Translated from Russian to Ukrainian - www.onlinedoctranslator.com

2. ВІДМОВИ ЗА ПАРАМЕТРАМИ МІЦНОСТІ

2.1. Відмови щодо параметрів статичної міцності

Міцність- Властивість матеріалу (в певних умовах і межах) со-противитися руйнуванню, і навіть зміні форми під впливом зовнішніх чи внутрішніх сил. [Кубарєв, с. 67]. Параметрами міцності є межі міцності, пропорційності, плинності, повзучості, витривалості та ін. Деформація – це зміна форми або розмірів деталі або її частини під дією зовнішніх сил, нагрівання чи охолодження, зміни вологості. Розрізняють два види деформації: пружну, що зникає після усунення впливів, що її викликали, і пластичну, що залишається після видалення навантаження. Під впливом деформації може відбуватися стиснення та розтягування, кручення, зрушення та інші види деформації. Основними параметрами деформації є відносне подовження та звуження.

Для машин та інструментів найчастішими видами відмов є:

- крихке руйнування;
- Пластична деформація;
- Повзучість;
- Втома матеріалів;
- зношування;
- корозія металів;
- старіння матеріалів.

Аналіз причин відмов слід починати завжди з урахування виду навантажень, тривалості їх впливу та закономірностей зміни в часі.

Відмовлення за параметрами міцності найчастіше пов'язані зі зламом деталі, які бувають тендітні і в'язкі.

Під***крихким зламом***розуміють злам без ознак пластичних деформацій. Такий вид зламу виникає при руйнуванні в умовно пружній зоні деформування. Крихка руйнація відбувається, як правило, миттєво без видимих змін об'єкта.

Пластичного або в'язкого зламупередує макроскопічна пла- стичну деформацію, спричинену зрушенням у площинах ковзання та по межах зерен.

Залежно від прикладених навантажень злами поділяються на динамічні, втомні, злами від перевищення межі міцності, злами при згинальних та скручувальних навантаженнях.

До***динамічним зламам***відносяться злами, що відбуваються раптово під дією навантажень або удару. До***втомним***відносяться злами під дією змінних навантажень, коли руйнація відбувається після застосування великої кількості циклів навантаження.

Злами, викликані перевищенням межі міцності займають проміжне положення між динамічними та втомними. Вони характеризуються великою поверхнею остаточного зламу, а також наявністю на поверхні зламу окремих, що проходять на великих відстанях ліній розвантаження або

уступів. У напрямку зламу можна судити про те, яке навантаження викликало руйнування (перевантаження розтягування, вигини або кручення).

Найбільш поширеним методом оцінки міцності деталей є порівняння розрахункових напруг, що виникають при дії експлуатаційних навантажень, з допустимою напругою для певного матеріалу деталі.

2.2. Розрахунки під час конструювання

Проектування та конструювання машин нерозривно пов'язане з розрахунками, в результаті яких визначаються параметри технічної характеристики, кінематичні параметри, розміри та форма деталей, запаси їх міцності, довговічності [Павлище, с.17].

При проектуванні виробляються геометричні, кінематичні, динамічні розрахунки, розрахунки міцності та жорсткості, енергетичні, техніко-економічні розрахунки та ін.

Для багатьох випадків вихідні дані для розрахунків у початковий період проектування відсутні та уточнюються лише після попередніх розрахунків. У разі проводяться проектировочные розрахунки, та був перевірочні.

Проектувальні розрахунки використовуються визначення вихідних даних і виконуються, зазвичай, по спрощеним методикам. Отримані результати після коригування та уточнення є вихідними даними для точних перевірочних розрахунків, що виконуються за всіма критеріями працездатності з максимальним обліком реальних умов функціонування машини та її складових.

Використовуються найчастіше два методи розрахунку – проектний та перевірочний розрахунок. ***Проектний розрахунок*** виконується під час проектування машини з метою визначення її розмірів. Підставою для такого розрахунку є дані про навантаження та властивості конструкційного матеріалу (міцність матеріалу). Результатом розрахунок мають бути конструктивні розміри всіх елементів деталей, вузлів, систем.

При ***перевірочному розрахунку*** проводиться розрахунок машини для перевірки чи визначення норм навантаження, терміну та ін. Вихідними даними є дані про навантаження, розміри елементів. Підсумком розрахунків будуть дані про величину діючих напружень, величину жорсткості.

2.3. Навантаження. Загальні відомості

Навантаження, що діють на елементи машини, поділяються на корисні та власні [Павлище, с. 19].

Корисні навантаження сприяють реалізації машинного процесу (сила різання, сила штампування, вага вантажу, що транспортується та ін.).

Власні (внутрішні, шкідливі) сили супроводжують роботу машини та зумовлені дією довкілля та внутрішньою взаємодією елементів машини (сили ваги, сили тертя, динамічні сили та ін.).

За характером зміни в часі навантаження поділяються на постійні та змінні.

Постійні навантаження – це в більшості випадків власна вага, тиск газу або рідини, навантаження при попередньому навантаженні в процесі складання та ін.

Змінні навантаження обумовлені змінністю робочого процесу в машинах-двигунах, технологічного процесу (штампування, різання), внутрішня динаміка роботи (розгін, гальмування, реверс). Змінні навантаження можуть бути стаціонарні чи нестаціонарні. Нестаціонарні навантаження – це навантаження зі змінними параметрами (частотою та амплітудою).

Практично більшість машин схильні до дії нестаціонарних змінних навантажень, особливо машини універсального призначення. Машини з постійними навантаженнями зустрічаються рідко (насосні станції, стрічкові транспортери та ін.).

Фактичний характер зміни навантаження протягом певного періоду часу замінюється ступінчастим графіком, що показує величину фактичного навантаження F_i протягом певного періоду роботи h_i машини (мал. 2.1,*а*). Практично всі періоди навантаження зводять до кількох укрупнених періодів тривалістю t_i, або чинним протягом певного числа циклів навантаження $n_{цi}$, протягом яких діє навантаження F_i (Рис.2.1,*б*).

Якщо розташувати ділянки в міру зменшення навантаження і розглядати відносні величини F_i/F, і $n_{цi}/n_{\Sigma}$, Отримують графік типових навантажень, показані на рис. 2.2. Тут зазначено F- максимальне навантаження на машину, n_{Σ}- Максимальна кількість циклів навантаження.

На базі статистичних даних для більшості технологічних та транспортних машин побудовано графіки типових навантажень, для яких виділяють:

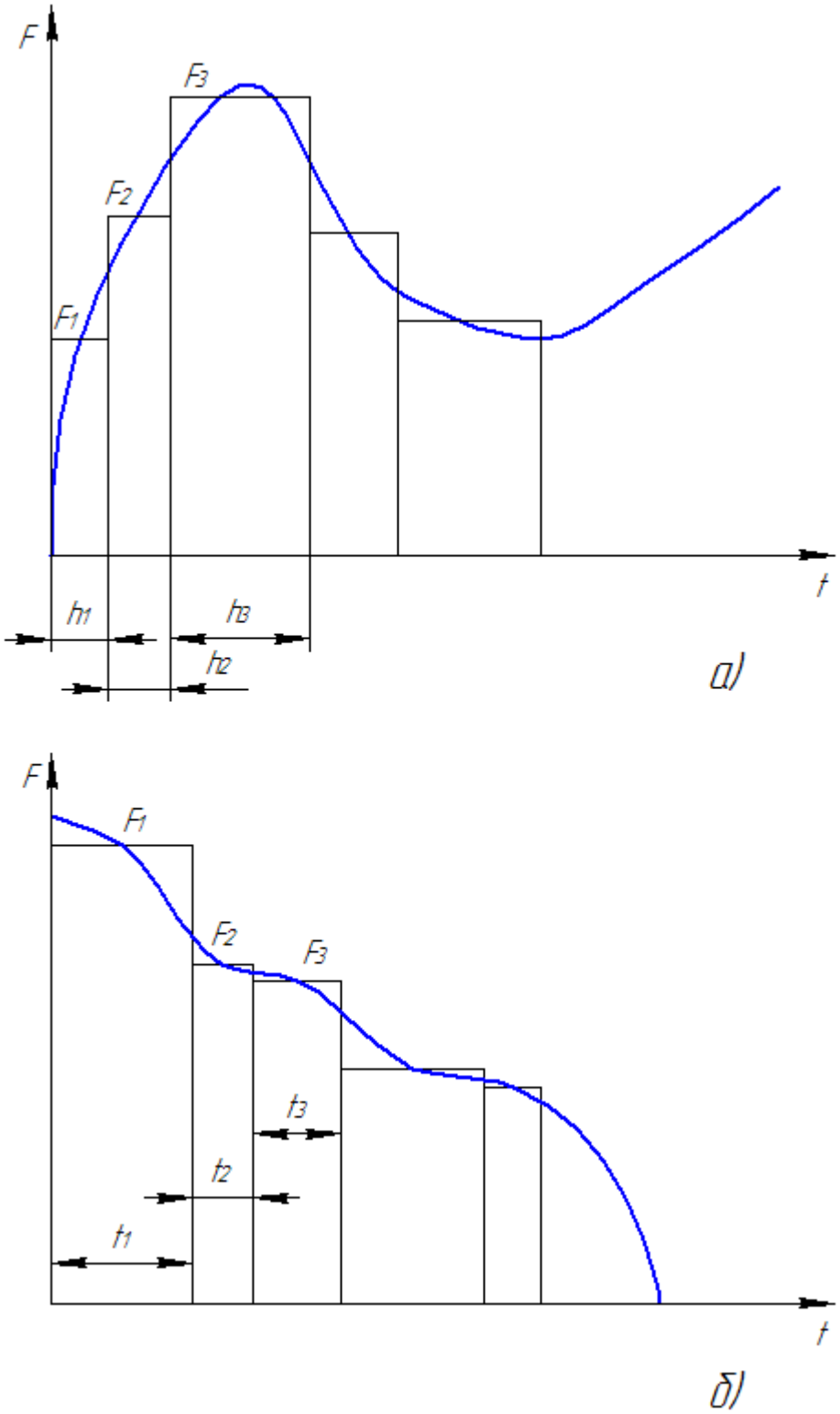
-*П*- Постійне навантаження;

-*Т*- Тяжкий режим навантаження;

-*СН*- Середній нормальний режим навантаження;

-*СР*- Середній рівноймовірнісний режим навантаження;

-*Л*- Легкий режим навантаження.

