Лекція2.

Біфуркації стаціонарних станів та відповідні їм катастрофи

Поняття біфуркації (роздвоєння) в теорії динамічних систем охоплює усі ефекти, пов'язані з якісними змінами, що відбуваються в системі при зміні параметрів [27, 44]: народження-зникнення стаціонарних режимів, граничних циклів. У першому випадку говорять про дійсні біфуркації, у разі народження-зникнення граничного циклу про комплексні біфуркації. Поняття біфуркаційна множина (множина дискримінанта) визначає множина значень керованих параметрів, при яких відбуваються біфуркації. При перетині параметром біфуркаційної великої кількості в системі відбувається зміна або числа стаціонарних станів, або граничних циклів. Існує певний набір структурно стійких особливостей таких великих кількостей, наприклад, складка (fold); точка повернення (casp); ластівчин хвіст (swallowtail); метелик (butterfly), що реалізовуються неусувним чином у разі малих структурних змін системи. Так, складка (точка повороту) стійким чином реалізується в одновимірному просторі параметрів; зборка - в двомірному просторі. Ластівчин хвіст і метелика можна "упіймати" в просторі управління R3 і R4 відповідно (за наявності властивостей симетрії метелик може реалізовуватися і в тривимірному просторі параметрів). Додатки теорії особливостей в завданнях аналізу динамічних систем дістали назву теорії катастроф (Р. Том) - кінцеві скачки в стані системи при нескінченно малих флуктуаціях її параметрів.

Перші чотири катастрофи (Рис.1.7) зі знаменитої "прекрасної сімки" Р. Тома [27]: Складка (fold), зборка (casp), ластівчин хвіст (swallowtail), метелик (butterfly).

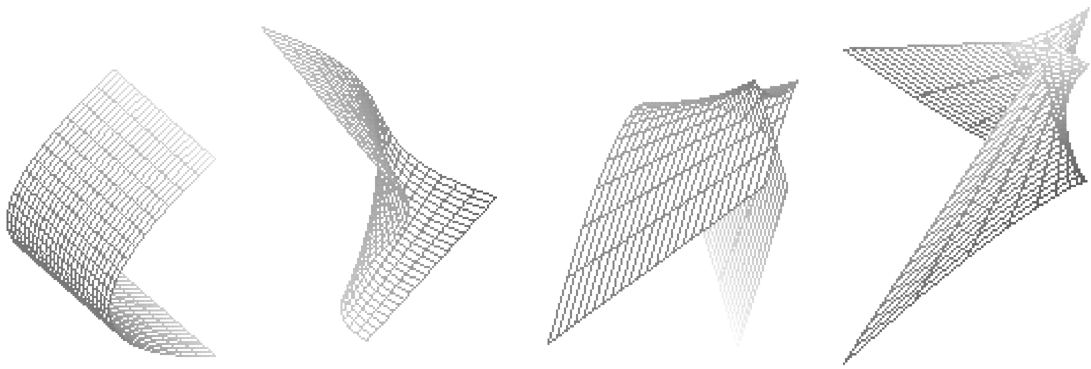


Рис.1.7 Складка (fold), зборка (casp), ластівчин хвіст (swallowtail), метелик (butterfly)

На рис.1.8 представлений графічний образ простої біфуркації - складки: злиття двох особливих точок з різними індексами Пуанкаре (вузла і сідла) або народження пари особливих точок з протилежними індексами (порівняй з рис.1.5).

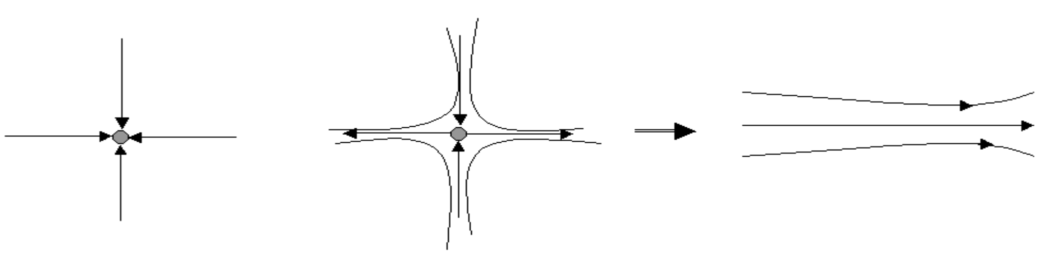


Рис.1.8 Образи простих біфуркацій

Розглянемо конкретний приклад реалізації цієї біфуркації (сідло-вузол) для двовимірної динамічної системи з одним параметром, що управляє α

