Логарифічне диференціювання

Знайти похідні наступних показниково-степеневих функцій.

1. $y=(\cos x)^{\sin x}$.

Перший спосіб:

$$\ln y=\sin x\cdot\ln(\cos x)\Rightarrow\frac{y'}{y}=\cos x\cdot\ln(\cos x)+$$

$$+\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=\cos x\cdot\ln(\cos x)-\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

$$y'=\left(\cos x\cdot\ln(\cos x)-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)\cdot y=$$

$$=\left(\cos x\cdot\ln(\cos x)-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)\cdot(\cos x)^{\sin x}=$$

$$=\ln(\cos x)\cdot(\cos x)^{\sin x+1}-\sin^2 x\cdot(\cos x)^{\sin x-1}.$$

Другий спосіб:

$$y'=\ln(\cos x)\cdot(\cos x)^{\sin x}\cdot\cos x+\sin x\cdot(\cos x)^{\sin x-1}\times$$

$$\times(-\sin x)=\ln(\cos x)\cdot(\cos x)^{\sin x+1}-\sin^2 x\times$$

$$\times(\cos x)^{\sin x-1}.$$

2. $y=x^{\ln x}$.

Перший спосіб:

$$\ln y = \ln^2 x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2\ln x}{x} \Rightarrow y' = \frac{2\ln x}{x} \cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2\ln x}{x} \cdot x^{\ln x} = 2\ln x \cdot x^{\ln x - 1}.$$

Другий спосіб:

$$y' = \ln x \cdot x^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot x^{\ln x - 1} = 2\ln x \cdot x^{\ln x - 1}.$$

3. $y = x^x$.

Перший спосіб:

$$\ln y = x \cdot \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

$$y' = (\ln x + 1) \cdot y = (\ln x + 1) \cdot x^x.$$

Другий спосіб:

$$y' = \ln x \cdot x^x + x \cdot x^{x-1} = \ln x \cdot x^x + x^x =$$

$$= x^x (\ln x + 1).$$

4. $y = \left(x^2 + 2\right)^{3-x}$.

Перший спосіб:

$$\ln y = (3-x)\ln\left(x^2+2\right) \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\ln\left(x^2+2\right) +$$

$$+(3-x)\cdot\frac{2x}{x^2+2} \Rightarrow y' = \left(-\ln\left(x^2+2\right) + \frac{2x(3-x)}{x^2+2}\right)\times$$

$$\times\left(x^2+2\right)^{3-x}.$$

<u>Другий спосіб</u>:

$$y' = -\ln\left(x^2+2\right)\cdot\left(x^2+2\right)^{3-x} + (3-x)\cdot\left(x^2+2\right)^{2-x}\cdot 2x =$$

$$= \left(x^2+2\right)^{3-x}\cdot\left(-\ln\left(x^2+2\right) + \frac{2x(3-x)}{x^2+2}\right).$$

Похідні функцій, заданих неявно та параметрично.

Знайти похідну y'_x функцій, заданих у неявній формі.

1. $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

Розв'язання. Диференціюємо рівність по змінній *x*, вважаючи *y=y(x)*.

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - 2x\cdot e^y - x^2 e^y\cdot y' = 0 \ .$$

$$3x^2 y + y' - 2xy\cdot e^y - x^2 e^y y\cdot y' = 0$$

Звідси знаходимо y':

$$y'\left(1-x^2ye^y\right)=2xye^y-3x^2y.$$

$$y'=\frac{\left(2xe^y-3x^2\right)y}{1-x^2ye^y}.$$

Отримали похідну $y'=y'_x=\dfrac{dy}{dx}$, виражену через змінні x та y.

2. $x^3+y^3-3xy=0$.

Розв'язання. $3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0$.

$$3\left(y^2-x\right)y'=3\left(y-x^2\right).$$

$$y'=\frac{x^2-y}{x-y^2}.$$

3. $x^4-6x^2y^2+9y^4-5x^2+15y^2-100=0$.

Розв'язання.

$$4x^3-12xy^2-12x^2y\cdot y'+36y^3y'-10x+30y\cdot y'=0.$$

$$4x^3-12xy^2-10x=\left(12x^2y-36y^3-30y\right)\cdot y'.$$

$$y'=\frac{2x\left(2x^2-6y^2-5\right)}{6y\left(2x^2-6y^2-5\right)}=\frac{x}{3y}.$$

4. $x^2\sin y+y^2\cos x-2x-3y+1=0$.

