Знаходження сум за допомогою похідної

Розглянемо знаходження сум за допомогою похідних. Для цього будемо використовувати відомі формули:

$$x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}; \tag{1}$$

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \\ = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, \tag{3}$$

$x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$$\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}, \tag{4}$$

$x \neq 2^n k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Формули для знаходження багатьох сум скінченної кількості однойменних функцій можна отримати, диференціюючи такі рівності необхідну кількість разів, при цьому добуток (4) попередньо логарифмують.

Приклад 1. Знайти формулу для суми

$$1+2\ln x+3\ln^2 x+\ldots+n\ln^{n-1} x,\ x>0.$$

Розв'язання. Виберемо в рівності (1) $\ln x$ замість x:

$$\ln x+\ln^2 x+\ldots+\ln^n x=\frac{\ln x-\ln^{n+1} x}{1-\ln x}.$$

Знайдемо похідну від обох частин цієї рівності. Після перетворень отримуємо:

$$\frac{1}{x}\left(1+2\ln x+3\ln^2 x+\ldots+n\ln^{n-1} x\right)=\frac{1-(n+1)\ln^n x+n\ln^{n+1} x}{x(1-\ln x)^2}.$$

Звідси знаходимо:

$$1+2\ln x+3\ln^2 x+\ldots+n\ln^{n-1} x=\frac{1-(n+1)\ln^n x+n\ln^{n+1} x}{(1-\ln x)^2}.$$

Приклад 2. Знайти суму:

$$\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{16\cos^2\frac{x}{4}}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}\cos^2\frac{x}{2^n}}.$$

Розв'язання. Логарифмуємо рівність (4) та отримуємо:

$$\ln\cos\frac{x}{2}+\ln\cos\frac{x}{4}+\ldots+\ln\cos\frac{x}{2^n}=\ln\sin x-n\ln 2-\ln\sin\frac{x}{2^n}.$$

Диференціюємо отриману тотожність та знаходимо:

$$-\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}\right)=\operatorname{ctg}x-\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}.$$

Після повторного диференціювання отримуємо шукану формулу:

$$\frac{1}{4\cos^2\dfrac{x}{2}}+\frac{1}{16\cos^2\dfrac{x}{4}}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}\cos^2\dfrac{x}{2^n}}=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{2^{2n}\sin^2\dfrac{x}{2^n}}.$$

Доведення тотожностей

Доведення тотожностей за допомогою похідної ґрунтується на ознаці сталості функції, згідно з якою, якщо в усіх точках деякого проміжку $f'(x)=0$, то функція $f(x)$ зберігає на ньому стале значення.

Приклад 1. Довести тотожність $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x)=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x},$$

визначену на $(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$. Знайдемо її похідну:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\left(\frac{-2}{(1+x)^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2}{2+2x^2}=0$$

на всій області визначення функції $f(x)$. $f'(x)=0$, тому $f(x)$ є сталою, $f(x)\equiv C$ для будь-якого x з області визначення даної функції. Нехай $x=1$. Отримуємо $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}$. Звідси маємо $C=\frac{\pi}{4}$, тобто для всіх значень x з області визначення цієї функції виконується тотожність

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{4}.$$

Приклад 2. Довести тотожність

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x.$$

Розв'язання. Знайдемо похідну функції

$$f(x)=\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x:$$

$$f'(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{8}-x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}-x\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}+x\right)-$$

$$-\sqrt{2}\cos 2x=\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)-\sqrt{2}\cos 2x=$$

$$=\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\cos 2x=0.$$

Звідси $f(x)=C\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Оскільки $f(0)=0$, то $f(x)=0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$, звідки випливає, що

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x.$$

Приклад 3. Довести тотожність

$$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}z\cdot\operatorname{tg}x=1,$$

якщо $x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання. З додаткової умови знаходимо $z=\dfrac{\pi}{2}-x-y$. Введемо допоміжну функцію

$$f(x)=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{ctg}(x+y)+\operatorname{ctg}(x+y)\cdot\operatorname{tg}x,$$

яка співпадає з лівою частиною тотожності. Доведемо, що для будь-яких можливих x та y виконується $f(x)\equiv 1$. Знайдемо $f'(x)$.

$$f'(x)=\frac{\operatorname{tg}y}{\cos^2 x}-\frac{\operatorname{tg}y}{\sin^2(x+y)}-\frac{\operatorname{tg}x}{\sin^2(x+y)}+\frac{\operatorname{ctg}(x+y)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}\left(\operatorname{tg}y+\operatorname{ctg}(x+y)\right)-\frac{1}{\sin^2(x+y)}\cdot\left(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos x\cos y\sin(x+y)}-\frac{1}{\cos x\cos y\sin(x+y)}=0.$$

Отже, $f(x)\equiv C$ при довільних можливих значеннях x. Для знаходження сталої C виберемо $x=0$, отримуємо:

$$C = f(0) = 1,$$

тобто тотожність виконується.

Монотонність функції. Локальний екстремум. Найбільше і найменше значення функції на відрізку.

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x$.

Розв'язання. Знайдемо похідну $y' = x^2 - 5x + 6$. Вона існує при всіх дійсних x. Прирівнявши похідну до нуля, отримуємо стаціонарні точки $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Визначаємо інтервали монотонності та екстремуми функції. Для цього використовуємо знак першої похідної (достатню умову монотонності функції на інтервалі та першу достатню умову локального екстремуму):

$$y' = (x-2)(x-3).$$

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max $f_{\max} = \frac{14}{3}$	$\searrow$	min $f_{\min} = \frac{9}{2}$	$\nearrow$

Висновок: На інтервалах $(-\infty; 2)$ та $(3; +\infty)$ функція зростає, на $(2; 3)$ функція спадає, $x = 2$ – точка максимуму, $x = 3$ – точка мінімуму. $f_{\max} = f(2) = \frac{14}{3}$ $f_{\min} = f(3) = \frac{9}{2}$.

Приклад 2. Знайти інтервали монотонності та екстремуми даної функції, користуючись першою похідною: $y = \frac{(x-5)^2}{x^2}$.

