

Автоколивання (флатерна втрата стійкості).

Один з найбільш добре вивчених випадків виникнення граничних циклів пов'язаний зі зміною властивостей стійкості особливої точки типу фокус (пара коренів характеристичного рівняння перетинає уявну вісь) - біфуркація Андронова-Хопфа. Ця біфуркація типова при зміні одного керованого параметра системи: м'яка (безпечна) втрата стійкості стаціонарного стану супроводжується народженням стійкого граничного циклу, що обмежує зростання збурень мал. 1, б (траєкторії, що виходять із досить малого δ -околу нестійкого стаціонарного стану, прагнуть до граничного циклу зсередини, а при всіх досить великих початкових збуреннях траєкторії наближаються до граничного циклу із зовні); жорсткій (небезпечній) втраті стійкості стаціонарного стану відповідає стягування до нього нестійкого граничного циклу, що руйнує його стійкість, траєкторії, що виходять із як завгодно малого δ -околу нестійкого стаціонарного стану, у цьому випадку початкові довільно малі збурення з часом необмежено віддаляються від стаціонарного стану (мал. 1, а).

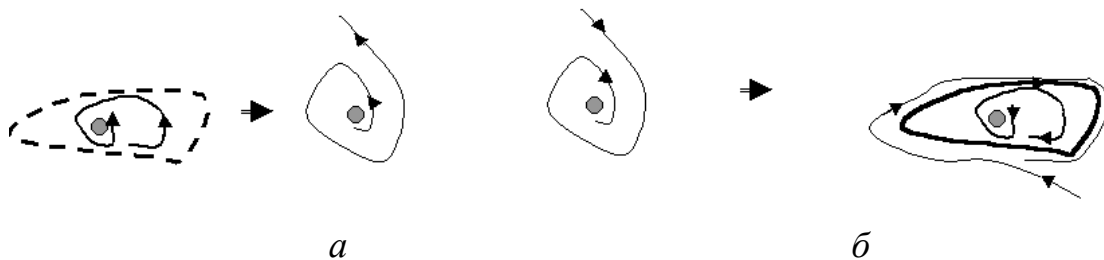


Рис. 1. Біфуркація Андронова – Хопфа: а)- жорстка втрата стійкості; б) - м'яка втрата стійкості.

Таким чином, при наявності стійкого граничного циклу в системі встановлюється коливальний процес або автоколивання, параметри якого не

залежать від початкових збурень (всі траєкторії прагнуть до зазначеної замкненої траєкторії). Періодичні зміни узагальнених координат, які відповідають граничному циклу, можуть бути далекими від гармонічних (синусоїдальних), проте, їхнє перше наближення може бути отримане на основі такого припущення.

Теорема (Андропова – Хопфа). Нехай система

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in R^n, \quad \alpha \in R^1$$

має положення рівноваги $x=0$ при будь-яких значеннях параметра α . Далі, нехай матриця лінійного наближення при значеннях α у деякому околі α_0 має пару комплексно спряжених власних значень $\lambda_{1,2}(\alpha) = \xi(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$, причому

$$\xi(\alpha_0) = 0, \quad \omega(\alpha_0) = \omega_0 > 0, \quad \frac{d\xi}{d\alpha}(\alpha_0) \neq 0.$$

Крім того, припустимо, що інші $n-2$ власні значення мають ненульові дійсні частини.

Тоді при $\alpha = \alpha_0$ від нульового положення рівноваги відгалужується однопараметрична система замкнених траєкторій, що відповідають періодичним розв'язкам з періодом $T(\alpha) \approx 2\pi / \omega_0$. замкнені траєкторії можуть відгалужуватися або при $\alpha < \alpha_0$, або при $\alpha > \alpha_0$.

