Лекция № 1 ***«Предмет и задачи вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.»***

В вариационном исчислении изучаются методы исследования на экстремум (минимум или максимум) функционалов.

Переменная величина J называется **функционалом**, зависящим от функции $y(x)$, если каждой функции $y(x)$ из некоторого функционального множества ставится в соответствие по заданному закону число $J[y(x)]$.

Функциональное множество, на котором задан функционал, называется его **областью определения**.

1.Вариация функционала и её свойства

Приращением или вариацией δy аргумента y(x) называется разность $\delta y = y(x) - y_1(x)$. При этом предполагается, что y(x) меняется произвольно в некотором классе функций.

Кривые $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$ близки в смысле близости нулевого порядка, если $\max\limits_x |y(x) - y_0(x)| < \varepsilon$.

Кривые $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$ близки в смысле близости первого порядка, если $\max\limits_x |y(x) - y_0(x)| < \varepsilon$ $\max\limits_x |y'(x) - y_0'(x)| < \varepsilon$.

Кривые $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$ близки в смысле близости k-го порядка ,если

$\max\limits_x |y(x) - y_0(x)| < \varepsilon$ $\max\limits_x |y'(x) - y_0'(x)| < \varepsilon$, ……, $\max\limits_x \left|y^{(k)}(x) - y^{(k)}{}_0(x)\right| < \varepsilon$.

Из этих определений следует, что если кривые близки в смысле близости k-го порядка , то они тем более близки в смысле близости любого меньшего порядка.

Функционал $J[y(x)]$ непрерывен при $y = y_0(x)$ в смысле близости k- го порядка, если для любого положительного ε можно подобрать $\delta > 0$ такое, что $|J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \varepsilon$ при $|y(x) - y_0(x)| < \delta$, $\left|y'(x) - y_0'(x)\right| < \delta$, … , $\left|y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x)\right| < \delta$.

Линейным функционалом называется функционал $J[y(x)]$, удовлетворяющий следующему условию:

$$J[C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)]=C_1 J[y_1(x)]+C_2 J[y_2(x)],$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Если приращение функционала $\Delta J = J[y(x)+\delta y]-J[y(x)]$ можно представить в виде

$$\Delta J = L[y(x,\delta y)]+\beta(y(x),\delta y)\max|\delta y|,$$

где $L[y(x),\delta y]$ - линейный по отношению к δy функционал, $\max|\delta y|$ - максимальное значение $|\delta y|$ и $\beta(y(x),\delta y)\to o$ при $\max|\delta y|\to 0$, то линейная по отношению к δy часть приращения функционала, то есть $L[y(x),\delta y]$, называется **вариацией функционала** и обозначается δJ.

Вариация функционала – это главная линейная по отношению к δy часть приращения функционала.

Можно определить вариацию как производную от функционала $J[y(x)+\alpha\delta y]$ по α при $\alpha=0$. Действительно, если функционал имеет вариацию в смысле главной линейной части приращения, то его приращение имеет вид

$$\Delta J = J[y(x)+\alpha\delta y]-J[y(x)] = L(y,\alpha\delta y)+\beta(y,\alpha\delta y)|\alpha|\max|\delta y|.$$

Производная от $J[y+\alpha\delta y]$ по α при $\alpha=0$ равна

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta J}{\Delta\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta J}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{L(y,\alpha\delta y)+\beta[y(x),\alpha\delta y]\cdot|\alpha|\cdot\max|\delta\cdot y|}{\alpha}=$$
$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{L(y,\alpha\delta y)}{\alpha}+\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta[y(x),\alpha\delta y]\cdot|\alpha|\cdot\max|\delta y|}{\alpha}=L(y,\delta y)$$

так как в силу линейности $L(y,\alpha\delta y)=\alpha L(y,\delta y)$, а

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta[y(x),\alpha\delta y]\cdot|\alpha|\cdot\max|\delta y|}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\beta[y(x),\alpha\delta y]\cdot\max|\delta y|=0$$

потому что $\beta[y(x),\alpha\delta y]\to 0$ при $\alpha\to 0$.

Вариация функционала $J[y(x)]$ равна $\delta J=\dfrac{\partial}{\partial\alpha}J[y(x)+\alpha\cdot\delta y]\Big|_{\alpha=0}$.