Розв'язання. Область визначення цієї функції $x \neq 0$. Знаходимо критичні точки, тобто точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує:

$$y' = \frac{\left((x-5)^2\right)' \cdot x^2 - (x-5)^2 \cdot \left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} = \frac{2x^2(x-5) - 2x(x-5)^2}{x^4} =$$

$$= \frac{10(x-5)}{x^3},$$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x - 5 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x = 5. \end{cases}$$

Визначаємо інтервали монотонності та точки екстремуму функції, використовуючи знак першої похідної (достатня умова монотонності функції на інтервалі та перша достатня умови локального екстремуму):

x	$(-\infty;0)$	$(0;5)$	5	$(5;+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	min $f_{\min}=0$	$\nearrow$

Висновок:

На інтервалі $(-\infty;0)$ і на $(5;+\infty)$ функція зростає;

на інтервалі $(0;5)$ функція спадає;

точка $x=5$ є точкою локального мінімуму.

Приклад 3. Дослідити на екстремум функцію $y=x\left(1+\sqrt{x}\right)$.

Розв'язання. Похідна має вигляд:

$$y'=1+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=1+\frac{3}{2}\sqrt{x}>0\ \forall x\geq 0.$$

Функція монотонно зростає на своїй області визначення.

Висновок. Точки екстремуму відсутні.

Приклад 4. Дослідити на екстремум функцію $y=(x-5)e^{x}$.

Розв'язання. Областю визначення функції є вся числова пряма. Знайдемо похідну та прирівняємо її до нуля. Отримуємо:

$$y' = e^x + (x-5)e^x = (x-4)e^x.$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 4.$$

При $x < 4$ $y'(x) < 0$, при $x > 4$ $y'(x) > 0$, тому $x = 4$ є точкою мінімуму.

Висновок. На $(-\infty; 4)$ функція спадає, на $(4; +\infty)$ функція зростає, $x = 4$ – точка мінімуму, $y_{\min} = -e^4$.

Приклад 5. Дослідити на екстремум функцію $y = x\sqrt{1-x^2}$.

Розв'язання. Область визначення функції – це відрізок $[-1; 1]$. Похідна має вигляд:

$$y' = \left(x\sqrt{1-x^2}\right)' = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Знаходимо стаціонарні точки функції: $y' = 0 \Rightarrow 1-2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

x	$\left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$	min $f_{\min}=-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	max $f_{\max}=\frac{1}{2}$	$\searrow$

Висновок. На $\left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ та $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$ функція спадає, на $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ зростає, $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ – точка мінімуму, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ – точка максимуму, $f_{\min}=-\frac{1}{2}$, $f_{\max}=\frac{1}{2}$.

Приклад 6. Знайти найбільше та найменше значення функції на зазначеному відрізку:

$$y=\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x,\ x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

Розв'язання. Знайдемо критичні точки функції:

$$y' = \frac{1}{2}(\cos 2x)' + (\sin x)' = \frac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot 2 + \cos x =$$
$$= \cos x - \sin 2x.$$

$$y' = 0,$$

$$\cos x - \sin 2x = 0 \qquad \cos x - 2\cos x \cdot \sin x = 0$$

$$\cos x \cdot (1 - 2\sin x) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ 1 - 2\sin x = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Інтервалу $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ належать тільки точки $x = \frac{\pi}{6}$ і $x = \frac{\pi}{2}$.

Знаходимо значення функції в критичних точках та на кінцях інтервалу:

$$y(0) = \frac{1}{2}, \qquad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Висновок: $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y = y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}.$

Приклад 7. Визначити найбільше значення добутку m-ого та n-ого степенів ($m > 0, n > 0$) двох додатних чисел, сума яких дорівнює a.

Розв'язання. Нехай x – одне з таких додатних чисел, тоді інше дорівнює $a - x$. Добуток їх m-го та n-го степенів дорівнюватиме $x^m \cdot (a-x)^n$. Потрібно знайти найбільше значення функції $f(x) = x^m \cdot (a-x)^n$ при $x \in (0;a)$.

Для дослідження цієї функції знайдемо спочатку похідну:

$$\begin{aligned} f'(x) &= mx^{m-1} \cdot (a-x)^n - n(a-x)^{n-1} \cdot x^m = \\ &= x^{m-1} \cdot (a-x)^{n-1}(ma - mx - nx). \end{aligned}.$$

Далі знаходимо критичні точки функції:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = a, \\ x = \dfrac{ma}{m+n}. \end{array} \right.$$

В інтервалі $(0,a)$ лежить одна критична точка: $x = \dfrac{ma}{m+n}$.

Нарешті, знайдемо значення функції в критичній точці і граничні значення на кінцях інтервалу:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to a} f(x) = 0,$$

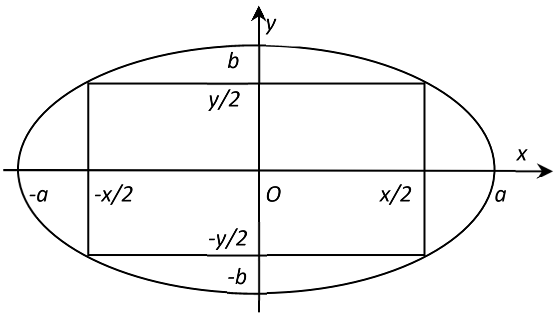
$$f\left(\frac{ma}{m+n}\right) = \left(\frac{ma}{m+n}\right)^m \cdot \left(a - \frac{ma}{m+n}\right)^n = \frac{m^m n^n a^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}.$$

Висновок: найбільше значення функції дорівнює $\dfrac{m^m n^n a^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$.

Приклад 8. В еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вписати прямокутник найбільшої площі зі сторонами, що паралельні осям цього еліпса.

Розв'язання. Нехай x, y – довжини сторін прямокутника, тоді точки з координатами $\left(\pm\frac{x}{2},\pm\frac{y}{2}\right)$, $\left(\pm\frac{x}{2},\mp\frac{y}{2}\right)$ є вершинами цього прямокутника (див. рис.) Ці точки повинні лежати на еліпсі, а їх координати – задовольняти рівнянню еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$



Звідки $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Площа побудованого прямокутника дорівнює $S(x)=x\cdot b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Знайдемо значення довжини

$x \in (0; a)$ однієї із сторін прямокутника, при якому функція $S(x)$ набуває найбільшого значення.