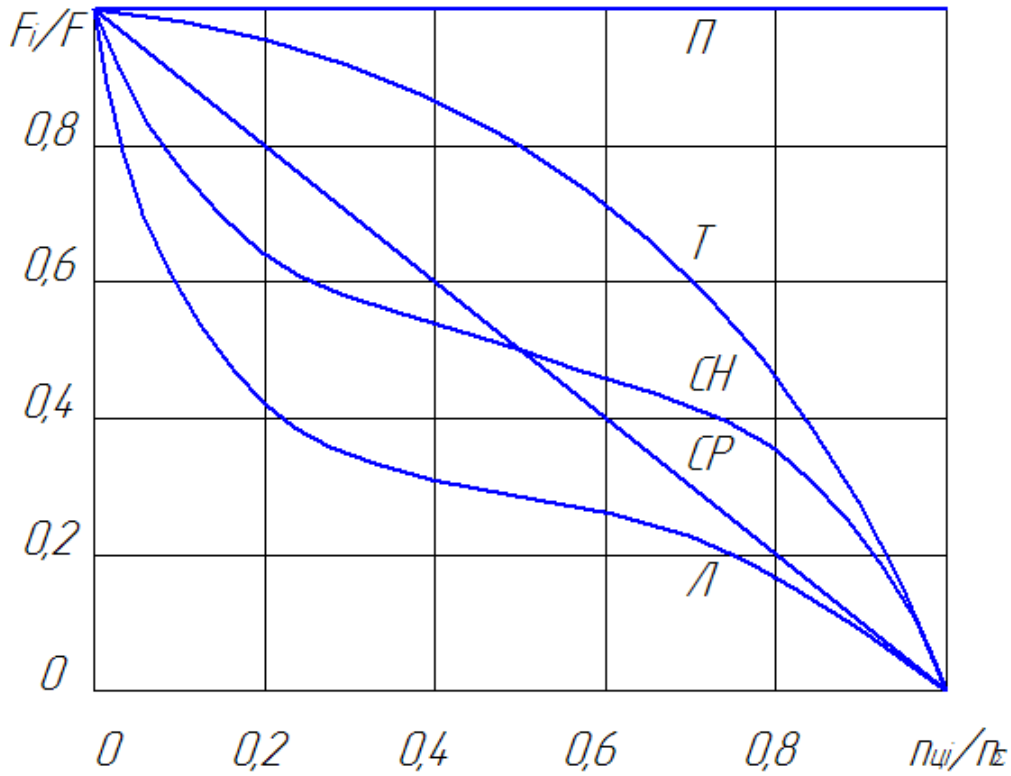


Мал. 2.1 – Циклограма зміни навантаження у часі

Важкий режим роботи *Т* притаманний гірських машин; середній рівноймовірний *СР* та середній нормальний *СН*- Для транспортних машин. Металорізальні верстати зазвичай мають легкий режим роботи *Л*. Підйомно-транспортні та ковальсько-пресові машини можуть мати режим роботи від легені. *Л* до важкого *Т* Залежно від призначення машин.

Постійний режим навантаження є найбільш навантаженим, тому що машина протягом усього періоду роботи схильна до максимального навантаження.

Максимальна кількість циклів навантаження n_Σ зазвичай більше $5*10^4$. Якщо фактичне число циклів n_Σ менше цього значення, проводиться розрахунок на статичну міцність.



Мал. 2.2 – Графіки типових режимів навантаження машин

2.4. Напруги та деформації

При навантаженні деталей зовнішніми силами виникає певний напружений та деформований стан, що характеризують стан тіла. Числовим заходом, що характеризує закон розподілу внутрішніх сил за якимось перерізом, є напруга. Повна напруга може бути розкладена на три складові за нормаллю до площини перерізу та по двох осях у площині перерізу. Проекція вектора повної напруги на нормаль позначається σ і називається нормальною напругою. Складові в площині перерізу називаються дотичними та позначаються τ.

Усі матеріали, що існують у природі, не є абсолютно жорсткими і під дією зовнішніх сил певною мірою змінюють свою форму – деформуються. Розрізняють пружні деформації, що зникають після припинення дії зовнішніх сил, що їх викликали, і залишкові (деформації), що не зникають після зняття навантажень.

Вид і величина напруги та деформації залежить від способу навантаження. У опорі матеріалів розрізняють такі основні види деформацій:

- розтягування та стиск;
- зсув (зріз);
- крутіння;
- Вигин.

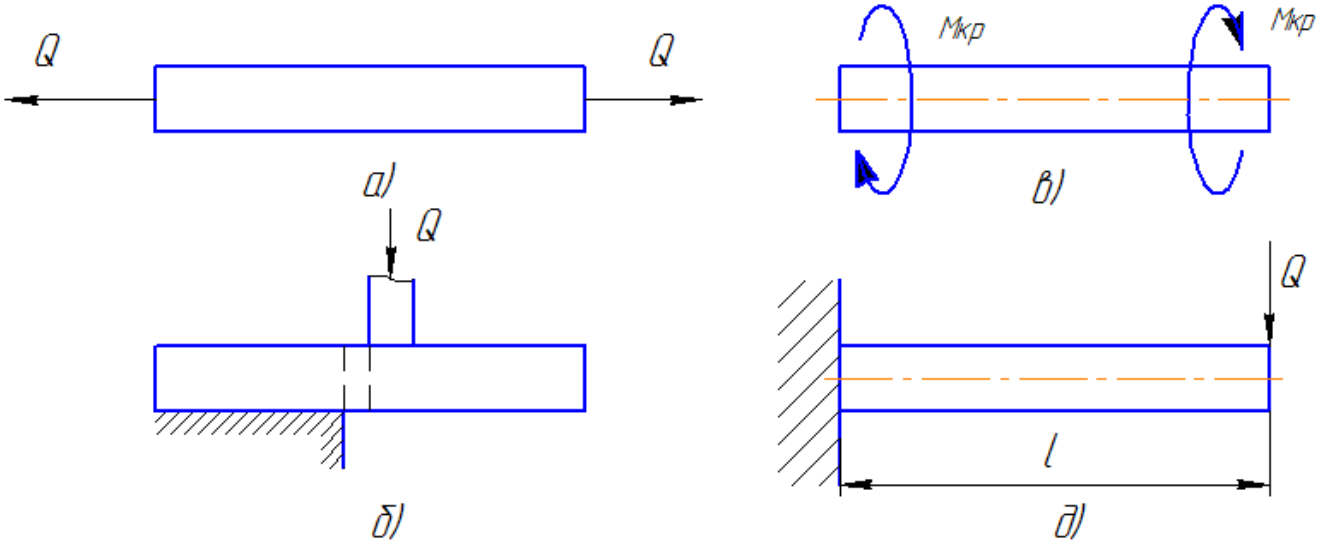


Рисунок 2.1 – Найпростіші види деформацій

Розглядаються також складніші деформації, що утворюються в результаті поєднання декількох основних видів деформації.

У міжнародній системі одиниць силу вимірюють у ньютонах (Н), а напруга у паскалях чи мегапаскалях (1 МПа = 10^6Па). У старих системах напруги вимірюють кг/см^{2}або кг/мм^2(1 МПа = 9,81 кг/см^2= 10 кг/см^2= 0,1 кг/мм^2).

2.5. Оцінка міцності деталей

Основним завданням розрахунку конструкції на міцність є визначення її міцності за заданих розмірів та умов експлуатації.

Зазвичай умова міцності зводиться до виконання умови, що визначається схемою напруженого стану

-р- -р-, -з- -з-, –- -.(888)

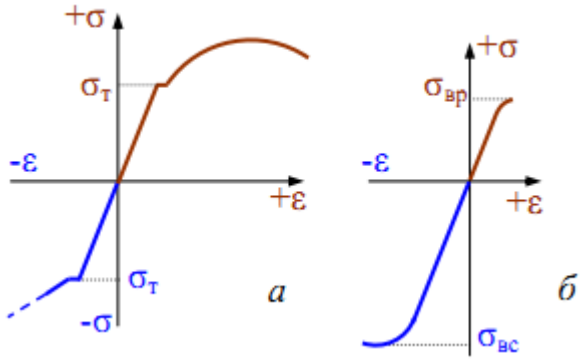
Тут$\sigma_р$,$\sigma_з$,τ– відповідно, найбільша нормальна напруга на розтяг, на стиснення, дотична напруга; [$\sigma_р$], [$\sigma_з$], [τ] – відповідно, допустима напруга на розтяг, стиснення та дотичне.

