1 СТИСЛІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ РІЗНИХ ВИДІВ ФУНКЦІЙ

<table>
<tr><th>№ п/п</th><th>Назва та вигляд функції</th><th>Правило диференціювання</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>Складна функція
$y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$</td><td>Якщо функція $u = \varphi(x)$ диференційовна в точці x, а функція $y = f(u)$ диференційовна у відповідній точці u, то складна функція $y = f[\varphi(x)]$ диференційована в точці x і справедлива наступна формула:
$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Приклад</u>
$y = \sin x^2$. Знайти: y'_x .
Нехай $u = x^2$, $y = \sin u$; тоді $y'_u = \cos u$, $u'_x = 2x$; $y'_x = \cos u \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>Неявна функція
$F(x, y) = 0$</td><td>Для знаходження похідної неявної функції обидві частини рівняння $F(x, y) = 0$ диференціюються по x з урахуванням того, що y є функція від x. З одержаного рівняння визначається y'.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Приклад</u>
$2x^2 + y^3 + 15 = 0$. Знайти: y'_x .
$4x + 3y^2 \cdot y' = 0$; $y' = -\dfrac{4x}{3y^2}$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>Функція, що задана параметрично
$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t). \end{cases}$</td><td>Якщо функції $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ диференційовані, то похідна y'_x знаходиться за формулою:
$\boxed{y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Приклад</u>
$\begin{cases} x = t^2 - 2t; \\ y = 2t^3 - 3t^2 \end{cases}$ Знайти: y'_x .
$x'_t = 2t - 2$; $y'_t = 6t^2 - 6t$; $y'_x = \dfrac{6t^2 - 6t}{2t - 2} = \dfrac{6t(t-1)}{2(t-1)} = 3t.$</td></tr>
</table>

1	*2*	*3*

<table>
<tr>
<td rowspan="2">4</td>
<td>Показниково-степенева функція

$y=\left[f(x)\right]^{g(x)}$</td>
<td>Логарифмічне диференціювання

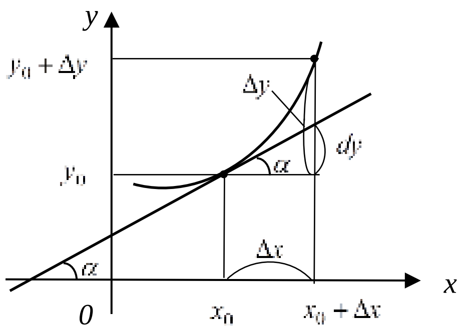
$\ln y=\ln f^{g}$; $\ln y=g\cdot\ln f$;
$\frac{1}{y}\cdot y'=g'\cdot\ln f+g\cdot\frac{1}{f}\cdot f'$; $y'=y\cdot\left[g'\cdot\ln f+\frac{g}{f}\cdot f'\right]$;

$$\boxed{y'=f^{g}\left[g'\cdot\ln f+\frac{g}{f}\cdot f'\right]}.$$
<u>Зауваження:</u> Даний метод зручно застосовувати також, якщо потрібно продиференціювати добуток кількох функцій або дріб, чисельник і знаменник якого містить добутки.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Приклад 1</u>
$y=(\sin x)^{\cos x}$. Знайти: y'_x .

$\ln y=\ln(\sin x)^{\cos x}$; $\ln y=\cos x\cdot\ln(\sin x)$;
$\frac{1}{y}\cdot y'=-\sin x\cdot\ln(\sin x)+\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$; $y'=y\cdot\left[-\sin x\cdot\ln(\sin x)+\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right]$;
$y'=(\sin x)^{\cos x}\times\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln(\sin x)\right]$.

<u>Приклад 2</u>
$y=(x+5)^3(3x+7)^4(x-3)(x+6)$.
Знайти: y'_x .
$\ln y=3\ln(x+5)+4\ln(3x+7)+\ln(x-3)+\ln(x+6)$;
$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{3}{x+5}+\frac{4}{3x+7}\cdot 3+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-6}$;
$y'=(x+5)^3(3x+7)^4(x-3)(x+6)\times\left[\frac{3}{x+5}+\frac{12}{3x+7}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-6}\right]$.</td>
</tr>
</table>