$$\dot{x} = x^2 + \alpha,\ (x, y) \in R^2,\ \alpha \in R;$$
$$\dot{y} = -y.$$

При $\alpha<0$ система має дві особливі точки $(-|\alpha|^{1/2},0)$ и $(|\alpha|^{1/2},0)$. Перша - стійкий вузол, друга - сідло. При (>0 система не має особливих точок (положень рівноваги). При (=0 на початку системи координат реалізується двократна особлива точка сідло-вузол (рис.1.9).

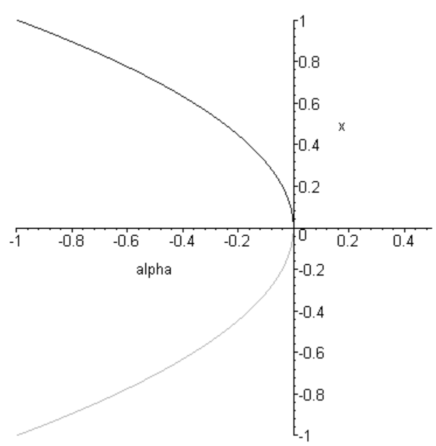
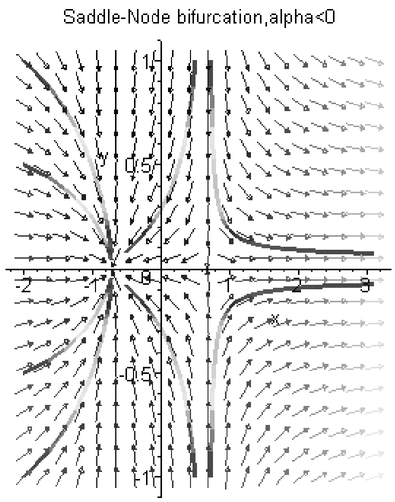
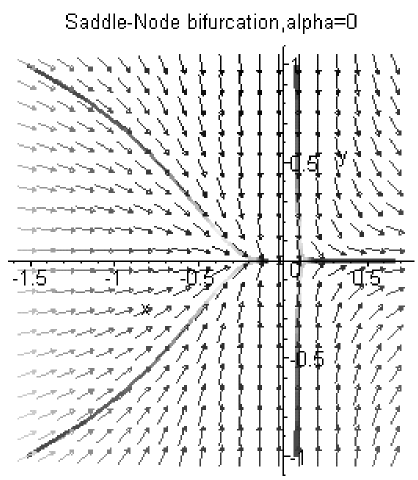


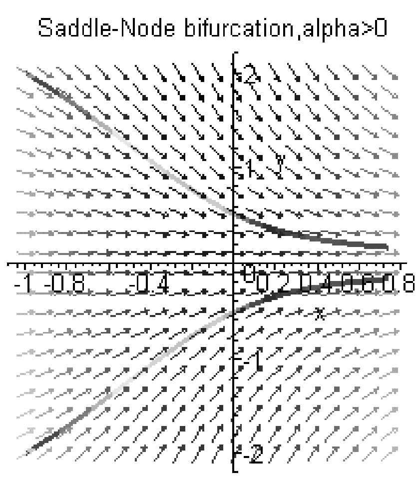
Рис.1.9 Реалізація особливої точки сідло-вузол


Saddle-Node bifurcation,alpha<0
y
x

а)


Saddle-Node bifurcation,alpha=0
y
x

б)


Saddle-Node bifurcation,alpha>0
y
x

в)

Рис.1.20 Фазові портрети а) фазовий портрет системи $\alpha<0$; б) фазовий портрет системи $\alpha=0$; в) фазовий портрет системи $\alpha>0$

Як видно, складка фактично реалізується в одновимірному просторі станів (збільшення розмірності простору станів не є в цьому випадку істотним). Аналіз стійкості зводиться до аналізу двох систем (у околиці кожної особливої точки будуємо систему у варіаціях)

$$\begin{aligned} &\dot{x} = (x - \sqrt{|\alpha|})^2 + \alpha; \Rightarrow \dot{x} = x^2 - 2\sqrt{|\alpha|}\,x; \\ &\dot{y} = -y; \qquad\qquad\qquad\quad \dot{y} = -y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\dot{x} = (x + \sqrt{|\alpha|})^2 + \alpha; \Rightarrow \dot{x} = x^2 + 2\sqrt{|\alpha|}\,x; \\ &\dot{y} = -y; \qquad\qquad\qquad\quad \dot{y} = -y. \end{aligned}$$

