнений, так как эти методы не накладывают ограничений на шаг h . Рассмотрим подробнее это утверждение.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{v}}{dx} = A\bar{v} \quad (5.22)$$

с независимой от x матрицей $A(m \times m)$ называется жесткой, если $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$,

$k = 1, 2, \dots, m$ и отношение $s = \frac{\max_{1 \leq k \leq m} |\operatorname{Re} \lambda_k|}{\min_{1 \leq k \leq m} |\operatorname{Re} \lambda_k|}$ велико, где λ_k – собственные

числа матрицы A . Величина s называется числом жесткости. Если матрица A зависит от x , то и λ_k – зависят от x , тогда вводится переменное число жесткости

$$s(x) = \frac{\max_{1 \leq k \leq m} |\operatorname{Re} \lambda_k(x)|}{\min_{1 \leq k \leq m} |\operatorname{Re} \lambda_k(x)|}$$

и оперируют с величиной $\sup s(x)$ на отрезке интегрирования.

Отличительной особенностью жестких систем является наличие в их решении как быстро, так и медленно убывающих компонент. При $x > 0$ решение системы практически определяется медленно убывающей компонентой, однако, если воспользоваться явными разностными методами, то быстро убывающая составляющая будет отрицательно влиять на устойчивость, и в результате весь расчет необходимо вести с малым шагом интегрирования. При использовании же неявных методов ограничения на шаг сняты, и его величину определяют из условия достижения нужной точности, не заботясь особо об устойчивости.

При решении жестких систем дифференциальных уравнений хорошо зарекомендовал себя метод Гира, который относится к чисто неявным многошаговым разностным методам, общая формула которых выглядит следующим образом:

$$\sum_{k=0}^m a_k y_{n-k} = h\varphi(x_n, y_n),$$

т.е. рассматривается частный вариант метода (5.12), когда $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, а $b_0 = 1$.

При $m = 1$ и $a_0 = 1, a_1 = -1$ имеем $y_n - y_{n-1} = h\varphi(x_n, y_n)$, т.е. неявный метод Эйлера. При $m = 2$ и $m = 3$ методы выглядят следующим образом

$$\frac{3}{2}y_n - 2y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2} = h\varphi(x_n, y_n), \quad (5.23)$$

$$\frac{11}{6}y_n - 3y_{n-1} + \frac{3}{2}y_{n-2} - \frac{1}{3}y_{n-3} = h\varphi(x_n, y_n). \quad (5.24)$$

Разностное уравнение (5.23) имеет второй порядок точности, а (5.24) - третий. Чтобы найти область устойчивости метода, следует записать аналогичные уравнения для дифференциального уравнения (5.15). Например, (5.23) примет вид

$$\frac{3}{2}y_n - 2y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2} = \mu \cdot y_n.$$

Соответствующее характеристическое уравнение запишется следующим образом

$$\left(\frac{3}{2} - \mu\right)q^2 - 2q + \frac{1}{2} = 0. \quad (5.25)$$

Наша задача определить область комплексной плоскости $\mu = \mu_0 + i\mu_1$, в точках которой оба корня (5.25) по модулю меньше единицы. Оказывается, что эта область целиком располагается в правой плоскости и метод (5.23) является A -устойчивым.

Метод (5.24) относится к так называемым $A(\alpha)$ -устойчивым методам.

6. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

6.1. Постановка задачи

Стандартная постановка краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений выглядит следующим образом

$$v'_k(x) = \varphi_k(x, v_1, v_2, \dots, v_n) \quad , \quad 1 \leq k \leq n \quad ,$$

а дополнительные условия ставятся более, чем в одной точке отрезка интегрирования уравнений. (Понятно, что в этом случае порядок системы не может быть меньше второго):

$$\begin{aligned} \psi_k(v_1(\xi_k), v_2(\xi_k), \dots, v_n(\xi_k)) &= \eta_k \quad , \quad 1 \leq k \leq p \quad , \\ x_0 &\leq \xi_k \leq x_l \quad . \end{aligned}$$

Общая классификация методов решения краевых задач та же , что и в случае задачи Коши: существуют точные, приближенные и численные методы. О точных методах сказано ранее. Среди приближенных методов можно указать методы Рунге, Галеркина, метод рядов Фурье.

Численные способы решения краевых задач представлены на практике двумя методами: стрельбы и разностным.

6.2. Метод стрельбы

Согласно данному методу краевая задача сводится к задаче Коши, решение которой осуществляется одним из уже описанных методов.