Для цього знайдемо критичні точки цієї функції:

$$S'(x) = b\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} - \frac{x^2}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right) = \frac{b\left(a^2-2x^2\right)}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}};$$

$$S'(x) = 0 \text{ при } x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

В інтервалі $(0, a)$ лежить одна критична точка: $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Тепер знайдемо значення функції в критичній точці і граничні значення на кінцях інтервалу:

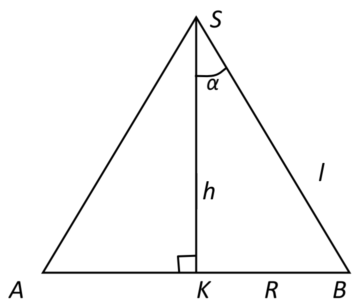
$$\lim_{x\to 0} S(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} S(x) = 0,$$

$$S\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{ab}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{ab}{2}.$$

Отже, найбільше значення функції досягається при $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, що відповідає значенню однієї із сторін прямокутника. Тоді друга сторона дорівнюватиме $y = b\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{2a^2}} = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$.

Висновок: довжини сторін шуканого прямокутника дорівнюють $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ і $\dfrac{b}{\sqrt{2}}$.

Приклад 9. Знайти найбільший об'єм конуса з довжиною твірної l.



Розв'язання. Нехай α – кут між твірною конуса та його висотою. Зобразимо осьовий переріз конуса (див. рис.). В ΔBKS $\angle K = 90^o$, $\angle KSB = \alpha$, $SB = l$, тоді радіус основи дорівнюватиме

$$R = KB = l\sin\alpha,$$

а висота конуса

$$h = SK = l\cos\alpha.$$

Тоді об'єм конуса складатиме

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{l^3\pi}{3} \cdot \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha\,.$$

Для пошуку найбільшого значення об’єму знайдемо найбільше значення функції

$$f(\alpha) = \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$$

на інтервалі $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Для цього знайдемо критичні точки цієї функції:

$$f'(\alpha) = -\sin^3\alpha + 2\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \left(-\mathrm{tg}^2\alpha + 2\right);$$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0, \\ \sin\alpha = 0, \\ \mathrm{tg}\,\alpha = \pm\sqrt{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ \alpha = \pi m,\ m \in \mathbb{Z}, \\ \alpha = \pm\mathrm{arctg}\sqrt{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$\nexists f'(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi j,\ j \in \mathbb{Z}\,.$$

В інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ лежить одна критична точка: $\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{2}$. Знайдемо значення функції в критичній точці і граничні значення на кінцях інтервалу:

$$\lim_{\alpha \to 0} f(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} f(\alpha) = 0,$$

$$f\left(\text{arctg}2\right)=\cos\left(\text{arctg}\sqrt{2}\right)\cdot\sin^2\left(\text{arctg}\sqrt{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\left(\text{arctg}\sqrt{2}\right)}}\cdot\frac{\text{tg}^2\left(\text{arctg}\sqrt{2}\right)}{1+\text{tg}^2\left(\text{arctg}\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Висновок: найбільше значення об'єму дорівнює $V=\frac{l^3\pi}{3}\max\limits_{\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} f(\alpha)=\frac{2\pi\sqrt{3}}{27}l^3$.

Приклад 10. Нехай в результаті серії експериментів у зв'язку з наявністю похибок вимірювання отримали n різних значень величини x: $x_1, x_2,..., x_n$. Знайти значення величини x_0, для якого сума квадратів відхилень від отриманих значень буде найменшою.

Розв'язання. Сума квадратів вказаних відхилень виражається функцією $f\left(x\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x-x_i\right)^2$. Вона визначена на всій числовій прямій. При цьому маємо:

$$f'\left(x\right)=2\sum_{i=1}^{n}\left(x-x_i\right),\ f''\left(x\right)=2n>0.$$

З останньої нерівності випливає, що стаціонарна точка функції $f\left(x\right)$ є її точкою мінімуму. Знайдемо цю стаціонарну точку з рівняння $f'\left(x\right)=0$, з якого отримуємо, що

$$nx=\sum_{i=1}^{n}x_i \Rightarrow x=x_0=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}.$$

Отже значення x_0, для якого сума квадратів його відхилень від отриманих значень x_i є мінімальною, дорівнює середньому арифметичному отриманих результатів вимірювання.

Приклад 11. Знайти інтервали монотонності та екстремуми даної функції, користуючись першою похідною: $y=\dfrac{(x-5)^2}{x^2}$.

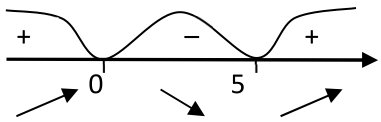
Розв'язання. Область визначення даної функції $x\neq 0$. Знаходимо критичні точки, тобто точки, в яких похідна дорівнює 0 або не існує:

$$y'=\frac{\left((x-5)^2\right)'\cdot x^2-(x-5)^2\cdot\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}=\frac{2x^2(x-5)-2x(x-5)^2}{x^4}=$$

$$\frac{10(x-5)}{x^3},$$

$$y'=0\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x-5=0\end{cases},\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x=5\end{cases}.$$

Визначаємо інтервали монотонності та точки екстремуму функції, використовуючи знак першої похідної:

Знаки y':	
Характерні точки	
Напрямки монотонності, extr	
Значення функції в точках extr	$\nexists$ 0

Отже, на інтервалі $(-\infty;0)$ і на $(5;+\infty)$ функція зростає; на інтервалі $(0;5)$ функція спадає;

точка $x=5$ є точкою мінімуму.

Приклад 12. Дослідити на екстремум функцію $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5x^2}{2}+6x$.

Розв'язання. Знайдемо похідну $y'=x^2-5x+6$. Вона існує при всіх дійсних x. Прирівнявши похідну до нуля, отримуємо стаціонарні точки $x_1=2$, $x_2=3$. Визначаємо інтервали монотонності та екстремуми функції. Для цього використовуємо знак першої похідної (достатню умову монотонності функції на інтервалі та першу достатню умову локального екстремуму):

$y'=(x-2)(x-3)$.

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max $f_{\max} = \dfrac{14}{3}$	$\searrow$	min $f_{\min} = \dfrac{9}{2}$	$\nearrow$

Висновок: На інтервалах $(-\infty; 2)$ та $(3; +\infty)$ функція зростає, на $(2; 3)$ функція спадає, $x = 2$ – точка максимуму, $x = 3$ – точка мінімуму. $f_{\max} = f(2) = \dfrac{14}{3}$ $f_{\min} = f(3) = \dfrac{9}{2}$.