Після лінеаризації маємо відповідно

$$\begin{aligned} &\dot{x} = -2\sqrt{|\alpha|}\,x; \qquad\qquad \dot{x} = 2\sqrt{|\alpha|}\,x; \\ &\dot{y} = -y; \qquad\qquad\qquad\quad \dot{y} = -y; \end{aligned}$$

$(\lambda_1 = -2\sqrt{|\alpha|},\ \lambda_2 = -1) \Rightarrow$ вузол (j= +1); $(\lambda_1 = 2\sqrt{|\alpha|},\ \lambda_2 = -1) \Rightarrow$ сідло (j=–1)

З іншого боку, пара даних особливих точок через "закон збереження" сумарного індексу повинна мати індекси *j= +1 і j= - 1.*

За наявності симетрії в динамічній системі біфуркація вилки так само, як і складка може реалізовуватися в одновимірному просторі параметрів

$$\dot{x} = -x^3 + \alpha x,\ (x, y) \in R^2,\ \alpha \in R;$$
$$\dot{y} = -y.$$

Фазові портрети системи, при негативному і позитивному значеннях параметра (представлені нижче, значенню (=0 відповідає триразова особлива точка на початку координат. Індекс Пуанкаре цієї складної (кратної) особливої точки рівний j=+1 (з "закону збереження" сумарного індексу). Стійкість початку координат визначається нелінійним членом (стійкість стаціонарного стану в критичному по Ляпунову випадку одного нульового кореня, який супроводить кратні особливі точки). Дійсно, матриця лінійного наближення має діагональний вигляд, отже, власні значення системи : α і –1 (α=0 - одне нульове). Аналіз стійкості в даному критичному випадку не викликає утруднень - функція Ляпунова має вигляд $V=1/2(x^2 +y^2)$, її похідна через систему ясно негативна функція фазових змінних

Стійкість особливих точок, що "народилися", може бути проаналізована на основі поняття індексу Пуанкаре. Оскільки при α<0 на початку координат маємо сідло - j= - 1 (система лінійного наближення в околиці нуля має одне позитивне власне значення і одне негативне), то дві інші через "закон збереження" сумарного індексу мають індекс j= +1, крім того дивергенція векторного поля в малій околиці нуля негативна (отже, особливі точки, що народилися, стійкі вузли).

Картина фазового портрета (випадок $\alpha>0$) допоможе з'ясувати геометричний сенс умов небезпечно-безпечної втрати стійкості по Баутину - особлива точка на початку координат, втративши стійкість, оточена двома стійкими особливими точками, які обмежують зростання обурень. Отже, має місце безпечна по Баутину втрата стійкості нульового (тривіального рішення).

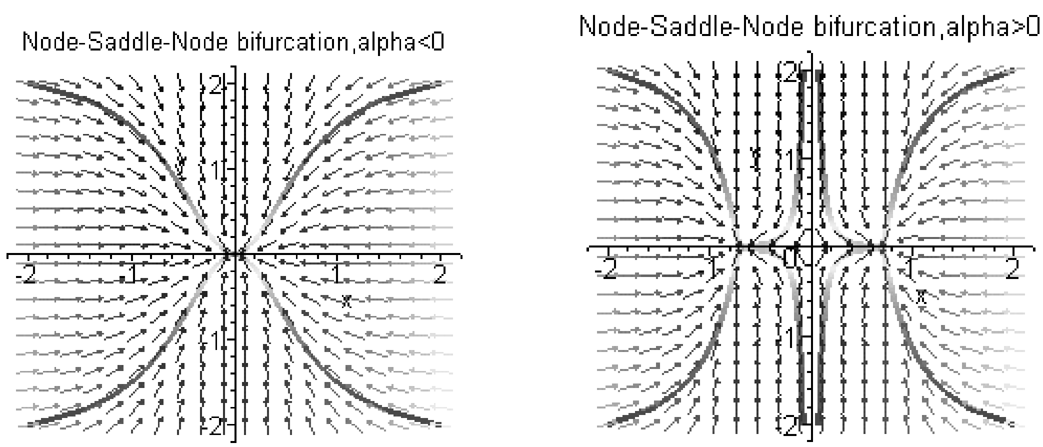


Рис.1.21 Біфуркація народження із стійкого вузла двох стійких вузлових особливих точок, на початку координат залишається сідлова особлива точка

