

2. ОТКАЗЫ ПО ПАРАМЕТРАМ ПРОЧНОСТИ

2.1. Отказы по параметрам статической прочности

Прочность – свойство материала (в определенных условиях и пределах) сопротивляться разрушению, а также изменению формы под действием внешних или внутренних сил. [Кубарев, с. 67]. Параметрами прочности являются пределы прочности, пропорциональности, текучести, ползучести, выносливости и др. Деформация – это изменение формы или размеров детали или ее части под действием внешних сил, нагревания или охлаждения, изменения влажности. Различают два вида деформации: упругую, исчезающую после устранения воздействий ее вызвавших, и пластическую, остающуюся после удаления нагрузки. Под влиянием деформации может происходить сжатие и растяжение, кручение, сдвиг и другие виды деформации. Основными параметрами деформации являются относительное удлинение и сужение.

Для машин и инструментов наиболее частыми видами отказов являются:

- хрупкое разрушение;
- пластическая деформация;
- ползучесть;
- усталость материалов;
- изнашивание;
- коррозия металлов;
- старение материалов.

Анализ причин отказов следует начинать всегда с учета вида нагрузок, длительности их воздействия и закономерностей изменения во времени.

Отказы по параметрам прочности чаще всего связаны с изломом детали, которые бывают хрупкие и вязкие.

Под **хрупким изломом** понимают излом без признаков пластических деформаций. Такой вид излома возникает при разрушении в условно упругой зоне деформирования. Хрупкое разрушение происходит, как правило, мгновенно без видимых изменений объекта.

Пластическому или вязкому излому предшествует макроскопическая пластическая деформация, вызванная сдвигом в плоскостях скольжения и по границам зерен.

В зависимости от приложенных нагрузок изломы подразделяются на динамические, усталостные, изломы от превышения предела прочности, изломы при изгибающих и скручивающих нагрузках.

К **динамическим изломам** относятся изломы, происходящие внезапно под действием перегрузок или удара. К **усталостным** относятся изломы под действием переменных нагрузок, когда разрушение происходит после приложения большого числа циклов нагружения.

Изломы, вызванные превышением предела прочности занимают промежуточное положение между динамическими и усталостными. Они характеризуются большой поверхностью окончательного излома, а также наличием на поверхности излома отдельных, проходящих на больших расстояниях линий разгрузки или

уступов. По направлению излома можно судить о том, какая нагрузка вызвала разрушение (перегрузка растяжения, изгибы или кручения).

Наиболее распространенным методом оценки прочности деталей есть сравнение расчетных напряжений, которые возникают при действии эксплуатационных нагрузок, с допустимыми напряжениями для определенного материала детали.

2.2. Расчеты при конструировании

Проектирование и конструирование машин неразрывно связано с расчетами, в результате которых определяются параметры технической характеристики, кинематические параметры, размеры и форма деталей, запасы их прочности, долговечности [Павлище, с.17].

При проектировании производятся геометрические, кинематические, динамические расчеты, расчеты прочности и жесткости, энергетические, технико-экономические расчеты и др.

Для многих случаев исходные данные для расчетов в начальный период проектирования отсутствуют и уточняются только после предварительных расчетов. В таких случаях производятся проектировочные расчеты, а затем проверочные.

Проектировочные расчеты используются для определения исходных данных и выполняются, как правило, по упрощенным методикам. Полученные результаты после корректировки и уточнения являются исходными данными для точных проверочных расчетов, выполняемым по всем критериям работоспособности с максимальным учетом реальных условий функционирования машины и ее составляющих.

Используются чаще всего два метода расчета – проектный и проверочный расчет. **Проектный расчет** выполняется при проектировании машины с целью определения ее размеров. Основанием для такого расчета являются данные о нагрузке и свойства конструкционного материала (прочность материала). Результатом расчета должны быть конструктивные размеры всех элементов деталей, узлов, систем.

При **проверочном расчете** производится расчет машины для проверки или определения норм нагрузки, срока и пр. Исходными данными являются данные о нагрузке, размеры элементов. Итогом расчетов будут данные о величине действующих напряжений, величине жесткости.

2.3. Нагрузки. Общие сведения

Нагрузки, действующие на элементы машины, делятся на полезные и собственные [Павлище, с. 19].

Полезные нагрузки способствуют реализации машинного процесса (сила резания, сила штамповки, вес транспортируемого груза и др.).

Собственные (внутренние, вредные) силы сопровождают работу машины и обусловлены действием внешней среды и внутренним взаимодействием элементов машины (силы веса, силы трения, динамические силы и др.).

По характеру изменения во времени нагрузки делятся на постоянные и переменные.

Постоянные нагрузки – это в большинстве случаев собственный вес, давление газа или жидкости, нагрузки при предварительном нагружении в процессе сборки и др. К постоянным могут относиться полезные силы при относительно длительном периоде их действия, например силы резания, силы при прокатке тонкого листа, вес перемещаемого груза и др.

Переменные нагрузки обусловлены переменностью рабочего процесса в машинах-двигателях, технологического процесса (штамповка, резание), внутренняя динамика работы (разгон, торможение, реверс). Переменные нагрузки могут быть стационарными или нестационарными. Нестационарные нагрузки – это нагрузки с переменными параметрами (частотой и амплитудой).

Практически большинство машин подвержены действию нестационарных переменных нагрузок, особенно машины универсального назначения. Машины с постоянными нагрузками встречаются редко (насосные станции, ленточные транспортеры и др.).

Фактический характер изменения нагрузки в течение определенного периода времени заменяется ступенчатым графиком, показывающим величину фактической нагрузки F_i на протяжении определенного периода работы h_i машины (рис. 2.1, а). Практически все периоды нагружения сводят к нескольким укрупненным периодам длительностью t_i , или действующим на протяжении определенного числа циклов нагружения $n_{ци}$, в течение которых действует нагрузка F_i (рис. 2.1, б).

Если расположить участки по мере убывания нагрузки и рассматривать относительные величины F_i / F , и $n_{ци} / n_{\Sigma}$, получают график типовых нагрузок, показанные на рис. 2.2. Здесь обозначено F – максимальная нагрузка на машину, n_{Σ} – максимальное число циклов нагружения.

На базе статистических данных для большинства технологических и транспортных машин построены графики типовых нагрузок, для которых выделяют:

- P – постоянная нагрузка;
- T – тяжелый режим нагружения;
- CH – средний нормальный режим нагружения;
- CP – средний равновероятностный режим нагружения;
- L – легкий режим нагружения.

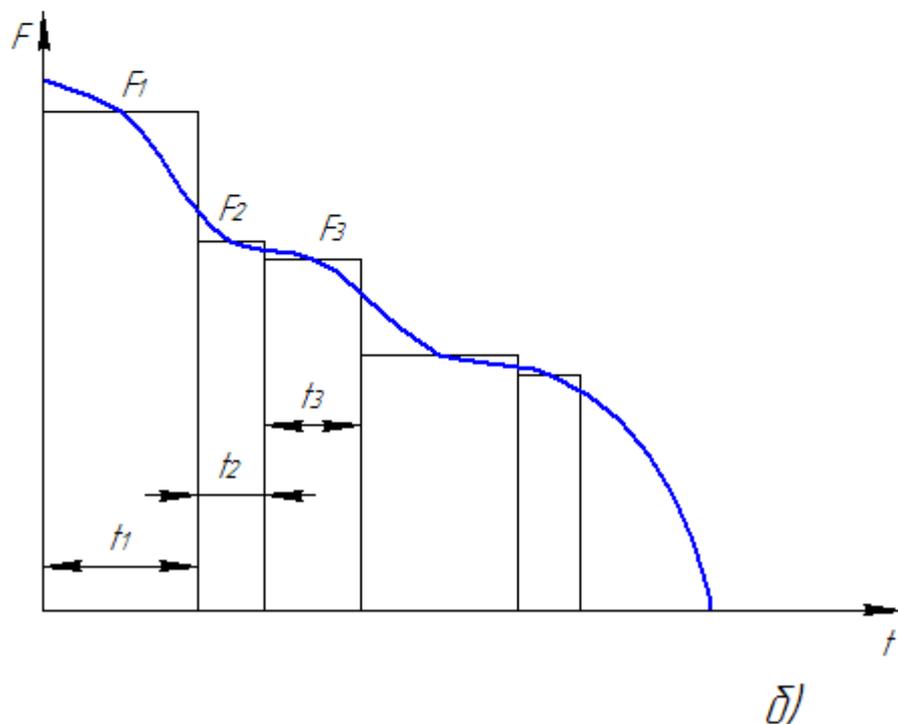
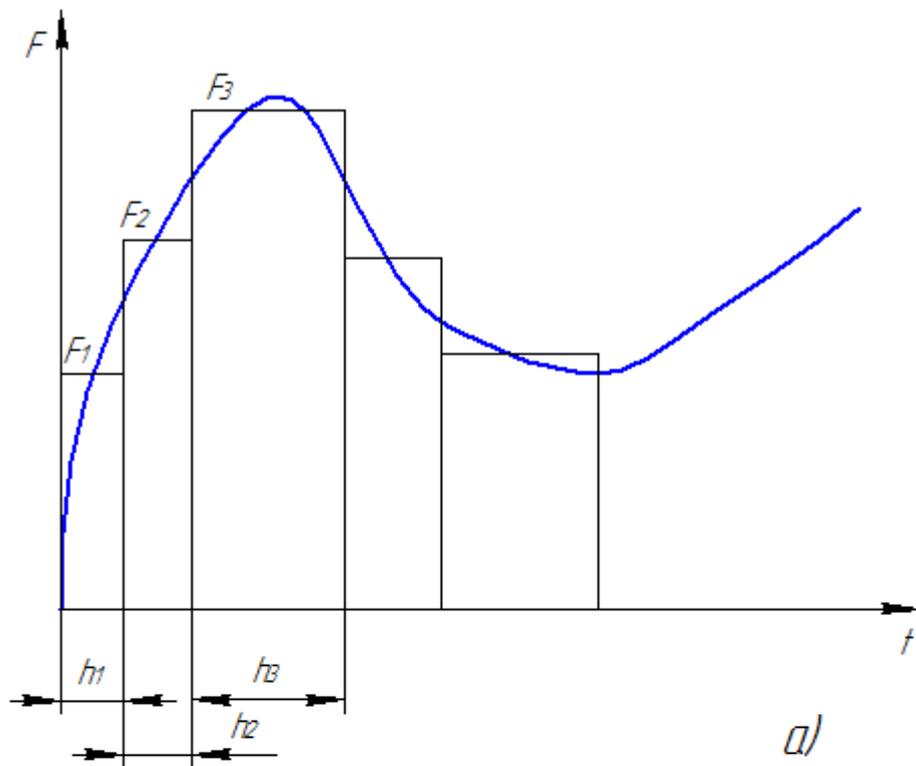


Рис. 2.1 – Циклограмма изменения нагрузки во времени

Тяжелый режим работы T характерен для горных машин; средний равновероятностный CP и средний нормальный CH – для транспортных машин. Металло-режущие станки обычно имеют легкий режим работы L . Подъемно-транспортные и кузнечно-прессовые машины могут иметь режим работы от легкого L до тяжелого T в зависимости от назначения машин.