Приклад 13. Знайти інтервали монотонності та екстремуми даної функції, користуючись першою похідною: $y = \dfrac{(x-5)^2}{x^2}$.

Розв'язання. Область визначення цієї функції $x \neq 0$. Знаходимо критичні точки, тобто точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує:

$$y' = \frac{\left((x-5)^2\right)' \cdot x^2 - (x-5)^2 \cdot \left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} = \frac{2x^2(x-5) - 2x(x-5)^2}{x^4} =$$

$$= \frac{10(x-5)}{x^3},$$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x - 5 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x = 5. \end{cases}$$

Визначаємо інтервали монотонності та точки екстремуму функції, використовуючи знак першої похідної (достатня умова монотонності функції на інтервалі та перша достатня умови локального екстремуму):

x	$(-\infty;0)$	$(0;5)$	5	$(5;+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	min $f_{\min} = 0$	$\nearrow$

Висновок:

На інтервалі $(-\infty;0)$ і на $(5;+\infty)$ функція зростає;

на інтервалі $(0;5)$ функція спадає;

точка $x = 5$ є точкою локального мінімуму.

Приклад 14. Дослідити на екстремум функцію $y = x\left(1+\sqrt{x}\right)$.

Розв'язання. Похідна має вигляд:

$$y' = 1 + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} > 0 \; \forall x \ge 0.$$

Функція монотонно зростає на своїй області визначення.

Висновок. Точки екстремуму відсутні.

Приклад 15. Дослідити на екстремум функцію $y = (x-5)e^x$.

Розв'язання. Областю визначення функції є вся числова пряма. Знайдемо похідну та прирівняємо її до нуля. Отримуємо:

$$y' = e^x + (x-5)e^x = (x-4)e^x.$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 4.$$

При $x < 4$ $y'(x) < 0$, при $x > 4$ $y'(x) > 0$, тому $x = 4$ є точкою мінімуму.

Висновок. На $(-\infty; 4)$ функція спадає, на $(4; +\infty)$ функція зростає, $x = 4$ – точка мінімуму, $y_{\min} = -e^4$.

Приклад 16. Дослідити на екстремум функцію $y = x\sqrt{1-x^2}$.

Розв'язання. Область визначення функції – це відрізок $[-1; 1]$. Похідна має вигляд:

$$y' = \left(x\sqrt{1-x^2}\right)' = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Знаходимо стаціонарні точки функції: $y' = 0 \Rightarrow 1-2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

x	$\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$	min $f_{\min} = -\frac{1}{2}$	$\nearrow$	max $f_{\max} = \frac{1}{2}$	$\searrow$

Висновок. На $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ та $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$ функція спадає, на $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ зростає, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ – точка мінімуму, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ – точка максимуму, $f_{\min} = -\frac{1}{2}$, $f_{\max} = \frac{1}{2}$.

Приклад 17. Знайти найбільше та найменше значення функції на зазначеному відрізку:

$$y=\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x,\ x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

Розв'язання. Знайдемо критичні точки функції:

$$y'=\frac{1}{2}(\cos 2x)'+(\sin x)'=\frac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot 2+\cos x=\cos x-\sin 2x$$

,

$y'=0,\ \cos x-\sin 2x=0 \quad \Leftrightarrow \cos x-2\cos x\cdot\sin x=0$

$\Leftrightarrow \cos x\cdot(1-2\sin x)=0,$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ 1-2\sin x=0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\, n\in\mathbb{Z},\\ x=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\, k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Інтервалу $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ належать тільки точки $x=\frac{\pi}{6}$ і $x=\frac{\pi}{2}$.

Знаходимо значення функції в критичних точках та на кінцях інтервалу:

$$y(0)=\frac{1}{2},\ y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4},\qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2},\quad \max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$

.

Дослідження функцій на опуклість

Короткі теоретичні відомості

1. *Означення опуклої функції.*

Функцію $y = f(x)$, визначену та диференційовну на інтервалі $(a;b)$, називають опуклою вниз (опуклою вгору), якщо графік цієї функції розташований не нижче (не вище) від своєї дотичної, проведеної у будь-якій точці інтервалу $(a;b)$.

2. Критерій опуклості функції на проміжку.

Якщо функція $f(x)$ є двічі диференційовною на $(a;b)$, то вона є опуклою вниз (вгору) на цьому інтервалі тоді і лише тоді, коли $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) на $(a;b)$.

3. *Необхідна умова точки перегину.*

Якщо x_0 – точка перегину функції і існує $f''(x_0)$, то $f''(x_0) = 0$.

4. *Достатня умова точки перегину.*

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на $(a;b)$ і двічі диференційовна у деякому околі точки $x_0 \in (a;b)$. Якщо друга похідна $f''(x)$ змінює знак при переході аргументу через точку x_0, то ця точка є точкою перегину графіку функції $f(x)$.

5. *Алгоритм дослідження функцій на опуклість.*

1) Знаходимо область визначення функції.

2) Знаходимо другу похідну функції $y''(x)$.

3) Знаходимо корені рівняння $y''(x)=0$, а також точки, у яких друга похідна функції не існує.

4) Наносимо точки, визначені у п.4, на область визначення функції.

5) Знаходимо знак другої похідної на кожному отриманому інтервалі.

6) Встановлюємо характер опуклості на кожному з інтервалів (якщо $y''(x)>0$, то функція опукла вниз, при $y''(x)<0$ функція опукла вгору), а також визначаємо точки перегину (точки з області визначення функції, при переході через які $y''(x)$ змінює знак).

Приклад 1. Дослідити на опуклість функцію

$$y=3x^4-8x^3+6x^2+12$$

та знайти її точки перегину.

Розв'язання. Областю визначення функції є вся числова пряма. Знаходимо похідні:

$$y'=12x^3-24x^2+12x,$$

$$y''=36x^2-48x+12.$$

Розв'язуємо рівняння $y''=0$. Отримуємо:

$$y''=36x^2-48x+12=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0,\ D=16-4\cdot 3\cdot 1=4,$$

$x_1 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}, \;\; x_2 = \frac{4+2}{6} = 1.$

Знайшли два корені рівняння $y'' = 0$: $x_1 = \frac{1}{3}, \;\; x_2 = 1.$

Отже, $y'' = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1).$

x	$\left[-\infty; \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}; 1\right)$	1	$(1; +\infty]$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	Точка перегину	$\cap$	Точка перегину	$\cup$

Точки $x_1 = \frac{1}{3}$ та $x_2 = 1$ розділяють числову пряму на 3 проміжки: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ та $(1; +\infty)$.

