«Прикладна теорія катастроф у інженерії»

Лекція 1.

Catastrophe Theory

Vladimir I. ARNOLD | Rene THOM | Christopher ZEEMANN

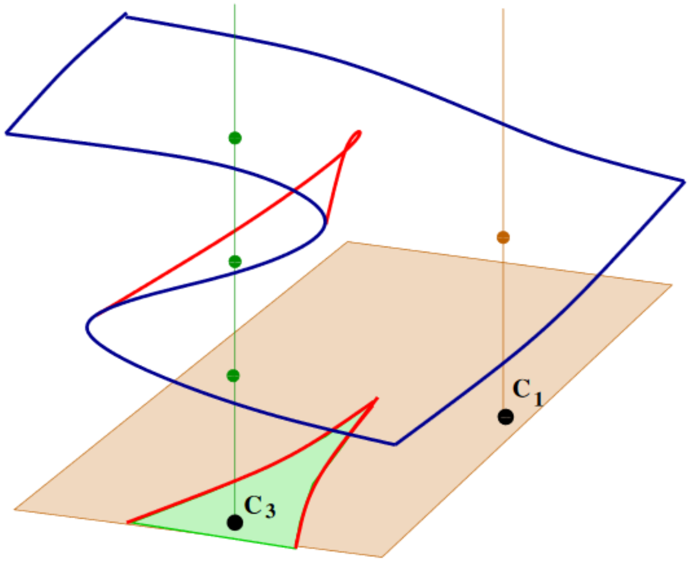
Originated by Vladimir I. Arnold, Rene Thom, and Christopher Zeemann in the 1960-70s,

Catastrophe Theory studies and classifies phenomena characterized by sudden shifts in behavior arising from small changes in circumstances.

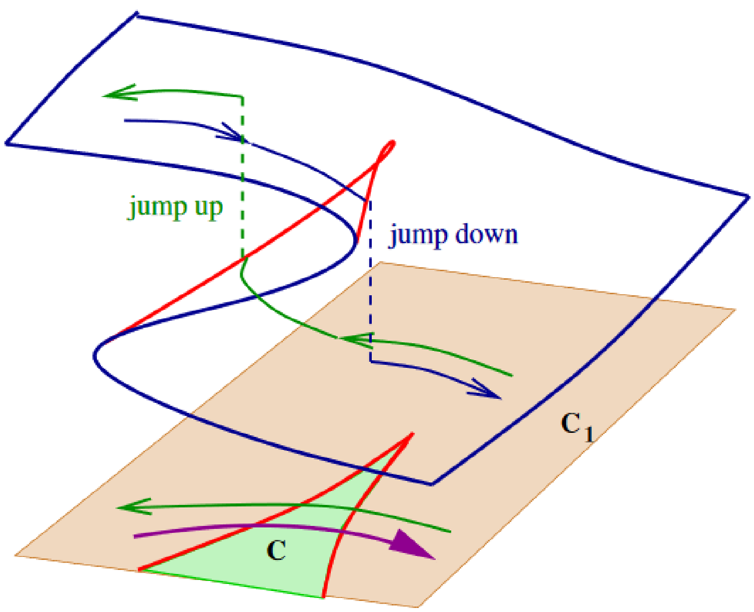
Small changes in certain parameters of a nonlinear system can cause equilibria to appear or disappear, or to change from attracting to repelling and vice versa, leading to large and sudden changes of the behaviour of the system. Catastrophe theory has been applied to a number of different physical, chemical, biological, and even social phenomena.

Explanation of experimental phenomena.