Постоянный режим нагружения является самым нагруженным, т. к. машина на протяжении всего периода работы подвержена максимальной нагрузке.

Максимальное число циклов нагружения n_{Σ} обычно больше $5 \cdot 10^4$. Если фактическое число циклов n_{Σ} меньше этого значения, производится расчет на статическую прочность.

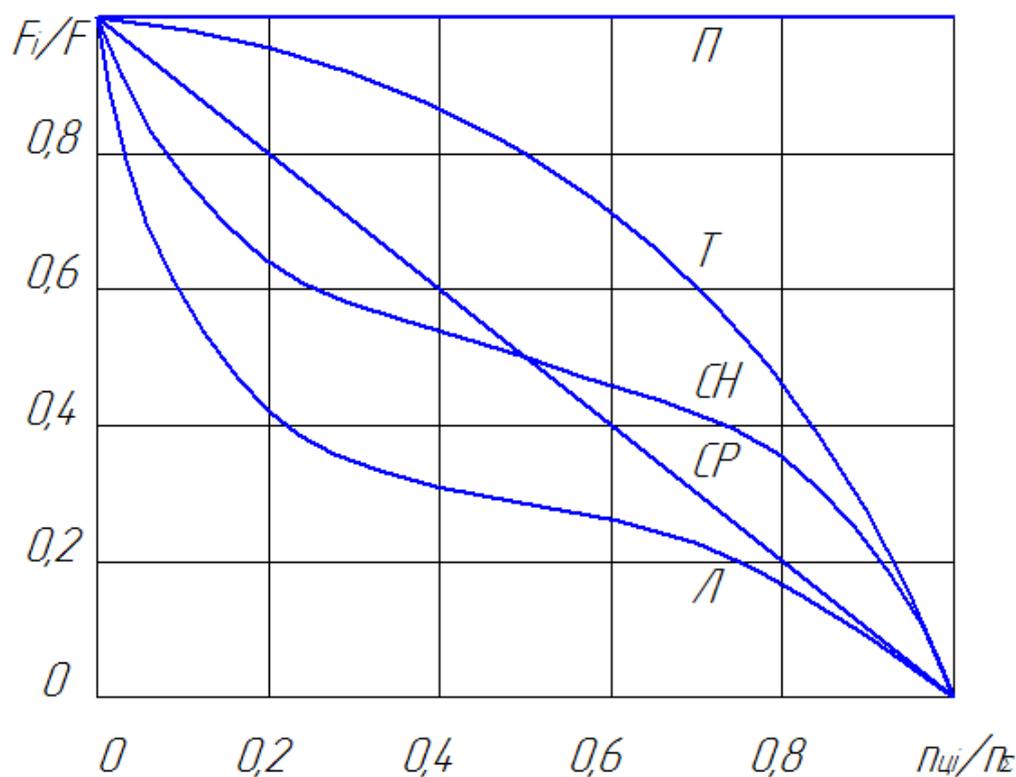


Рис. 2.2 – Графики типовых режимов нагрузки машин

2.4. Напряжения и деформации

При нагрузке деталей внешними силами возникает определенное напряженное и деформированное состояние, характеризующие состояние тела. Числовой мерой, характеризующей закон распределения внутренних сил по какому-то сечению, является напряжение. Полное напряжение может быть разложено на три составляющие по нормали к плоскости сечения и по двум осям в плоскости сечения. Проекция вектора полного напряжения на нормаль обозначается σ и называется нормальным напряжением. Составляющие в плоскости сечения называются касательными и обозначаются τ .

Все существующие в природе материалы не являются абсолютно жесткими и под действием внешних сил в какой-то мере меняют свою форму – деформируются. Различают упругие деформации, исчезающие после прекращения действия вызвавших их внешних сил и остаточные (деформации), не исчезающие после снятия нагрузок.

Вид и величина напряжений и деформаций зависит от способа нагрузки. В сопротивлении материалов различают следующие основные виды деформаций:

- Растяжение и сжатие;
- Сдвиг (срез);
- Кручение;
- Изгиб.

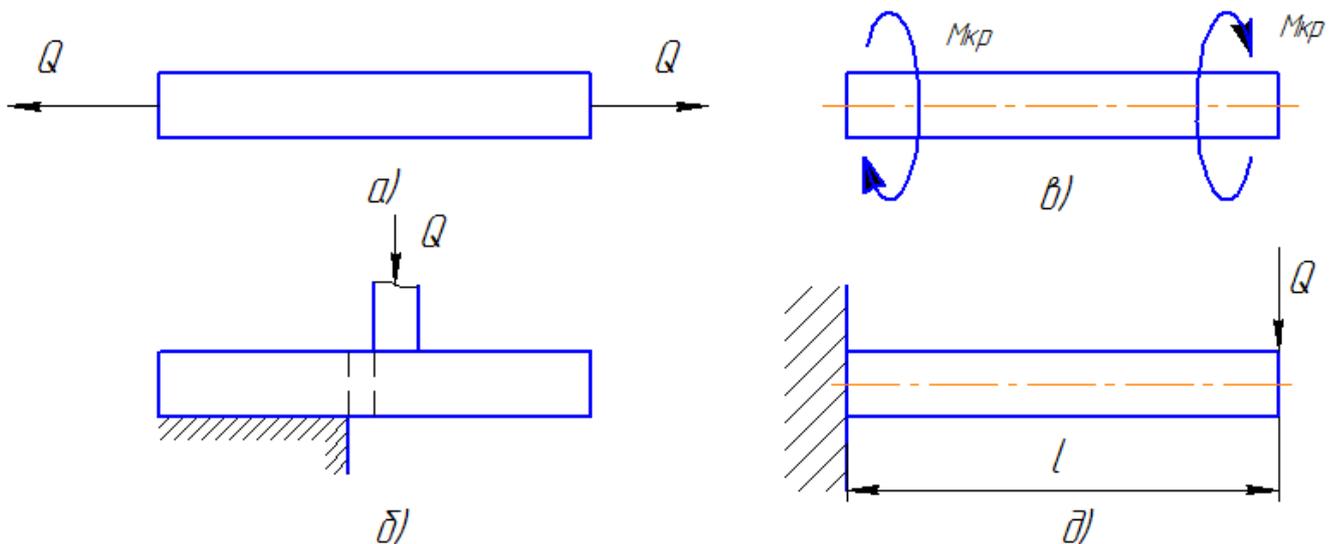


Рисунок 2.1 – Простейшие виды деформаций

Рассматриваются также более сложные деформации, образующиеся в результате сочетания нескольких основных видов деформации.

В международной системе единиц силу измеряют в ньютонах (Н), а напряжение в паскалях или в мегапаскалях ($1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$). В старых системах напряжения измеряют в кг/см^2 или кг/мм^2 ($1 \text{ МПа} = 9,81 \text{ кг/см}^2 = 10 \text{ кг/см}^2 = 0,1 \text{ кг/мм}^2$).

2.5. Оценка прочности деталей

Основной задачей расчета конструкции на прочность является определение ее прочности при заданных размерах и условиях эксплуатации.

Обычно условие прочности сводится к выполнению условия, определяемого схемой напряженного состояния

$$\sigma_p \leq [\sigma_p], \quad \sigma_c \leq [\sigma_c], \quad \tau \leq [\tau]. \quad (888)$$

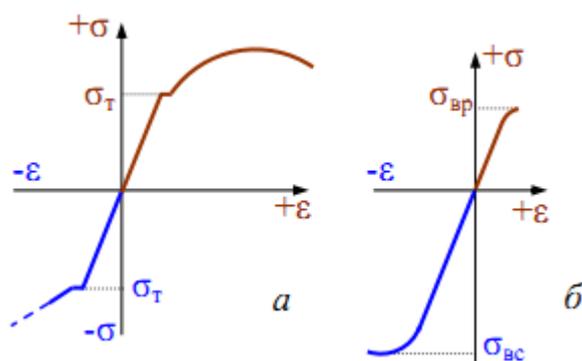
Здесь σ_p , σ_c , τ – соответственно, наибольшее нормальное напряжение на растяжение, на сжатие, касательное напряжение; $[\sigma_p]$, $[\sigma_c]$, $[\tau]$ – соответственно, допускаемые напряжения на растяжение, сжатие и касательное.

Допускаемое напряжение – наибольшее напряжение, которое можно допустить в элементе конструкции при условии его безопасной, долговечной и надежной работы

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{[n]}. \quad (3333)$$

Здесь $\sigma_{пред}$ – предельное напряжение, при котором конструкция перестает удовлетворять эксплуатационным требованиям. Им может быть предел текучести, предел прочности, предел выносливости, предел ползучести и др.

Для конструкций из пластичных материалов используют предел текучести σ_m (рис. аа.ааа). Это обусловлено тем, что после того как напряжение превышает предел текучести резко возрастают пластические деформации при незначительном повышении нагрузки.



Допускаемое напряжение в этом случае определяется как

$$[\sigma] = \frac{\sigma_m}{[n_m]} \quad (777)$$

Для хрупких материалов (чугун, бетон, стекло и др.)

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{вр}}{[n_\sigma]}; \quad [\sigma_c] = \frac{\sigma_{вс}}{[n_\sigma]} \quad (777)$$

где $\sigma_{вр}$, $\sigma_{вс}$ – пределы прочности при растяжении и сжатии (рис. 333);

$[n_m]$ – нормативный коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести σ_m ;

$[n_\sigma]$ – нормативный коэффициент запаса прочности по отношению к пределу прочности σ_σ .

Запас прочности – отношение предельно допустимой теоретической нагрузки к той нагрузке, при которой возможна безопасная работа конструкции с учетом случайных перегрузок, непредвиденных дефектов и недостоверности исходных данных для теоретических расчетов.

Нормативные коэффициенты запаса прочности зависят от:

- Класса конструкции (капитальная, временная);
- Намечаемого срока эксплуатации;
- Условий эксплуатации;
- Вида нагружения (статическое, циклическое, ударные нагрузки);
- Неточности заданий величины внешних нагрузок;
- Неточности расчетных схем и приближенных методов расчета и др.