З'ясуємо знак другої похідної $y''(x)$ на кожному з цих проміжків. Отримуємо: на $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ $y'' > 0$, тут функція є опуклою вниз; на $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ $y'' < 0$, функція опукла вгору; на проміжку $(1; +\infty)$ $y'' > 0$, функція опукла вниз.

Отже, при переході аргументу x через точки x_1 та x_2 $y''(x)$ змінює знак, тому точки з абсцисами $x_1 = \frac{1}{3}$ та $x_2 = 1$ є точками перегину функції.

Приклад 2. Дослідити на опуклість криву $y = \sqrt[3]{x^5}$ та знайти її точки перегину.

Розв'язання. Область визначення функції: $x \in \mathbb{R}$. Знайдемо другу похідну заданої функції $y = x^{\frac{5}{3}}$.

$$y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}, \; y'' = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}.$$

x	$[-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f''(x)$	$-$	Не існує	$+$
$f(x)$	$\cap$	Точка перегину	$\cup$

$y''(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$, проте у точці $x_0 = 0$ друга похідна не існує. При цьому $y'' < 0$ при $x < 0$, тут функція є опуклою вгору; $y'' > 0$ при $x > 0$, функція опукла вниз. . Отже, у точці з абсцисою $x_0 = 0$ функція має перегин.

Приклад 3. Дослідити на опуклість функцію $y = xe^x$.

Розв'язання. Область визначення функції – вся числова пряма. Знаходимо y''_x.

$$y' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$$

$$y'' = e^x (x+1) + e^x = e^x (x+2).$$

x	$[-\infty; -2)$	–2	$(-2; +\infty)$
$f''(x)$	–	0	+
$f(x)$	$\cap$	Точка перегину	$\cup$

Друга похідна змінює знак у точці $x = -2$. При $x < -2$ $y'' < 0$, тут функція є опуклою вгору, при $x > -2$ $y'' > 0$, тому тут функція опукла вниз.

Приклад 4. Знайти точки перегину та інтервали опуклості функції $y = x \sin(\ln x)$.

Розв'язання. Область визначення функції – $x \in (0; +\infty)$.Знаходимо другу похідну:

$$y' = \sin(\ln x) + x \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \sin(\ln x) + \cos(\ln x).$$

$$y'' = \frac{\cos(\ln x)}{x} - \frac{\sin(\ln x)}{x} .$$

Оскільки $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, то

$$y'' = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln x\right)}{x} .$$

При $x \in (0; +\infty)$ знак $y''(x)$ співпадає зі знаком чисельника. Знайдемо значення x, для яких $y'' = 0$.

$$y'' = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln x\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - \ln x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$y'' > 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln x\right) > 0 \Rightarrow 2\pi n < \frac{\pi}{4} - \ln x < \pi + 2\pi n.$$

$$-\frac{3\pi}{4} - 2\pi n < \ln x < \frac{\pi}{4} - 2\pi n \Leftrightarrow e^{-\frac{3\pi}{4} - 2\pi n} < x < e^{\frac{\pi}{4} - 2\pi n}, n \in \mathbb{Z}.$$

Аналогічно знаходимо:

$$y'' < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - 2\pi n < \ln x < \frac{5\pi}{4} - 2\pi n,$$

$$e^{\frac{\pi}{4} - 2\pi n} < x < e^{\frac{5\pi}{4} - 2\pi n}, n \in \mathbb{Z}.$$

Отже, у проміжках $x \in \left(e^{-\frac{3\pi}{4} - 2\pi n}; e^{\frac{\pi}{4} - 2\pi n}\right), n \in \mathbb{Z}$ функція є опуклою вниз, а у інтервалах $x \in \left(e^{\frac{\pi}{4} - 2\pi n}; e^{\frac{5\pi}{4} - 2\pi n}\right), n \in \mathbb{Z}$, функція опукла вгору. Точками перегину функції є межі знайдених інтервалів, які можна записати у вигляді $x = e^{\frac{\pi}{4} + k\pi}, k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 5. При яких значеннях параметра a функція $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ є опуклою вниз для всіх дійсних x?

Розв'язання. Знаходимо y''.

$$y' = 4x^3 + 3ax^2 + 3x,$$
$$y'' = 12x^2 + 6ax + 3.$$
$$y'' > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 4x^2 + 2ax + 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow |a| \leq 2 \Rightarrow a \in [-2; 2].$$

Приклад 6. Дослідити на опуклість функцію

$x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0; 2\pi]$, $a > 0$.

Розв'язання. Знайдемо y''_x . Для цього знайдемо похідні x'_t, y'_t, y'_x.

$x'_t = -3a\cos^2 t \sin t$, $y'_t = 3a\sin^2 t \cos t$.

У точках $t \in \left\{0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$ $x'_t = 0$, тому у цих точках не існують y'_x, y''_x.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{3a\sin^2 t \cos t}{3a\cos^2 t \sin t} = -\mathrm{tg}\, t.$$
$$y''_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{(\mathrm{tg}\, t)'}{3a\cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3a} \cdot \frac{1}{\cos^4 t \sin t}.$$

Оскільки $a > 0$, то $y''_x > 0$ при $\sin t > 0$, отже при значеннях $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ функція опукла вниз. Точка графіка, що відповідає значенню $t = \frac{\pi}{2}$ не є точкою перегину, оскільки y''_x тут не змінює знаку. При $t \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ $y''_x < 0$, тому тут функція опукла вгору. Точка графіка, що відповідає значенню $t = \frac{3\pi}{2}$ не є точкою перегину, оскільки y''_x тут не змінює знаку (залишається від’ємною).

Приклад 7. Дослідити на опуклість графік функції $y = e^{\sin x}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Розв’язання. Знайдемо другу похідну заданої функції.

$y' = \cos x \cdot e^{\sin x}$,

$y'' = -\sin x \cdot e^{\sin x} + \cos^2 x \cdot e^{\sin x} = e^{\sin x}\left(1 - \sin^2 x - \sin x\right)$.

Друга похідна існує в усіх точках відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Знайдемо її корені, що належать цьому відрізку.