Випадку злиття трьох особливих точок в загальному випадку відповідає біфуркація зборки, як згадувалося вище, простір параметрів, в якому неусувним чином реалізується зборка, двовимірно. Геометричне місце точок в площини параметрів, яким відповідають катастрофічні зміни, (біфуркаційна множина) є напівкубічною параболою з точкою повернення. Подібну геометричну структуру біфуркаційної великої кількості можна простежити на прикладі системи (1.1), якщо в системі, що визначає стаціонарні стани, обмежитися лише кубічним наближенням. Дійсно, ми б отримали кубічне рівняння, далі розглянемо його загальний вигляд (з вільним членом, квадратичний член відповідним перетворенням Чирнгаузена може бути виключений)

$$x^3 + \beta x + \alpha = 0, \tag{1.6}$$

воно має при одних значеннях параметрів (α, β) один дійсний корінь (стаціонарний режим), при інших - три. Дискримінант кубічного рівняння (1.6) звертається в нуль на множинаі точок площини параметрів, яке розмежовує області з різним числом стаціонарних станів. Це множина параметрів називається критичною, рівняння (1.6) для відповідних значень параметром має кратні дійсні рішення. Ця властивість може бути використана при аналізі критичної великої кількості у разі складнішої структури визначального рівняння. Проілюструємо цей підхід для випадку визначального рівняння (1.6).

Визначимо значення параметрів (α, β), при яких пряма $y = -(\beta x + \alpha)$ торкається кубічної параболи $y = x^3$ (Рис.1.22, а), з умови торкання (в цьому випадку визначальне рівняння має кратні корені) отримаємо систему

$$\begin{aligned} \beta &= -3x^2, \\ \alpha &= 2x^3. \end{aligned} \tag{1.7}$$

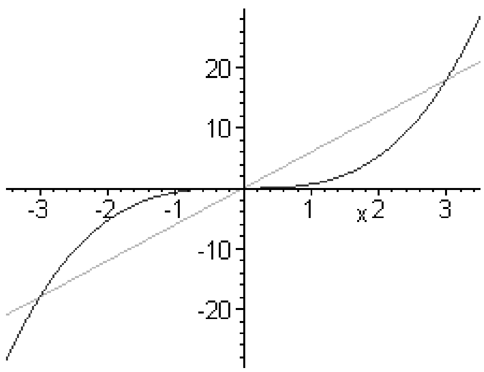
Система (1.7) визначає криву (точкам цієї кривої відповідають кратні рішення початкового рівняння (1.6)) дискримінанта. Виключивши параметр *x*, отримаємо напівкубічну параболу (очевидно, це просто дискримінант кубічного рівняння (Рис. 1.22, б))

$$\alpha^2 = -4/27\beta^3. \tag{1.8}$$

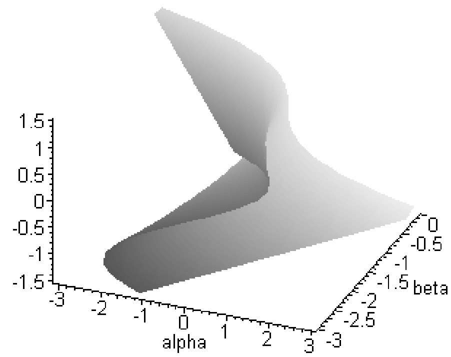
Побудуємо тепер поверхню катастрофи зборки. Вона є геометричним образом множинаі рішень початкового рівняння (1.6) при усіх значеннях параметрів (α, β). Її рівняння в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = x, \\ \beta = \beta, \\ \alpha = -(x^3 + \beta x). \end{cases} \tag{1.9}$$

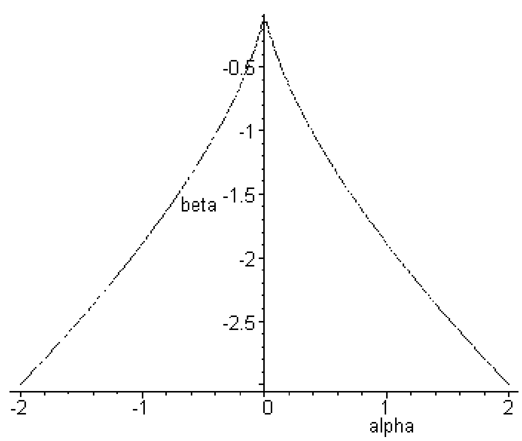
Для кожного значення $\beta < 0$ існує інтервал $(-\alpha^*, \alpha^*)$ такий, що точці (α, β) відповідає три точки на поверхні катастроф (поверхні рівноважних станів Рис. 1.22, в).



a)



б)



в)

Рис.1.22 Поверхня рівноважних станів для кубічного рівняння а); має особливість зборки б); біфуркаційна множина - напівкубічна парабола (касп) в).