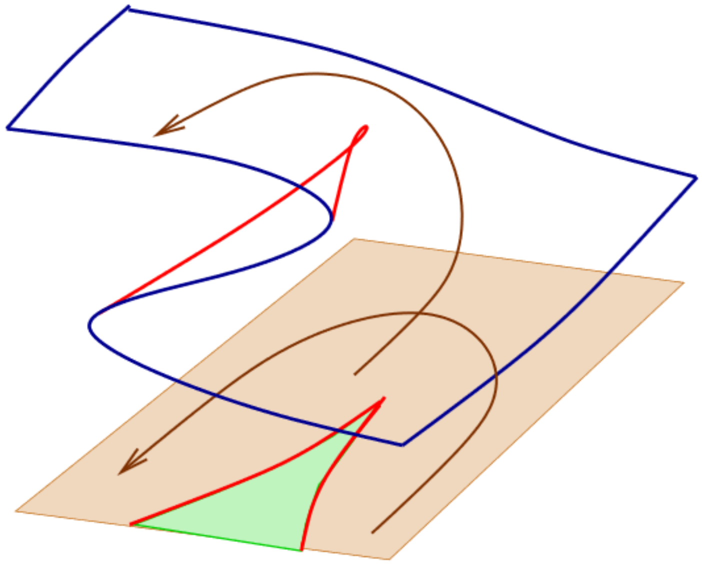
1. The number of equilibrium points depends of the position of C.



2. The equilibrium point jumps when C crosses the cusp.



3. One can avoid the jump (the catastrophe)



Chemistry

Van der Waals Equation of State

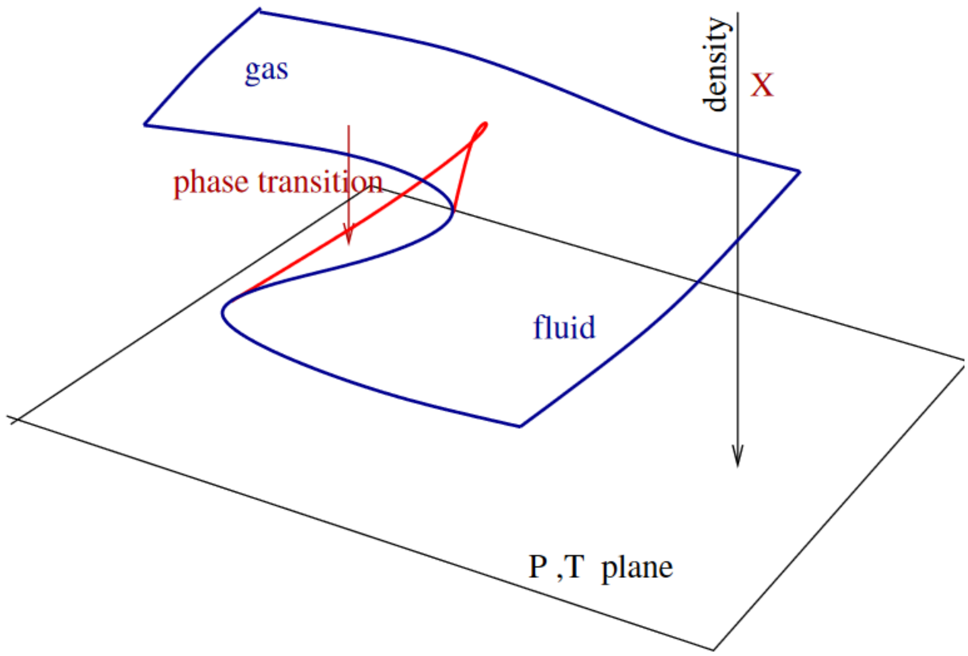
$$(P + \frac{\alpha}{V^2})(V - \beta) = RT$$

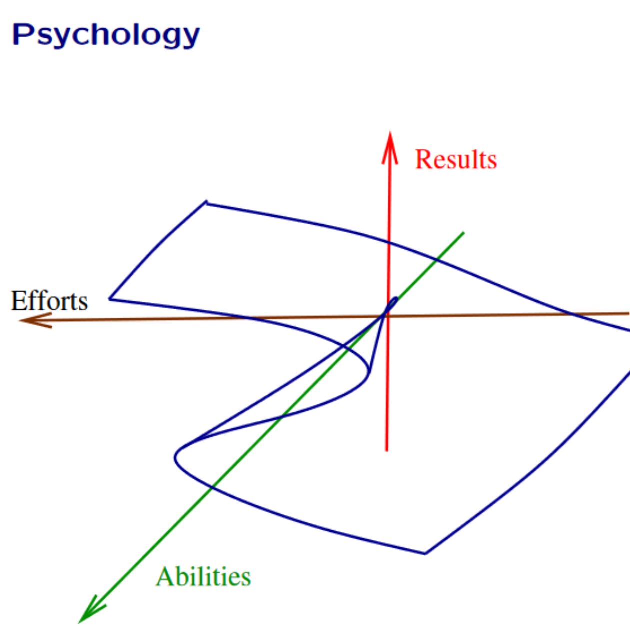
Here P is the gas pressure, V is the gas volume, and T is the gas temperature, and α, β are parameters depending on the gas molecule properties.