Нормативный коэффициент запаса прочности не может быть единым на все случаи нагружения конструкций. В каждой отрасли промышленности сложились свои методы проектирования и приемы технологии. Нормативный коэффициент запаса прочности в зависимости от указанных факторов принимается равным от 1,3 до 3...5.

Основные характеристики прочности и пластичности материалов определяют экспериментальным путем. Для этой цели проводятся лабораторные испытания материалов на растяжение, сжатие, срез, кручение, изгиб при статическом и циклическом нагружении. Наиболее распространенным и универсальным является испытание на растяжение.

Методика испытаний, форма и размеры образцов при растяжении определяются стандартом. Информация о механических свойствах следует из машинной

диаграммы, которая автоматически записывает кривую изменения усилия в функции удлинения образца (рис. 555).

Диаграмма растяжения пластичных материалов (рис. а) имеет несколько характерных участков: 1 – участок упругих деформаций; 2 – участок текучести; 3 – участок упрочнения; 4 – участок образования шейки и разрушения. диаграммы разрушения большинства других конструкционных материалов (с небольшой пластичностью) площадки текучести не имеют.

По результатам испытаний определяются основные характеристики прочности материала.

Предел текучести σ_m – напряжение, при котором образец деформируется при практически постоянной нагрузке (рис. кп, а).

Предел текучести условный $\sigma_{0,2}$ – напряжение, при котором остаточное удлинение достигает 0,2 % расчетной длины образца (рис. кп, б).

Временное сопротивление (предел прочности) σ_σ – напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению образца.

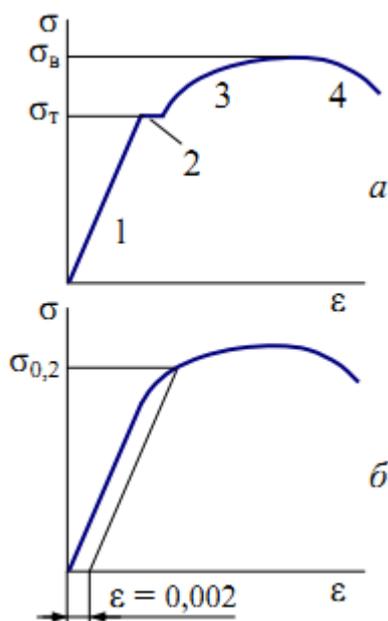


Рисунок 555 – типовые диаграммы растяжения пластичных и хрупких материалов

Для оценки прочности конструкций в случаях различного напряженного состояния используют некоторые эквивалентные значения напряжений, определенные на основе какой то теории прочности.

Суть теорий прочности состоит в том, что, определив главную причину разрушения материала (преимущественное влияние того или иного фактора) можно подобрать соответствующее эквивалентное напряжение при сложном напряженном состоянии, а затем сопоставить его с простым одноосным растяжением.

Создано более 20 теорий, позволяющих определить вид функциональных зависимостей, представляющих сложное напряженное состояние эквивалентному ему одноосным напряженным состоянием. В качестве причин наступления опасного состояния считают: а) нормальные напряжения – разрушение хрупкое, путем

отрыва; б) линейные деформации; в) касательные напряжения – разрушение пластичное, путем сдвига; г) энергия деформации и др.

Следует отметить, что опасное состояние как для пластичных материалов (момент появления больших остаточных деформаций) так и для хрупких (момент появления трещин) лежит на границе области упругого деформирования. Это позволяет при всех дальнейших вычислениях, относящихся к проверке прочности, пользоваться формулами, выведенными при условии применимости закона Гука.

Поскольку свойства материалов известны только для простейших напряженно-деформированных состояний то для практических задач используют следствия так называемых теорий прочности.

Теорией прочности (теорией предельных состояний) называется аксиоматическое задание критерия эквивалентности пространственного и одноосного напряженных состояний с нормальным напряжением

$$\sigma_{экр} = \sigma_{экр}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), (888)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения данного напряженного состояния.

Так как однозначной зависимости (888) не может существовать, используют несколько теорий прочности.

1. Теория наибольших нормальных напряжений (теория Галилея, первая теория прочности) – прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если максимальное напряжение не превзойдет допускаемого, определенного при простом растяжении

$$\sigma_{экр} = \sigma_1 \leq [\sigma]. (777)$$

Здесь $[\sigma]$ – допускаемое напряжение при растяжении (см. далее).

Но $\sigma_1 = \tau$, следовательно $[\tau] = [\sigma]$.

Первая теория прочности не учитывает пластической деформации и применяется для хрупких материалов при $\sigma_3 \geq 0$.

2. Гипотеза наибольших линейных деформаций (вторая теория прочности) предложена Э. Мариоттом (1682) и развита Б. Сен-Венаном (XIX). Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если наибольшее относительное удлинение не превзойдет допускаемого, определенного при простом растяжении

$$\varepsilon_{\max} \leq [\varepsilon] (888)$$

Решая совместно уравнения закона Гука для объемного и линейного напряженного состояния, взаимосвязи находят

$$\sigma_{экр} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. (888)$$

Вторая гипотеза экспериментально проверена недостаточно, поэтому в расчетах используется редко.

3. Гипотеза наибольших касательных напряжений (третья теория прочности) предложена Ш. Кулоном (1773 г.), развита Б. Сен-Венаном (1871). Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если наибольшее касательное напряжение не превзойдет допускаемого, определенного при простом растяжении

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. (9999)$$

После решения уравнений объемного и плоского напряжения находят

$$\sigma_{экр} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. (99)$$

Гипотеза хорошо согласуется для пластичных материалов.

4. Гипотеза удельной потенциальной энергии формоизменения – энергетическая теория прочности (четвертая теория прочности). Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если удельная потенциальная энергия деформации, идущая на изменение формы, не произойдет допустимого значения, определенного при простом растяжении

$$u_{\phi} \leq [u]. \text{(ppp)}$$

После совместного решения уравнений находят

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]. \text{(9876543)}$$

При работе деталей из пластичных материалов на срез $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$, тогда

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{1}{2}[\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}[\tau^2 + \tau^2 + 4\tau^2]} = \tau\sqrt{3} \leq [\sigma].$$

Отсюда следует

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = 0,577[\sigma]. \text{(222)}$$

При одновременном действии напряжений изгиба, растяжения и кручения на основе гипотезы наибольших касательных напряжений определяется эквивалентное напряжение в виде

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{(\sigma_u + \sigma_p)^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \text{(2.9)}$$

Из условия прочности вытекают три вида задач расчетов при конструировании.

а) проектировочный расчет (подбор размеров сечения). Известны величина нагрузки F и допустимое напряжение конструкционного материала $[\sigma]$. Требуется определить размеры детали, например, площадь поперечного сечения S .

$$S = \frac{F}{[\sigma]}.$$

б) проверочный (проверка прочности). Известны усилие F и площадь поперечного сечения S детали. Вычисляют величину напряжения $\sigma = F/S$ и сравнивая его с предельным σ_m или σ_e (для пластичного и хрупкого материалов соответственно), находят фактический коэффициент запаса прочности

$$n_m = \frac{\sigma_m}{\sigma}, \quad n_e = \frac{\sigma_e}{\sigma},$$

который затем сопоставляют с нормативным $[n]$.

в) определение несущей способности. Известны размеры поперечного сечения детали (площадь S) и допустимое напряжение материала $[\sigma]$. Требуется определить максимально допустимую нагрузку F , которую способна выдержать деталь без разрушения.

$$F = S \cdot [\sigma].$$

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЙ

Распределение внутренних напряжений в детали в зависимости от напряженного состояния не является равномерным во всех точках сечения и зависит как от внешней нагрузки, площади поперечного сечения и его формы. Например, при растяжении напряжения не зависят от формы сечения, при изгибе и кручении зависят от формы сечения и его размеров, а при изгибе еще и от ориентации сечения относительно нагрузки.

Таким образом, при анализе напряженного состояния используют несколько геометрических характеристик поперечных сечений:

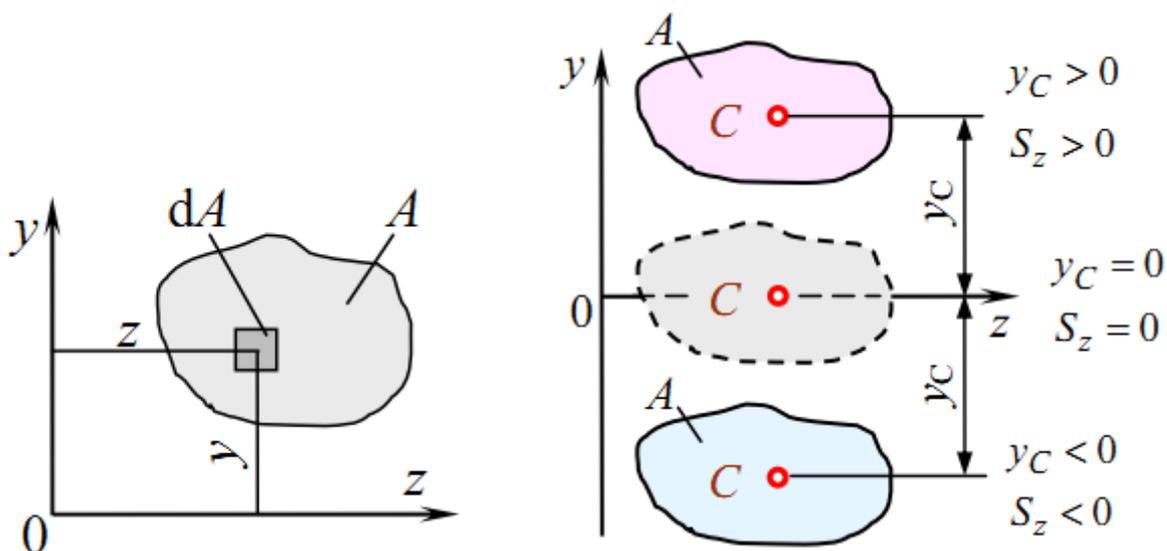
- Статический момент площади;
- Момент инерции;
- Радиус инерции;
- Момент сопротивления.

У большинства характеристик физического смысла нет, но есть геометрическая интерпретация и аналогия с физическими и механическими понятиями.

3.1. Статический момент площади сечения

Статический момент площади – распространенная на всю площадь сумма произведений элементарных площадок dA на расстояние от них до этой оси (рис. 4534)

$$S_z = \int_A y \cdot dA, \quad S_y = \int_A z \cdot dA. (33)$$



Это понятие аналогично моменту силы относительно оси. Если предположить, что A – вес пластины, имеющей форму рассматриваемого сечения, то статический момент S_z – это момент силы тяжести пластины относительно оси z . размерность момента – длина в третьей степени (см^3 , м^3). Момент имеет знаки плюс, минус и может быть равным нулю.