Функционал $J[y(x)]$ достигает на кривой $y=y_0(x)$ максимума, если значения функционала $J[y(x)]$ на любой близкой к $y=y_0(x)$ кривой не больше, чем $J[y_0(x)]$, то есть $\Delta J = J[y(x)]-J[y_0(x)]\le 0.$

Если $\Delta J \le 0$, причём $\Delta J = 0$ только при $y(x) = y_0(x)$, то говорят, что на кривой $y = y_0(x)$ достигается строгий максимум. Аналогично определяется кривая $y = y_0(x)$, на которой реализуется минимум. В этом случае $\Delta J \ge 0$ для всех кривых, близких к кривой $y = y_0(x)$.

Необходимое условие экстремума функционала. Сильный и слабый экстремум.

ТЕОРЕМА. Если функционал $J[y(x)]$, имеющий вариацию, достигает максимума или минимума при $y = y_0(x)$, где $y(x)$ - внутренняя точка области определения функционала, то при $y = y_0(x)$ $\delta J = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При фиксированных $y_0(x)$ и δy $J[y_0(x) + \alpha\delta y] = \varphi(\alpha)$ является функцией α, которая при $\alpha = 0$, по предположению, достигает максимума или минимума, следовательно, производная $\varphi'(0) = 0$, или $\frac{\partial}{\partial\alpha} J[y_0(x) + \alpha\delta y]\big|_{\alpha=0} = 0$, то есть $\delta J = 0$. Итак, на кривых на которых достигается экстремум функционала, его вариация равна нулю.

Если функционал $J[y(x)]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ максимума или минимума по отношению ко всем кривым, для которых модуль разности $y(x) - y_0(x)$ мал, то есть по отношению к кривым, близким к $y = y_0(x)$ в смысле близости нулевого порядка, то максимум или минимум называется сильным.

Если же функционал $J[y(x)]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ максимума или минимума лишь по отношению к кривым $y = y(x)$, близким к $y = y_0(x)$ в смысле близости первого порядка, то есть по отношению к кривым, близким к $y = y_0(x)$ не только по ординатам, но и по направлениям касательных, то максимум или минимум называется слабым.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. Если для каждой непрерывной функции $\eta(x)$

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta(x)dx = 0,$$

где функция $\Phi(x)$ непрерывна отрезке $[x_0, x_1]$, то $\Phi(x) \equiv 0$ на том же отрезке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположив, что в точке $x = \bar{x}$, лежащей на отрезке $x_0 \le x \le x_1$, $\Phi(x) \ne 0$, придём к противоречию. Действительно, из непрерывности функции $\Phi(x)$ следует , что если $\Phi(\bar{x}) \ne 0$, то $\Phi(x)$ сохраняет знак в некоторой окрестности ($\bar{x}_0 \le x \le \bar{x}_1$) точки $\bar{x}$; но тогда , выбрав функцию $\eta(x)$ также сохраняющей знак в этой окрестности и равной нулю вне этой окрестности, получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta(x)dx = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \Phi(x)\eta(x)dx \ne 0,$$

так как произведение $\Phi(x)\eta(x)$ сохраняет знак на отрезке ($\bar{x}_0 \le x \le \bar{x}_1$) и обращается в нуль вне этого отрезка. Итак, пришли к противоречию, следовательно, $\Phi(x) = 0$.

2. Уравнение Эйлера.

Исследуем на экстремум функционал

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \qquad (1)$$

причём граничные точки допустимых кривых закреплены: $y(x_0) = y_0$ и $y(x_1) = y_1$. Функцию $F(x, y, y')$ будем считать трижды дифференцируемой.

Известно, что необходимым условием экстремума является обращение в нуль вариации функционала. Предположим, что экстремум достигается на дважды дифференцируемой кривой $y = y(x)$.

Возьмём какую-нибудь близкую к $y = y(x)$ допустимую кривую $y = \bar{y}(x)$ и включим кривые $y = y(x)$ и $y = \bar{y}(x)$ в однопараметрическое семейство кривых

$$y(x,\alpha) = y(x) + \alpha(\bar{y}(x) - y(x))$$

при $\alpha = 0$ получим кривую $y = y(x)$, при $\alpha = 1$ имеем $y = \bar{y}(x)$.

.Вариация функции $\delta y = \bar{y}(x) - y(x)$ является функцией x . Эту функцию можно дифференцировать один или несколько раз, причём $(\delta y)' = \bar{y}'(x) - y'(x) = \delta y'$, то есть производная вариации равна вариации производной, и аналогично

$$(\delta y)'' = \bar{y}'(x) - y''(x) = \delta y'' ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\delta y)^{(k)} = \bar{y}^{(k)}(x) - y^{(k)}(x) = \delta y^{(k)}.$$

Итак, рассмотрим семейство $y = y(x,\alpha)$, где $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\delta y$, содержащее при $\alpha = 0$ кривую, на которой достигается экстремум, а при $\alpha = 1$ - некоторую близкую допустимую кривую – так называемую кривую сравнения.