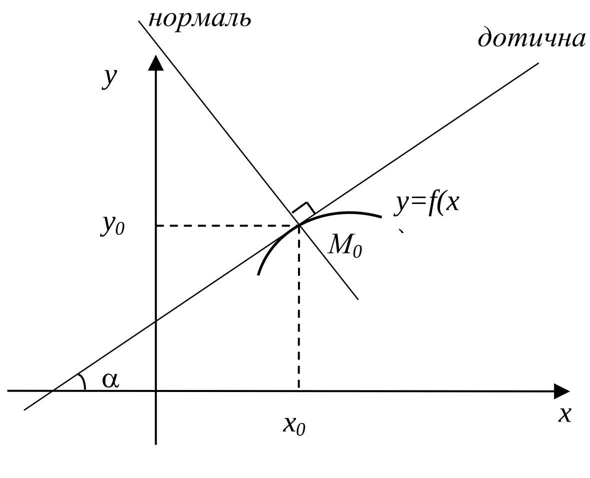
1.2 ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

Визначення	*Геометричний зміст*
Якщо приріст Δy функції $y=f(x)$ в точці x можна представити у вигляді $$\Delta y = A\Delta x+\alpha(\Delta x)$$ (де Δx – приріст аргументу, A – величина, що не залежить від Δx, $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала функція більш високого порядку меншості, ніж Δx), то головна, лінійна відносно Δx, частина приросту функції $A\Delta x$, називається ***диференціалом*** цієї функції й позначається dy.	 Диференціал функції $y=f(x)$ в точці x_0 дорівнює приросту ординати дотичної.
Зв'язок диференціала і похідної	*Приклад*
Для диференційованої функції $y=f(x)$ $$\boxed{dy=f'(x)dx}$$	Обчислити диференціал функції $y=\sin^2 x$. $f'(x)=\left(\sin^2 x\right)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$; $dy=\sin 2x dx$.
Застосування диференціала до наближеного обчислення значень функції	*Приклад*
Якщо Δx мале за абсолютною величиною, тоді для диференційованої функції $f(x)$ її приріст Δy відрізняється від диференціалу dy на величину, нескінченно малу відносно Δx. Звідси маємо наближену рівність $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$ або $$\boxed{f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)dx}.$$	Обчислити: $(1{,}03)^5$. Нехай $x_0=1$, тоді $\Delta x=0{,}03$; $f(x)=x^5$; $f'(x)=5x^4$; $f(x_0)=1$; $f'(x_0)=5\cdot 1^4=5$; $(1{,}03)^5\approx 1+5\cdot 0{,}03=1{,}15$.

1.3 ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Визначення	*Приклад*
Нехай диференційована функція $y=f(x)$ має похідну $y'=f'(x)$, яка також є диференційованою функцією. Тоді похідна від першої похідної називається ***другою похідною*** й позначається $\boxed{y''=\left(f'(x)\right)'=f''(x)}$. Загалом, похідною n-го порядку функції $y=f(x)$ називається перша похідна ***похідної*** $\boldsymbol{(n-1)}$***-го порядку***: $\boxed{y^{(n)}=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'=f^{(n)}(x)}$.	1) Для функції $y=x^3+6x^2$ знайти y''. $y'=\left(x^3+6x^2\right)'=3x^2+12x$; $y''=\left(3x^2+12x\right)'=6x+12$. 2) Обчислити y^{IV} для функції $y=\sin 2x$. $y'=2\cos 2x$; $y''=-4\sin 2x$; $y'''=-8\cos 2x$; $y^{IV}=16\sin 2x$.
Диференціал від диференціала даної функції $y=f(x)$ називається її ***другим диференціалом*** (або диференціалом другого порядку) $\boxed{d^2y=d(dy)=f''(x)dx^2}$. Загалом, ***диференціалом n-го порядку*** функції $y=f(x)$ називається диференціал від її $(n-1)$-го диференціала: $\boxed{d^ny=d\left(d^{n-1}y\right)=f^{(n)}(x)dx^n}$.	3) Обчислити d^2y для функції $y=x^4$. $y'=4x^3$; $y''=12x^2$; $d^2y=12x^2dx^2$. 4) Обчислити d^3y для функції $y=e^{3x}$. $y'=3e^{3x}$; $y''=9e^{3x}$; $y'''=27e^{3x}$; $d^3y=27e^{3x}dx^3$.