$y'' = 0 \Rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x = 0$. $t = \sin x$, $t^2 + t - 1 = 0$,

$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

При $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $t \in [-1; 1]$,

$t_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \notin [-1; 1]$, $t_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \in [-1; 1]$.

$$y'' = -e^t\left(t + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(t - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

На $\left(-1; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ $y'' > 0$, на $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right)$ $y'' < 0$.

При $t \in \left(-1; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, на цьому проміжку $y'' > 0$, тому графік функції є опуклим вниз.

При $t \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right)$ $x \in \left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тут $y'' < 0$, графік функції є опуклим вгору.

Приклад 8. Довести, що крива $y = \ln\left(x^2 - 1\right)$ є опуклою вгору всюди у своїй області визначення.

Розв'язання. Область визначення функції визначається х нерівності $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1$. Отже, область визначення функції $D(y) = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Знайдемо другу похідну.

$$y' = \frac{2x}{x^2 - 1},\ y'' = \frac{2\left(x^2 - 1\right) - 4x^2}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{-2\left(x^2 + 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2} < 0.$$

Отже, графік функції $y = \ln\left(x^2 - 1\right)$ є опуклим вгору всюди у своїй області визначення.

Домашнє завдання

Дослідити на опуклість функції

1) $y = xe^x$.

Відповідь: $\left(-\infty; -2\right)$ – функція опукла вгору, $\left(2; +\infty\right)$ – функція опукла вниз, $x = 2$–точка перегину.

2) $y = \left(x-5\right)^{\frac{5}{3}}$.

Відповідь: $\left(-\infty; 5\right)$ – функція опукла вгору, $\left(5; +\infty\right)$ – функція опукла вниз, $x = 5$ – точка перегину.

3) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Відповідь: $\left(-\infty; -2-\sqrt{3}\right) \cup \left(-2+\sqrt{3; 1}\right)$ – функція опукла вгору, $\left(-2-\sqrt{3}; -2+\sqrt{3}\right) \cup \left(1; +\infty\right)$ – функція опукла вниз, $x = -2 \pm \sqrt{3}$, $x = 1$ – точки перегину.

Побудова графіків функцій за характерними точками

Побудувати графіки наступних функцій

а) $y = x^{2/3}e^{-x}$; **б)** $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} - x$;

в) $y=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$; **г)** $y=\dfrac{x}{2}-arctg\,x$;

Розв'язання. а) Для функції $y=x^{2/3}e^{-x}$ маємо

1) $D(y)=\mathbb{R}$.

2) $y(-x)=x^{2/3}e^{x}\neq\begin{cases}y(x)\\-y(x)\end{cases}\Rightarrow$ функція ні парна ні непарна.

3) Функція неперіодична.

4) Функції $g(x)=x^{2/3}$ і $h(x)=e^{-x}=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{x}$ є неперервними на $\mathbb{R}$, тому дана функція є неперервною на $\mathbb{R}$ як добуток двох неперервних функцій.

5) Оскільки функція неперервна на $\mathbb{R}$, то вона не має вертикальних асимптот. Знайдемо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2/3}e^{-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}x^{1/3}}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}x^{2/3}e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2/3}}{e^{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}}{e^{x}}==\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}x^{1/3}}=0$$

,

тому $y=0-$ горизонтальна асимптота на $+\infty$.

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{2/3}e^{-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^{1/3}}=\left[\frac{e^{+\infty}}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{-x}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}=$$

$$=-3\lim_{x\to+\infty}x^{2/3}e^{-x}=[\infty e^{+\infty}]=\infty,$$

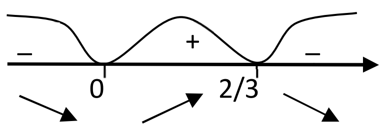
тому на $-\infty$ горизонтальних асимптот немає.

6) Для дослідження функції на монотонність і пошуку її точок екстремуму знайдемо першу похідну:

$$y'=\frac{2}{3}x^{-1/3}e^{-x}-x^{2/3}e^{-x}=x^{-1/3}e^{-x}\left(\frac{2}{3}-x\right).$$

Знайдемо критичні точки, тобто точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2/3 \\ x = 0 \end{array}\right. .$$

Знаки y':	
Характерні точки	
Напрямки монотонності, loc extr	
Значення функції в точках loc extr	0 $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-2/3} \approx 0,39$

7) Для дослідження функції на опуклість і пошуку її точок перегину знайдемо другу похідну:

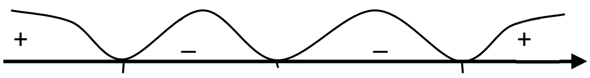
$$y'' = \left(\frac{2}{3}x^{-1/3}e^{-x} - x^{2/3}e^{-x}\right)' = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}x^{-4/3}e^{-x} - \frac{2}{3}x^{-1/3}e^{-x} - \frac{2}{3}x^{-1/3}e^{-x} + x^{2/3}e^{-x} =$$

$$= \frac{e^{-x}}{9x^{4/3}}(-2 - 12x + 9x^2)..$$

Знайдемо точки, «підозрілі» на перегин:

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2 \pm \sqrt{6}}{3} \\ x = 0 \end{array}\right. .$$

Знаки y'':	

Характерні точки	
Напрямки опуклості, т. перегину	$\cup$ $\frac{2-\sqrt{3}}{3}\approx$ $\approx -0{,}15$ $\cap$ 0 $\cap$ $\frac{2+\sqrt{3}}{3}\approx$ $\approx 1{,}48$ $\cup$
Значення функції в точках перегину	$\approx 0{,}34$ $\approx 0{,}30$

8) Точки перетину з осями: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.

Точка мінімуму O$\left(0;0\right)$, точка максимуму A$\left(\dfrac{2}{3};\sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}e^{-2/3}\right)$, точка перегину

B$\left(\dfrac{2-\sqrt{6}}{3};0{,}34\right)$, точка перегину C$\left(\dfrac{2+\sqrt{6}}{3};0{,}30\right)$.

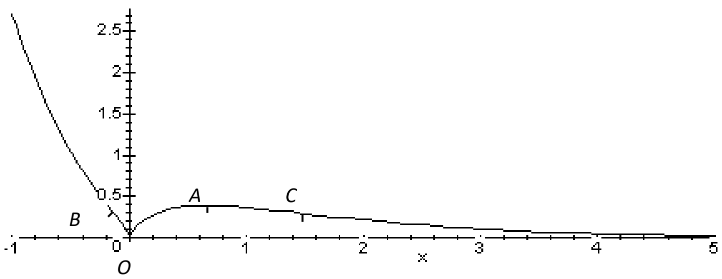


Рис. 1. Графік функції $y=x^{2/3}e^{-x}$.