Для сечения различают понятия (рис. щогк):

- Ось центральная – ось, относительно которой статический момент площади равен нулю (ось z);
- Центр тяжести сечения – точка пересечения центральных осей (точка C).

Если фигура имеет ось симметрии, то эта ось является центральной.

Статический момент составного сечения равен сумме статических моментов элементов этого сечения. Это следует из свойства определенного интеграла, который можно вычислить по частям – свойство аддитивности (от англ. add – прибавлять, присоединять, складывать). При известных статических моментах частей сечения можно найти координаты центра тяжести составной фигуры:

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{z_1 \cdot A_1 + z_2 \cdot A_2 + \dots + z_n \cdot A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}; \quad y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + \dots + y_n \cdot A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}$$

Пример 3.1. Определить положение центральных осей y_c и z_c , параллельных основанию и высоте фигуры, показанной на рис. бее.

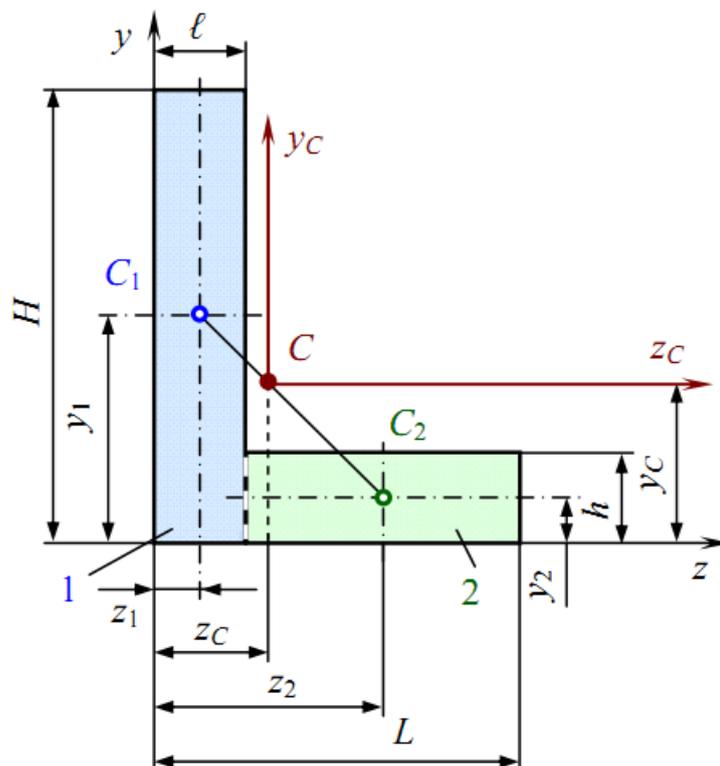


Рисунок иторр – Определение положений центральных осей

Разбиваем фигуру на две простые, в данном случае на два прямоугольника. Их центры тяжести расположены посередине высоты и посередине ширины.

Размеры элементов равны (см): $H = 10$ см; $h = 2$ см; $L = 8$; $l = 2$.

Координаты центров тяжести и площади простых фигур

$$z_1 = \frac{l}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ см}; \quad z_2 = l + \frac{L-l}{2} = 2 + \frac{8-2}{2} = 5 \text{ см};$$

$$y_1 = \frac{H}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ см}; \quad y_2 = \frac{h}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ см};$$

$$A_1 = l \cdot H = 2 \cdot 10 = 20 \text{ см}; \quad A_2 = (L-l)h = (8-2)2 = 12 \text{ см}.$$

Статические моменты площадей простых фигур

$$S_{z1} = y_1 \cdot A_1 = 5 \cdot 20 = 100 \text{ см}^3; \quad S_{y1} = z_1 \cdot A_1 = 1 \cdot 20 = 20 \text{ см}^3;$$

$$S_{z2} = y_2 \cdot A_2 = 1 \cdot 12 = 12 \text{ см}^3; \quad S_{y21} = z_2 \cdot A_2 = 5 \cdot 12 = 60 \text{ см}^3;$$

Статические моменты составной фигуры

$$S_z = S_{z1} + S_{z2} = 100 + 12 = 112 \text{ см}^3; \quad S_y = S_{y1} + S_{y2} = 20 + 60 = 80 \text{ см}^3.$$

Координаты центра тяжести составной фигуры

$$z_c = \frac{S_y}{A_1 + A_2} = \frac{80}{20 + 12} = 2,5 \text{ см}; \quad y_c = \frac{S_z}{A_1 + A_2} = \frac{112}{20 + 12} = 3,5 \text{ см}.$$

Через найденную точку проводим центральные оси z_c и y_c , параллельные основанию фигуры и ее высоте.

Примечание – центр тяжести фигуры, составленной из двух частей, лежит на линии, соединяющей центры тяжести простых составляющих фигур, причем расстояния до них обратно пропорциональны площадям простых фигур. Если сложная фигура составлена из нескольких фигур, то общий центр находится внутри многоугольника, вершинами которого являются центры тяжести простых фигур.

3.2. Момент инерции сечения

Момент инерции – распространенная на всю площадь сумма произведений элементарных площадок dA на квадрат расстояний от них до рассматриваемой оси (рис. ое8е8).

Различают:

- Осевой момент инерции;
- Полярный момент инерции;
- Центробежный момент инерции.

3.3. Осевые моменты инерции

$$J_z = \int_A y^2 \cdot dA; \quad J_y = \int_A z^2 \cdot dA. (\text{ppp})$$

3.4. Полярный момент инерции

$$J_p = \int_A \rho^2 \cdot dA, (\text{пак})$$

где ρ – расстояние от площадки dA до точки (полюса), относительно которого вычисляется полярный момент инерции.

Полярный момент инерции связан с осевыми моментами инерции

$$J_p = \int_A (z^2 + y^2) \cdot dA = \int_A (z_1^2 + y_1^2) dA,$$

т. е. для любой пары взаимно перпендикулярных осей, проходящих через полюс

$$J_p = J_z + J_y = J_{z1} + J_{y1}. (\text{нн})$$

3.5. Центробежный момент инерции

Центробежный момент инерции определяется интегралом произведений элементарных площадей на расстояния до двух взаимно перпендикулярных осей

$$J_{zy} = \int_A z \cdot y \cdot dA. \text{(ввв)}$$

Размерность моментов инерции – единицы длины в четвертой степени. осевые и полярный момент инерции всегда положительные, центробежный момент может быть положительный, отрицательный и нулевой. Если фигура имеет ось симметрии, то относительно этой оси центробежный момент инерции равен нулю.

Пример 3.2. Найти моменты инерции прямоугольного сечения (рис. елелп) относительно центральных осей, параллельных основанию и высоте.

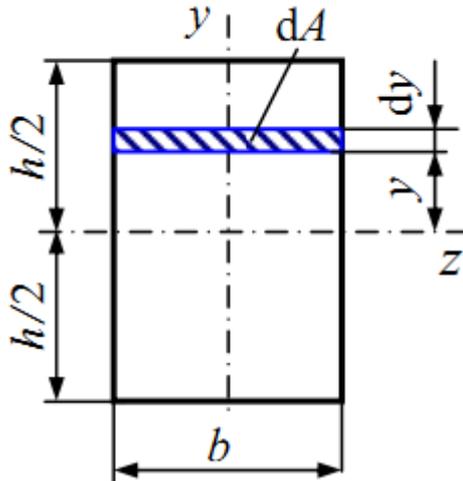


Рисунок грршр – Сечение в форме прямоугольника

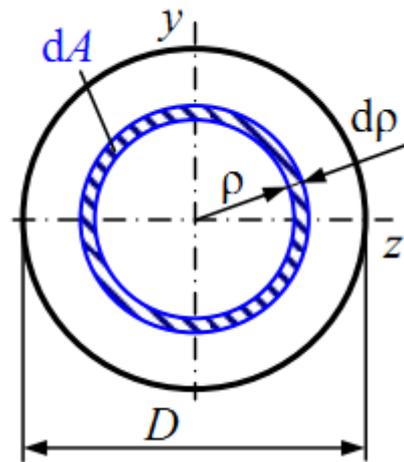


Рисунок орв – Сечение круглой и кольцевой формы

Элементарная площадь равна $dA = b \cdot dy$. Тогда момент инерции относительно оси z будет

$$J_z = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} b \cdot y^2 \cdot dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Аналогичное решение относительно оси y . Таким образом

$$J_z = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad J_b = \frac{h \cdot b^3}{12}. \quad (oo)$$

Пример 3.3. Найти моменты инерции круглого и кольцевого сечений, показанных на рис. пппп.

Площадь элементарного кольца радиусом ρ и толщиной $d\rho$ $dA = 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho$. Полярный момент инерции круга:

$$J_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_0^{D/2} 2\pi \cdot \rho^3 \cdot d\rho = 2\pi \frac{(D/2)^4}{4} = \frac{\pi \cdot D^4}{32}. \quad (oo)$$

Поскольку имеется связь $J_p = J_z + J_y$, а для круга $J_z = J_y$, то $J_z = J_y = \frac{J_p}{2}$.

Таким образом, полярный и осевые моменты инерции круга равны

$$J_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32}; \quad J_z = J_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64}. \quad (\text{орсб})$$

Для кольцевого сечения введем коэффициент пустотелости $c = d/D$. Размер d есть диаметр внутреннего отверстия кольца.

Полярный момент кольца будет

$$J_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} - \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - c^4). \quad (\text{лпн})$$

Осевые моменты кольца равны

$$J_z = J_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64} (1 - c^4). \quad (\text{оооо})$$

3.6. Момент сопротивления

Момент сопротивления – отношение момента инерции к расстоянию до наиболее удаленной точки сечения (рис. 3.ждопвор).

