



# СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ (АЛГЕБРЫ) ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

# Компьютерная алгебра (математика)

возникла в середине XX века на стыке математики и информатики.

Это наука об эффективных алгоритмах вычислений математических объектов.

Синонимами термина «компьютерная алгебра» являются:

«символьные вычисления»,

«аналитические вычисления»,

«аналитические преобразования»,

«формальные вычисления».

## Система компьютерной алгебры

(СКА, англ. *computer algebra system, CAS*) — это прикладная программа для символьных вычислений, то есть выполнения преобразований и работы с математическими выражениями в аналитической (символьной) форме.

В системах компьютерной алгебры используются следующие разделы математики: *символьное интегрирование, гипергеометрическое суммирование, пределы, факторизация полиномов, наибольший общий делитель, метод Гаусса, диофантовы уравнения, производные от элементарных и специальных функций и др.*).

# Назначение, как работают системы компьютерной алгебры

Основное назначение систем компьютерной алгебры (СКА) - работа с математическими выражениями в символьной форме.

**СКА** работают следующим образом:

- математические объекты (алгебраические выражения, ряды, уравнения, векторы, матрицы и др.) и указания, что с ними делать, задаются пользователем на входном языке системы в виде символьных выражений;
- интерпретатор анализирует и переводит символьные выражения во внутреннее представление;
- символьный процессор системы выполняет требуемые преобразования или вычисления и выдает ответ в математической нотации.

# Примеры символьных преобразований

$$\begin{bmatrix} x^2 - y = 0 \\ x^2 - (y - 2)^2 = 0 \end{bmatrix} \text{solve, } x, y \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\int \frac{x+3}{x^2-4x+4} dx \rightarrow \ln(x-2) - \frac{5}{x-2}$$

$$(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3)^2 \text{ expand} \rightarrow x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$$

MathCAD

```
solve([x^2-y=0, x^2-(y-2)^2=0], [x, y]);  
[[x=-2, y=4], [x=1, y=1], [x=-1, y=1], [x=2, y=4]]
```

```
integrate((x+3)/(x^2-4*x+4), x);  
log(x-2) - 5/(x-2)
```

Maxima

```
expand((x-1)*(x+2)*(x-3)^2);  
x^4 - 5 x^3 + x^2 + 21 x - 18
```

# СКА в Википедии



Достаточно полный список систем компьютерной алгебры с указанием их функциональности и платформ, на которых они эксплуатируются, представлен в Википедии

[https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_computer\\_algebra\\_systems](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_computer_algebra_systems)

# Классификация СКА по функциональному назначению

## ***СКА общего назначения (универсальные)***

позволяют работать в широком диапазоне предметных областей:

Derive, Mathematica, Maple, Maxima, Axiom, Reduce, MuPAD, MathCAD, MATHLAB, Sage, Yacas, Scientific WorkPlace, Kalamaris

***Специализированные*** - предназначены для решения задач одного или нескольких смежных разделов символьной математики:

GAP (алгебра групп), Cadabra (тензорная алгебра), KANT (алгебра и теория чисел).

# Типовая структура СКА

Внутреннюю структуру СКА составляют:

- ядро системы,
- интерфейсная оболочка,
- библиотеки специализированных программных модулей и функций,
- пакеты расширения,
- справочная система.



# Функциональное назначение блоков

**Ядро** содержит машинные коды реализации операторов и встроенных функций СКА, обеспечивающих выполнение аналитических преобразований математических выражений на основе системы определенных правил.

**Библиотеки специализированных программных модулей и функций** содержат систематизированные (по типам обрабатываемых абстрактных объектов - числа, функции, алгебры и т.п. и/или методам вычислений - аналитические, численные, смешанные) реализации алгоритмов решения типовых математических задач. Они функционально расширяют ядро СКА.

# Функциональное назначение блоков

**Пакеты расширения** обеспечивают различные формы адаптации СКА к классам математических задач, внешнему ПО (операционным системам, графическим пакетам и т.п. ) и целям пользователей.

**Интерфейсные оболочки** обеспечивают поддержку всех функций, необходимых для информационных и управляющих взаимодействий между системой и пользователями, в том числе: ввод, редактирование, сохранение, обмен программами, использование разных аппаратных средств.