Розв'язання.

$$2x\sin y+x^2\cos y\cdot y'+2y\cdot y'\cos x-$$
$$-y^2\sin x-2-3y'=0.$$

$$\left(x^2\cos y+2y\cos x-3\right)y'=2+y^2\sin x-2x\sin y.$$

$$y'=\frac{2+y^2\sin x-2x\sin y}{x^2\cos y+2y\cos x-3}.$$

5. Знайти значення y'_x у точці з координатами x=y=1, якщо $x^3-2x^2y^2+5x+y-5=0$.

Розв'язання. Знайдемо значення y'_x. Диференціюємо задану рівність по x:

$$3x^2-4xy^2-4x^2y\cdot y'+5+y'=0.$$

$$3x^2-4xy^2+5=\left(4x^2y-1\right)y',$$

$$y'=\frac{3x^2-4xy^2+5}{4x^2y-1}.$$

При x=y=1 отримуємо $y'=\dfrac{4}{3}$.

Знайти похідну y'_x функцій, заданих у параметричній формі.

Нехай $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ t\in[\alpha;\beta]. \end{cases}$ – функція, задана у параметричній формі.

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} \ .$$

1. $\begin{cases} x = e^{-t}\sin t, \\ y = e^{t}\cos t, \\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Розв'язання. $x'_t = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = e^{-t}\left(\cos t - \sin t\right)$**,**

$y'_t = e^{t}\cos t - e^{t}\sin t = e^{t}\left(\cos t - \sin t\right)$**.**

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^{t}\left(\cos t - \sin t\right)}{e^{-t}\left(\cos t - \sin t\right)} = e^{2t}\,\mathbf{.}$$

2. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln\left(1 - t^2\right), \\ t \in \left(-1; 1\right). \end{cases}$

Розв'язання. $x'_t = \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$**,** $y'_t = -\dfrac{2t}{1 - t^2}$**,**

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{2t}{1 - t^2} \cdot \sqrt{1 - t^2} = -\frac{2t}{\sqrt{1 - t^2}}\,\mathbf{.}$$

3. $\begin{cases} x = \sec t, \\ y = \operatorname{tg} t, \\ t \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$

Розв'язання. $x'_t = \left(\dfrac{1}{\cos t}\right)' = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}$, $y'_t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{\cos^2 t}{\sin t} = \frac{1}{\sin t}.$$

4. Знайти похідну y'_x функції $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = \dfrac{\ln t}{t}. \end{cases}$ у точці t=1.

Розв'язання. Знайдемо похідну $y'_x(t) = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. $x'_t = \ln t + 1$,

$y'_t = \left(\dfrac{\ln t}{t}\right)' = \dfrac{1 - \ln t}{t^2}$. $y'_x = \dfrac{1 - \ln t}{t^2} \cdot \dfrac{1}{\ln t + 1}$. При t=1 отримаємо: $y'_t\big|_{t=1} = 1$.

Домашнє завдання:

Обчислити похідні y'_x.

1. $x^4 + y^4 = x^2 y^2$. Відповідь: $y'_x = \dfrac{x\left(y^2 - 2x^2\right)}{y\left(2y^2 - x^2\right)}$.

2. $y^2\cos x=\sin 3x$. Відповідь: $y'_x=\dfrac{3\cos 3x+y^2\sin x}{2y\cos x}$.

3. $y^2-2xy+4=0$. Відповідь: $y'_x=\dfrac{y}{y-x}$.

4. $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3. \end{cases}$ Відповідь: $y'_x=\dfrac{3t^2-1}{2t}$.

5. $\begin{cases} x=\dfrac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y=\dfrac{1}{t^2-1}. \end{cases}$ Відповідь: $y'_x=\dfrac{t^2+1}{t\left(2+3t-t^3\right)}$.

6. $\begin{cases} x=2\cos^3 t, \\ y=3\sin^3 t. \end{cases}$ Відповідь: $y'_x=-\dfrac{3}{2}\operatorname{tg}t$.

7. Знайти y'_x у точці $t=0$, якщо $\begin{cases} x=t-t^4, \\ y=t^2-t^3. \end{cases}$

Відповідь: $y'_x=0$.

Практичне заняття на тему: «Похідні вищих порядків»

Знайти похідні другого порядку від наступних функцій.