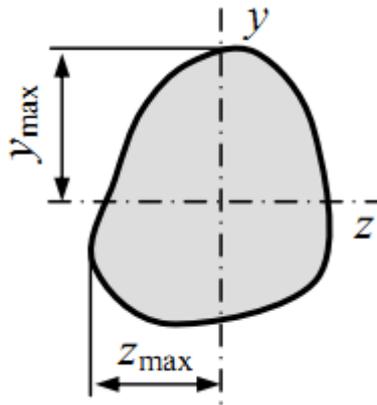


Рисунок 3.аюобощ – Определение момента сопротивления

В расчетах на изгиб используют *осевые моменты сопротивления*

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}; \quad W_y = \frac{J_y}{z_{\max}}. \quad (78г)$$

Например, для прямоугольного сечения

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{2b \cdot h^3}{12h} = \frac{b \cdot h^3}{6}; \quad W_y = \frac{J_y}{z_{\max}} = \frac{2h \cdot b^3}{12b} = \frac{h \cdot b^3}{6}. \quad (\text{рвпр})$$

В расчетах на прочность при кручении сечений круглого профиля используют полярный момент сопротивления

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{\max}}. \quad (\text{ооо})$$

Так, для круга и кольца соответственно

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{\max}} = \frac{\pi D^4}{32} \cdot \frac{2}{D} = \frac{\pi D^3}{16}; \quad W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{\max}} = \frac{\pi D^4}{32} \cdot \frac{2}{D} (1 - c^4) = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4). (\text{рр})$$

Примечание. Для сечений некруглого профиля, например прямоугольного, моменты инерции и моменты сопротивления вычисляют по специальным форму-

лам, включающих высоту и ширину профиля, а также коэффициент, зависящий от отношения высоты к ширине.

4. РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ ПРИ ТИПОВЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

4.1. Растяжение и сжатие

Под действием внешней силы Q , действующей на изделие сечением S в нем возникают определенные напряжения и деформации. В плоских сечениях, удаленных от места приложения внешней силы на расстоянии больше, чем диаметр изделия, напряжение распределяется по сечению практически равномерно.

Напряжение, возникающее в поперечном сечении, определяется по формуле

$$\sigma = \frac{Q}{S}.$$

Величина σ есть нормальное напряжение, действующее в сечении, и представляет собой удельную нагрузку на единицу площади поперечного сечения. Величина напряжения измеряется в Паскалях (Н/м^2).

При растяжении продольные волокна получают относительное удлинение

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0},$$

где Δl – абсолютная величина изменения размера исходной детали;

l_0 – исходный начальный размер детали.

Поперечные размеры уменьшаются и величину $\varepsilon_n = \frac{|d_k - d_0|}{d_0}$ называют поперечной деформацией.

Как показывает опыт между продольной и поперечной деформацией соблюдается отношение

$$\varepsilon_n = \varepsilon \cdot \mu,$$

где μ – безразмерный коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом Пуассона.

Величина μ характеризует свойства материала и определяется экспериментально. Для всех материалов числовое значение μ лежит в пределах 0,25...0,35 и теоретически не может превышать 0,5.

До определенной нагрузки относительное удлинение пропорционально напряжению (закон Гука–1676 г.)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

где E – коэффициент, зависящий от материала и температуры, называемый модулем упругости первого рода. Имеет размерность напряжения.

Модуль упругости является физической константой материала и определяется экспериментальным путем. Для наиболее распространенных материалов модуль упругости имеет следующие значения, МПа:

- Сталь $(2...2,1) \cdot 10^5$
- Медь $(1,2) \cdot 10^5$
- Латунь $(1...1,2) \cdot 10^5$
- Алюминий и его сплавы $(0,7...0,8) \cdot 10^5$
- Дерево (вдоль волокон) $(0,08...0,12) \cdot 10^5$

Экспериментально установлено, что между относительными продольным и поперечным удлинениями существует зависимость

$$\varepsilon_n = -\nu \cdot \varepsilon,$$

где ν – коэффициент поперечного сжатия, т. н. коэффициент Пуассона, зависящий от материала.

При растяжении используются те же зависимости, однако напряжение считается отрицательным. Для большинства материалов (кроме свинца, серого чугуна, дерева, железобетона и др.) модули упругости и коэффициент Пуассона при сжатии и растяжении имеют одинаковые значения.

Из формул следует

$$\Delta l = \frac{Q \cdot l_0}{E \cdot F}. \quad (\text{он}7)$$

Произведение $E \cdot F$ характеризует жесткость сечения изделия при растяжении, величина $\frac{E \cdot F}{l_0}$ – жесткость при растяжении изделия в целом (оно равно силе, вызывающей удлинение, равное единице) чем больше жесткость, тем меньше удлинение.

4.2. Срез и смятие

Деформация сдвига характерна тем, что из всех возможных нагрузок имеет место только одна поперечная сила, создающая в детали касательные напряжения (рис. 333.333). Практически чистая деформация в виде сдвига встречается редко, так как она обычно сопровождается другими деформациями, чаще всего изгибом, что искажает чистую деформацию сдвига. При нагрузке по схеме, показанной на рисунке, предполагая равномерное распределение напряжения по сечению, следует, что максимальное напряжение равно

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{S}. \quad (\text{ро})$$

4.3. Изгиб

Изгиб – вид деформации, при которой происходит искривление оси прямого бруса или изменение кривизны кривого бруса (рис. 3.рпп).

Прямой изгиб (плоский изгиб) – случай изгиба, при котором внешние силы лежат в главной плоскости инерции и являются перпендикулярными к геометрическим осям. Если сечение имеет ось симметрии, то внешние силы располагаются в плоскости симметрии.

Главная плоскость инерции – плоскость, проходящая через геометрическую ось бруса и главную ось инерции.

Чистый изгиб – вид деформации, при которой из шести внутренних усилий не равно нулю одно – изгибающий момент M_z или M_y .

Поперечный изгиб – случай изгиба, при котором в сечении бруса наряду с изгибающим моментом M действует и поперечная сила Q .

Чистый изгиб характерен тем, что деталь нагружается только изгибающим моментом (рис. 44.44). Если кроме изгибающего момента имеют место и поперечные силы, такой изгиб называют поперечным.

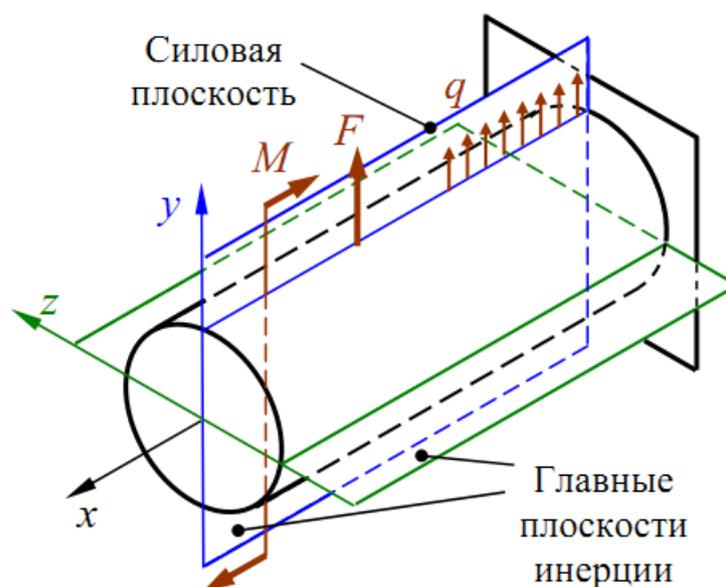


Рисунок иірп – Схема изгиба

В нагруженном состоянии балка прогибается так, что часть волокон укорачивается, другая часть волокон удлиняется. При изгибе всегда наблюдается две зоны, в которых возникают сжимающие и растягивающие напряжения, разделенные т. н. нейтральной линией.

Нейтральный слой – слой волокон, в котором нормальные напряжения отсутствуют. Нейтральный слой разделяет зоны растяжения и сжатия.

Нейтральная ось – след пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения.

Опоры и опорные реакции балок зависят от способу установки балок на опорах. Схемы реальных опорных устройств можно свести к трем типам.

Шарнирно-подвижная опора (рис. 4.ерр) допускает поворот опорного сечения и перемещение его в одном направлении. Опорная реакция перпендикулярна к плоскости опоры катков.

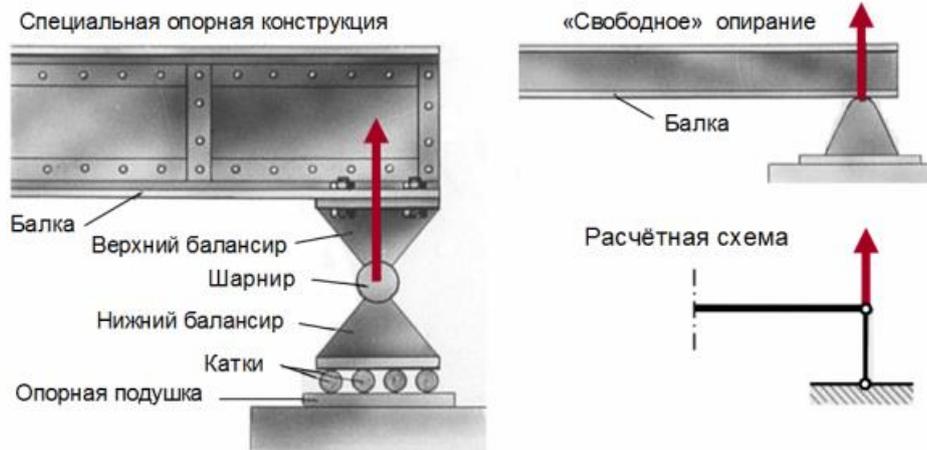


Рисунок ччч – шарнирно-подвижная опора

Шарнирно-неподвижная опора (рис. иии) допускает только поворот опорного сечения балки. Реакция имеет две составляющие: горизонтальную и вертикальную.

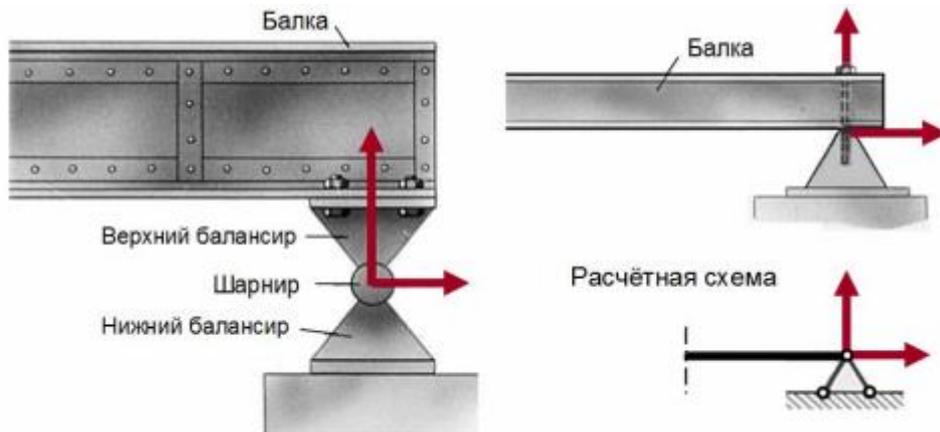


Рисунок аа – Шарнирно-неподвижная опора

Жесткая заделка (защемление) не допускает поворота опорного сечения и любых его перемещений (рис. ррр). Имеет три реакции: горизонтальную, вертикальную составляющие, а также опорный момент.