# Функциональное назначение блоков

***Справочная система*** всех СКА содержит и обеспечивает пользователей описаниями функциональных возможностей и демонстрационными примерами работы, информационными сообщениями о текущем состоянии системы, а также сведениями о математических основах алгоритмов.

**Многие СКА, по сути, являются не только инструментами для получения и анализа решений, но и математическими энциклопедиями.**

# Основные функциональные возможности СКА

Используя СКА, можно выполнять в аналитической форме:

- упрощение выражений до меньшего размера или приведение к стандартному виду,
- подстановки символьных и численных значений в выражения,
- изменение вида выражений: раскрытие произведений и степеней, частичная и полная факторизация (разложение на множители),
- разложение на простые дроби, удовлетворение ограничений, запись тригонометрических функций через экспоненты, преобразование логических выражений,
- нахождение пределов функций и последовательностей,

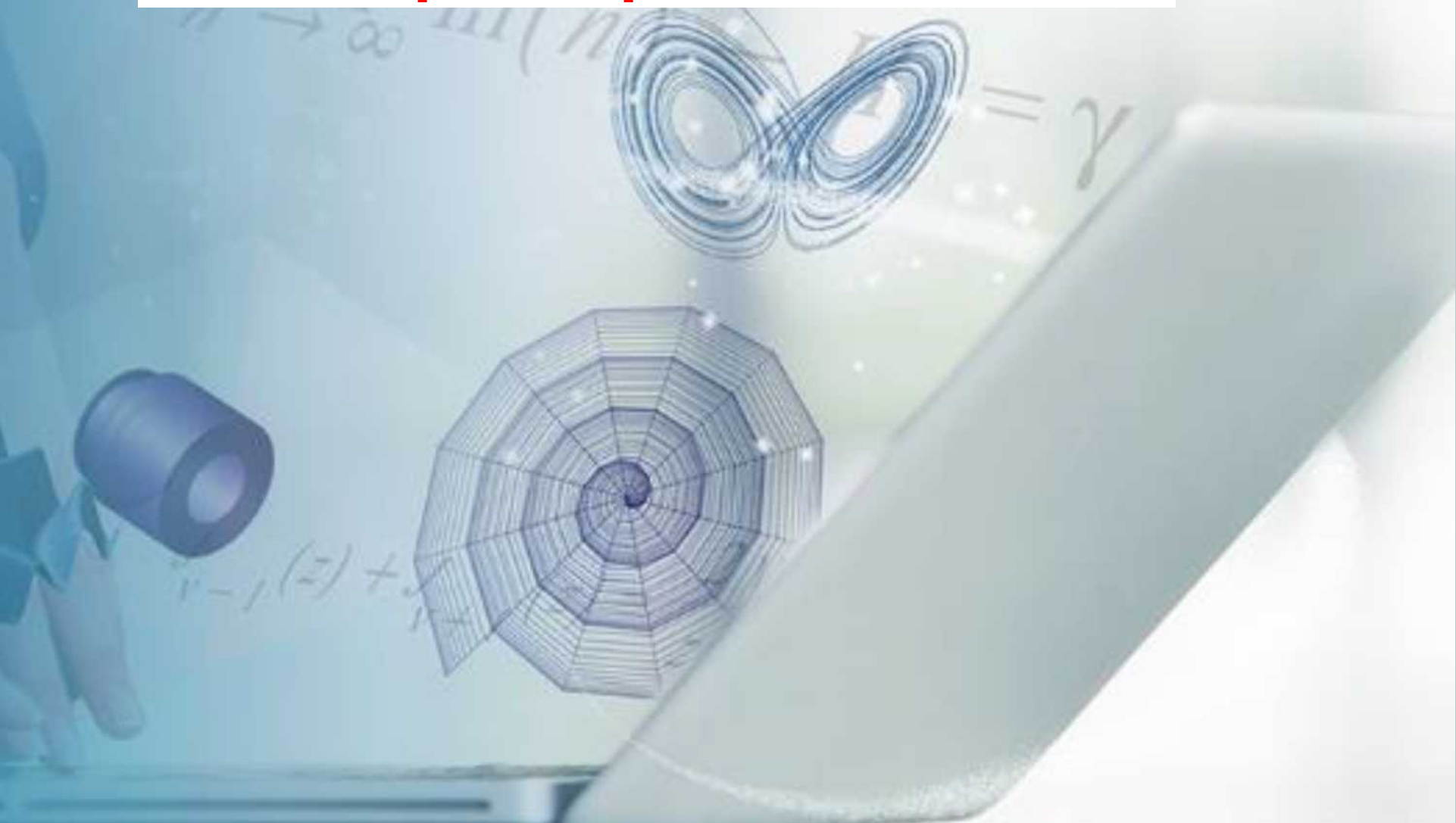
# Основные функциональные возможности СКА