В качестве примера рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений достаточно общего вида с краевыми условиями

$$v'(x) = \varphi(x, v, w) \quad , \quad (6.1)$$

$$w'(x) = \eta(x, v, w) \quad , \quad (6.2)$$

$$g(v(a), w(a)) = 0 \quad , \quad (6.3)$$

$$\psi(v(b), w(b)) = 0 \quad , \quad (6.4)$$

$$a \leq x \leq b \quad .$$

Назначаем произвольно $v(a) = \xi$, тогда уравнение (6.3) примет вид

$$g(\xi, w(a)) = 0 \quad , \quad \text{откуда в принципе находится } w(a) = \chi(\xi) \quad .$$

Итак, краевая задача свелась к задаче Коши с начальными условиями

$$v(a) = \xi \quad , \quad w(a) = \chi(\xi) \quad .$$

После численного интегрирования выписанной системы уравнений будет получено решение $v(x, \xi)$ и $w(x, \xi)$, т.е. найденные функции будут зависеть от параметра ξ , произвольно заданного вначале.

В силу произвольности выбора правое краевое условие (6.4) не бу-

дет удовлетворено, т.е. $\psi(v(b, \xi), w(b, \xi)) = \bar{\psi}(\xi) \neq 0$.

Меняя параметр ξ надо добиться того, чтобы $\bar{\psi}(\xi)$ обратилась в нуль, т.е. необходимо отыскать корень уравнения

$$\bar{\psi}(\xi) = 0. \quad (6.5)$$

Самый простой подход здесь состоит в применении метода половинного деления. Алгоритм расчета при этом будет следующим.

Выполняют расчеты с несколькими, вообще говоря произвольными, значениями ξ , имея в виду получить значения $\bar{\psi}(\xi)$ разные по знаку. Как только данный результат достигнут, корень функции (6.5) оказывается локализованным. Далее методом половинного деления находится искомое значение корня (6.5). Для определения значения $\bar{\psi}(\xi_i)$ на каждом шаге данного метода решается система (6.1) - (6.4).

Процесс можно несколько детерминировать, если применить метод секущих. При этом только первые два решения системы (6.1) - (6.4) находятся с наугад выбранными значениями ξ_1 и ξ_2 . Все последующие уточнения параметра ξ производят по формуле метода секущих

$$\xi_{s+1} = \xi_s - \frac{(\xi_s - \xi_{s-1})\bar{\psi}(\xi_s)}{\bar{\psi}(\xi_s) - \bar{\psi}(\xi_{s-1})}.$$

Следует помнить, что метод секущих хорошо сходится только вблизи корня, т.е. само получение результата сильно зависит от того, насколько удачным оказалось начальное приближение.

В качестве примера реализации изложенного выше алгоритма расчета рассмотрим решение методом стрельбы линейных дифференциальных уравнений с линейными же краевыми условиями.

$$v'(x) = a_1(x)v(x) + b_1(x)w(x) + c_1(x), \quad (6.6)$$

$$w'(x) = a_2(x)v(x) + b_2(x)w(x) + c_2(x), \quad (6.7)$$

$$a \leq x \leq b,$$

$$e_1v(a) + g_1w(a) = d_1, \quad (6.8)$$

$$e_2v(a) + g_2w(a) = d_2. \quad (6.9)$$

Следуя алгоритму метода стрельбы, вначале сводим краевую задачу к задаче Коши

$$v(a) = \xi, \quad (6.10)$$

а из (6.8)

$$w(a) = \frac{d_1 - e_1\xi}{g_1}. \quad (6.11)$$

В силу линейности задачи Коши (6.6), (6.7), (6.10), (6.11) решение будет линейно зависеть от параметра ξ , поэтому функция $\bar{\psi}(\xi)$ будет линейной

функцией. В этом случае точный корень данной функции может быть найден методом секущих за два шага

$$\xi_3 = \xi_2 - \frac{(\xi_2 - \xi_1)\bar{\psi}(\xi_2)}{\bar{\psi}(\xi_2) - \bar{\psi}(\xi_1)}$$

Таким образом, потребуется три раза решить задачу Коши, чтобы получить решение краевой задачи.

Метод стрельбы применим для решения линейных и нелинейных задач и позволяет использовать хорошо разработанные алгоритмы для задач Коши. Трудности могут появиться в ситуациях, когда краевая задача хорошо обусловлена, а соответствующая задача Коши плохо обусловлена. В этом случае целесообразно поставить начальные условия на другом конце отрезка и с него начать процедуру решения. При отрицательном результате и в этом случае необходимо перейти к разностным методам.

6.3. Разностный метод

Поставим краевую задачу для линейного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} v''(x) - g(x)v(x) &= f(x), & (6.12) \\ a \leq x \leq b, \\ v(a) = c, \quad v(b) &= d. \end{aligned}$$

На отрезке $[a, b]$ строим сетку $\{x_i = x_0 + ih\}$, $i = 0, \dots, N$, где h - шаг сетки. Заменяя производную ее разностным аналогом, получим

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - g_i y_i = f_i,$$

где $g_i = g(x_i)$, $f_i = f(x_i)$.