Допустима напруга– найбільша напруга, яку можна допустити. сти в елементі конструкції за умови його безпечної, довговічної надійної і роботи

- - -перед-.(3333)
n

Тут$\sigma_{перед}$- гранична напруга, при якій конструкція перестає задовольняти експлуатаційні вимоги. їм може бути межа плинності, межа міцності, межа витривалості, межа повзучості та ін.

Для конструкцій із пластичних матеріалів використовують межу плинності.$\sigma_т$ (Рис. аа.ааа). Це зумовлено тим, що після того, як напруга перевищує межу плинності, різко зростають пластичні деформації при незначному підвищенні навантаження.



Допустима напруга в цьому випадку визначається як

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n_T]}. \quad (777)$$

Для крихких матеріалів (чавун, бетон, скло та ін.)

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{вр}}{[n_в]}; \quad [\sigma_з] = \frac{\sigma_{нд}}{[n_в]}, \quad (777)$$

де $\sigma_{вр}, \sigma_{нд}$ – межі міцності при розтягуванні та стисканні (рис.333);

$[n_T]$ – нормативний коефіцієнт запасу міцності стосовно межі плинності σ_T;

$[n_в]$ – нормативний коефіцієнт запасу міцності стосовно межі міцності $\sigma_в$.

Запас міцності – відношення гранично допустимого теоретичного навантаження до того навантаження, коли можлива безпечна робота конструкції з урахуванням випадкових перевантажень, непередбачених дефектів і недостовірності вихідних даних для теоретичних розрахунків.

Нормативні коефіцієнти запасу міцності залежать від:

- класу конструкції (капітальна, тимчасова);
- наміченого терміну експлуатації;
- умов експлуатації;
- виду навантаження (статичне, циклічне, ударні навантаження);
- неточності завдань величини зовнішніх навантажень;
- неточності розрахункових схем та наближених методів розрахунку та ін.

Нормативний коефіцієнт запасу міцності може бути єдиним попри всі випадки навантаження конструкцій. У кожній галузі промисловості склалися свої методи проектування та прийоми технології. Нормативний коефіцієнт запасу міцності в залежності від зазначених факторів приймається рівним від 1,3 до 3...5.

Основні характеристики міцності та пластичності матеріалів визначають експериментальним шляхом. З цією метою проводяться лабораторні випробування матеріалів на розтягування, стиснення, зріз, кручення, вигин при статичному та циклічному навантаженні. Найбільш поширеним та універсальним є випробування на розтяг.

Методика випробувань, форма та розміри зразків при розтягуванні визначаються стандартом. Інформація про механічні властивості випливає з машинної

діаграми, яка автоматично записує криву зміни зусилля у функції подовження зразка (рис. 555).

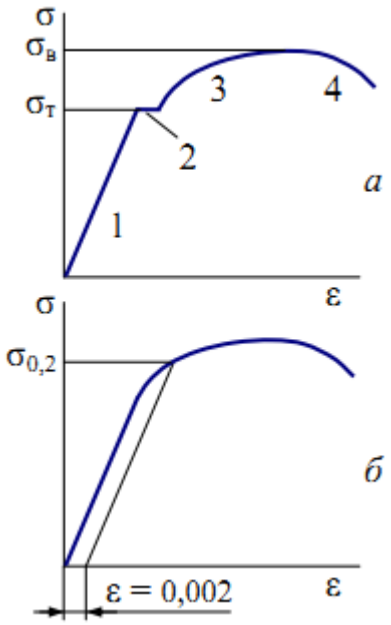
Діаграма розтягування пластичних матеріалів (мал. алала7) має декілька характерних ділянок: 1 – ділянку пружних деформацій; 2 – ділянка плинності; 3 – ділянка зміцнення; 4 – ділянка утворення шийки та руйнування. діаграми руйнування більшості інших конструкційних матеріалів (з невеликою пластичністю) площадки плинності не мають.

За наслідками випробувань визначаються основні характеристики почності матеріалу.

Межа плинності σ_T - Напруга, при якому зразок деформується при практично постійному навантаженні (рис. кп,*а*).

Межа плинності умовна $\sigma_{0,2}$ - Напруга, при якому залишкове подовження досягає 0,2% розрахункової довжини зразка (рис. кп,*б*).

Тимчасовий опір (межа міцності) σ_B - напруга, відповідність- ве найбільше навантаження, що передує руйнуванню зразка.



Малюнок 555 – типові діаграми розтягування пластичних та крихких матеріалів

Для оцінки міцності конструкцій у випадках різного напруженого стану використовують деякі еквівалентні значення напруги, визначені на основі якоїсь теорії міцності.

Суть теорій міцності полягає в тому, що, визначивши головну причину руйнування матеріалу (переважний вплив того чи іншого фактора), можна підібрати відповідну еквівалентну напругу при складному напруженому стані, а потім зіставити її з простим одновісним розтягуванням.

Створено більше 20 теорій, що дозволяють визначити вид функціональних залежностей, що становлять складний напружений стан, еквівалентний йому одновісним напруженим станом. Як причини настання небезпечного стану вважають:*а*) нормальні напруження - руйнація крихке, шляхом

відриву; *б*) лінійні деформації; *в*) дотичні напруги – руйнування пластичне, шляхом зсуву; *г*) енергія деформації та ін.

Слід зазначити, що небезпечний стан як пластичних матеріалів (момент появи великих залишкових деформацій) так крихких (момент появи тріщин) лежить межі області пружного деформування. Це дозволяє за всіх подальших обчислень, які стосуються перевірки міцності, користуватися формулами, виведеними за умови застосовності закону Гука.

Оскільки властивості матеріалів відомі лише для найпростіших напружено-деформованих станів, то для практичних завдань використовують наслідки так званих теорій міцності.

Теорією міцності (теорією граничних станів) називається аксіоматичне завдання критерію еквівалентності просторового та одновісного напружених станів з нормальною напругою

$$\sigma_{екв} = \sigma_{екв}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad (888)$$

де $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - Головні напруги даного вбраного стану.

Оскільки однозначної залежності (888) неспроможна існувати, використовують кілька теорій міцності.

1. Теорія найбільших нормальних напруг (теорія Галілея, перша теорія міцності) – міцність при будь-якому напруженому стані буде забезпечена, якщо максимальна напруга не перевищить допускається, визначеного при простому розтягуванні

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 = [\sigma]. \quad (777)$$

Тут $[\sigma]$ – допустима напруга при розтягуванні (див. далі).

Але $\sigma_1 = \sigma$, отже $\sigma_{екв} = \sigma = [\sigma]$.

Перша теорія міцності не враховує пластичної деформації і застосовується для крихких матеріалів. $\sigma_3 = 0$.

2. Гіпотеза найбільших лінійних деформацій (друга теорія міцності) запропонована Е. Маріоттом (1682) та розвинена Б. Сен-Венаном (XIX). Міцність при будь-якому напруженому стані буде забезпечена, якщо найбільше відносне подовження не перевищить дозволеного, визначеного при простому розтягуванні.

$$\varepsilon_{max} = [\varepsilon] \quad (888)$$

Вирішуючи спільно рівняння закону Гука для об'ємного та лінійного напруженого стану, взаємозв'язки знаходять

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = [\sigma]. \quad (888)$$

Друга гіпотеза експериментально перевірена недостатньо, тому у розрахунках використовується рідко.

3. Гіпотеза найбільших дотичних напруг (третя теорія міцності) запропонована Ш. Кулоном (1773), розвинена Б. Сен-Венаном (1871). Міцність при будь-якому напруженому стані буде забезпечена, якщо найбільша дотична напруга не перевищить допускається, визначеного при простому розтягуванні

$$\tau_{max} = [\tau]. \quad (9999)$$

Після вирішення рівнянь об'ємної та плоскої напруги знаходять

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - \sigma_3 = [\sigma]. \quad (99)$$

Гіпотеза добре узгоджується для пластичних матеріалів.

4. Гіпотеза питомої потенційної енергії формозміни - енергетичне-ська теорія міцності (четверта теорія міцності). Міцність при будь-якому напруженому стані буде забезпечена, якщо питома потенційна енергія деформації, що йде на зміну форми, не відбудеться значення, що припускається, визначеного при простому розтягуванні

$u_{ф}$-- u--.(ppp)

Після спільного вирішення рівнянь знаходять

$$-_{екв} -\sqrt{\frac{1}{2}-2-1-2--2--3--2 \qquad 3 \qquad 1-----}.(9876543)$$

При роботі деталей із пластичних матеріалів на зріз -1--,-2- 0-3- --, тоді

$$-_{екв}-\sqrt{\frac{1}{2}--1 2--2 \quad 3--3-- \qquad 1-2-1 2\sqrt{\frac{}{2} \qquad 2-4- \quad 2---3\sqrt{--}}}.$$

Звідси випливає

$$---\frac{--}{\sqrt{3}}-0,577---.(222)$$

При одночасному дії напруг вигину, розтягування та кручення на основі гіпотези найбільших дотичних напруг визначається еквівалентна напруга у вигляді

$$-_{е\ кв}-i--\sqrt{\qquad p\ 2-4-2---}. \qquad (2.9)$$

З умови міцності випливають три види завдань розрахунків при конструюванні. ні.