б) Розглянемо функцію $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}-x$.

1) $D(f)=\mathbb{R}$, оскільки

$$-1\le\frac{2x}{1+x^2}\le 1\Leftrightarrow -(1+x^2)\le 2x\le 1+x^2\Leftrightarrow\begin{cases}2x\le 1+x^2\\ -(1+x^2)\le 2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-x)^2\ge 0\\ (1+x)^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}.$$

2) $f(-x)=\arcsin\dfrac{-2x}{1+(-x)^2}-(-x)=-\left(\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}-x\right)=f(-x)\Rightarrow$ функція непарна, тому її графік є симетричним відносно точки O(0,0).

3) Функція неперіодична.

4) Неперервність даної функції:

- $t=g(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ неперервна на $\mathbb{R}$ як частка двох многочленів зі знаменником, що не дорівнює нулю на $\mathbb{R}$, значення функції $g(x)$ – це $t\in[-1;1]$, як було зазначено в п. 1);
- $h(t)=\arcsin t$ неперервна при $t\in[-1;1]$,
- функція $f_1(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=h(g(x))$ є неперервною на $\mathbb{R}$ як складена функція;
- лінійна функція $f_2(x)=x$ – неперервна.

Отже, дана функція $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}-x=f_1(x)+f_2(x)$ є неперервною як сума двох неперервних функцій.

5) Оскільки функція неперервна на $\mathbb{R}$, то вона не має вертикальних асимптот. Знайдемо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-x-(-x)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=0,$$

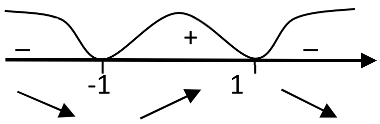
тому $y=-x$ – похила асимптота на $\pm\infty$.

6) Напрямки монотонності і точки екстремуму.

$$y'=\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}-1=$$

$$=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|}=\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}.$$

Критичні точки: $y'=0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$; $\nexists y'(x) \Leftrightarrow x=\pm 1$.

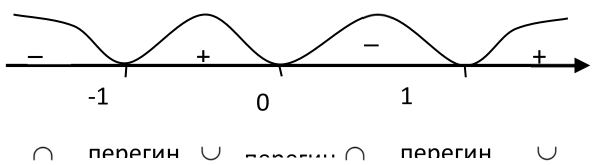
Знаки y':	
Характерні точки	
Напрямки монотонності, loc extr	
Значення функції в точках loc extr	$-\frac{\pi}{2}+1$ $\frac{\pi}{2}-1$

7) Опуклість і точки перегину функції:

$$y''=\left(\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}\right)'=2\operatorname{sgn}(1-x^2)\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'=2\operatorname{sgn}(1-x^2)\cdot\frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Знайдемо точки, «підозрілі» на перегин:

$y''=0 \Leftrightarrow x=0$; $\nexists y''(x) \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Знаки y'':	
Характерні точки	
Напрямки опуклості, точки перегину	
Значення функції в точках перегину	$-\frac{\pi}{2}+1$ 0 $\frac{\pi}{2}-1$

8) Точка перетину з осями: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$; інші точки перетину з віссю абсцис можна знайти лише наближеними методами, а у даному випадку у цьому немає особливої потреби.

Характерні точки:

точка мінімуму A(-1; $-\dfrac{\pi}{2}+1$), точка максимуму B(1; $\dfrac{\pi}{2}-1$), точка перегину $\mathrm{O}(0;0)$. Точки екстремуму <u>піковидні.</u>

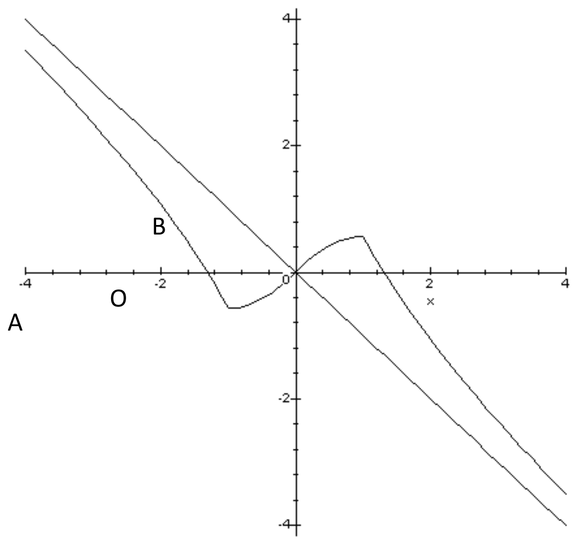


Рис. 2. Графік функції $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}-x$.

в) Для функції $y=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ маємо

1) $D(y)=\mathbb{R}$.

2) $y(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)}=-y(x)\Rightarrow$ функція непарна, тому її графік є симетричним відносно точки O(0,0).

3) Функція періодична з періодом 2π, що відповідає найбільшому серед періодів тригонометричних функцій, через які виражена функція.

4) Функції $g(x)=\sin x$ і $h(x)=2+\cos x$ є неперервними на $\mathbb{R}$, тому дана функція є неперервною на $D(y)=\mathbb{R}$, як частка двох неперервних функцій.

5) Оскільки функція неперервна на $\mathbb{R}$, то вона не має вертикальних асимптот. Періодичні функції не мають похилих і горизонтальних асимптот.

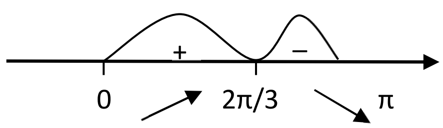
6) Інтервали монотонності і точки екстремуму функції.

$$y' = \left(\frac{\sin x}{2+\cos x}\right)' = \frac{\cos x(2+\cos x)+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}.$$

Критичні точки:

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Знаки похідної достатньо визначати на будь-якому відрізку довжини періоду, а з урахуванням непарності функції можна обмежитися лише відрізком $[0, \pi]$.