После преобразований приходим к разностному уравнению следующего вида

$$\begin{aligned} y_{i-1} - (2 + h^2 g_i) y_i + y_{i+1} &= h^2 f_i, & (6.13) \\ 1 \leq i \leq N - 1. \end{aligned}$$

Получим систему из $(N - 1)$ -го алгебраического уравнения, в которой неизвестными являются приближенные значения искомой функции в узлах y_i . Вместе с граничными условиями число уравнений равно числу неизвестных. Решая эту систему уравнений, найдем все y_i .

Рассмотрим вопросы существования и единственности решения и сходимости приближенного разностного решения к точному.

Пусть $g(x) > 0$. Система (6.13) является системой линейных алгебраических уравнений. Коэффициент $g_N > 0$, поэтому матрица этой системы обладает свойством диагонального преобладания. В этом случае, как известно, решение линейной системы существует и оно единственно.

В качестве способа нахождения решения системы (6.13) может быть использован вариант метода Гаусса - метод прогонки, учитывая, что в данном случае матрица системы трехдиагональная.

Докажем сходимость. Пусть $g(x)$ и $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Тогда разностное решение равномерно сходится к точному с погрешностью $O(h^2)$ при $h \rightarrow 0$.

Представим вторую производную от функции $v(x)$ в виде разностного аналога с учетом остаточного члена ряда Тейлора в форме Лагранжа

$$v''(x_i) = \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - \frac{1}{12}h^2 v''''(\xi_i),$$

где ξ_i удовлетворяет условию $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_{i+1}$.

Точное решение (6.12) будет удовлетворять следующему разностному уравнению

$$v_{i-1} - (2 + h^2 g_i)v_i + v_{i+1} = h^2 f_i + \frac{h^4}{12} v''''(\xi_i) . \quad (6.14)$$

Вычтем последнее уравнение из (6.13), получим

$$z_{i-1} - (2 + h^2 g_i)z_i + z_{i+1} = -\frac{h^4}{12} v''''(\xi_i) , \quad (6.15)$$

где $z_i = y_i - v_i$ - погрешность приближенного решения.

Перепишем (6.15) вместе с граничными условиями для погрешности в виде

$$(2 + h^2 g_i)z_i = z_{i-1} + z_{i+1} + \frac{h^4}{12} v''''(\xi_i) , \quad (6.16)$$

$$z_0 = 0 , \quad z_N = 0 .$$

Возьмем точку x_m такую, в которой $|z_i|$ достигает максимума (граничная точка не может быть точкой x_m). Принимая во внимание сформулированное выше условие $g_i > 0$, можем в точке x_m записать неравенство, следующее из (6.16)

$$(2 + h^2 g_m)|z_m| \leq |z_{m-1}| + |z_{m+1}| + \frac{h^4}{12} |v''''(\xi_m)| .$$

Заменяя $|z_{m\pm 1}|$ на $|z_m|$ можно только усилить неравенство, в итоге получается оценка

$$z_m \leq \frac{h^2}{12} \left| \frac{v''''(\xi_m)}{g_m} \right| \leq \frac{h^2}{12} \max \left| \frac{v''''(x)}{g(x)} \right| .$$

Отсюда следует утверждение, которое следовало доказать.

По поводу устойчивости задачи следует заметить следующее. При $g(x) > 0$ задача Коши плохо обусловлена, а разностная схема (6.13) нечувствительна к этой неустойчивости. В случае, когда $g(x) < 0$, не выполняется достаточное условие прогонки, однако в практических вычислениях данное обстоятельство, как правило, оказывается несущественным и не вызывает сложностей в получении решения.

Приведенная выше разностная схема (6.13) в случае нелинейной задачи усложняется. Если имеется нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} v''(x) &= f(x, v(x)) , \\ v(a) &= c \quad , \quad v(b) = d \quad , \end{aligned} \quad (6.17)$$

то разностная схема в результате тех же действий, что и при построении схемы (6.13), примет вид

$$\begin{aligned} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} &= h^2 f(x_i, y_i) \quad , \quad 1 \leq i \leq N - 1 , \\ y_0 &= c \quad , \quad y_N = d . \end{aligned} \quad (6.18)$$