1.4 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ЗАДАЧ ГЕОМЕТРІЇ

Рівняння дотичної і нормалі	*Схематичне зображення*
1. Рівняння ***дотичної*** до кривої $y=f(x)$ в т. $M_0(x_0,y_0)$ $\boxed{y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)}$. 2. Рівняння ***нормалі*** до кривої $y=f(x)$ в т. $M_0(x_0,y_0)$ $\boxed{y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)}$.	 $tg\alpha=k=f'(x_0)$
Приклад	
Складати рівняння дотичної й нормалі до кривої $y=x^3+4x+6$ в т. $M_0(-1;1)$. $x_0=-1$; $y_0=1$; $f'(x)=3x^2+4$; $f'(x_0)=f'(-1)=3(-1)^2+4=7$.	Рівняння дотичної: $y-1=7(x+1)$ $7x-y+8=0$ Рівняння нормалі: $y-1=-\dfrac{1}{7}(x+1)$; $x+7y-6=0$

1.5 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ

Правило Лопіталя *Якщо функції* $f(x)$ *та* $\varphi(x)$ *такі, що:*

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ *та* $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ *або*

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ *та* $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\pm\infty$*;*

2) вони мають перші похідні в околі точки $x=a$ *(за можливим виключенням самої точки а);*

3) існує $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

тоді існує також й $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *і має місце рівність* $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$.

Вигляд невизначеності	*Приклад*

<table>
<tr><td colspan="2">$\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$</td><td rowspan="5">1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x\ln a-b^x\ln b}{1}=\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}.$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$

3. $\lim\limits_{x\to+0}x\cdot\ln x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$
$=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}==\lim\limits_{x\to+0}(-x)=0.$

4. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=(\infty-\infty)=$
$=\lim\limits_{x\to1}\frac{2-x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}.$

5. $=\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=(1^\infty)=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos x}=$
$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\cos x}$;
$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\ln\cos x\right)=(\infty\cdot0)=$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{-tgx}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{\cos^2x}}{2}=\lim\limits_{x\to0}\left(-\frac{1}{\cos^2x}\right)=-\frac{1}{2}$;
$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Невизначеності виду: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ можуть бути приведені до невизначеності виду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$.</td></tr>
<tr><td>$0\cdot\infty$</td><td>$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=+\infty$.
Знайти $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\varphi(x)=(0\cdot\infty)$.

$\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right)$
або $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
.</td></tr>
<tr><td>$\infty-\infty$</td><td>$\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$.
Знайти $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=(\infty-\infty)$.

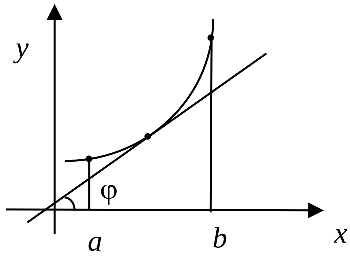
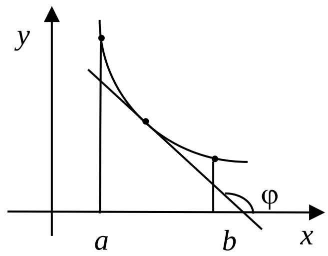
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right]=$
$=\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right).$</td></tr>
<tr><td>1^∞,

0^0,

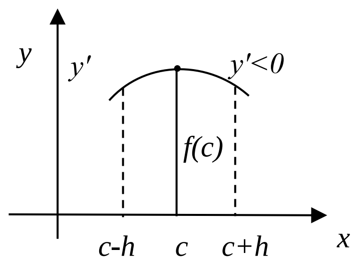
∞^0</td><td>Невизначеність цих видів приводяться до невизначеності виду $0\cdot\infty$ за допомогою тотожності $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$
$(f(x)>0)$
$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}e^{g(x)\ln f(x)}=$
$=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln f(x)}.$</td></tr>
</table>

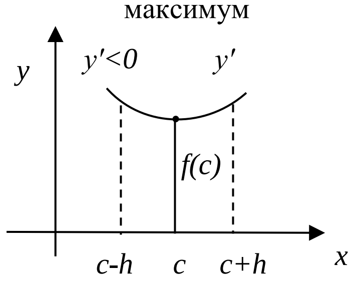
1.6 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

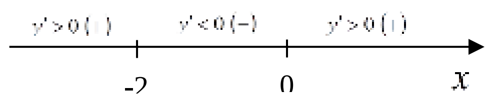
1.6.1 ПРОМІЖКИ ЗРОСТАННЯ ТА СПАДАННЯ ФУНКЦІЇ

<table>
<tr><th>Визначення</th><th>Достатні умови
зростання (спадання) функції</th></tr>
<tr><td>Функція $y = f(x)$, що визначена на проміжку (a,b), називається зростаючою на цьому проміжку, якщо з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, $(x_1, x_2 \in (a,b))$.</td><td>Якщо неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $y = f(x)$ в кожній внутрішній точці цього відрізку має додатну похідну ($f'(x)>0$), то ця функція зростає на відрізку $[a,b]$.