Завдання побудови біфуркаційної великої кількості для системи узагальнювальної системи (1.1) має цікаву геометричну інтерпретацію

$$\begin{cases} x' = -F(x,\varphi) + y; \\ y' = \beta x - y + \alpha. \end{cases}$$

Стаціонарні режими задаються системою, рішенням якої відповідають точки перетину графіків двох функцій:

$$\begin{cases} y = F(x,\varphi); \\ y = \beta x + \alpha, \end{cases}$$

Параметри $\{\beta, \alpha\}$ називатимемо зовнішніми параметрами, що управляють, параметр φ - внутрішнім. Біфуркаційним значенням зовнішніх параметрів відповідатиме торкання прямою і графіка функції $F(x,\varphi)$ (в цьому випадку реалізується кратний стаціонарний режим системи). Визначимо умови торкання :

$$\begin{cases} \beta = F'(x,\varphi); \\ \alpha = F(x,\varphi) - \beta x = F(x,\varphi) - F'(x,\varphi)x. \end{cases}$$

Пробігаючи усі точки кривої $y = F(x, \varphi)$, отримуємо подвійну криву в площині зовнішніх параметрів, що управляють. Помітимо, що простим точкам перегину кривої $y = F(x, \varphi)$ відповідатимуть точки повернення на подвійній кривій (особливість зборки). У простих точках перегину ($F''(x, \varphi) = 0$) реалізується триразова точка перетину кривої $y = F(x, \varphi)$ з прямою $y = \beta x + \alpha$. При зміні внутрішнього параметра φ прості точки перегину можуть злитися в одну точку, реалізовуючи перегин вищого порядку. Таким точкам перегину можуть відповідати на подвійній кривій особливості вищого порядку - ластівчин хвіст, метелик і так далі. Для фіксації цих особливостей необхідно враховувати розкладання функції $F(x, \varphi)$ до величин четвертого і п'ятого порядку крихти відповідно, а самі особливості представляють дискримінант многочлена четвертої і п'ятої міри відповідно. Інтуїтивно ясно, чому особливостями загального стану є тільки складки і складки - при малих ворушіннях кривою вони неусувно реалізуються (наприклад, проста точка перегину лише переміститься в нове положення). Точки перегину вищого порядку при малих ворушіннях кривою розпадаються на декілька простих точок перегину, звідси слідує "розпад" вищих особливостей подвійною кривою на ряд структурно стійких складок і складок.

1.1 Стратегія біфуркаційного аналізу і побудова біфуркаційної множини динамічної системи

Розглянемо систему рівнянь

$$f_i(x, \theta, v) = 0, x \in R^n, (i = 1, ..., n), \tag{1.10}$$

рішення якої визначають множина стаціонарних станів моделі (праві частини рівнянь руху моделі залежать від двох скалярних параметрів). Біфуркаційним значенням параметрів (v^*, θ^*) відповідають кратні рішення x^* системи (1.10). Якобиан системи перетворюється на нуль в усіх точках критичної множинаі x*:

$$J = \left\| \partial f_i / \partial x_j \right\|_{x*} = 0, \quad x^* \in M_{kp}.$$

Якщо ранг матриці Якобі рівний n - 1 (є рівно одне нульове власне значення матриці лінеаризації), то поверхня стаціонарних станів в околиці відповідної критичної точки x* у випадках "загального стану" є складкою або зборкою. Система (1.10) разом з останнім рівнянням задає критичну множину на різноманітті стаціонарних станів (є гладкою кривою, що параметризується). При цих припущеннях буде можливим застосування чисельно-аналітичного методу продовження по двох параметрах. В точках "повороту" ("гладких точках повернення") критичної великої кількості відбувається зникнення стійкого стаціонарного стану через біфуркацію складки, "каспу" ("точці повернення") відповідає зміна стійкості стаціонарного стану (в системі з простою симетрією цьому стаціонарному стану відповідає прямолінійний режим, що втрачає стійкість при $\theta = 0$, $v = v_{kp}^+$).