а) проектувальний розрахунок (підбір розмірів перерізу). Відомі величина навантаження F і допустима напруга конструкційного матеріалу [σ]. Потрібно визначити розміри деталі, наприклад, площу поперечного перерізу S.

$$S-- \frac{F}{-}$$

б) перевірочний (перевірка міцності). Відомі зусилля F і площа поперічкового перерізу S деталей. Обчислюють величину напруги – FS і порівнюючи його з граничним $\sigma_т$ або $\sigma_в$ (Для пластичного і тендітного матеріалів відповідственно), знаходять фактичний коефіцієнт запасу міцності

$$n_{-т}\ \frac{-}{-}, \qquad n_{-в}\ \frac{-в,}{-}$$

який потім зіставляють з нормативним *[n]*.

в) Визначення несучої здатності. Відомі розміни поперечного перерізу деталі (площа S) та допустима напруга матеріалу [σ]. Потрібно визначити максимально допустиме навантаження F, що здатна витримати деталь без руйнування.

$$F-S---.$$

3. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕКЛАВ

Розподіл внутрішньої напруги в деталі залежно від напруженого стану не є рівномірним у всіх точках перерізу і залежить як від зовнішнього навантаження, площі поперечного перерізу та його форми. Наприклад, при розтягуванні напруги не залежать від форми перерізу, при згинанні та крученні залежать від форми перерізу та його розмірів, а при згинанні ще й від орієнтації перетину щодо навантаження.

Таким чином, при аналізі напруженого стану використовують декілька геометричних характеристик поперечних перерізів:

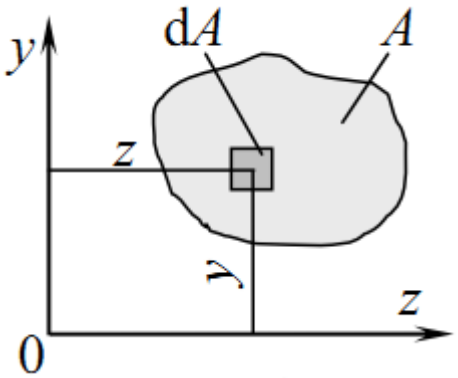
- статичний момент площі;
- момент інерції;
- радіус інерції;
- Момент опору.

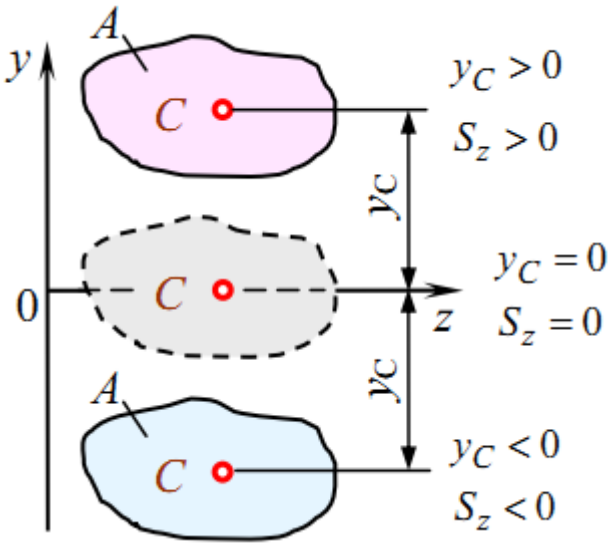
У більшості характеристик фізичного сенсу немає, але є геометрична інтерпретація та аналогія з фізичними та механічними поняттями.

3.1. Статичний момент площі перерізу

Статичний момент площі - поширена на всю площу сума творів елементарних майданчиків *dA* на відстань від них цієї осі (рис. 4534)

$$S_z = \int_A y\,dA, \qquad S_y = \int_A z\,dA. \quad (33)$$





Це поняття аналогічне моменту сили щодо осі. Якщо припустити, що *A* – вага пластини, що має форму перерізу, що розглядається, то статичний момент S_z – це момент сили тяжіння пластини щодо осі *z*. розмірність моменту – довжина третього ступеня (див. $з$, $м^3$). Момент має знаки плюс, мінус і може дорівнювати нулю.

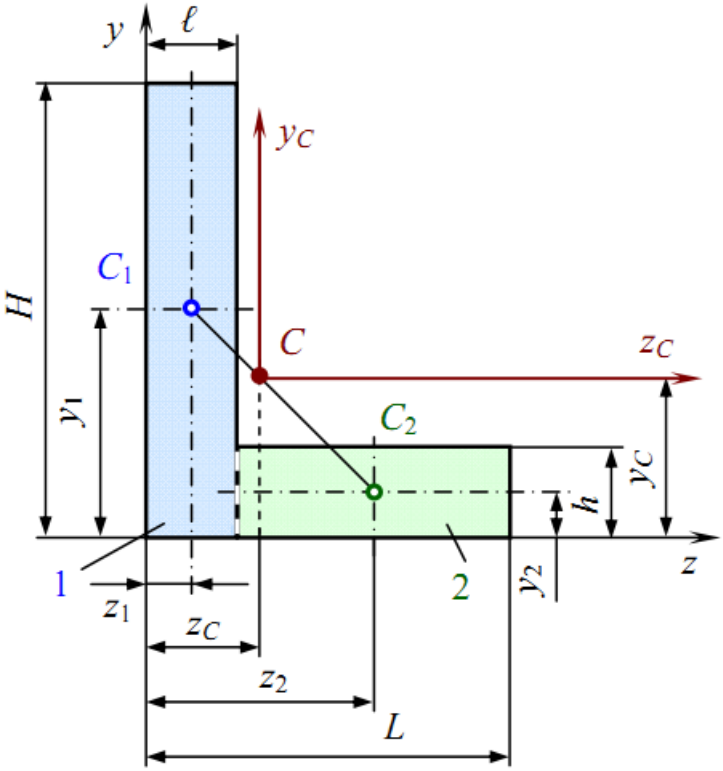
Для перерізу розрізняють поняття (рис. Щогк):

- Вісь центральна - вісь, щодо якої статичний момент площа- ді дорівнює нулю (вісь z);
- Центр тяжкості перерізу – точка перетину центральних осей (точка З).

Якщо фігура має вісь симетрії, ця вісь є центральною. Статичний момент складеного перерізу дорівнює сумі статичних моментів елементів цього перерізу. Це випливає з властивості певного інтеграла, який можна обчислити частинами – властивість адитивності (від англ. add – додавати, приєднувати, складати). При відомих статичних моментах частин перерізу можна знайти координати центру ваги складової фігури:

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{z_1 \cdot A_1 + z_2 \cdot A_2 + \ldots + z_n \cdot A_n}{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}; \quad y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + \ldots + y_n \cdot A_n}{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}$$

Приклад 3.1. Визначити положення центральних осей y_c і z_c, паралельних підставі та висоті фігури, показаної на рис. 6ії.



Малюнок іторр – Визначення положень центральних осей

Розбиваємо фігуру на дві прості, в даному випадку на два прямокутники. Їхні центри тяжіння розташовані посередині висоти і посередині ширини.

Розміри елементів дорівнюють (см): H=10 см; h=2см; L=8; l=2.

Координати центрів тяжкості та площі простих фігур

$$z_1 = l/2 = 2/2 = 1\,см; \quad z_2 = l + \frac{L-l}{2} = 2 + \frac{8-2}{2} = 5\,см;$$

$$y_1 = H/2 = 10/2 = 5\,см; \quad y_2 = h/2 = 2/2 = 1\,см;$$

$$A_1 = l \cdot H = 2 \cdot 10 = 20\,см; \quad A_2 = (L-l) \cdot h = (8-2) \cdot 2 = 12\,см.$$

Статичні моменти площ простих фігур

$S_{z1}-y_1-A_1-$ 5-20 - 100 $см^3$; $S_{y1}-z_1-A_1-$ 1-20 - 20 $см^3$;

$S_{z2}-y_2-A_2-$ 1-12 - 12 $см^3$; $S_{y21}-$ z_2- A_2- 5-12 - 60 $зм^3$;

Статичні моменти складової фігури

$S_z-S_{z1}-S_{z2}$-100 -12 -112 $см^3$; $S_y-S_{y1}-S_{y2}$- 20 - 60 -80 $см^3$.

Координати центру важкості складової фігури

$$z_c - \frac{S_y}{A_1-A_2} - \frac{80}{20-12} - 2{,}5\,см; \qquad y_c - \frac{S_z}{A_1-A_2} - \frac{112}{20-12} - 3{,}5\,см.$$

Через знайдену точку проводимо центральні осі z_c і y_c, паралельні основенню фігури та її висоті.

Примітка – центр ваги фігури, що складається з двох частин, лежить на лінії, що з'єднує центри тяжкості простих складових фігур, причому відстані до них обернено пропорційні площам простих фігур. Якщо складну фігуру складено з кількох фігур, то загальний центр знаходиться всередині багатокутника, вершинами якого є центри важкості простих фігур.