- операции с рядами (суммирование, умножение, суперпозиция),
- дифференцирование в частных и полных производных,
- нахождение неопределённых и определённых интегралов (символьное интегрирование),
- анализ функций на непрерывность,
- поиск экстремумов функций и асимптот,
- символьное решение задач оптимизации: нахождение глобальных экстремумов, условных экстремумов и т. д.,
- решение линейных и нелинейных уравнений,
- алгебраическое (нечисленное) решение дифференциальных и конечно - разностных уравнений,

# Основные функциональные возможности СКА

- интегральные преобразования,
- прямое и обратное быстрое преобразование Фурье,
- интерполяция, экстраполяция и аппроксимация,
- операции с векторами,
- матричные операции: обращение, факторизация, решение спектральных задач,
- статистические вычисления,
- машинное доказательство теорем.

# Разнообразие реализаций СКА



# Maple



Является продуктом компании **Waterloo Maple Software, Inc.** (<http://www.maplesoft.com/>), которая с **1984 года** выпускает программные продукты, ориентированные на сложные математические вычисления, визуализацию данных и моделирование. Maple позволяет выполнять как численные, так и аналитические расчеты с возможностью редактирования текста и формул на рабочем листе. Благодаря представлению формул в полиграфическом формате, великолепной двух- и трехмерной графике и анимации Maple является одновременно и мощным научным графическим редактором. Простой и эффективный язык-интерпретатор, открытая архитектура, возможность преобразования кодов Maple в коды C делает его очень эффективным средством создания новых алгоритмов. Обладает интуитивно понятным интерфейсом, простыми правилами работы и широким функционалом.



# Maple



<b>Разработчик</b>	Waterloo Maple, Inc.
<b>Написана на</b>	C, язык Maple
<b>Операционная система</b>	Windows (7, 8 и 10), macOS, Linux
<b>Первый выпуск</b>	1982
<b>Последняя версия</b>	Maple 2021.1 is available
<b>Лицензия</b>	Проприетарная
<b>Сайт</b>	<a href="https://www.maplesoft.com/products/maple/">https://www.maplesoft.com/products/maple/</a>

См. [https://en.wikipedia.org/wiki/Maple \(software\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Maple_(software))  
<https://ru.wikipedia.org/wiki/Maple>



Система Mathematica — компании **Wolfram Research, Inc.** (<http://www.wolfram.com/>) имеет чрезвычайно широкий набор средств, переводящих сложные математические алгоритмы в программы. По сути дела, все алгоритмы, содержащиеся в курсе высшей математики технического вуза, заложены в память компьютерной системы Mathematica. В некоторых странах (например, в США) система высшего образования тесно связана с этим продуктом. Огромное преимущество системы Mathematica состоит в том, что ее операторы и способы записи алгоритмов просты и естественны. Mathematica имеет мощный графический пакет, с помощью которого можно строить графики очень сложных функций одной и двух переменных. Главное преимущество Mathematica, делающее ее бесспорным лидером среди других систем высокого уровня, состоит в том, что эта система получила сегодня очень широкое распространение во всем мире, охватив огромные области применения в научных и инженерных исследованиях, а также в сфере образования.