</td></tr>
<tr><td>Функція $y = f(x)$, що визначена на проміжку (a,b), називається спадаючою на цьому проміжку, якщо з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) < f(x_1)$, $(x_1, x_2 \in (a,b))$.</td><td>Якщо неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $y = f(x)$ в кожній внутрішній точці цього відрізку має від'ємну похідну ($f'(x)<0$), то ця функція спадає на відрізку $[a,b]$.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Приклад</td></tr>
<tr><td colspan="2">Знайти проміжки зростання й спадання функції $y = x^2 - 4x$.
$y' = 2x - 4$;
$y' > 0, \Rightarrow 2x - 4 > 0, \ x > 2$;
$y' < 0, \Rightarrow 2x - 4 < 0, \ x < 2$;
Отже, для $x \in (2;+\infty)$ функція зростає, а для $x \in (-\infty;2)$ – спадає.</td></tr>
</table>

1.6.2 ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ

<table>
<tr><th>Визначення</th><th>Необхідна умова існування екстремуму</th></tr>
<tr><td>Функція $y = f(x)$ має максимум в точці x=c, якщо існує такий окіл точки x=c, що для всіх точок, x≠c, що належать цьому околу, виконується нерівність $f(x) < f(c)$.
Функція $y = f(x)$ має мінімум в точці x=c, якщо існує такий окіл точки x=c, що для всіх точок, x≠c, що належать цьому околу, виконується нерівність $f(x) > f(c)$.
Максимуми і мінімуми функції називаються екстремумами функції.</td><td>Якщо диференційована в точці x=c функція $y = f(x)$ має в цій точці максимум або мінімум, то $f'(c) = 0$ або $f'(c)$ не існує.
Значення аргументу, при яких похідна перетворюється на нуль або має розрив, називаються критичними точками.</td></tr>
<tr><th>Геометрична ілюстрація</th><th>Достатня умова існування екстремуму</th></tr>
<tr><td>

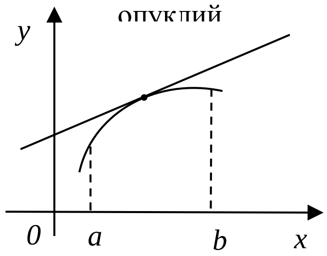
максимум


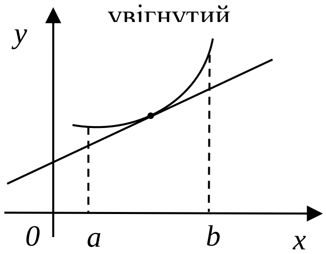
мінімум</td><td>Якщо неперервна функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$ у всіх точках деякого проміжку, що вміщує критичну точку (за виключенням, можливо, самої цієї точки), і якщо похідна $f'(x)$ при переході аргументу зліва направо через критичну точку x=c змінює знак з плюса на мінус, то функція в цій точці має максимум, а при зміні знаку з мінуса на плюс – мінімум.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Приклад</th></tr>
<tr><td colspan="2">Знайти екстремуми функції $y = \dfrac{x^3}{3} + x^2$.
$y' = x^2 + 2x$;
$y' = 0$; $x^2 + 2x = 0$; $x_1 = 0$ та $x_2 = -2$ – критичні точки.
$y' > 0$ для $x \in (-\infty;-2) \cup (0;+\infty)$;
$y' < 0$ для $x \in (-2;0)$.