1. $y=\operatorname{arctg}\left(x^2\right)$.

Розв’язання. $y'=\dfrac{2x}{1+x^4}$,

$$y''=\left(y'\right)'=\frac{2\left(1+x^4\right)-2x\cdot 4x^3}{\left(1+x^4\right)^2}=\frac{2-6x^4}{\left(1+x^4\right)^2}.$$

2. $y=\log_2 \sqrt[3]{1-x^2}$.

Розв’язання. $y=\log_2 \sqrt[3]{1-x^2} = \frac{1}{3}\log_2\left(1-x^2\right)=\frac{1}{3\ln 2}\ln\left(1-x^2\right).$

$$y'=\frac{1}{3\ln 2}\cdot\frac{(-2x)}{1-x^2},$$

$$y''=-\frac{2}{3\ln 2}\cdot\frac{1-x^2-x\cdot(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2}=-\frac{2}{3\ln 2}\cdot\frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}.$$

3. $y=e^{-x^2}$.

Розв’язання. $y'=-2xe^{-x^2}$,

$$y''=-2e^{-x^2}-2x\cdot(-2x)e^{-x^2}=e^{-x^2}\left(-2+4x^2\right)=2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right).$$

4. $y=x^{\sqrt{x}}$.

Розв’язання. $\ln y=\sqrt{x}\cdot\ln x$.

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=\left(\sqrt{x}\cdot\ln x\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}(2+\ln x).$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}(2+\ln x)x^{\sqrt{x}},$$

$$y''=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'(2+\ln x)x^{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}(2+\ln x)'x^{\sqrt{x}}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{x}}(2+\ln x)\left(x^{\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}(2+\ln x)x^{\sqrt{x}}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot x^{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}(2+\ln x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}(2+\ln x)x^{\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{x^{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{2}(2+\ln x)\right)+\frac{(2+\ln x)^2}{4x}x^{\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{x^{\sqrt{x}-1}}{2}\left(\frac{-\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{(2+\ln x)^2}{2}\right).$$

4. Знайти $y'(0), y''(0), y'''(0)$, якщо $y(x)=e^{2x}\sin 3x$.

Розв’язання. Знайдемо $y'(x)$, $y''(x), y'''(x)$.

$$y'(x)=2e^{2x}\sin 3x+3e^{2x}\cos 3x=e^{2x}(2\sin 3x+3\cos 3x).$$

$$y''(x)=2e^{2x}(2\sin 3x+3\cos 3x)+e^{2x}(6\cos 3x-9\sin 3x)=$$
$$=e^{2x}(-5\sin 3x+12\cos 3x),$$

$$y'''=2e^{2x}(-5\sin 3x+12\cos 3x)+e^{2x}(-15\cos 3x-36\sin 3x)=$$
$$=e^{2x}(-46\sin 3x+9\cos 3x).$$

Підставивши у отримані вирази для похідних $x=0$, знаходимо:

$$y'(0)=3,\ y''(0)=12,\ y'''(0)=9\ .$$

5. Знайти $y^{(4)}(1)$, якщо $y=x^3\ln x$.

Розв’язання. Знайдемо перші чотири похідні від заданої функції. Отримуємо:

$$y' = 3x^2 \ln x + x^2,\ y'' = 6x \ln x + 3x + 2x = 6x \ln x + 5x,$$
$$y''' = 6 \ln x + 6 + 5 = 6 \ln x + 11,\ y^{(4)} = \frac{6}{x}.\ y^{(4)}(1) = 6.$$

Формули для похідних n-го порядку деяких елементарних функцій.

$$\left(x^m\right)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\cdot \ldots \cdot (m-n+1)x^{m-n}. \qquad (1)$$

$$\left(a^x\right)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a. \qquad (2)$$

$$\left(e^x\right)^{(n)} = e^x. \qquad (3)$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \qquad (4)$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \qquad (5)$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}. \qquad (6)$$

Формула Лейбніца

$$\left(u\cdot v\right)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+uv^{(n)}= \qquad (7)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}.$$

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!},\quad 0!=1.$$

6. Знайти $y^{(50)}(x)$, якщо $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

Розв’язання. Розкладемо задану дробову функцію на елементарні дроби.

$$y=\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x-2)}=$$

$$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}.$$

За формулою (1) отримуємо:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(50)}=\left(x^{-1}\right)^{(50)}=(-1)(-2)\ldots(-50)\cdot x^{-51}=\frac{(-1)^{50}50!}{x^{51}}=$$

$$=\frac{50!}{x^{51}}.$$

$$\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(50)}=\frac{50!}{(x-2)^{51}},\ \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(50)}=\frac{50!}{(x-1)^{51}}.$$

$$y^{(50)}=50!\left(\frac{1}{(x-2)^{51}}-\frac{1}{(x-1)^{51}}\right).$$

Знайти n-і похідні наступних функцій

7. $y=\frac{1}{2x+1}$.