Ілюстрацію проведемо на прикладі системи (1), яка задовольняє умовам теореми Хопфа. Спочатку проведемо попередній аналіз стійкості нульового розв'язку системи (1) при зміні параметра α :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= -x(x^2 + y^2) + \alpha x - y; \\ \frac{d}{dt}y &= -y(x^2 + y^2) + \alpha y + x. \end{aligned} \tag{1}$$

При всіх значеннях параметра в системі є єдина особлива точка - на початку координат. Стійкість початку координат в некритичних випадках визначається системою лінійного наближення. Корені характеристичного рівняння при $\alpha < 0$ комплексно-спряжені з від'ємною дійсною частиною - має місце стійкий фокус; при $\alpha > 0$ комплексно-спряжені корені з додатною дійсною частиною - має місце нестійкий фокус.

Каноническая функция Ляпунова указывает на глобальную устойчивость начала координат при

Канонічна функція Ляпунова вказує на глобальну стійкість початку координат при $\alpha \leq 0$

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = -2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - \alpha),$$

а також на наявність стійкого граничного циклу (коло радіуса $\sqrt{\alpha}$) при $\alpha > 0$. При $\alpha = 0$ з початку координат народжується стійкий граничний цикл, а на початку координат з'являється нестійкий фокус. Збурення (відхилення від початку координат) обмежуються граничним циклом $x^2 + y^2 = \alpha$