Решение (6.18) удобно искать, проводя линеаризацию системы. Процедура линеаризации заключается в следующем. Записывают значение решения в i -й точке на s -й итерации в виде

$$y_i^{(s)} = y_i^{(s-1)} + \Delta_i^{(s)} ,$$

а функцию в правой части преобразуют с помощью ряда Тейлора

$$f(x_i, y_i^{(s)}) = f(x_i, y_i^{(s-1)}) + f'_v(x_i, y_i^{(s-1)}) \Delta_i^{(s)} .$$

После этого уравнение (6.17) преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned} (y_{i-1}^{(s-1)} + \Delta_{i-1}^{(s)}) - 2(y_i^{(s-1)} + \Delta_i^{(s)}) + (y_{i+1}^{(s-1)} + \Delta_{i+1}^{(s)}) &= \\ = h^2 f(x_i, y_i^{(s-1)}) + h^2 f'_v(x_i, y_i^{(s-1)}) \Delta_i^{(s)} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Delta_{i-1}^{(s)} - [2 + h^2 f'_v(x_i, y_i^{(s-1)})] \Delta_i^{(s)} + \Delta_{i+1}^{(s)} &= \\ = h^2 f(x_i, y_i^{(s-1)}) - y_{i-1}^{(s-1)} + 2y_i^{(s-1)} - y_{i+1}^{(s-1)} \quad , \quad 1 \leq i \leq N - 1 , \\ \Delta_0^{(s)} = 0 \quad , \quad \Delta_N^{(s)} = 0 . \end{aligned} \quad (6.19)$$

Полученная система решается прогонкой с применением итерационного процесса. Итерации сходятся квадратично. Если линеаризацию не использовать, то итерационная процедура организуется согласно схеме

$$\begin{aligned} y_{i-1}^{(s)} - 2y_i^{(s)} + y_{i+1}^{(s)} &= h^2 f(x_i, y_i^{(s-1)}) \quad , \quad 1 \leq i \leq N - 1 , \\ y_0^{(s)} &= c \quad , \quad y_N^{(s)} = d . \end{aligned} \quad (6.20)$$

Здесь итерации сходятся, если $\frac{1}{8}(b-a)^2 M_s < 1$, где $M_s = \max |f'_v|$.

Метод линеаризации более удобен и быстрее приводит к результату, чем метод простых итераций (6.20).

При построении разностных схем в настоящем разделе рассматривались простейшие краевые условия первого рода. На практике часто используются более сложные краевые условия, так называемые краевые условия второго и третьего рода. В последнем случае запись краевого условия выглядит следующим образом

$$v'(a) = \varphi(v(a)) \quad .$$

Простая аппроксимация производной односторонней разностью $v'(a) \approx \frac{v_1 - v_0}{h}$ дает слишком низкую точность расчета, т.к. порядок аппроксимации производной такой разностью $O(h)$. Для повышения точности можно применить следующий прием.

По формуле Тейлора

$$v(x_1) = v(x_0) + hv'(x_0) + \frac{1}{2}h^2v''(x_0) + \dots \quad .$$

Далее с помощью (6.17) заменим вторую производную в этом разложении, а с помощью краевого условия - первую $v'(x_0)$. Получим

$$v(x_1) = v(x_0) + h\varphi(v(x_0)) + \frac{1}{2}h^2f(x_0, v(x_0)) + \dots \quad .$$

Откуда

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = \varphi(y_0) + \frac{1}{2}hf(x_0, y_0) \quad ,$$

где через y_i как обычно обозначено приближенное решение дифференциального уравнения, которое получается в результате решения разностных уравнений и не обязано, вообще говоря, точно совпадать с решением дифференциального уравнения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

1. Интерполирование функций одной и нескольких переменных
 - 1.1. Линейная интерполяция
 - 1.2. Нелинейная интерполяция
 - 1.3. Интерполяция сплайнами
 - 1.4. Многомерная интерполяция
 2. Среднеквадратичное приближение
 3. Численное интегрирование функций одной переменной
 - 3.1. Квадратурная формула Гаусса
 - 3.2. Простейшие формулы
 4. Кратные интегралы
 - 4.1. Метод ячеек
 - 4.2. Последовательное интегрирование
 5. Задача Коши
 - 5.1. Общие замечания
 - 5.2. Методы решения
 - 5.2.1. Метод Пикара
 - 5.2.2. Методы Рунге-Кутты
 - 5.2.3. Неявные методы
 6. Краевые задачи
 - 6.1. Постановка задачи
 - 6.2. Метод стрельбы
 - 6.3. Разностный метод
- Список литературы

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельников Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 445с.
2. Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. Вводные лекции по прикладной математике. М.: Наука, 1984. 192с.
3. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений / Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 177с.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 548с.
5. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учебное пособие. М.: Высш. шк., 1994. 544с.
6. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1990. 336с.
7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учебное пособие для ВУЗов. М.: Наука, 1989. 432с.