# Mathematica



<b>Разработчик</b>	Wolfram Research
<b>Написана на</b>	C
<b>Операционная система</b>	Microsoft Windows, OS X, Linux
<b>Первый выпуск</b>	23 июня 1988
<b>Последняя версия</b>	Mathematica 12.3 2021 год
<b>Лицензия</b>	Проприетарная
<b>Сайт</b>	<a href="http://www.wolfram.com/mathematica/">http://www.wolfram.com/mathematica/</a>

См. [https://en.wikipedia.org/wiki/Wolfram Mathematica](https://en.wikipedia.org/wiki/Wolfram_Mathematica)  
<https://ru.wikipedia.org/wiki/Mathematica>

# MathCAD



MathCAD — система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением.

MathCAD был задуман и первоначально написан **Алленом Раздовом** из **Массачусетского технологического института** (MIT), соучредителем компании **Mathsoft**, которая с 2006 года является частью корпорации **PTC** (Parametric Technology Corporation). MathCAD имеет интуитивный и простой для использования интерфейс пользователя.

Некоторые из математических возможностей MathCAD (версии до 13.1 включительно) основаны на подмножестве системы компьютерной алгебры **Maple** (МКМ, Maple Kernel Mathsoft). Начиная с 14 версии — использует символьное ядро **MuPAD** (<https://en.wikipedia.org/wiki/MuPAD>).

# MathCAD



Работа осуществляется в пределах рабочего листа, на котором уравнения и выражения отображаются графически, в противовес текстовой записи в языках программирования. При создании документов - приложений используется принцип WYSIWYG (What You See Is What You Get — «что видишь, то и получаешь»).

Несмотря на то, что эта программа, в основном, ориентирована на пользователей, не являющихся программистами, MathCAD также используется в сложных проектах, чтобы визуализировать результаты математического моделирования путём использования распределённых вычислений и традиционных языков программирования. MathCAD достаточно удобно использовать для обучения, вычислений и инженерных расчетов. Есть возможность создания электронных книг (e-Book).

# MathCAD



<b>Разработчик</b>	<b>Mathsoft, PTC</b>
<b>Операционная система</b>	Microsoft Windows
<b>Первый выпуск</b>	1986
<b>Последняя версия</b>	Mathcad Prime 7
<b>Лицензия</b>	Проприетарная
<b>Сайт</b>	<a href="https://www.ptc.com/engineering-math-software/mathcad">https://www.ptc.com/engineering-math-software/mathcad</a>

См. <https://en.wikipedia.org/wiki/Mathcad>  
<https://ru.wikipedia.org/wiki/Mathcad>



# Maxima

---

Написана на языке **Common Lisp**. Произошла от системы Macsyma, разрабатывавшейся в **MIT** с 1968 по 1982 годы в рамках проекта Project MAC, финансируемого Министерством энергетики США (DOE) и другими государственными организациями. Профессор **Уильям Шелтер** (англ. Bill Schelter) из Техасского университета в Остине поддерживал один из вариантов системы, известный как DOE Macsyma, с 1982 года до самой своей смерти в 2001 году. В 1998 году Шелтер получил от Министерства энергетики разрешение опубликовать исходный код DOE Macsyma под лицензией GPL, и в 2000 году он создал проект на SourceForge.net (<http://maxima.sourceforge.net/>) для поддержания и дальнейшего развития DOE Macsyma под именем Maxima. Имеет широкий набор средств для проведения аналитических вычислений, численных вычислений и построения графиков.



# Maxima

---

По набору возможностей система близка к таким коммерческим системам, как Maple и Mathematica. В то же время она обладает высочайшей степенью переносимости: может работать на всех основных современных операционных системах на компьютерах, начиная от наладонных, и вплоть до самых мощных.

Для системы построено несколько графических интерфейсов пользователя и надстроек: XMaxima (включен в поставку во многих ОС), wxMaxima (основан на wxWidgets; включается в поставку для ОС Windows) и других, а также может работать в режиме командной строки (используя псевдографику). Благодаря открытому коду системы появились производные решения, например, на основе Maxima сделана программа Stack, предназначенная для автоматизированной проверки правильности математических выражений, применяемая, в частности, для компьютерной проверки ответов обучающихся математике.