Отже, при $x = -2$ функція досягає максимуму, а при $x = 0$ – досягає мінімуму.
$y_{\max} = y(-2) = -\dfrac{8}{3} + 4 = \dfrac{4}{3}$; $y_{\min} = y(0) = 0$.</td></tr>
</table>

1.6.3 ПРОМІЖКИ ОПУКЛОСТІ Й УВІГНУТОСТІ ФУНКЦІЇ

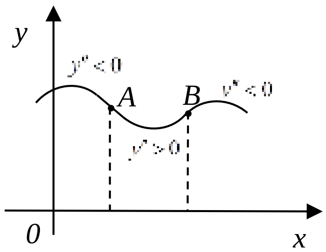
<table>
<tr><th>Визначення</th><th>Геометрична ілюстрація</th><th>Достатня ознака опуклості й увігнутості графіка функції</th></tr>
<tr><td>Графік функції $y = f(x)$ називається опуклим на проміжку (a,b), якщо він розташований нижче будь-якої своєї дотичної на цьому проміжку.

Графік функції $y = f(x)$ називається увігнутим на проміжку (a,b), якщо він розташований вище будь-якої своєї дотичної на цьому проміжку.</td><td>Графік функції опуклий


Графік функції увігнутий

</td><td>Якщо у всіх точках проміжку (a,b) $f''(x) < 0$, то графік функції на цьому проміжку опуклий, якщо ж $f''(x) > 0$, – то увігнутий.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Приклад</td></tr>
<tr><td colspan="3">Знайти проміжки опуклості й увігнутості функції $y = x^3 - 2x^2 + 3x$.

$y' = 3x^2 - 4x + 3$; $y'' = 6x - 4$;
$y'' > 0$; $6x - 4 > 0$; $x > \frac{2}{3}$;
$y'' < 0$; $6x - 4 < 0$; $x < \frac{2}{3}$.
Отже, для $x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ графік функції увігнутий;
для $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ графік функції опуклий.</td></tr>
</table>

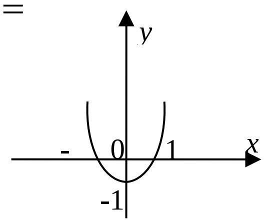
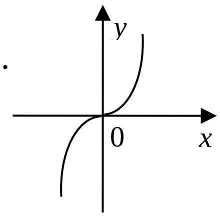
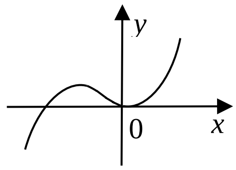
1.6.4 ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ

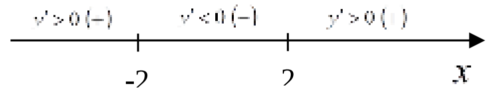
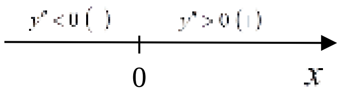
Визначення	*Достатня умова існування точки перегину*	*Приклад*
Точка, що відокремлює опуклу частину графіка неперервної функції від увігнутої, називається ***точкою перегину*** графіка функції.  т. *A*, *B* – точки перегину	Нехай крива визначається рівністю $y = f(x)$. Якщо $f''(a) = 0$ або $f''(a)$ не існує, а при переході через значення $x = a$ похідна $f''(x)$ змінює знак, тоді точка кривої з абсцисою $x = a$ є точкою перегину.	Знайти точки перегину графіка функції $y = x^3$. $y' = 3x^2$; $y'' = 6x$; $y'' > 0$; $6x > 0$; $x > 0$; $y'' < 0$; $6x < 0$; $x < 0$. Для $x \in (0;+\infty)$ графік функції увігнутий; для $x \in (-\infty;0)$ графік функції опуклий. Отже, точка (0;0) – точка перегину графіка функції.

1.6.5 ЗАГАЛЬНИЙ ПЛАН ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

№ п/п	*Алгоритм дослідження функції*	
	Коментарі	*Приклади*
1	*2*	*3*
1	***Область визначення***	
	Областю визначення функції називається сукупність усіх значень x, при яких вираз $y = f(x)$ має зміст.	1) $y = \frac{1}{x}$; область визначення: $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. 2) $y = \sqrt{x}$; область визначення: $x \in [0;+\infty)$. 3) $y = x^2 + 5x - 1$; область визначення: $x \in (-\infty;+\infty)$.