Set $X = \frac{1}{V}$, then after a linear change of coordinates we appear at the equation

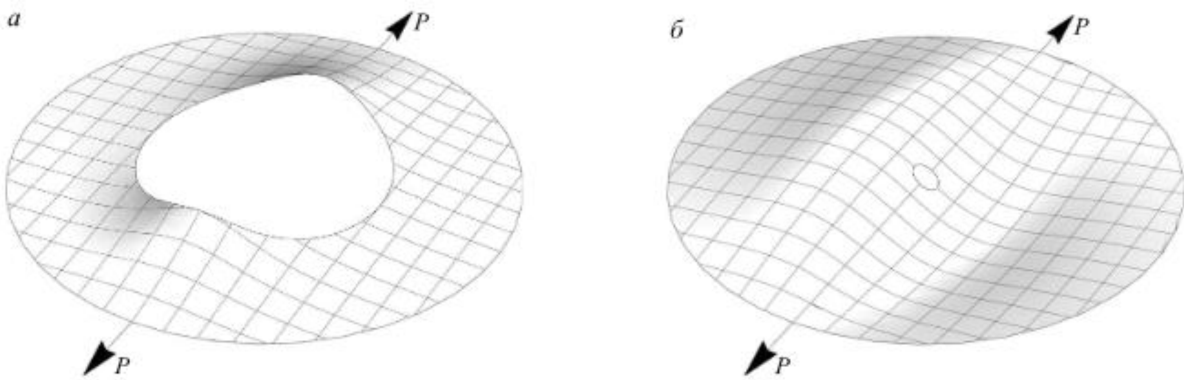
$$X^3 + aX + b = 0,$$

where a, b are linearly expressed in terms of P, T.





Технічні системи



Форми втрати стійкості при розтягуванні круглої пластини при досягнені критичних значень сили P

Викид безстикової ділянки колії/Railway track buckle

Природні явища (лавинонебезпека)

Умовою для початку руху сніжної маси і набору нею певної швидкості є довжина відкритого схилу від 100 до 500 м та кут його нахилу 20^0-40^0. Багато що залежить і від інтенсивності снігопаду. Якщо за 2-3 дня випаде 0,5 м снігу, то це зазвичай не викликає побоювання, але якщо ця ж кількість випаде за 10-12 годин, то схід лавини цілком можливий. У більшості випадків інтенсивність снігопаду 2-3 см/год близька до критичної. Тому в площині параметрів (інтенсивність снігопаду, відрізок часу на протязі якого він відбувається) вимальовується характерна каспоіда – яка виділяє лавинонебезпечну область параметрів снігопаду.

Поняття індексу Пуанкаре особливої точки

Приклад, що розглядається нижче, розкриває просту геометричну картину поведінки особливих точок при зміні характерного параметра системи, внаслідок чого з'являється кратна особлива точка (речова біфуркація). Система лінійного наближення, відповідна цьому критичному значенню параметра, має нульове власне значення. В цьому випадку висновок про стійкість стаціонарного стану може бути отриманий лише із залученням нелінійних членів системи у варіаціях (критичний випадок одного нульового кореня).

Позначимо через j індекс Пуанкаре простої особливої точки, породжуваною нелінійною системою диференціальних рівнянь другого порядку

$$dx/dt = f(x, v, \theta) . \tag{1.1}$$

Характеристичний визначник і відповідне характеристичне рівняння системи (1.1) в околиці стаціонарного стану (x_1^*, x_2^*) мають вигляд:

$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 -$ характеристичний визначник системи;

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 -$ характеристичне рівняння,

де

$$q = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \frac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)}\Big|_{(x_1^*, x_2^*)} = \lambda_1 \lambda_2 .$$

При ($q \neq 0$): $j = q/|q|$.