3.2. Момент інерції перерізу

Момент інерції – поширена всю площу сума творів елементарних майданчиків dA на квадрат відстаней від них до осі (Рис. ое8е8).

Розрізняють:

- осьовий момент інерції;
- полярний момент інерції;
- відцентровий момент інерції.

3.3. Осьові моменти інерції

$$J_z - -y_2 - dA; \qquad J_y - -z_2 - dA.\text{(ррр)}$$

A A

3.4. Полярний момент інерції

$$J_p - - \quad {}^2 - dA,\text{(пак)}$$

A

де ρ- Відстань від майданчика dA до точки (полюса), щодо якого ви-
вважається полярний момент інерції.

Полярний момент інерції пов'язаний із осьовими моментами інерції

$$J_p - - \quad {}^2 z - y_2 - - dA - - z_2 \; {}_1 - y_2 \; {}_1 - dA,$$

A A

тобто для будь-якої пари взаємно перпендикулярних осей, що проходять через полюс

$$J_p - J_z - J_y - J_{z1} - J_{y1}.\text{(нн)}$$

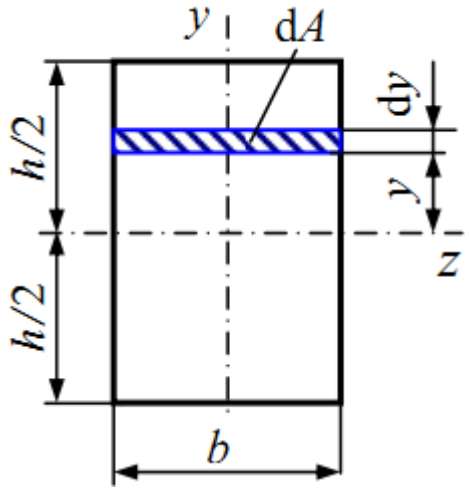
3.5. Відцентровий момент інерції

Відцентровий момент інерції визначається інтегралом творів елементарних площ на відстані до двох взаємно перпендикулярних осей

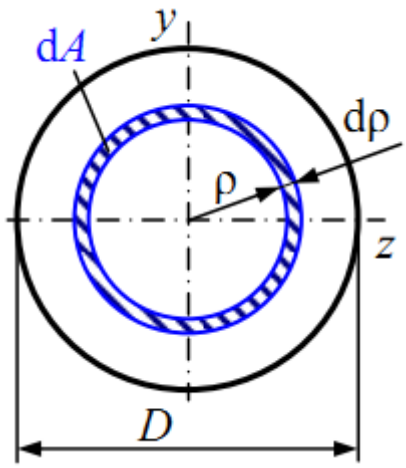
J_{zy}- -z-y-dA.(ввв)
A

Розмірність моментів інерції – одиниці довжини четвертого ступеня. осьові та полярний момент інерції завжди позитивні, відцентровий момент може бути позитивний, негативний та нульовий. Якщо фігура має вісь симетрії, то щодо цієї осі відцентровий момент інерції дорівнює нулю.

Приклад 3.2. Знайти моменти інерції прямокутного перерізу (рис. елелп) щодо центральних осей, паралельних основі та висоті.



Малюнок грршр – Перетин у формі прямокутника



Малюнок орв – Перетин круглий і кільцевої форми

Елементарна площа дорівнює dA-b-dy. Тоді момент інерції відносний- але осі z буде

$$J_z - - \int_A y^2 - dA - - \int_{-h/2}^{h/2} b - y^2 - dy - b \quad \frac{y^3}{3}\Big|_{-h/2}^{h/2} - \quad \frac{b-h^3}{12}.$$

Аналогічне рішення щодо осі y. Таким чином

$$J_z - \quad \frac{b-h^3}{12}; \qquad J_b - \frac{h-b^3}{12}. \qquad \text{(оо)}$$

Приклад 3.3. Знайти моменти інерції круглого та кільцевого перерізів, показаних на рис. пппп.

Площа елементарного кільця радіусом ρ та завтовшки $d\rho dA$-2– –d-. Полярний момент інерції кола:

$$J_p - - \int_A -2 - dA - -2 - - \int_0^{D/2} -3 - d - 2 - \quad \frac{-D/2-4}{4} - \frac{-D^4}{32}. \qquad \text{(оо)}$$

Оскільки є зв'язок J_p-J_z-J_y, а для кола J_z-J_y, то J-J_z J_y - $\frac{J_p}{2}$.

Таким чином, полярний та осьові моменти інерції кола рівні

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}; \quad J_z = J_y = \frac{\pi D^4}{64}. \qquad (\text{оре6})$$

Для кільцевого перерізу введемо коефіцієнт пустотілості $c = d/D$. Розмір d є діаметр внутрішнього отвору кільця.

Полярний момент кільця буде

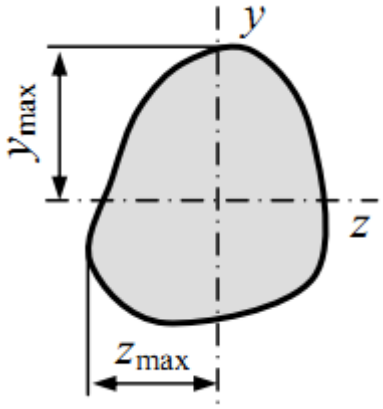
$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32}(1 - c^4). \qquad (\text{Лнн})$$

Осьові моменти кільця рівні

$$J_z = J_y = \frac{\pi D^4}{64}(1 - c^4). \qquad (\text{оооо})$$

3.6. Момент опору

Момент опору – відношення моменту інерції до відстані до найвіддаленішої точки перерізу (рис. 3.ждопвор).



Малюнок 3.Аюбопщ - Визначення моменту опору

У розрахунках на вигин використовують *осьові моменти опору*

$$W_z = \frac{J_z}{y_{max}}; \qquad W_y = \frac{J_y}{z_{max}}. \qquad (78г)$$

Наприклад, для прямокутного перерізу

$$W_z = \frac{J_z}{y_{max}} = \frac{2b \cdot h^3}{12h} = \frac{b \cdot h^3}{6}; \qquad W_y = \frac{J_y}{z_{max}} = \frac{2h \cdot b^3}{12b} = \frac{h \cdot b^3}{6}. \qquad (\text{рврр})$$

У розрахунках на міцність при крученні перерізів круглого профілю використовують полярний момент опору

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}}. \qquad (\text{ТОВ})$$

Так, для кола та кільця відповідно

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}} = \frac{\pi D^4}{32} : \frac{D}{2} = \frac{\pi D^3}{16}; \quad W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}} = \frac{\pi D^4}{32} : \frac{D}{2}(1 - c^4) = \frac{\pi D^3}{16}(1 - c^4). \qquad (\text{рр})$$

Примітка. Для перерізів некруглого профілю, наприклад прямокутного, моменти інерції та моменти опору обчислюють за спеціальними формами.

лам, що включають висоту та ширину профілю, а також коефіцієнт, що залежить від відношення висоти до ширини.

4. РОЗРАХУНОК МІЦНОСТІ ПРИ ТИПОВИХ НАГРУДЖЕННЯХ

4.1. Розтягування та стиск

Під дією зовнішньої сили Q, що діє на виріб перетином S у ньому виникають певні напруження та деформації. У плоских перерізах, виділених від місця застосування зовнішньої сили на відстані більше, ніж діаметр виробу, напруга розподіляється за перерізом практично рівномірно.

Напруга, що виникає у поперечному перерізі, визначається за формулою

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

Величина σ є нормальна напруга, що діє в перерізі, і є питомим навантаженням на одиницю площі поперечного перерізу. Величина напруги вимірюється в Паскалях (Н/м^2).

При розтягуванні поздовжні волокна отримують відносне подовження

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0},$$

де Δl - абсолютна величина зміни розміру вихідної деталі;

l_0 - Початковий розмір деталі.

Поперечні розміри зменшуються та величину $\varepsilon_п = \frac{|d_k - d_0|}{d_0}$ називають поперцевою деформацією.

Як показує досвід між поздовжньою та поперечною деформацією дотримується відношення

$$\varepsilon_п = \mu \varepsilon,$$

де μ - безрозмірний коефіцієнт пропорційності, званий коефіцієнтом Пуассона.

Величина μ характеризує властивості матеріалу та визначається експериментально. Для всіх матеріалів числове значення μ лежить у межах 0,25...0,35 і теоретично не може перевищувати 0,5.

До певного навантаження відносне подовження пропорційне напрузі (закон Гука-1676)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

де Е - коефіцієнт, що залежить від матеріалу і температури, званий модулем упру гості першого роду. Має розмірність напруги.

Модуль пружності є фізичною константою матеріалу та визначається експериментальним шляхом. Для найбільш поширених матеріалів модуль пружності має наступні значення, МПа:

- Сталь (2 ... 2,1) · 10^5
- Мідь (1,2) · 10^5
- Латунь (1 ... 1,2) · 10^5
- Алюміній та його сплави (0,7 ... 0,8) · 10^5
- Дерево (вздовж волокон) (0,08 ... 0,12) · 10^5

Експериментально встановлено, що між відносними поздовжнім та поперечним подовженнями існує залежність

-п- - – -,

де ν- Коефіцієнт поперечного стиснення, т.з. коефіцієнт Пуассона, що залежить від матеріалу.