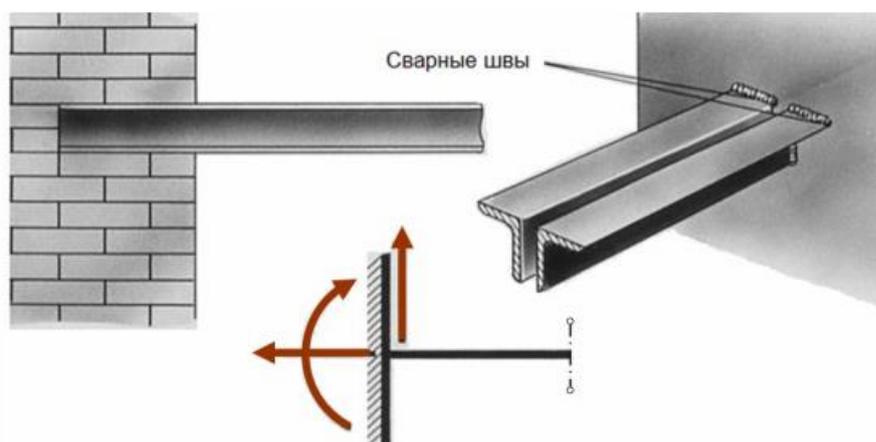


Рисунок аа – Жесткая заделка (защемление)

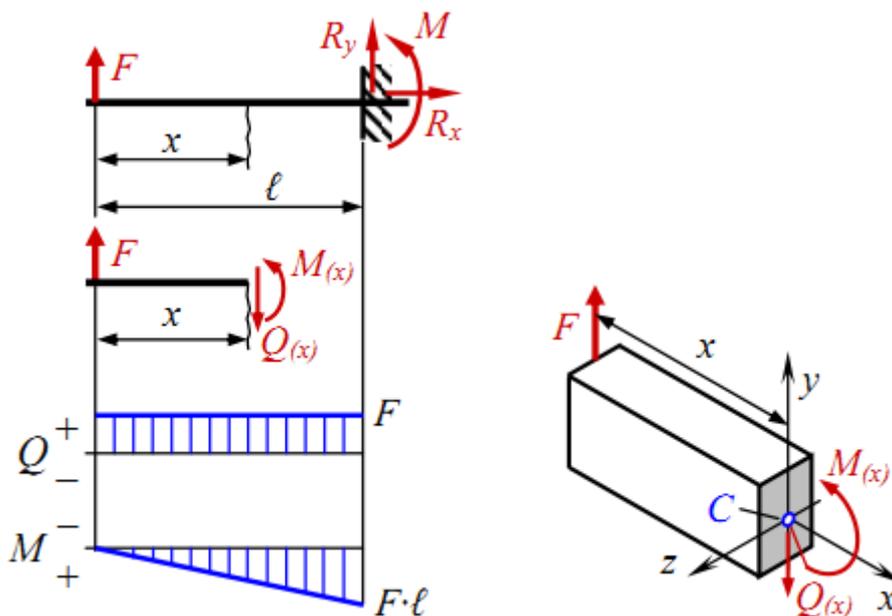
4.3.1. Внутренние усилия при изгибе

Из шести внутренних усилий, действующих в сечении в общем случае, при плоском изгибе только две не равны нулю: сила Q и момент M (обычно индексы опускают).

Принимают, что сила Q в сечении положительна, если ее векторы стремятся вращать части рассеченной балки по ходу часовой стрелки (положительная поперечная сила вызывает положительное касательное напряжение).

Изгибающий момент M в сечении положителен, если он вызывает сжатие верхних волокон и растяжение нижних волокон балки.

Пример 7.1. Определить внутренние усилия в поперечном сечении консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой (рис. 7.пп).



Опора (защемление) накладывает три связи, обуславливающие возникновение трех реакций: вертикальную R_x , горизонтальную R_y и опорный момент M .

В целях упрощения расчета внутренние усилия определяются со стороны свободного конца.

Используется *метод сечений*:

- Рассекается балка на две части;
- Отбрасывается одна из частей;
- Заменяется действие отброшенной части внутренними усилиями в соответствии с установленными правилами знаков;
- Составляются уравнения равновесия, из которых определяются внутренние усилия. Система координат помещена в центр тяжести рассматриваемого сечения.

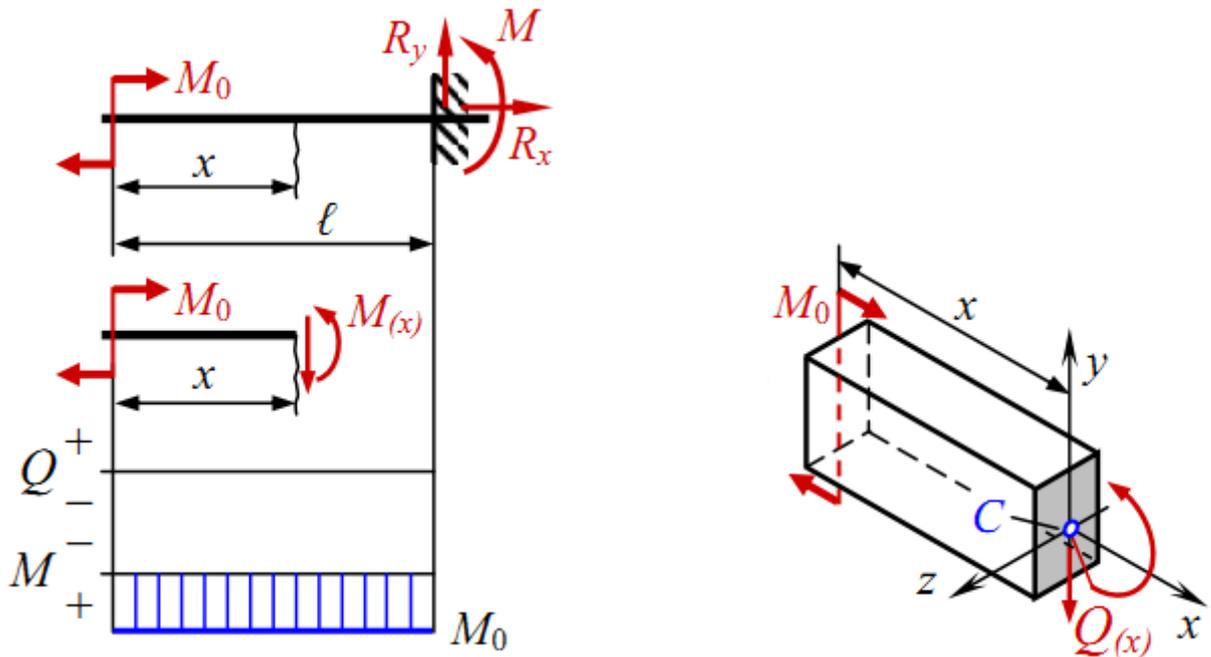
1-й участок: $0 \leq x \leq l$.

$$\sum y = 0; \quad F - Q(x) = 0; \quad \Rightarrow \quad Q(x) = F;$$

$$\sum M_z = 0; \quad -F \cdot x + M(x) = 0; \quad \Rightarrow \quad M(x) = F \cdot x.$$

Таким образом, поперечная сила $Q(x)$ – функция от абсциссы x – величина постоянная.

Пример 7.2. Определить внутренние усилия в поперечном сечении консольной балки, нагруженной сосредоточенным моментом (рис. 7.2).



Внутренние усилия в произвольном сечении участка $0 \leq x \leq l$

$$\sum y = 0; \quad Q(x) = 0;$$

$$\sum M_z = 0; \quad -M_0 + M(x) = 0; \quad \Rightarrow M(x) = M_0.$$

Поперечная сила отсутствует, изгибающий момент – величина постоянная; имеет место чистый изгиб.

4.3.2. Общий подход к определению внутренних усилий при изгибе

В балке бесконечной протяженности начало координат выбирается на левом свободном конце (рис. 7.33). внутренние усилия находим методом сечений.

$$\sum y = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_i + \int_0^x q(x) dx - Q(x) = 0.$$

Отсюда

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n F_i + \int_0^x q(x) dx.$$

Поперечная сила в произвольном сечении равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения.

$$\sum M(x) = 0; \quad \sum_{j=1}^m M_j + \sum_{i=1}^n F_i(x - a_i) + C_q \int_0^x q(x) dx - M(x) = 0.$$

Отсюда

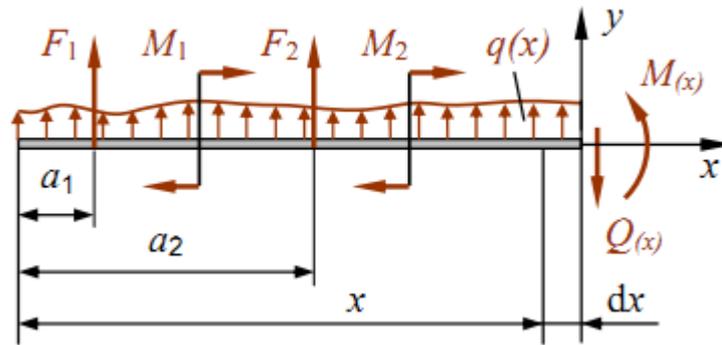


Рисунок 7.33 – Схеме к определению внутренних усилий

с

Здесь C_q – множитель, имеющий смысл координаты центра тяжести распределенной нагрузки.

Изгибающий момент в произвольном сечении равен алгебраической сумме моментов от всех внешних сил, действующих по одну сторону сечения x , взятых относительно центра тяжести рассматриваемого сечения.

Правила проверки построения эпюр сил и моментов

Напоминаем, геометрический смысл первой производной некоторой функции – тангенс угла наклона касательной к кривой, отображающей эту функцию, и положительным направлением оси абсцисс. Установлены следующие правила проверки построения эпюр.

1. На участках, свободных от распределенной нагрузки, эпюра Q ограничена прямыми линиями, параллельными базовой, (поперечная сила постоянна), а эпюра M – наклонными (изгибающий момент изменяется по линейному закону).
2. На участке с равномерно распределенной нагрузкой эпюра Q – наклонная прямая, а эпюра M – парабола выпуклостью в направлении действия нагрузки q .
3. В тех сечениях, где к балке приложены сосредоточенные силы:
 - а) на эпюре Q будут скачки на величину и в направлении приложенных сил;
 - б) на эпюре M будут изломы, причем острие излома направлено по направлению силы.
4. В сечениях балки, где приложен сосредоточенный момент, эпюра M имеет скачек на величину этого момента. На эпюре Q действие пары сил не отражается.
5. На участках, где сила Q больше нуля, момент M возрастает
6. В том сечении, где эпюра изменяясь, пересекает базисную линию (поперечная сила Q равна нулю), изгибающий момент достигает экстремума. Касательная к линии, ограничивающей эпюру M в этом сечении, параллельна оси эпюры.