Тоді для вузла, фокусу і центру j=1, для сідла j=-1. Припустимо, що дивергенція векторного поля, що задається системою (1.1), негативна в усій фазовій площині (p > 0), тоді стійкість відповідного стаціонарного стану (x_1^*, x_2^*) може бути встановлена лише по знаку вільного члена q, тобто по його індексу Пуанкаре (j). При безперервній зміні параметра системи (1.1) знак j (отже, і властивість стійкості особливої точки) може змінитися або при злитті (злиття особливих точок) з іншими особливими точками або у разі народження (народження особливих точок) нових особливих точок з даної особливої точки.

Приклад біфуркації "вил" або "вилки" представлений на рис.1.1.

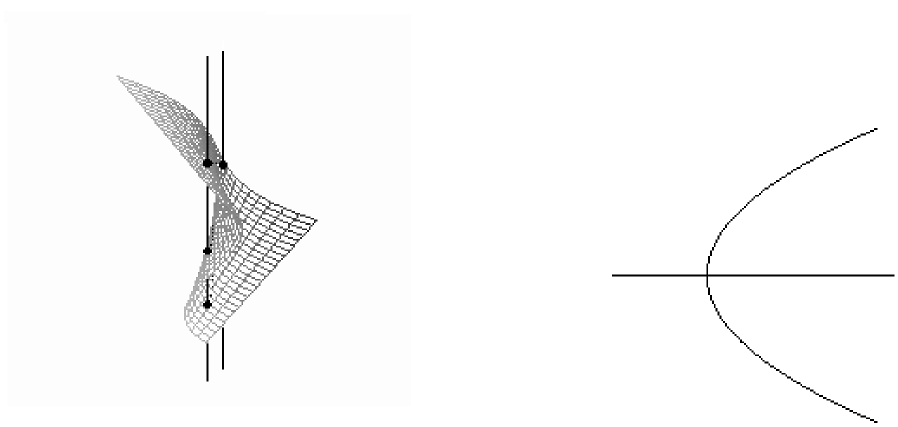


Рис.1.1 Біфуркація типу "вилки"

Біфуркації злиття і народження, що реалізовуються для випадку "вилки", можуть бути представлені в символічному виді

$$O^{2,0} + (O_1^{1,1}, O_2^{1,1}) \Rightarrow O^{1,1}; \quad O^{2,0} \Rightarrow O^{1,1} + (O_1^{2,0}, O_2^{2,0}).$$

Тут перша цифра верхнього індексу особливої точки дорівнює числу коренів характеристичного рівняння з негативними дійсними частинами, друга - з позитивними. Тоді індекс Пуанкаре $j(O^{2,0})=1$, а $j(O^{1,1})=-1$. Має місце "закон збереження" суми індексів Пуанкаре лівої і правої частин символічної рівності (до і після біфуркації).

Для кривої стаціонарних станів з точкою повороту біфуркації злиття і народження можуть бути представлені в символічному виді (Рис.1.2)

$$(O_1^{2,0} + O_2^{1,1}) \Rightarrow \varnothing; \quad \varnothing \Rightarrow (O_1^{2,0} + O_2^{1,1}).$$