Розв'язання. З формули (1) випливає, що при $y=\frac{1}{x}$

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

Тоді $\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!\cdot 2^n}{(2x+1)^{n+1}}$.

8. $y=x^n\sqrt{x}$.

Розв'язання. $y=x^n\sqrt{x}=x^{n+\frac{1}{2}}$. За формулою (1) отримуємо при $m=n+\frac{1}{2}$:

$$\left(x^{n+\frac{1}{2}}\right)^{(n)}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(n+\frac{1}{2}-n+1\right)\times$$

$$\times x^{\frac{1}{2}}=\frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3}{}\cdot\sqrt{x}.$$

9. $y=5-3\cos^2 x$.

Розв’язання. $y=5-3\cos^2 x=5-\frac{3}{2}(1+\cos 2x)$.

$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$. $(\cos 2x)^{(n)}=2^n\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

$$y^{(n)}=-\frac{3}{2}\cdot 2^n\cdot\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

10. $y=2^x+2^{-x}$.

Розв’язання. Використаємо формулу (2):

$$\left(a^x\right)^{(n)}=(\ln a)^n a^x\ .$$

$$y^{(n)}=(\ln 2)^n\left(2^x+(-1)^n 2^{-x}\right).$$

Застосувавши формулу Лейбніца, знайти похідні *n*-го порядку від вказаних функцій при заданому *n*.

11. $y=\left(x^2+x+1\right)\sin x$, $n=15$.

Розв’язання. Застосуємо формулу Лейбніца:

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}.$$

Виберемо $v=x^2+x+1,\quad u=\sin x$. Тоді $v'=2x+1$, $v''=2$,

$v'''=...=v^{(15)}=0$.

За формулою Лейбніца маємо:

$$y^{(15)}=C_{15}^0(\sin x)^{(15)}\left(x^2+x+1\right)+C_{15}^1(\sin x)^{(14)}(2x+1)+$$
$$+C_{15}^2(\sin x)^{(13)}\cdot 2.$$

$$C_{15}^0=\frac{15!}{0!\cdot 15!}=1,\ C_{15}^1=15,\ C_{15}^2=\frac{15!}{2!\cdot 13!}=\frac{14\cdot 15}{2}=105.$$

$$(\sin x)^{(13)}=\sin\left(x+\frac{13\pi}{2}\right)=\sin\left(x+6\pi+\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x.$$

$$(\sin x)^{(14)}=(\cos x)'=-\sin x,\ \ (\sin x)^{(15)}=(-\sin x)'=-\cos x.$$

Підставивши знайдені похідні та коефіцієнти у формулу Лейбніца, отримуємо:

$$y^{(15)}=-\cos x\cdot\left(x^2+x+1\right)+15\cdot(-\sin x)(2x+1)+$$
$$+105\cdot\cos x\cdot 2=-\left(x^2+x+1\right)\cos x-15(2x+1)\sin x+$$
$$+210\cos x.$$

12. $y=\left(x^2-x\right)e^{-x}$, $n=20$

Розв'язання. $u=e^{-x}$, $v=x^2-x$, $v'=2x-1$, $v''=2$,

$\left(e^{-x}\right)^{(n)}=(-1)^n e^{-x}$.

Застосуємо формулу Лейбніца.

$$y^{(20)}=C_{20}^0\cdot u^{(20)}v+C_{20}^1\cdot u^{(19)}v'+C_{20}^2\cdot u^{(18)}v''=$$
$$=e^{-x}\left(x^2-x\right)-20\cdot e^{-x}\left(2x-1\right)+190\cdot e^{-x}\cdot 2=$$
$$=e^{-x}\left(x^2-41x+400\right).$$

13. $y=x\ln x$, $n=10$.