# Maxima

<b>Автор</b>	Проект MAC Массачусетского технологического института
<b>Разработчик</b>	Уильям Шелтер, сообщество добровольцев
<b>Написана на</b>	Common Lisp
<b>Операционная система</b>	Linux, Microsoft Windows, Mac OS X, FreeBSD, Android
<b>Первый выпуск</b>	1982
<b>Последняя версия</b>	5.45.1: June 21, 2021
<b>Лицензия</b>	GNU GPL
<b>Сайт</b>	<a href="http://maxima.sourceforge.net/">http://maxima.sourceforge.net/</a>

См. <https://en.wikipedia.org/wiki/Maxima>  
(software),

<https://ru.wikipedia.org/wiki/Maxima>

# Аxiом

Свободная система компьютерной алгебры. Она состоит из среды интерпретатора, компилятора и библиотеки, описывающей строгую, математически правильную иерархию типов.

Разработка системы была начата в **1971 году** группой исследователей **IBM** под руководством **Ричарда Дженкса** (Richard Dimick Jenks). Изначально система называлась Scratchpad. Первоначально проект рассматривался как исследовательская платформа для разработки новых идей в вычислительной математике.

В 90-х система была продана компании **Numerical Algorithms Group** (NAG), получила название Аxiом и стала коммерческим продуктом. Но по ряду причин система не получила коммерческого успеха и была отозвана с рынка в октябре 2001. NAG решила сделать Аxiом свободным программным обеспечением и открыла исходные коды под **модифицированной лицензией BSD**.

# Axiom

В 2007 у Axiom появились две ветки (два форка ) с открытым исходным кодом: **OpenAxiom** и **FriCAS**. Разработка системы продолжается, выходят ее новые версии.

# Аxiom

<b>Разработчик</b>	Независимая группа людей
<b>Написана на</b>	Лисп
<b>Операционная система</b>	Кросс платформенное ПО
<b>Первый выпуск</b>	1986
<b>Последняя версия</b>	OpenAxiom-1.4.2 was released April 1, 2013 FriCAS 1.3.7 released June 30, 2021
<b>Лицензия</b>	Модифицированная лицензия BSD
<b>Сайт</b>	<a href="http://www.open-axiom.org/index.html">http://www.open-axiom.org/index.html</a> <a href="http://fricas.sourceforge.net/">http://fricas.sourceforge.net/</a>

См. [https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom \(computer algebra system\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_(computer_algebra_system))  
<https://ru.wikipedia.org/wiki/Axiom>

# Reduce

Reduce — бесплатная система компьютерной алгебры общего назначения, имеющая расширенные возможности для применения в физике.

Разработку начал в 1960-е годы **Энтони Хёрн** (Anthony C. Hearn), позднее к созданию системы присоединились и другие учёные. Система написана целиком на специально созданном для неё языке **Portable Standard Lisp** — диалекте Лиспа, включающим, в дополнении к языку со стандартным скобочным лисп-синтаксисом, специальный язык RSL с алголо подобным синтаксисом. RSL используется как основа для пользовательского языка системы.

С декабря 2008 года Reduce стал доступен бесплатно как открытое программное обеспечение под видоизменённой **лицензией BSD license** на сайте **SourceForge**, до этого пакет стоил около 1000 долларов.

# Reduce

Reduce имеет широкий набор средств для проведения аналитических вычислений, численных вычислений и построения графиков. По набору возможностей система близка к таким коммерческим системам как Maple и Mathematica. В то же время она обладает высокой степенью переносимости: она может работать на всех основных современных операционных системах на компьютерах, начиная от наладонных компьютеров, вплоть до самых мощных.

Доступна на различных платформах Unix, Linux, Microsoft Windows, Apple Macintosh, iOS и Android. Почти все эти реализации основаны на Portable Standard Lisp или Codemist Standard Lisp.