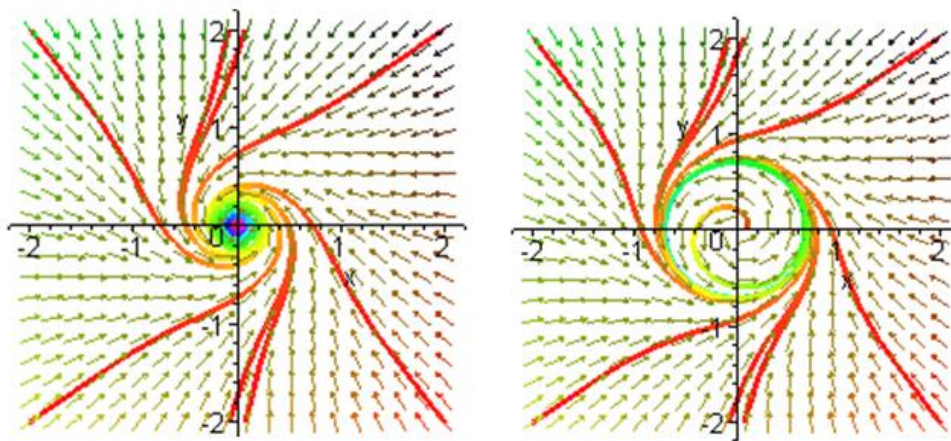


Рис. 1 – випадок м'якої втрати стійкості

Нижче представлена реалізація наближеного методу визначення характеристик автоколивань для системи (1).

```

> restart:
> x:=a*sin(omega*t);
x:=a sin(omega t)
> y:=b*sin(omega*t+phi);
y:=b sin(omega t + phi)
> EQ1:=diff(x,t)+x*(x^2+y^2)-alpha*x+y;
EQ1:=a cos(omega t) omega + a sin(omega t) (a^2 sin(omega t)^2 + b^2 sin(omega t + phi)^2) - alpha a sin(omega t) + b sin(omega t + phi)
> EQ2:=diff(y,t)+y*(x^2+y^2)-alpha*y-x;
EQ2:=b cos(omega t + phi) omega + b sin(omega t + phi) (a^2 sin(omega t)^2 + b^2 sin(omega t + phi)^2) - alpha b sin(omega t + phi) - a sin(omega t)
> # получение конечных уравнений, отвечающих периодическому решению системы в характерные моменты времени:
>
> evalm(subs(t=0,EQ1));
a omega + b sin(phi)
> #b*sin(phi)=bs;введение замены переменных:
> EQ10:=a*omega+bs;
EQ10:=a omega + bs
> evalm(subs(omega*t=Pi/2,EQ1));
a(a^2 + b^2 cos(phi)^2) - alpha a + b cos(phi)
> #b*cos(phi)=bc;введение замены переменных:
> EQ11:=a*(a^2+bc^2)-alpha*a+bc;
EQ11:=a(a^2 + bc^2) - alpha a + bc
> evalm(subs(t=0,EQ2));
b cos(phi) omega + b^3 sin(phi)^3 - alpha b sin(phi)
> EQ20:=bc*omega-alpha*bs+bs^3;
EQ20:=bc omega - alpha bs + bs^3
> evalm(subs(omega*t=Pi/2,EQ2));
-b sin(phi) omega + b cos(phi) (a^2 + b^2 cos(phi)^2) - alpha b cos(phi) - a
> EQ21:=-bs*omega+bc*(a^2+bc^2)-alpha*bc-a;
EQ21:=-bs omega + bc(a^2 + bc^2) - alpha bc - a
> #Решение система уравнений относительно неизвестных: a,omega,bs,bc:
> EQ10:=a*omega+bs;
EQ10:=a omega + bs
> EQ11:=a*(a^2+bc^2)-alpha*a+bc;
EQ11:=a(a^2 + bc^2) - alpha a + bc
> EQ20:=bc*omega-alpha*bs+bs^3;
EQ20:=bc omega - alpha bs + bs^3
> EQ21:=-bs*omega+bc*(a^2+bc^2)-alpha*bc-a;
EQ21:=-bs omega + bc(a^2 + bc^2) - alpha bc - a
> simplify(EQ21*a-EQ11*bc);
-a bs omega - a^2 - bc^2
> #bc^2=-a*bs*omega-a^2 - определи bc^2 из последнего уравнения:
> EQ12:=subs(bc^2=-a*bs*omega-a^2,EQ11);
EQ12:=-a^2 bs omega - alpha a + bc
> #после подстановки bc^2=-a*bs*omega-a^2 в EQ11, последнее переходит в EQ12:
> solve({EQ10=0,EQ12=0},{bc,bs});
{bc=-a^3 omega^2 + alpha a, bs=-a omega}
> # разрешая систему EQ10=0,EQ12=0, исключаем неизвестные bc,bs:
> bc:=-a^3*omega^2+alpha*a;bs:=-a*omega;
bc:=-a^3 omega^2 + alpha a
bs:=-a omega
> # из уравнения EQ20 определяем круговую частоту:

```

Наближене визначення автоколивального режиму модельної динамічної системи. Розглянемо нелінійну динамічну систему, що відповідає умовам теореми Андронова-Хопфа

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \tau y + p(V)\dot{y} + f_1(y) &= n\psi; \\ \ddot{\psi} + \tau\psi + p(V)\dot{\psi} + f_2(y) &= -\tilde{m}y, \end{aligned} \quad (1)$$

де $V \in R^1$ - характерний параметр.

Нехай при $V = V_{kp}$ лінійне наближення системи (1) втрачає стійкість – пара власних значень проходить через уявну вісь. Тоді відповідно до теореми Хопфа в системі реалізується замкнена фазова траєкторія або при $V < V_{kp}$, або при $V > V_{kp}$. Умови стійкості «малого» граничного циклу можуть бути визначені опосередковано – якщо він існує при $V < V_{kp}$, то має бути нестійким і зникає при $V = V_{kp}$, а якщо він існує при $V > V_{kp}$, тоді це стійкий граничний цикл, який народжується при $V = V_{kp}$.

Визначимо критичне значення параметра $V = V_{kp} : p^2(V_{kp}) = \tilde{m}n / \tau$, вільний член характеристичного рівняння не обертається в нуль, отже, втрата стійкості пов'язана із проходженням пари комплексно-спряжених коренів через уявну вісь.