При розтягуванні використовуються ті самі залежності, проте напруга вважається негативною. Для більшості матеріалів (крім свинцю, сірого чавуну, дерева, залізобетону та ін.) модулі пружності та коефіцієнт Пуассона при стисненні та розтягуванні мають однакові значення.

З формул випливає

$$-l- \frac{Q-l_0}{E-F}. \qquad \text{(Він7)}$$

Твір $E-F$ характеризує жорсткість перерізу виробу при розтяженні-ні, величина $\frac{E-F}{l_0}$ – жорсткість при розтягуванні виробу в цілому (воно дорівнює силе, що викликає подовження, що дорівнює одиниці) чим більше жорсткість, тим менше подовження.

4.2. Зріз та зминання

Деформація зсуву характерна тим, що з усіх можливих навантажень має місце тільки одна поперечна сила, що створює деталі дотичні напруги (рис. 333.333). Практично чиста деформація у вигляді зсуву зустрічається рідко, оскільки вона зазвичай супроводжується іншими деформаціями, найчастіше вигином, що спотворює чисту деформацію зсуву. При навантаженні за схемою, показаною на малюнку, припускаючи рівномірний розподіл напруги за перерізом, випливає, що максимальна напруга дорівнює

$$-\max- . \frac{Q}{S} \qquad \text{(ро)}$$

4.3. Вигин

Вигин– вид деформації, за якої відбувається викривлення осі прямого бруса чи зміна кривизни кривого бруса (рис. 3.рпп).

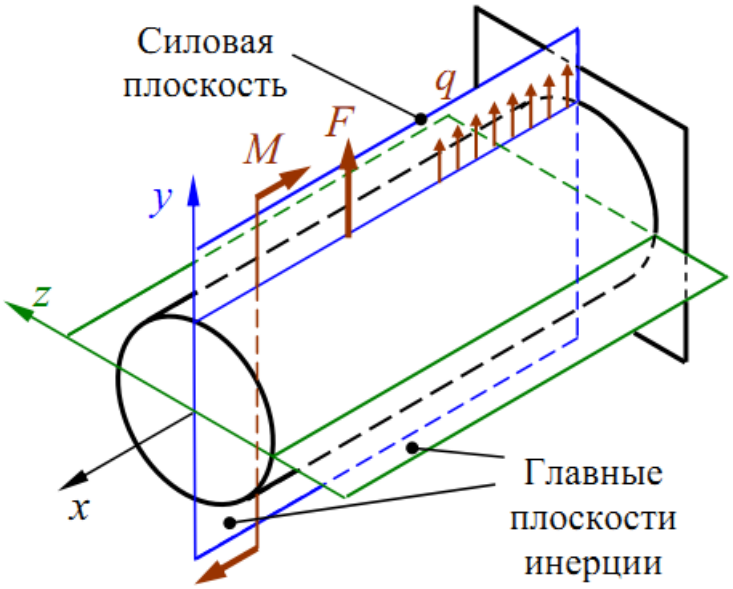
Прямий вигин (плоский вигин)- Випадок вигину, при якому зовнішні сили лежать у головній площині інерції та є перпендикулярними до геометричних осей. Якщо перетин має вісь симетрії, зовнішні сили розташовуються в площині симетрії.

Головна площина інерції- Площина, що проходить через геометричну вісь бруса та головну вісь інерції.

Чистий вигин- вид деформації, при якій із шести внутрішніх зусиль не одно нулю одне - згинальний момент M_z або M_y.

Поперечний вигин- Випадок вигину, при якому в перерізі бруса поряд з згинальним моментом M діє і поперечна сила Q.

Чистий згин характерний тим, що деталь навантажується лише згинальним моментом (рис. 44.44). Якщо, крім згинального моменту, мають місце і поперечні сили, такий вигин називають поперечним.



Малюнок ірп – Схема вигину

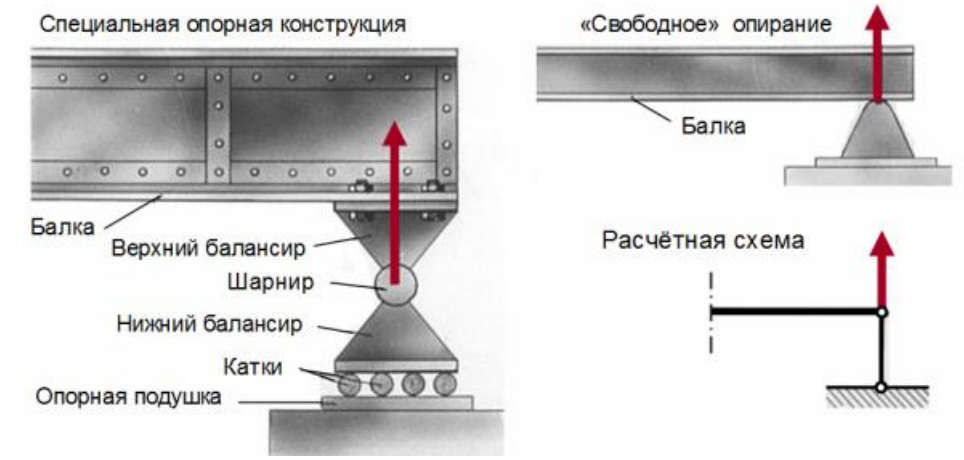
У навантаженому стані балка прогинається так, що частина волокон коротшає, інша частина волокон подовжується. При вигині завжди спостерігається дві зони, в яких виникають стискаючі та розтягувальні напруги, розділені т.з. нейтральною лінією.

Нейтральний шар- Шар волокон, в якому нормальні напруги від- Існують. Нейтральний шар поділяє зони розтягування та стиснення.

Нейтральна вісь– слід перетину нейтрального шару з площиною поперічкового перерізу.

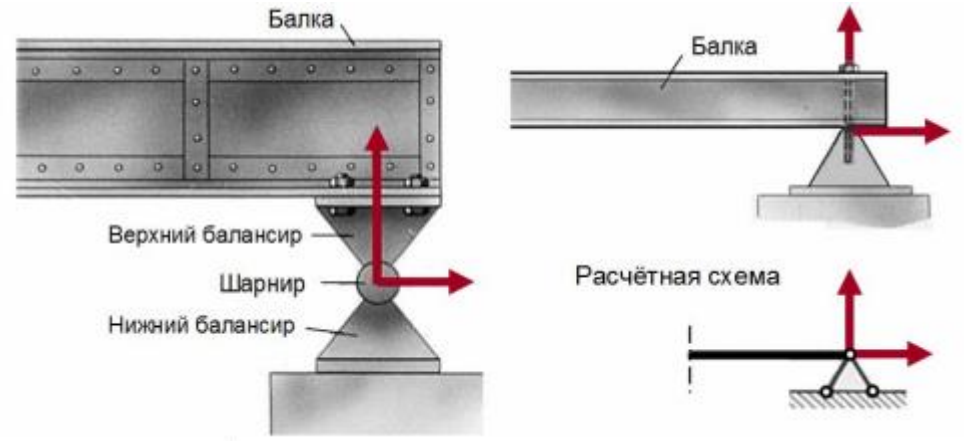
Опори та опорні реакції балок залежать від способу встановлення балок на опорах. Схеми реальних опорних пристроїв можна звести до трьох типів.

Шарнірно-рухлива опора (рис. 4.ерр) допускає поворот опорного перетину та переміщення його в одному напрямку. Опорна реакція перпендикулярна площині опори котків.



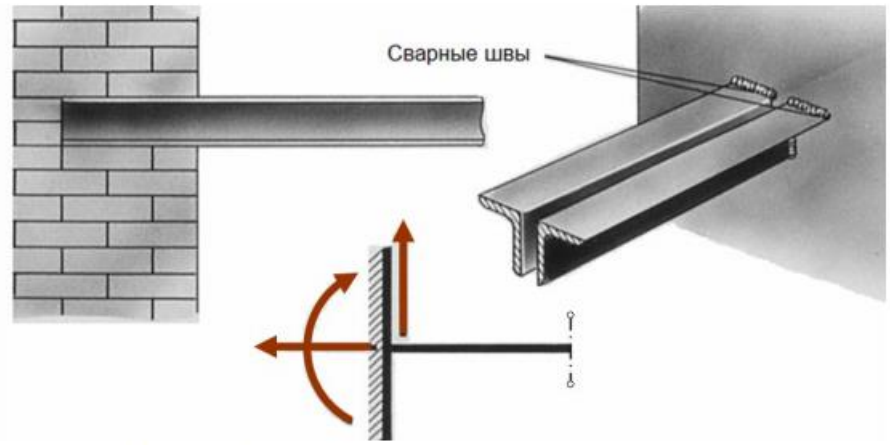
Малюнок ччч – шарнірно-рухлива опора

Шарнірно-нерухома опора (рис. III) допускає тільки поворот опорного перерізу балки. Реакція має дві складові: горизонтальну та вертикальну.



Малюнок аа – Шарнірно-нерухома опора

Жорстка загортання (затискання) не допускає повороту опорного перерізу та будь-яких його переміщень (мал. ppp). Має три реакції: горизонтальну, вертикальну складові, а також опорний момент.