**Разработка системы продолжается, выходят ее новые версии.**

# Reduce

<b>Разработчик</b>	<b>Anthony C. Hearn et al.</b>
<b>Написана на</b>	Лисп
<b>Операционная система</b>	Кроссплатформенное ПО
<b>Последняя версия</b>	Апрель 2011
<b>Лицензия</b>	лицензия BSD
<b>Сайт</b>	<a href="http://reduce-algebra.com">http://reduce-algebra.com</a>

См. [https://en.wikipedia.org/wiki/Reduce \(computer algebra system\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Reduce_(computer_algebra_system)),

<https://ru.wikipedia.org/wiki/Reduce>

<https://ru.wikipedia.org/wiki/Reduce>

# Литература и Internet-источники

- *Таранчук В. Б.* Основные функции систем компьютерной алгебры. — Минск: БГУ, 2013.
- <http://elib.bsu.by/handle/123456789/46210>
- Современные системы компьютерной математики  
<http://compress.ru/article.aspx?id=12530>
- <https://en.wikipedia.org/wiki/>
- <https://ru.wikipedia.org/wiki/>





# Словарь терминов

**GNU General Public License** - (*Универсальная обще доступная лицензия GNU* или *Открытое лицензионное соглашение GNU*) — наиболее популярная лицензия на свободное программное обеспечение, созданная в рамках проекта GNU в 1988 г. Её также сокращённо называют **GNU GPL** или даже просто **GPL**, если из контекста понятно, что речь идёт именно о данной лицензии.



# Словарь терминов

**GPL лицензия** предоставляет получателям компьютерных программ следующие права, или «свободы»:

- 1) свободу запуска программы, с любой целью;
- 2) свободу изучения того, как программа работает, и её модификации (предварительным условием для этого является доступ к исходному коду);
- 3) свободу распространения копий;
- 4) свободу улучшения программы, и выпуска улучшений в публичный доступ (предварительным условием для этого является доступ к исходному коду).



# Словарь терминов

---

**Лицензия BSD** ([англ. BSD license, Berkeley Software Distribution license](#) — Программная лицензия университета Беркли) — это лицензионное соглашение, впервые применённое для распространения UNIX-подобных операционных систем BSD. Существуют две основные версии лицензии BSD: «оригинальная» и так называемая «модифицированная» (вторую в англоязычной литературе часто называют New BSD License). Эти лицензии были подвергнуты ряду изменений, породив множество лицензий, обобщённо именуемых «лицензии типа BSD».



# Словарь терминов

«В настоящее время лицензии типа BSD являются одними из самых популярных лицензий для свободного программного обеспечения и используются для многих программ (помимо BSD-версий UNIX, для которых лицензия BSD была изначально создана).»

[https://ru.wikipedia.org/wiki/%DQ%9B%D0%B8%D1%86%D0%B5%DQ%BD%DQ%B7%DQ%B8%D1%8F BSD](https://ru.wikipedia.org/wiki/%DQ%9B%D0%B8%D1%86%D0%B5%DQ%BD%DQ%B7%DQ%B8%D1%8F_BSD)

# Словарь терминов

Алгебра (от арабского *«аль-джабр»*, *«воссоединение»*, *«связь»*, *«завершение»* — раздел математики, который можно охарактеризовать как обобщение и расширение арифметики. Слово «алгебра» также употребляется в названиях различных алгебраических систем. В более широком смысле под алгеброй понимают раздел математики, посвящённый изучению операций над элементами множества произвольной природы, обобщающих обычные операции сложения и умножения чисел.



## Словарь терминов

Интерфейс, interface — внешний вид класса, объекта или модуля, выделяющий его существенные черты и не показывающий внутреннего устройства и секретов поведения.

Кроссплатформенность — свойство программных комплексов, позволяющее им работать в разных операционных системах.



# Словарь терминов

**Компьютерная алгебра** — область математики, лежащая на стыке алгебры и вычислительных методов. Термин «компьютерная алгебра» возник как синоним терминов «символьные вычисления», «аналитические вычисления», «аналитические преобразования» и т.д. Даже в настоящее время этот термин на французском языке дословно означает «формальные вычисления».



# Словарь терминов

Свободное программное обеспечение — программное обеспечение, в отношении которого пользователь обладает «четырьмя свободами»: запускать, изучать, распространять и улучшать программу. Распространяется под свободными лицензиями, например GPL.





## Словарь терминов

Системы компьютерной алгебры (СКА), (или системы символьных вычислений) — такие программные продукты, как Maxima, Maple, Mathematica, Reduce, MuPAD, Derive, Magma, Macsyma, Mathomatic, Axiom, GAP, FreeMat, Octave, Scilab, YACAS и другие.