Вважаючи, що права частина першого рівняння системи (1) відіграє роль періодичного збурення з невідомою амплітудою й частотою

$$\psi = P_0 \sin(\omega t + \alpha),$$

періодичний відгук будемо шукати у вигляді $y = A \sin \omega t$ (визначенню підлягають величини P_0, ω, α, A). У характерні моменти часу фазові змінні і їхні похідні приймають значення

$$\begin{aligned} \omega t = \pi/2: \quad & y = A; \quad \dot{y} = 0; \quad \ddot{y} = -A\omega^2; \\ & \psi = P_0 \cos \alpha; \quad \dot{\psi} = -P_0 \omega \sin \alpha; \quad \ddot{\psi} = -P_0 \omega^2 \cos \alpha; \\ \omega t = 0: \quad & y = 0; \quad \dot{y} = A\omega; \quad \ddot{y} = 0; \\ & \psi = P_0 \sin \alpha; \quad \dot{\psi} = P_0 \omega \cos \alpha; \quad \ddot{\psi} = -P_0 \omega^2 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Для визначення параметрів автоколивального режиму маємо систему

$$\begin{cases} -A\omega^2 + \tau A - nP_0 \cos \alpha + f_1(A) = 0; \\ -P_0 \omega^2 \cos \alpha + \tau P_0 \cos \alpha - pP_0 \omega \sin \alpha + \tilde{m}A + f_2(A) = 0; \\ pA\omega = nP_0 \sin \alpha; \\ -P_0 \omega^2 \sin \alpha + \tau P_0 \sin \alpha + pP_0 \omega \cos \alpha = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Після вилучення невідомих P_0, α з перших двох рівнянь системи (2), одержимо співвідношення, що пов'язує між собою усереднену частоту періодичного розв'язку і його амплітуду

$$\omega^2 = \tau + f_1(A)/2A;$$

рівняння, що визначає амплітуду автоколивань

$$(\tilde{m}n - p^2 \tau)A = f_1^2(A)/4A + p^2 f_1(A)/2 - n f_2(A). \quad (3)$$

АНАЛІЗ АВТОКОЛИВАНЬ РІВНЯННЯ ДЮФІНГА

> $\text{Diff}(x, 't', 2) + 2 * \text{gamma} * \text{Diff}(x, t) + \text{Omega}^2 * x^3 = p0 * \sin(\text{omega} * t + \text{phi});$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} x + 2\gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} x \right) + \Omega^2 x^3 = p0 \sin(\omega t + \phi)$$

> $x := a * \sin(\text{omega} * t);$

$$x := a \sin(\omega t)$$

> $\text{EQ} := \text{diff}(x, 't', 2) + 2 * \text{gamma} * \text{diff}(x, t) + \text{Omega}^2 * x^3 - p0 * \sin(\text{omega} * t + \text{phi}) = 0;$

$$\text{EQ} := -a \sin(\omega t) \omega^2 + 2\gamma a \cos(\omega t) \omega + \Omega^2 a^3 \sin(\omega t)^3 - p0 \sin(\omega t + \phi) = 0$$

Система двох кінцевих рівнянь, що визначає параметри автоколивань (a , phi):

> $\text{evalm}(\text{subs}(t=0, \text{EQ}));$

$$2\gamma a \omega - p0 \sin(\phi) = 0$$

> $\text{evalm}(\text{subs}(\text{omega} * t = \text{Pi}/2, \text{EQ}));$

$$-a \omega^2 + \Omega^2 a^3 - p0 \cos(\phi) = 0$$

Вилучаємо параметр phi :

$$(p0^2 = p0 * \sin(\text{phi})^2 + p0 * \cos(\text{phi})^2)$$

> $(2 * \text{gamma} * a * \text{omega})^2 + (-a * \text{omega}^2 + \text{Omega}^2 * a^3)^2 - p0^2 = 0;$

$$4\gamma^2 a^2 \omega^2 + (-a \omega^2 + \Omega^2 a^3)^2 - p0^2 = 0$$

> $4 * \text{gamma}^2 * \text{AA} * \text{omega}^2 + \text{AA} * (-\text{omega}^2 + \text{Omega}^2 * \text{AA})^2 - p0^2 = 0;$

$$4\gamma^2 \text{AA} \omega^2 + \text{AA} (-\omega^2 + \Omega^2 \text{AA})^2 - p0^2 = 0$$