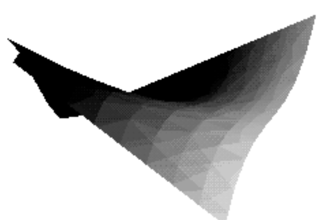
За наявності малих обурень, що порушують симетрію динамічної системи з двома параметрами, що управляють, "касп" не зникає (зміщується, втрачаючи симетричність) - наслідок структурної стійкості. Кінцеві значення обурень можуть привести до "організації" нової особливості, наприклад, чотирикратному режиму (особливості ластівчин хвіст).

Взагалі кажучи, будь-які якісні зміни в картині стаціонарних станів при зміні керованих параметрів системи пов'язані з появою-зникненням пари особливих точок, або в загальному випадку з виникненням-розщеплюванням k -кратной особливої точки (речовими біфуркаціями). При цьому поверхня стаціонарних станів (рівноважна поверхня) в малій околиці даного k -кратного стаціонарного режиму описується відповідною катастрофою з серії "*Ak*" класифікації І.В. Арнольда [27]. Незалежно від розмірності початкової системи для опису поверхні катастрофи (поверхні рівноважних станів) в околиці відповідної k -кратной особливої точки потрібно лише одна фазова змінна, а розмірність простору параметрів, в якому неусувним чином вона реалізується, рівна k - *1*.

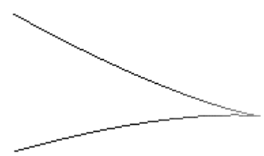
Це визначає стратегію аналізу особливостей k -параметрических сімейств стаціонарних станів динамічної системи, включаючу ідентифікацію особливостей максимального рангу і побудову відповідних біфуркаційних великих кількостей, що розбивають простір параметрів на області з різним числом стаціонарних станів.

При зміні стійкості стаціонарного режиму на поверхні рівноважних станів реалізується особливість A_3 "зборка" - із стійким стаціонарним режимом зливаються два нестійкі (два "сідла"), утворюючи в критичному випадку сідло-вузол. Межа області стійкості ($\theta = 0$, $v = v_{kp}^{+}$) в цьому випадку є небезпечною. Злучаю народження двох стійких стаціонарних режимів відповідає безпечна межа ($\theta = 0$, $v = v_{kp}^{+}$). Зміна характеру небезпеки межі області стійкості (в точці ($\theta = 0$, $v = v_{kp}^{+}$)) може статися при реалізації в цій точці п'ятикратного стаціонарного режиму, на Рис.1.23, а-в приведена ілюстрація виникнення катастрофи "метелика" (A_5) з катастрофи "зборки" (A_3) в системі з симетрією (три зборки на рівноважній поверхні, зливаючись в одній точці, реалізують катастрофу "метелика" - п'ятикратний стаціонарний режим, в цьому випадку простір параметрів, що управляють, тривимірний).

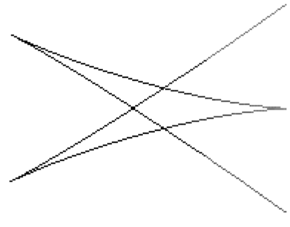
Хоча реалізація особливостей високого порядку є "винятковим станом" системи (відповідає винятковому набору характерних параметрів, що управляють), саме вони дають повну (глобальну) картину зміни стійкості (визначають сценарій зміни стійкості усієї множинаі стаціонарних станів).



а)



б)



в)

Рис.1.23 Поверхня складки а) і її біфуркаційна множина б), в)

Виведення рівнянь, що визначають "особливості" рівноважних станів системи; побудова біфуркаційних великих кількостей в явній або параметричній формах; визначення явних аналітичних співвідношень, що відповідають за характер небезпеки межі області стійкості в просторі параметрів, - послідовні етапи пропонованого підходу.

Завдання реалізації чисельно-аналітичного методу продовження по двох параметрах (необхідно враховувати лавиноподібне збільшення об'єму обчислень при зростанні числа ступенів свободи або числа керованих параметрів, що вводяться) має самостійний інтерес - цей метод не має альтернативи при детальнішому описі моделі (при побудові глобальної біфуркаційної великої кількості).