7. На концевой шарнирной опоре поперечная сила равна реакции этой опоры, а изгибающий момент равен нулю, если в опорном сечении не приложена пара сил.
8. В защемленном конце балки (заделке) значения и равны опорной реакции и опорному моменту.

4.3.3. Нормальные напряжения при изгибе

Изменение нормальных напряжений в волокнах произвольного сечения описывается уравнением А.Навье

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y. \quad (77)$$

Из этой формулы следует (рис.77):

- центр тяжести сечения является началом координат для анализа напряжений и приведения сил;
- напряжения изгиба зависят от значений изгибающего момента, момента инерции сечения и координат точек;
- напряжения в любой точке, лежащей на одинаковом расстоянии от нейтральной линии, равны между собой;
- наибольшие по величине напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтрального слоя.

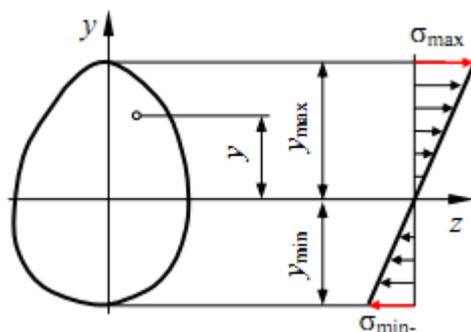


Рисунок 77 – Следствия из формулы Навье

Отношение J_z/y_{\max} называется моментом сопротивления сечения при изгибе и обозначается W_x

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}. (7799)$$

Таким образом

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}. (363455)$$

Очевидно, для любого сечения, имеющего горизонтальную ось симметрии (рис. Мапке, *a*), возможен единственный момент сопротивления при изгибе в плоскости, перпендикулярной оси x , определяемый по формуле (7799). Если же сечение не имеет горизонтальной оси симметрии (рис. 333, *б*) следует различать два момента сопротивления

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} \quad \text{и} \quad W_x'' = \frac{J_x}{y_{\max}''}.$$

Эпюра нормальных напряжений в последнем случае не будет симметричной, так как значения напряжений для слоев будут различны.

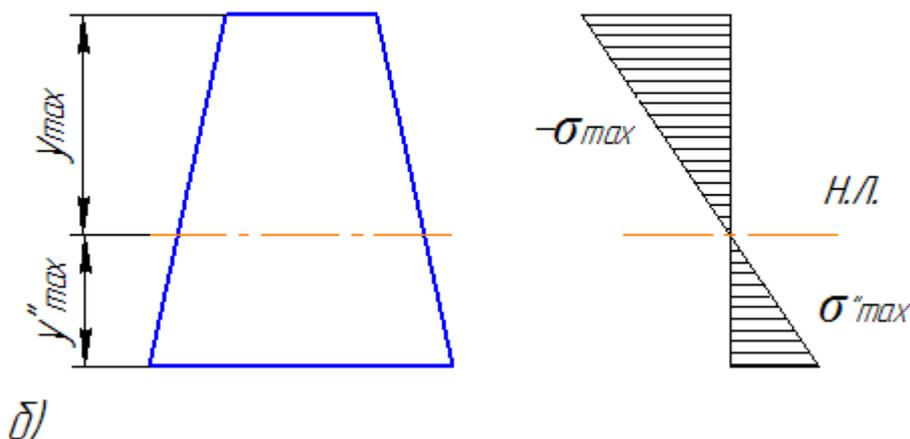
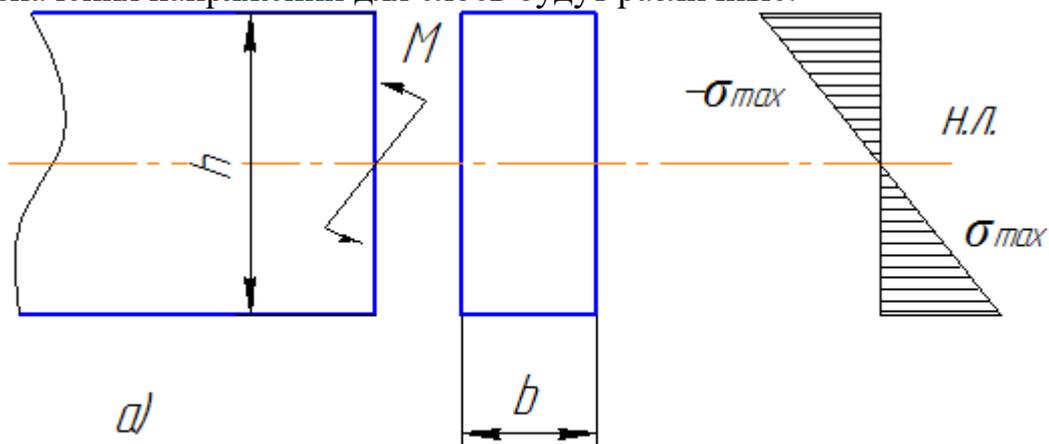


Рисунок Мапке – распределение нормальных напряжений по сечению

В общем случае поперечного изгиба, когда в сечениях стержня, кроме изгибающего момента M , действуют также поперечные силы Q , в сечении балки возникают не только нормальные σ , но и касательные напряжения τ . Максимальные значения касательных напряжений имеют место при $y = 0$ и равны (формула Журавского)

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_{\max}}{J_x \cdot b}, \quad (888)$$

где S_{\max} – максимальное значение статического момента сечения относительно нейтральной линии той части площади, которая расположена выше или ниже нее;

b – ширина сечения в рассматриваемом слое материала.

Статический момент сечения определяется по формулам

$$S_x = F \cdot y_c, \quad S_y = F \cdot x_c.$$

Здесь обозначено:

- F – площадь фигуры;
- y_c, x_c – соответственно координаты центра тяжести сечения относительно рассматриваемой оси.

Из уравнения кривой при изгибе следует – деформация балки при изгибе выражается кривизной ее геометрической оси

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{W \cdot J_z}. \quad (66)$$

Это закон Гука при изгибе. Из этого уравнения следует:

- момент инерции характеризует способность бруса сопротивляться искривлению в зависимости от размеров и формы поперечного сечения. Чем больше значение J_z при заданной величине M , тем большим окажется радиус кривизны нейтрального слоя;
- модуль упругости характеризует способность бруса сопротивляться искривлению в зависимости от рода материала;
- произведение $E \cdot J_z$ называют жесткостью сечения при изгибе.

Пример 7.3. Построить эпюру касательных напряжений для прямоугольного сечения (рис.7.3).

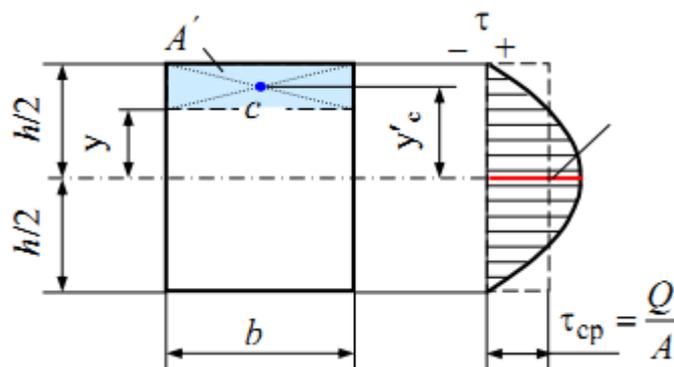


Рисунок 7.3 – Эпюра касательных напряжений для прямоугольного сечения

Момент инерции сечения

$$J_z = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Статический момент площади отсеченной части сечения

$$S'_z = A' \cdot y'_c.$$

Так как

$$A' = b \left(\frac{h}{2} - y \right); \quad y'_c = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right), \quad \text{тогда}$$

$$S'_z = \frac{b \cdot h^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right).$$

S'_z изменяется по параболическому закону и определяет характер изменения касательного напряжения

$$\tau = \frac{3Q}{2b \cdot h} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right).$$

При $y = 0$ (на нейтральной оси) $\tau = \frac{3Q}{2A}$.

При $y = h/2$ (на периферии) $\tau = 0$.

4.3.4. Перемещения в балках при прямом изгибе

Основные понятия

При действии на балку внешних сил, расположенных в одной из главных плоскостей инерции и действующих по нормали к ее оси, имеет место прямой изгиб: искривление оси балки происходит в силовой плоскости. Ось деформированной балки называется *упругой линией*.

Деформация балки характеризуется двумя величинами (рис. 4.44): 1) прогибом, т. е. перемещением y точки оси балки перпендикулярно к ее начальной недеформированной оси и 2) углом поворота θ , т. е. углом, на который поворачивается каждое поперечное сечение вокруг нейтральной оси по отношению к своему первоначальному положению.

Уравнение $y = f(x)$, выражающее зависимость между прогибом y при заданной нагрузке и координатой x , называется *уравнением упругой линии*.

На основании известного положения о геометрическом смысле производной $\operatorname{tg} \theta = dy/dx$.

Между кривизной упругой линии, изгибающим моментом и жесткостью поперечного сечения балки при прямом изгибе существует зависимость, которая следует из известной формулы для кривизны плоской кривой

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{M}{E \cdot J_z}.$$

Здесь ρ – радиус кривизны упругой линии балки в точке, отстоящей на расстоянии от начала координат (рис. 4.44, б).