> $\text{collect}(\%, \text{AA});$

$$\Omega^4 \text{AA}^3 - 2\omega^2 \Omega^2 \text{AA}^2 + (\omega^4 + 4\gamma^2 \omega^2) \text{AA} - p0^2 = 0$$

Отримали апмплітудно-частотну характеристику:

```
> Poly:=expand( (Omega^4*AA^3-
2*omega^2*Omega^2*AA^2+ (omega^4+4*gamma^2*omega^2) *AA-
p0^2) /Omega^4) ;
```

$$Poly := AA^3 - \frac{2\omega^2 AA^2}{\Omega^2} + \frac{AA\omega^4}{\Omega^4} + \frac{4AA\gamma^2\omega^2}{\Omega^4} - \frac{p0^2}{\Omega^4}$$

Дискримінант відповідного полінома

```
> DISC:=expand(discrim(Poly,AA)) ;
```

$$DISC := \frac{4\omega^6 p0^2}{\Omega^{10}} - \frac{16\omega^{10} \gamma^2}{\Omega^{12}} - \frac{27 p0^4}{\Omega^8} + \frac{144 p0^2 \gamma^2 \omega^4}{\Omega^{10}} - \frac{128 \gamma^4 \omega^8}{\Omega^{12}} - \frac{256 \omega^6 \gamma^6}{\Omega^{12}}$$

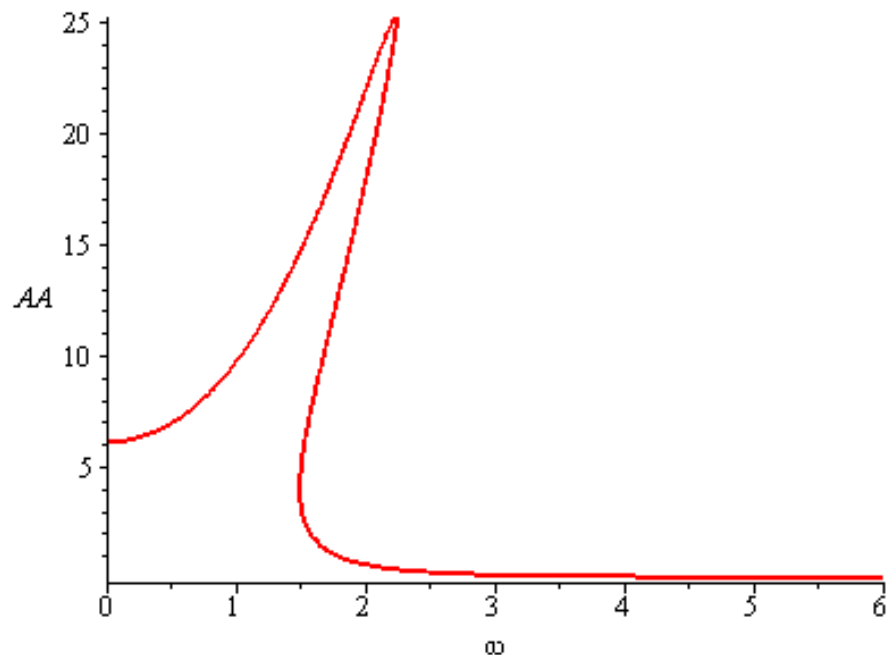
Побудова графіка амплітудно-частотної характеристики при заданому значенні амплітуди зовнішніх збурень

```
>c:=1;m:=3;alpha:=0.8;C:=3/5;
```

```
> with(plots) :
```