Малюнок аа – Жорстка загортання (затискання)

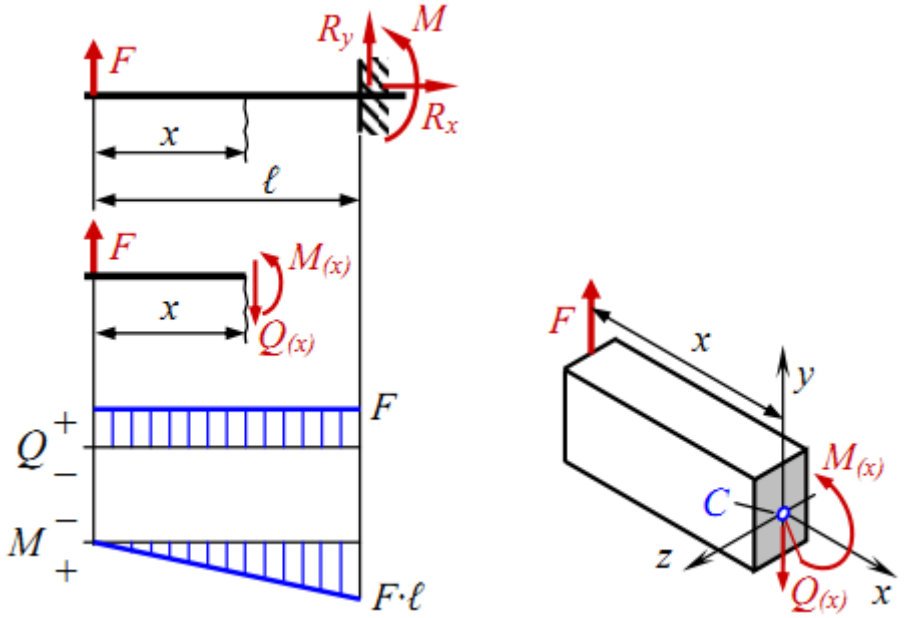
4.3.1. Внутрішні зусилля при згинанні

З шести внутрішніх зусиль, що діють у перерізі в загальному випадку, при плоскому згині лише дві не дорівнюють нулю: сила Q та момент M (зазвичай індекси опускають).

Приймають, що сила Q у перерізі позитивна, якщо її вектори прагнуть обертати частини розсіченої балки протягом годинної стрілки (позитивна поперечна сила викликає позитивну дотичну напругу).

Згинальний момент M у перерізі позитивний, якщо він викликає стиснення верхніх волокон та розтягнення нижніх волокон балки.

Приклад 7.1. Визначити внутрішні зусилля в поперечному перерізі консольної балки, навантаженої зосередженою силою (рис. 7.пп).



Опора (затискання) накладає три зв'язки, що зумовлюють виникнення трьох реакцій: вертикальну R_x, горизонтальну R_y та опорний момент M.

З метою спрощення розрахунку внутрішні зусилля визначаються із боку вільного кінця.

Використовується *метод перерізів*:

- розсікається балка на дві частини;
- відкидається одна з частин;
- Замінюється дія відкинутої частини внутрішніми зусиллями в соотвідповідності з встановленими правилами знаків;
- Складаються рівняння рівноваги, з яких визначаються внутрішньоня зусилля. Система координат поміщена в центр тяжкості перерізу.

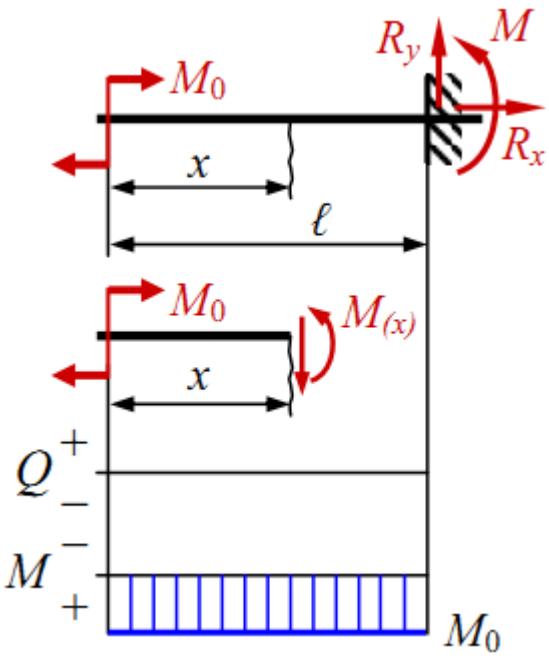
1-а ділянка: 0 - x - l.

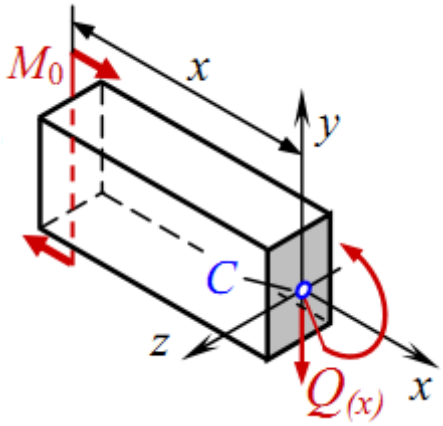
- y - 0; F - Q - x - - 0; - Q - x - - F;

- M_z - 0; - F - x - M - x - - 0; - M - x - - F - x.

Таким чином, поперечна сила $Q(x)$ – функція від абсциси x - Величина постійна.

Приклад 7.2. Визначити внутрішні зусилля у поперечному перерізі консольної балки, навантаженої зосередженим моментом (рис. 7.2).





Внутрішні зусилля у довільному перерізі ділянки 0 -x-l

-y-0; Q-x--0;

-M_z-0; -M_0-M-x--0; -M-x--M_0.

Поперечна сила відсутня, згинальний момент – величина стала; має місце чистий вигин.

4.3.2. Загальний підхід до визначення внутрішніх зусиль при згинанні

У балці нескінченної протяжності початок координат вибирається на лівому вільному кінці (рис. 7.33). внутрішні зусилля знаходимо методом перерізів.

-y-0; $\quad -\sum_{i=1}^{n} F_i - \int_0^x q\,dx - Q - x - 0.$

Звідси

$$Q - x - -\sum_{i=1}^{n} F_i - \int_0^x q\,dx.$$

Поперечна сила в довільному перерізі дорівнює сумі алгебри всіх зовнішніх сил, що діють по один бік від перерізу.

-M-x--0; $-M_j - \sum_{j=1}^{m} F_i - x - a_i - \left| -\sum_{i=1}^{n} C_q - q - x - dx - M - x - \int_0^x -0.\right.$

Звідси

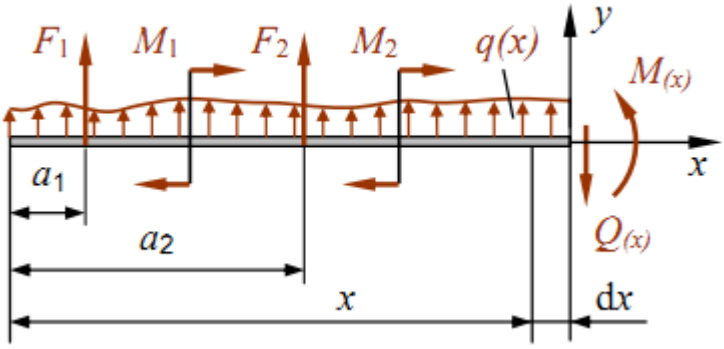


Рисунок 7.33 – Схема визначення внутрішніх зусиль

з

Тут $З_q$- множник, що має сенс координати центру тяжкості розбра- діленого навантаження.

Згинальний момент у довільному перерізі дорівнює сумі алгебри моментів від усіх зовнішніх сил, що діють по один бік перерізу *x*, узятих щодо центру тяжкості перерізу, що розглядається.

Правила перевірки побудови епюр сил та моментів

Нагадуємо, геометричний зміст першої похідної деякої функції – тангенс кута нахилу дотичної до кривої, що відображає цю функцію, та позитивним напрямом осі абсцис. Встановлено такі правила перевірки побудови епюр.

1. На ділянках, вільних від розподіленого навантаження, епюра *Q* обмежена прямими лініями, паралельними до базової, (поперечна сила постійна), а епюра *M* – похилими (згинальний момент змінюється по лінійному закону).

2. На ділянці з рівномірно розподіленим навантаженням епюру *Q*- Похила пряма, а епюра *M* – парабола опуклістю у напрямку дії навантаження *q*.
3. У тих перерізах, де до балки прикладені зосереджені сили:
   а) на епюрі *Q* будуть стрибки на величину та у напрямку доданих сил;
   б) на епюрі *M* будуть злами, причому вістря зламу направлено по напряму сили.
4. У перерізах балки, де прикладено зосереджений момент, епюра *M* має стрибок на величину цього моменту. На епюрі *Q* дія пари сил не від- бореться.
5. На ділянках, де сила *Q* більше нуля, момент *M* зростає
6. У тому перерізі, де змінюється епюра, перетинає базисну лінію (поперечна сила *Q* дорівнює нулю), згинальний момент досягає екстремуму. Дотична до лінії, що обмежує епюру *M* у цьому перерізі, парал- лельна осі епюри.

7. На кінцевій шарнірній опорі поперечна сила дорівнює реакції цієї опори, а згинальний момент дорівнює нулю, якщо в опорному перерізі не прикладена пара сил.
8. У защемленому кінці балки (загортання) значення і рівні опорної реакції та опорного моменту.