<table>
<tr><td>Знаки y' :</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>Характерні точки</td></tr>
<tr><td>Напрямки монотонності, loc extr</td></tr>
<tr><td>Значення функції в точках loc extr</td><td>$\sqrt{3}/3 \approx 0,57$</td></tr>
</table>

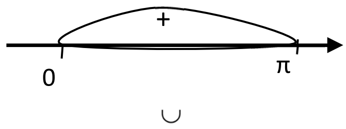
7) Опуклість і точок перегину функції.

$$y'' = \left(\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}\right)' = \frac{-2\sin x(2+\cos x)^2 + 2(2+\cos x)\sin x(2\cos x+1)}{2+\cos x)^4} =$$

$$= \frac{2\sin x(2+\cos x)(-1+\cos x)}{2+\cos x)^4} = \frac{2\sin x(-1+\cos x)}{2+\cos x)^3}.$$

Знайдемо точки, «підозрілі» на перегин:

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi n\\ x = -\pi + 2\pi m\end{array}\right.,\ n, m \in \mathbb{Z}.$$

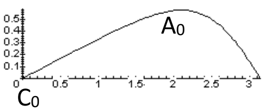
<table>
<tr><td>Знаки y'' :</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>Характерні точки</td></tr>
<tr><td>Напрямки опуклості, точки перегину</td></tr>
<tr><td>Значення функції в точках перегину</td><td>0 0</td></tr>
</table>

Внаслідок непарності і періодичності функції точки $x=0$ і $x=\pi$ будуть її перегинами.

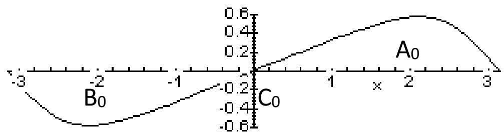
8) Точки перетину з осями: $\begin{cases} x=\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ y=0 \end{cases}.$

Точки максимуму $A_n\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{\sqrt{3}}{3}\right), n\in\mathbb{Z}$ $B_n\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right), n\in\mathbb{Z}$ – точки мінімуму, точки перегину $C_{2n}(2\pi n,0)$, $C_{2n+1}(\pi+2\pi n,0)$.

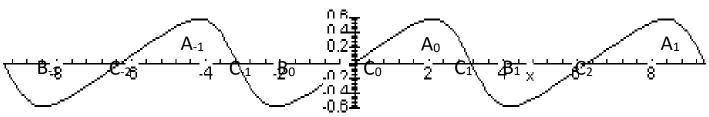
9) Графік функції спочатку будуємо на відрізку $[0,\pi]$, потім продовжуємо його за непарністю симетрично відносно точки O(0,0) на відрізок $[-\pi,0]$, отримуючи графік на відрізку $[-\pi,\pi]$. Продовжуємо отриманий графік за періодом на $\mathbb{R}$.



а



б



в

Рис.3. Графік функції $y=\frac{\sin x}{2+\cos x}$.

г) Розглянемо функцію $y=\frac{x}{2}-arctg\,x$.

1) $D(y)=\mathbb{R}$. 2) $y(-x)=\frac{-x}{2}+arctg\,x=-y(x)\Rightarrow$ функція непарна, тому її графік є симетричним відносно точки O(0,0).

3) Функція неперіодична.

4) Дана функція є неперервною на $\mathbb{R}$ як різниця двох неперервних на $\mathbb{R}$ функцій.

5) Функція не має вертикальних асимптот.

Похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{\overbrace{arctg\,x}^{\to\frac{\pi}{2}}}{\underbrace{x}_{\to+\infty}}\right)=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2}-arctg\,x-\frac{1}{2}x\right)=-\lim_{x\to+\infty}arctg\,x=-\frac{\pi}{2},$$

тому $y=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{2}$ – горизонтальна асимптота на $+\infty$;

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{\overbrace{arctg\,x}^{\to-\frac{\pi}{2}}}{\underbrace{x}_{\to-\infty}}\right)=\frac{1}{2},$$

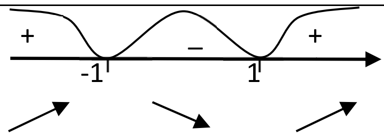
$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{2}-arctg\,x-\frac{1}{2}x\right)=-\lim_{x\to-\infty}arctg\,x=\frac{\pi}{2},$$

тому $y=\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}$ – горизонтальна асимптота на $-\infty$.

6) Інтервали монотонності і точки екстремуму функції.

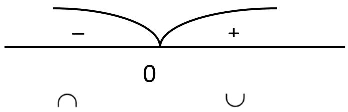
$y'=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2-1}{2(1+x^2)}$; $\qquad y'=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Знаки y':	
Характерні точки	

Напрямки монотонності, loc extr	
Значення функції в точках loc extr	$-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$

7) Опуклість і точки перегину функції.

$$y''=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x^2}\right)'=\frac{2x}{(1+x^2)^2}; \quad y''=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Знаки y'':	
Характерні точки	
Напрямки опуклості, точки перегину	
Значення функції в точках перегину	0

8) Точка перетину з осями: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$; інші точки перетину з віссю абсцис шукати не будемо.

Точка мінімуму А$\left(1;\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$, точка максимуму В$\left(-1;-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$, точка перегину О(0,0).

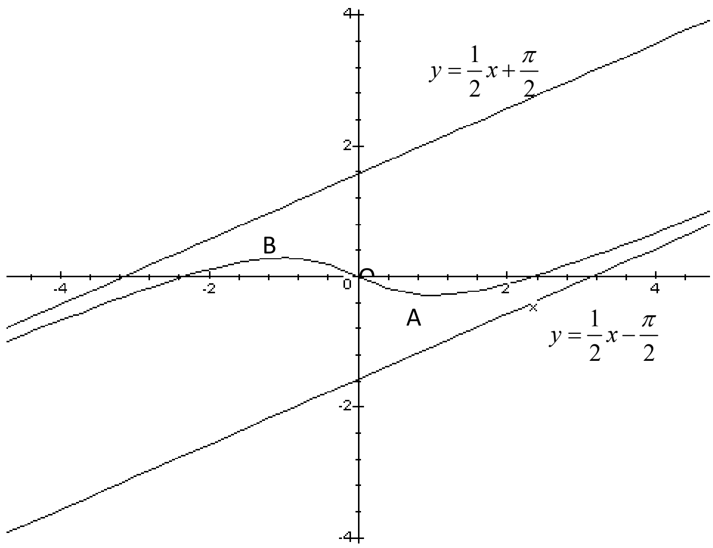


Рис. 4. Графік функції $y=\dfrac{x}{2}-arctg\,x$.