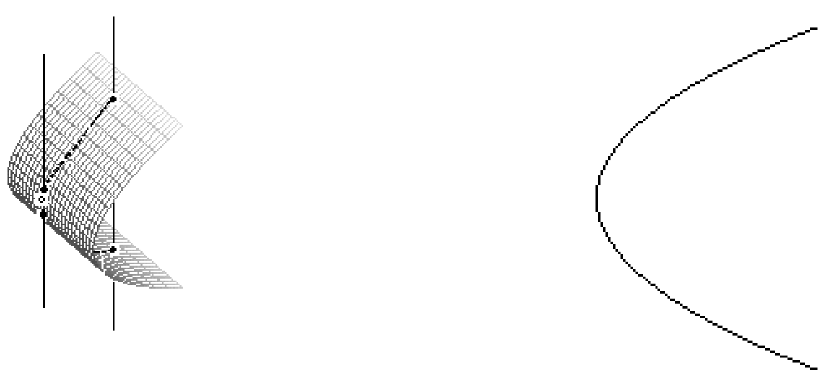


Рис.1.2 Двократна особлива точка

Точці повороту (точці злиття або народження) відповідає двократний стаціонарний режим "сідло-вузол". Поява точок повороту для систем з одним параметром, що управляє, на відміну від розглянутої вище "вилки", є випадком загального стану (стійким чином реалізується при малих структурних змінах системи). Випадок "вилки" для систем з одним параметром, що управляє, може реалізовуватися лише при виконанні додаткових умов симетрії. У разі загального стану "вилка" розпадається (наслідок структурної нестійкості) на дві криві, у однієї з яких є точка повороту (рис.1.3).

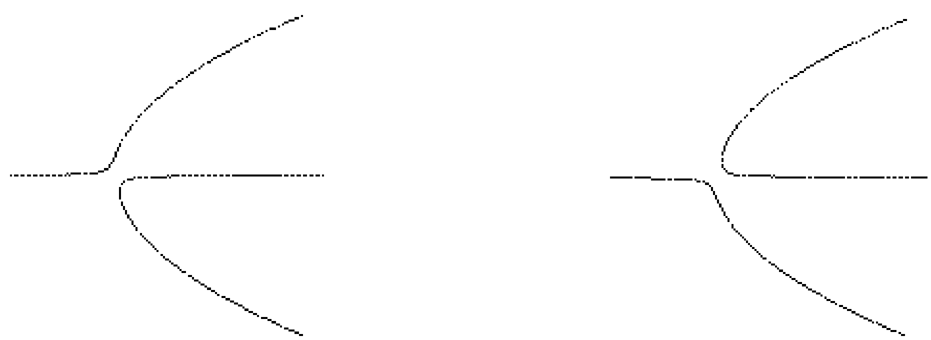


Рис.1.3 Розпад вилки

У разі загального стану і лише одного параметра, що управляє, біфуркація вил структурно нестійка.

Перейдемо до аналізу стійкості стаціонарних станів деякої модельної системи, використовуючи поняття індексу Пуанкаре

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{kx}{\sqrt{1+(kx)^2}} + y = P(x,y); \\ y' = ax - by = Q(x,y). \end{cases} \tag{1.3}$$

Система рівнянь $P(x,y)=0;\, Q(x,y)=0$, що визначає стаціонарні стани, свідомо має одне очевидне рішення - нульове. Стаціонарним станам відповідають точки перетину кривих, що задаються рівняннями $P(x,y)=0;\, Q(x,y)=0$ (в даному випадку ці рівняння легко дозволяються) :

$$\begin{cases} y = \dfrac{kx}{\sqrt{1+(kx)^2}}; \\ y = \dfrac{a}{b}x. \end{cases} \tag{1.4}$$

При $k > a/b$ матимемо три рішення, при $k < a/b$ - одне (на початку координат).

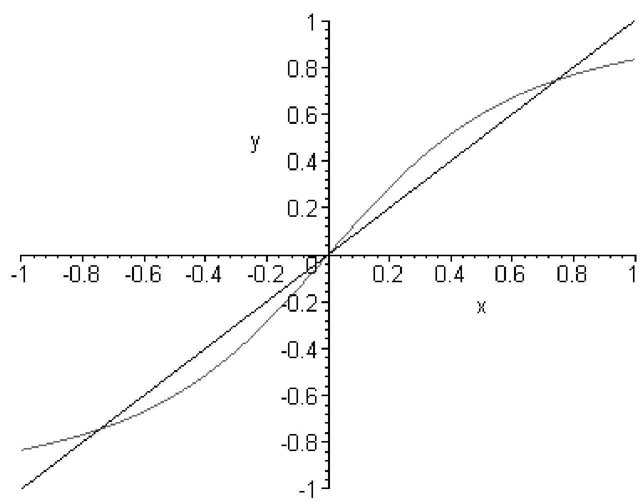


Рис.1.4 Визначення стаціонарних станів системи

На рис.1.4 представлена геометрична картина визначення стаціонарних станів системи (при $k > a/b$ система має три особливі точки); при збільшенні нахилу прямої ($k < a/b$) - одну.