Тогда имеется

$$y' = \operatorname{tg} \theta, \quad \theta' = \frac{M}{E \cdot J_z \cdot \cos \theta}.$$

На практике обычно углы поворота поперечных сечений $\theta \leq 1^\circ$, поэтому можно принять, что $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$. тогда $\theta = dy/dx$, что приводит к линеаризации уравнений, а именно уравнения приобретают вид

$$y'' = \frac{M}{E \cdot J_z}, \quad y' = \theta, \quad \theta' = \frac{M}{E \cdot J_z}. \quad (\text{ннн})$$

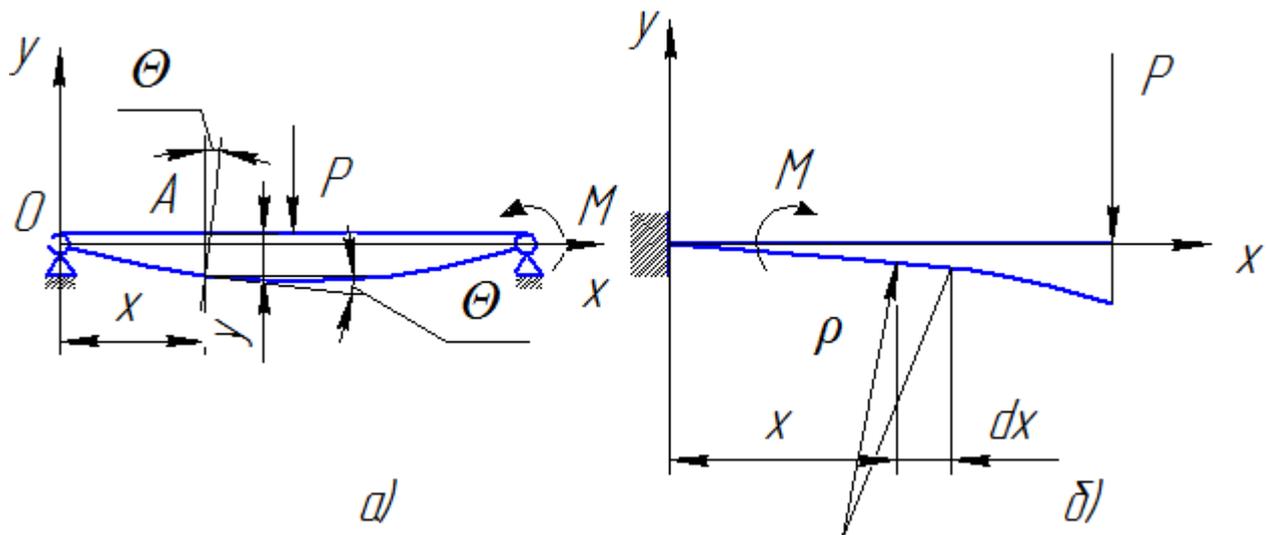


Рисунок 4.44 – Определение прогиба балки

Путем интегрирования приведенного уравнения получают выражения для определения углов поворота и прогибов сечений балки.

В результате двукратного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии появляются постоянные интегрирования, подлежащие в дальнейшем определению. При n участков нагружения число постоянных равно $2n$.

Для их определения используют условия закрепления концов балки, а также свойства плавности и непрерывности упругой линии на границах участков. Из этих условий следует, что в каждом поперечном сечении балки значения прогиба и угла поворота будут единственными.

При нескольких участках нагружения определение постоянных для каждого из них вызывает некоторые сложности. Существует несколько методов ускоренного определения постоянных:

1. метод непосредственного интегрирования. Применяя специальные методы при интегрировании приближенного дифференциального уравнения упругой линии, можно добиться равенства постоянных на участках и свести задачу при любом количестве участков к нахождению лишь двух постоянных;
2. метод начальных параметров;
3. энергетический метод (метод с помощью интеграла Мора).

Определение перемещений методом начальных параметров

Метод начальных параметров позволяет записать одно уравнение прогибов (или углов поворота сечений), пригодное для всех участков балки, поэтому называется универсальным, или обобщенным.

Универсальное уравнение упругой линии, учитывающее все основные типы нагрузок – сосредоточенный момент, сосредоточенную силу, распределенную

нагрузку переменной интенсивности – имеет для балки при указанных направлениях нагрузок и осей (рис. 8.8) следующий вид:

$$y = y_0 + \theta_0 \cdot x + \frac{M_0 \cdot x^2}{2E \cdot J_z} + \frac{R_0 \cdot x^3}{6E \cdot J_z} + \sum \frac{T(x-a)^2}{2E \cdot J_z} \Big|_{x>a} - \sum \frac{P(x-b)^3}{6E \cdot J_z} \Big|_{x>b} - \sum_{c_1}^{c_2} \int \frac{q(\xi)(x-\xi)^3}{6E \cdot J_z} d\xi. \quad (\text{КГКНЛ})$$

Здесь y_0, θ_0, M_0, R_0 – начальные параметры; y_0 – прогиб в начале координат; θ_0 – угол поворота начального сечения; M_0 – изгибающий момент в начале координат (опоре балки); R_0 – поперечная сила в том же сечении (опорная реакция). Параметры y_0, θ_0 – геометрические факторы, а M_0, R_0 – силовые.

Начальные параметры y_0, θ_0, M_0, R_0 могут принимать какие угодно значения: положительные, отрицательные и равные нулю. Определяют эти величины, исходя из условия закрепления балки, а также нагружения левого конца, который принят за начало координат.

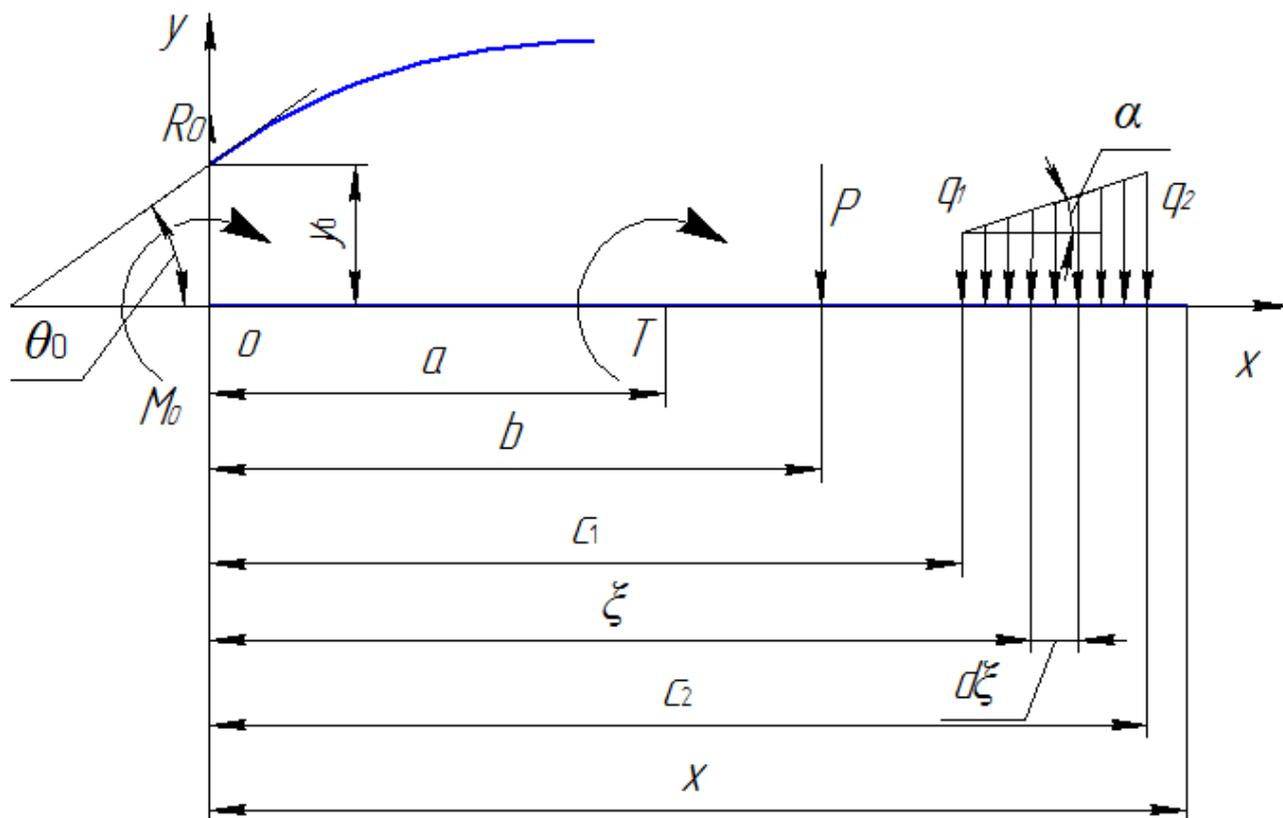


Рисунок 8.8 – Определение универсального уравнения упругой линии

На рис. 8.8 все начальные параметры положительны: y_0 отложен вверх от оси; θ_0 – поворот сечения предполагается против часовой стрелки; M_0 – момент направлен по часовой стрелке; R_0 – сила реакции направлена вверх. Что касается других слагаемых в уравнении, то их знак определяется в зависимости от того, создает ли данная нагрузка положительный или отрицательный изгибающий момент в сечении с абсциссой x .

Знак $\Big|_{x>a}$ (прерыватель) показывает, что соответствующее слагаемое необходимо учитывать только при $x > a$. Это означает, что при определении прогиба в

каком-то сечении с координатой x в уравнение входят лишь нагрузки, лежащие слева от этого сечения.

Последнее слагаемое, входящее в уравнение, отражает влияние распределенной нагрузки переменной интенсивности $q(\xi)$, где $c_1 \leq \xi \leq c_2$ фиксирует положение этой нагрузки на балке.

Если приложена нагрузка, распределенная по линейному закону (по закону трапеции), то универсальное уравнение прогибов упрощается и принимает вид:

$$\begin{aligned}
 y = & y_0 + \theta_0 \cdot x + \frac{M_0 \cdot x^2}{2E \cdot J_z} + \frac{R_0 \cdot x^3}{6E \cdot J_z} + \sum \frac{T(x-a)^2}{2E \cdot J_z} \Big|_{x>a} - \\
 & - \sum \frac{P(x-b)^3}{6E \cdot J_z} \Big|_{x>b} - \sum \frac{q_1(x-c_1)^4}{24E \cdot J_z} \Big|_{x>c_1} + \sum \frac{q_2(x-c_2)^4}{24E \cdot J_z} \Big|_{x>c_2} - \\
 & - \sum \frac{k(x-c_1)^5}{120E \cdot J_z} \Big|_{x>c_1} + \sum \frac{k(x-c_2)^5}{120E \cdot J_z} \Big|_{x>c_2}.
 \end{aligned} \tag{шшшш}$$

Здесь $k = \frac{q_2 - q_1}{c_2 - c_1} = \operatorname{tg} \alpha$.

При постоянной распределенной нагрузке ($q_1 = q_2$) две последние составляющие уравнения исключаются.

Итак, универсальное уравнение прогибов содержит следующие слагаемые:

- четыре – для начальных параметров;
- одно – для внешних моментов;
- одно – для сосредоточенных сил;
- четыре – для нагрузки, распределенной по линейному закону.

Все слагаемые находятся под знаком суммы, распространяемой на все нагрузки данного вида.

Уравнение углов поворота может быть легко получено из уравнения прогибов путем вычисления производной по координате x .