Если рассматривать значения функционала

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

только на кривых семейства $y = y(x,\alpha)$, то функционал превращается в функцию α : $J[y(x,\alpha)] = \varphi(\alpha)$, так как значение параметра α определяет кривую семейства $y = y(x,\alpha)$ и тем самым определяет и значение функционала $J[y(x,\alpha)]$. Эта функция $\varphi(\alpha)$ достигает своего экстремума при $\alpha = 0$, так как при $\alpha = 0$ получаем $y = y(x)$, и функционал, по предположению, достигает экстремума по сравнению с любой близкой допустимой кривой и, в частности, по отношению к близким кривым семейства $y = y(x,\alpha)$. Необходимым условием экстремума функции $\varphi(\alpha)$ при $\alpha = 0$, как известно, является обращение в нуль её производной при $\alpha = 0$: $\varphi'(0) = 0$.

Так как
$$\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x,\alpha), {y_x}'(x,\alpha))dx$$

то
$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \frac{\partial}{\partial\alpha} y(x,\alpha) + F_{y'} \frac{\partial}{\partial\alpha} y'(x,\alpha) \right] dx,$$

где
$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)),$$

$$F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)),$$

или, так как
$$\frac{\partial}{\partial\alpha} y(x,\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha}[y(x) + \alpha\delta y] = \delta y$$

и
$$\frac{\partial}{\partial\alpha} y'(x,\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha}[y'(x) + \alpha\delta y'] = \delta y',$$

получим
$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y (x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha))\delta\alpha + F_{y'}(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha))\delta y' \right] dx$$

$$\varphi'(0)=\int_{x_0}^{x_1}\left[F_y(x,y(x),y'(x))\delta y+F_{y'}(x,y(x),y'(x))\delta y'\right]dx$$

Известно, что $\varphi'(0)$ называется вариацией функционала и обозначается δJ . Необходимое условие экстремума функционала J заключается в обращении в нуль его вариации : $\delta J=0$. Для функционала $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$ это условие имеет вид $\int_{x_0}^{x_1}\left[F_y\delta y+F_{y'}\delta y'\right]dx=0.$ Интегрируя второе слагаемое по частям, и, принимая во внимание, что $\delta y'=(\delta y)'$, получим

$$\delta J=\left[F_{y'}\delta y\right]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'})\delta y\cdot dx\,.$$

Но $\delta y\big|_{x=x_0}=\bar{y}(x_0)-y(x_0)=0$ и $\delta y\big|_{x=x_1}=\bar{y}(x_1)-y(x_1)=0$,

Потому что все допустимые кривые в рассматриваемой простейшей задаче проходят через фиксированные граничные точки, и следовательно,

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'})\delta y\cdot dx\,.$$

Итак , необходимое условие экстремума приобретает вид

$$\int_{x_0}^{x_1}(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'})\delta y\cdot dx=0, \qquad (2)$$

причём первый множитель $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}$, на кривой $y=y(x)$, реализующей экстремум, является заданной непрерывной функцией, а второй множитель δy, ввиду произвола в выборе кривой сравнения $y=\bar{y}(x)$, является произвольной функцией, удовлетворяющей лишь некоторым весьма общим условиям, а именно : функция δy в граничных точках $x=x_0$ и $x=x_1$ обращается в нуль, непрерывна и дифференцируема один или несколько раз, δy или δy и $\delta y'$ малы по абсолютной величине.

Применим теперь основную лемму для упрощения полученного выше необходимого условия (2) экстремума простейшего функционала (1)

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \delta y \cdot dx = 0. \qquad (2)$$

Все условия леммы выполнены: на кривой, реализующей экстремум, множитель $(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'})$ является непрерывной функцией, а вариация δy является произвольной функцией, на которую наложены лишь предусмотренные в основной лемме ограничения общего характера, следовательно , $(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \equiv 0$ на кривой $y = y(x)$, реализующей экстремум рассматриваемого функционала, то есть $y = y(x)$ является решением дифференциального уравнения второго порядка $(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) = 0$, или в развёрнутом виде

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0.$$

Это уравнение называется **уравнением Эйлера** (оно впервые было им опубликовано в 1744 году). Интегральные кривые уравнения Эйлера $y = y(x, C_1, C_2)$ называются **экстремалями**.

Напомним, что краевая задача

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно может быть не единственным.