Рівняння обуреного руху в околиці початку координат з точністю до членів третього порядку мають вигляд

$$\begin{aligned} x' &= -kx + y + \frac{1}{2}k^3x^3; \\ y' &= ax - by. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Стійкість початку координат визначається по лінійному наближенню

$$\begin{aligned} x' &= -kx + y; \\ y' &= ax - by. \end{aligned}$$

Асимптотична стійкість при $k > a/b$ $(j=+1)$ і нестійкість при $k < a/b$ $(j=-1)$. Для лінійної системи особлива точка (положення рівноваги на початку координат) визначається точкою перетину двох прямих (ізоклин). Очевидно, що втраті стійкості нульового рішення відповідає збіг нахилів згаданих ізоклин. Стійкість (асимптотична) має місце тоді, коли нахил першої ізоклини перевищує нахил другий. В цьому випадку початкова нелінійна система окрім асимптотично стійкої особливої точки на початку координат має ще пару особливих точок (Рис.1.5). Якщо ж нахил другої ізоклини перевищить нахил першою, то в початковій нелінійній системі залишається лише сідло (j=-1) на початку координат (Рис.1.6), пара особливих точок зникає. Це свідчить про те, що зниклі особливі точки були седловыми. Дійсно, сумарний індекс Пуанкаре особливих точок не може змінитися при при зміні параметрів, а у єдиної особливої точки, що залишилася, він рівний - 1. Отже, сума індексів трьох особливих точок, одна з яких (на початку координат) мала індекс +1, рівна - 1, тобто дві інші мали індекс - 1.

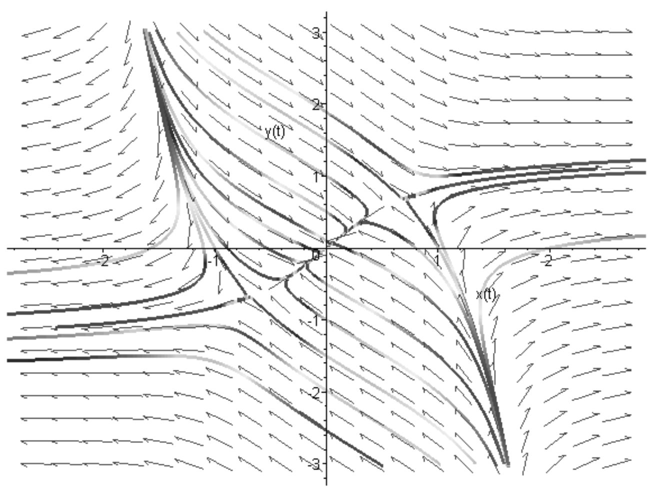


Рис.1.5 Сідлова точка при $k > a/b$

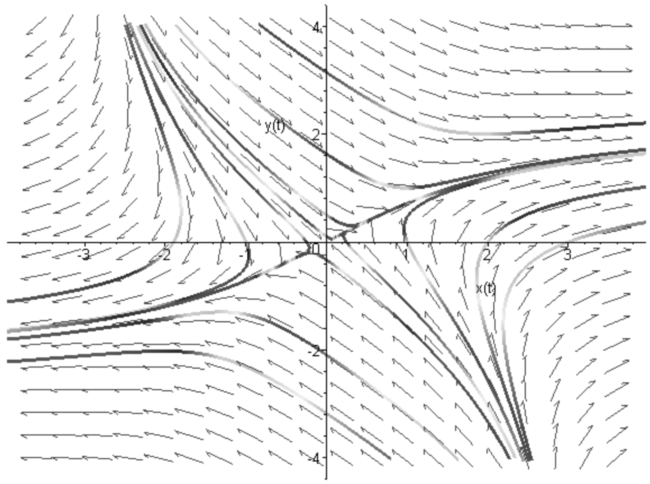


Рис.1.6 Сідлова точка при *k = a/b*

На Рис.1.5 і Рис.1.6 представлені фазові портрети системи : седловые особливі точки при збільшенні параметра а (k > a/b) наближаються на початок координат (стійкій вузловій точці); при k = a/b - на початку координат з'являється триразова особлива точка (критичний по Ляпунову випадок одного нульового кореня); при (k < a/b) на початку координат є проста особлива точка - седловая.