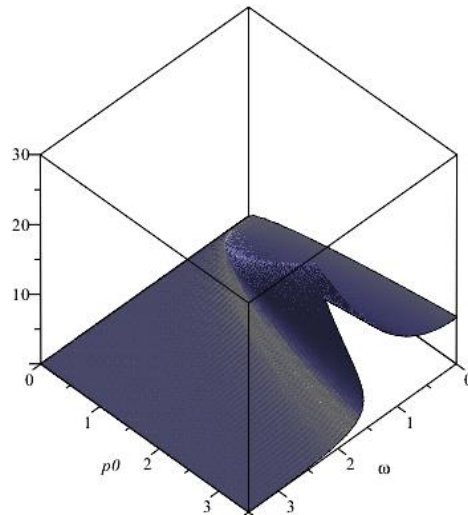
```
>
```

```
implicitplot(subs({gamma=alpha/(2*m),Omega=sqrt(C/m),p0=3},Poly)=0,omega=0..6,AA=0..30,grid=[250,250]) ;
```



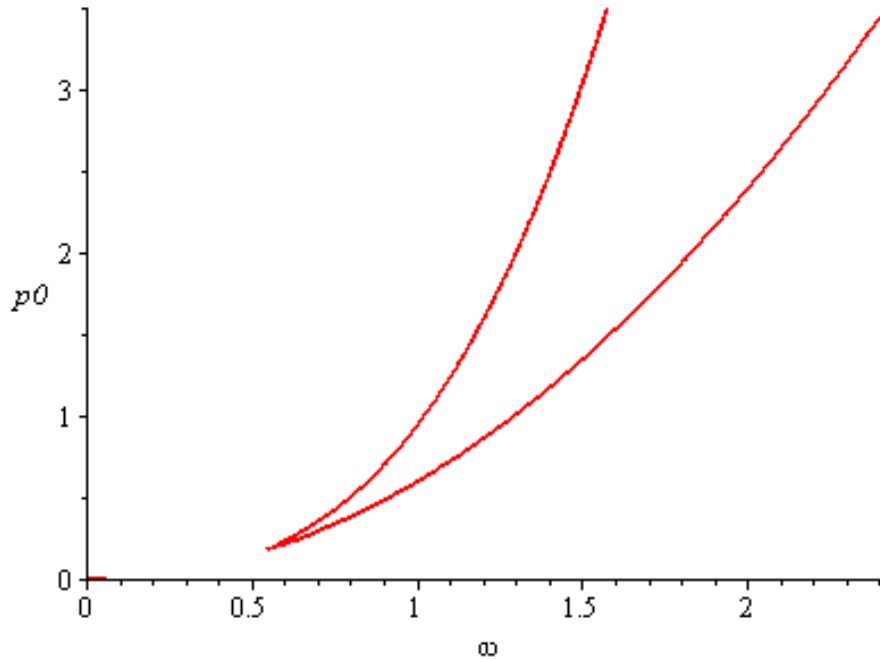
Побудова амплітудно-частотної поверхні для рівняння Дюфінга


```
>
implicitplot3d(subs({gamma=alpha/(2*m),Omega=sqrt(C/m)},Poly)=0,omega=0..3.5,p0=0..3.5,AA=0..30,grid=[50,50,50]);
```



**Біфуркаційна множина параметрів (ω , p_0) (визначає області з трьома граничними циклами та одним).
Визначається проекцією амплітудно-частотної поверхні на площину параметрів (ω , p_0):**

```
>
implicitplot(subs({gamma=alpha/(2*m),Omega=sqrt(C/m)},D ISC)=0,omega=0..3,p0=0..3.5,grid=[250,250]);
```



Чисельне інтегрування рівняння Дюфінга (перевірка наявності стійких граничних циклів):

```
> DEplot([D(z)(t)=y(t),D(y)(t)=-alpha*(y(t))/m-
C*(z(t))^3/m+3*sin(1.7*t)],
[z(t),y(t)],t=30..45,[[z(0)=0.5,y(0)=0],[z(0)=0,y(0)=1]
],stepsize=.005,
scene=[z(t),y(t)],z(t)=-5.5..5.5,y(t)=-
7..7.,linecolour=sin(t*Pi/2));
```