2	***Парність і непарність***	

1	*2*	*3*
3	***Точки перетину з осями координат***	
	Підставляючи $\boldsymbol{x=0}$ в рівняння $y=f(x)$, знаходимо ординати точок перетину графіка функції з віссю $\boldsymbol{0y}$. Розв'язуючи рівняння $\boldsymbol{y=0}$ або $\boldsymbol{f(x)=0}$, знаходимо абсциси точок перетину з віссю $\boldsymbol{0x}$.	$y=x^2-x+2$. При $x=0$; $y=f(0)=0^2-0+2=2\Rightarrow$ $(0;2)$ – точка перетину графіка функції $y=x^2-x+2$ з віссю $0y$. При $y=0$, $x^2-x+2=0$; $x_1=1$; $x_2=2\Rightarrow$ $\Rightarrow(1;0)$, $(2;0)$ – точки перетину графіка функції з віссю $0x$.
	Функція $y=f(x)$ називається ***парною***, якщо $f(-x)=f(x)$. Графік парної функції симетричний відносно осі $0y$. Функція $y=f(x)$ називається ***непарною***, якщо $f(-x)=-f(x)$. Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.	1) $y=x^2-1$; $f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1=$ $=f(x)$. Отже, $y=x^2-1$ – парна функція.  2) $y=x^3$; $f(-x)=(-x)^3=x^3=-f(x)$. Отже, $y=x^3$ – непарна функція.  3) $y=x^2+x^3$; $f(-x)=(-x)^2+(-x)^3=$ $=x^2-x^3$. Функція $y=x^2+x^3$ ні парна, ні непарна. 

	1) Знайти похідну функції. 2) Знайти критичні точки функції (точки, у яких $y' = 0$ або y' не існує). 3) Визначити знак першої похідної на кожному з інтервалів числової осі, розбитої критичними точками. 4) Зробити висновки: 1. на проміжках, де $\boldsymbol{y' > 0}$ функція ***зростає***, а де $\boldsymbol{y' < 0}$ ***спадає***. 2. Якщо в околі критичної точки, що входить в область визначення функції, похідна змінює знак з **+** на **–** , тоді точка є точкою ***максимуму***, а якщо з – на **+**, тоді точкою ***мінімуму***.	Знайти проміжки зростання й спадання функції й точки екстремуму функції $y = x^3 - 12x$. 1) $y' = 3x^2 - 12$; 2) $y' = 0, \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0;\ \ x^2 - 4 = 0;$ $x = \pm 2$; 3)  4) висновки: 1. функція зростає на проміжку $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; функція спадає на проміжку $x \in (-2; 2)$; 2. при $x = -2$ функція досягає максимуму, а при $x = 2$ функція досягає мінімуму $y_{\max} = y(-2) = 16$; $y_{\min} = y(2) = -16$.
5	***Проміжки опуклості й увігнутості. Точки перегину***	
	1) Знайти другу похідну. 2) Знайти точки, в яких $\boldsymbol{y'' = 0}$ або $\boldsymbol{y''}$ ***не існує***. 3) Визначити знак другої похідної на кожному з інтервалів. 4) Зробити висновки: 1. на проміжках, де $\boldsymbol{y'' > 0}$ функція ***увігнута***, а де $\boldsymbol{y'' < 0}$ ***опукла***. 2. точка неперервності функції, в околі якої знак другої похідної змінюється з **+** на – або з – на **+** є ***точкою перегину***.	Знайти проміжки опуклості й увігнутості функції й точки перегину функції $y = x^3 - 12x$. 1) $y' = 3x^2 - 12$; $y' = 6x$ 2) $y'' = 0, \Rightarrow 6x = 0;\ \ x = 0$; 3)  4) висновки: 1. на проміжку $(-\infty; 0)$функція опукла; на проміжку $(0; +\infty)$ функція увігнута; 2. точка з абсцисою $x = 0$ є точкою перегину; її координати $(0;0)$.

1	*2*	*3*
6	***Асимптоти***	
	1. Пряма $y = b$ є	Знайти асимптоти графіка функції

	горизонтальною асимптотою графіка функції $y=f(x)$, якщо існують кінцеві границі $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ або $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$. 2. Пряма $x=a$ є ***вертикальною*** асимптотою, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$, або $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$. 3. Пряма $y=kx+b$ є ***похилою*** асимптотою, якщо існують кінцеві границі $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$.	$y=\frac{x^2}{x-2}$. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-2}=-\infty$ $\Rightarrow$ горизонтальних асимптот немає. 2) $x=2$ – вертикальна асимптота, так як $\lim\limits_{x\to2-0}\frac{x^2}{x-2}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to2+0}\frac{x^2}{x-2}=+\infty$. 3) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x}=1$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x-2}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+2x}{x-2}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-2}=2$. Отже, $y=x+2$ – похила асимптота.