Розв'язання. $u=\ln x, v=x, v'=1, \left(\ln x\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

$\left(\ln x\right)^{(10)}=-\dfrac{9!}{x^{10}}$, $\left(\ln x\right)^{(9)}=\dfrac{8!}{x^9}$.

$$y^{(10)}=C_{10}^0\cdot u^{(10)}v+C_{10}^1\cdot u^{(9)}v'=-\frac{9!}{x^9}+10\cdot\frac{8!}{x^9}=$$
$$=\frac{8!}{x^9}.$$

14. Знайти другу похідну y''_x функції $y(x)$, заданої у неявному вигляді:

$$x^3+y^3+3x^2+2y=0.$$

Розв'язання. Продиференціюємо цю рівність з врахуванням того, що $y = y(x)$. Отримаємо:

$$3x^2 + 3y^2y' + 6x + 2y' = 0.$$

Звідси визначимо $y' = -3 \cdot \dfrac{x^2 + 2x}{3y^2 + 2}$.

Звідси визначаємо другу похідну, диференціюючи останню рівність:

$$y'' = -3 \cdot \frac{(2x+2)(3y^2+2) - (x^2+2x) \cdot 6y \cdot y'}{(3y^2+2)^2} =$$

$$= -6 \cdot \frac{(x+1)(3y^2+2) - 3y(x^2+2x) \cdot \left(\dfrac{-3(x^2+2x)}{3y^2+2} \right)}{(3y^2+2)^2} =$$

$$= -6 \cdot \frac{(x+1)(3y^2+2)^2 + 9y(x^2+2x)^2}{(3y^2+2)^3}.$$

Знайти похідні другого порядку від функцій, заданих параметрично.

15. $x = \ln t,\ y = t^3,\ t \in (0; +\infty)$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку першу похідну

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2}{1/t} = 3t^3 \ .$$

$$y''_x = \left(y'_x\right)_t : x'_t = 9t^2 : \frac{1}{t} = 9t^3 .$$

16. $x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \ln\left(1+t^2\right), \quad t \in \mathbb{R}$.

Розв'язання.

$$x'_t = \frac{1}{1+t^2}, \ y'_t = \frac{2t}{1+t^2}, \ y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t}{1+t^2} : \frac{1}{1+t^2} = 2t .$$

$$y''_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{2}{1/\left(1+t^2\right)} = 2\left(1+t^2\right).$$

17. $x = a\cos^3 t, \ y = a\sin^3 t$.

Розв'язання. $x'_t = 3a\cos^2 t \cdot \left(-\sin t\right)$,

$$y'_t = 3a\sin^2 t \cdot \cos t , \ y'_x = \frac{3a\sin^2 t \cdot \cos t}{-3a\cos^2 t \cdot \sin t} = -\operatorname{tg} t .$$

$$y''_x = \frac{\left(y'_x\right)_t}{x'_t} = -\frac{1}{\cos^2 t \cdot \left(-3a\cos^2 t \sin t\right)} = \frac{1}{3a\sin t \cos^4 t} .$$

Домашнє завдання

1. Знайти похідну другого порядку функції $y = \sqrt{1+x^2}$.

Відповідь: $y'' = \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}$.

2. Знайти похідну третього порядку функції $f\left(x\right) = x^2 \ln x$

Відповідь: $f'''\left(x\right) = \dfrac{2}{x}$.

3. Знайти похідну другого порядку від функції

$y = x\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) - \sqrt{x^2+a^2}$.

Відповідь: $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

4. Знайти похідну *n*-го порядку від функції $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Відповідь: $y^{(n)} = \dfrac{n! \cdot (ad-bc) \cdot (-c)^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}$.

5. Знайти похідну *n*-го порядку $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ функції, заданої у параметричній формі: $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

Відповідь: $\dfrac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{t}$.

6. Знайти $y^{(100)}(x)$, якщо $y(x) = x \cdot \operatorname{sh} x$.

Відповідь: $y^{(100)}(x) = x \cdot \operatorname{sh} x + 100 \operatorname{ch} x$.

7. Використовуючи формулу Лейбніца, знайти п'яту похідну від функції $y = x^5 e^{\frac{x}{2}}$.

Відповідь:

$$y^{(5)}(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{x^5}{32} + \frac{25x^4}{16} + 25x^3 + 150x^2 + 300x + 120 \right).$$