4.3.3. Нормальна напруга при згинанні

Зміна нормальних напруг у волокнах довільного перерізу описується рівнянням О.Нав'є

$$\sigma = \frac{M_z y}{J_z}. \qquad (77)$$

З цієї формули випливає (рис.77):

- центр тяжкості перерізу є початком координат для аналізу напряже- ній та приведення сил;
- напруги згину залежать від значень згинального моменту, моменту інерції перерізу та координат точок;
- напруги в будь-якій точці, що лежить на однаковій відстані від нейтральній лінії, що рівні між собою;
- найбільші за величиною напруги виникають у точках, найбільш уда- ленних від нейтрального шару.

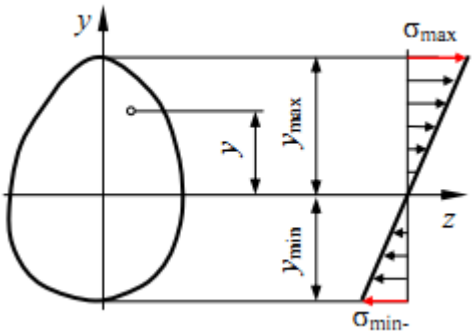


Рисунок 77 – Наслідки з формули Навье

Ставлення J_z/y_{max} називається моментом опору перерізу при згинанні і позначається W_x

$$W_z = \frac{J_z}{y_{max}}. \qquad (7799)$$

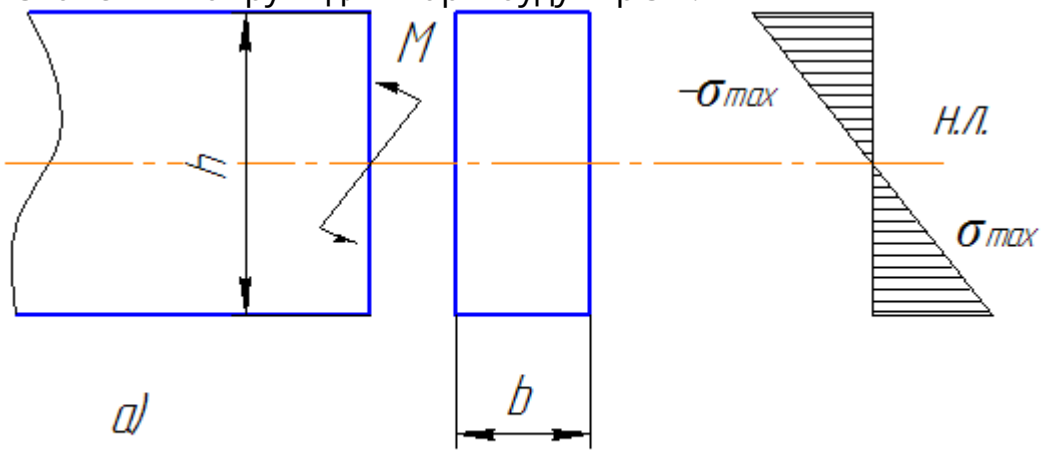
Таким чином

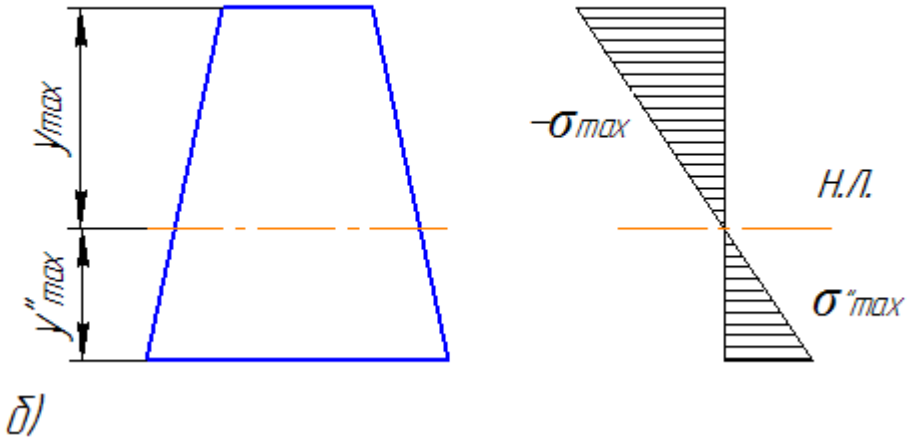
$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_z}. \qquad (363455)$$

Очевидно, для будь-якого перерізу, що має горизонтальну вісь симетрії (мал.*а*), можливий єдиний момент опору при вигині в площині перпендикулярної осі*x*, Який визначається за формулою (7799). Якщо перетин не має горизонтальної осі симетрії (рис. 333,*б*) слід розрізняти два моменти опору

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} \quad \text{і} \quad W''_x = \frac{J_x}{y''_{max}}$$

Епюра нормальних напруг в останньому випадку не буде симетричною, оскільки значення напруги для шарів будуть різні.





Мапці – розподіл нормальних напруг по перерізу

У загальному випадку поперечного згину, коли в перерізах стрижня, крім згинального моменту*M*, діють також поперечні сили*Q*, у перерізі балки виникають не тільки нормальні*σ*, а й дотичні напруги*τ*. Максимальні значення дотичних напруг мають місце при*y*= 0 і рівні (формула Журавського)

$$\tau_{max} = \frac{Q \cdot S_{max}}{J_x \cdot b}, \quad (888)$$

деS_{max}– максимальне значення статичного моменту перерізу щодо нейтральної лінії тієї частини площі, яка розташована вище або нижче за неї;

b- Ширина перерізу в аналізованому шарі матеріалу.

Статичний момент перерізу визначається за формулами $S_x = F \cdot y_c$, $S_y = F \cdot x_c$.

Тут зазначено:

- F- Площу фігури;
- y_c, x_c– відповідно координати центру тяжкості перерізу щодо аналізованої осі.

З рівняння кривої при згинанні випливає – деформація балки при згинанні виражається кривизною її геометричної осі

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{W \cdot J_z}. \quad (66)$$

Це закон Гука при згинанні. З цього рівняння випливає:

- момент інерції характеризує здатність бруса чинити опір іскрив- лення залежно від розмірів та форми поперечного перерізу. Чим більше значення J_z при заданій величині M тим більшим виявиться ра- діус кривизни нейтрального шару;
- модуль пружності характеризує здатність бруса чинити опір іс- кривлення залежно від роду матеріалу;
- Твір EJ_z називають жорсткістю перетин при згинанні.

Приклад 7.3. Побудувати епюру дотичних напруг для прямокутного перерізу (рис.7.3).

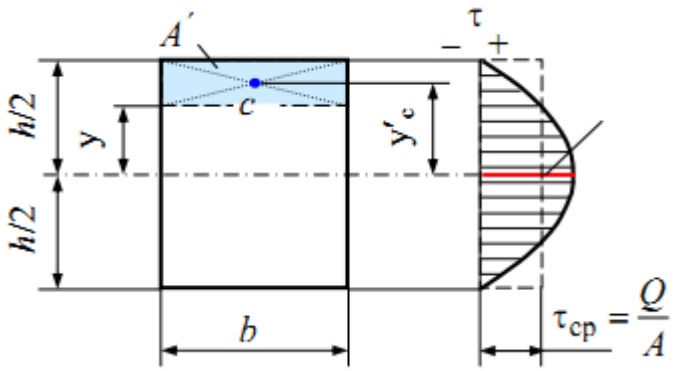


Рисунок 7.3 – Епюра дотичних напруг для прямокутного перерізу

Момент інерції перерізу

$$J_z = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Статичний момент площі відсіченої частини перерізу

$$S_z = A' \cdot y'_c.$$

Оскільки

$$A' = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right); \quad y'_c = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right), \text{ тоді}$$

$$S_z' = \frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right).$$

S_z змінюється за параболічним законом та визначає характер зміни дотичної напруги

$$\tau = \frac{3Q}{2b \cdot h} \cdot \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right).$$

При $y = 0$ (на нейтральній осі) $\tau = \frac{3Q}{2A}$.

При $y = h/2$ (на периферії) $\tau = 0$.

4.3.4. Переміщення в балках при прямому згинанні

Основні поняття

При дії на балку зовнішніх сил, розташованих в одній з головних площин інерції та діючих за нормаллю до її осі, має місце прямий вигин: викривлення осі балки відбувається силою площини. Вісь деформованої балки називається ***пружною лінією***.

Деформація балки характеризується двома величинами (рис. 4.44): 1) прогином, тобто переміщенням y точки осі балки перпендикулярно до її початкової не- деформованої осі та 2) кутом повороту θ, тобто кутом, на який повертається кожне поперечний переріз навколо нейтральної осі по відношенню до свого початкового положення.

Рівняння $y = f(x)$, що виражає залежність між загином y при заданий- ного навантаження та координатою x, називається ***рівнянням пружної лінії***.

На підставі відомого положення про геометричний зміст похідної $tg\tau = dy/dx$.

Між кривизною пружної лінії, згинальним моментом і жорсткістю поперечного перерізу балки при прямому згині існує залежність, яка випливає з відомої формули для кривизни плоскої кривої

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{M}{E \cdot J_z}.$$

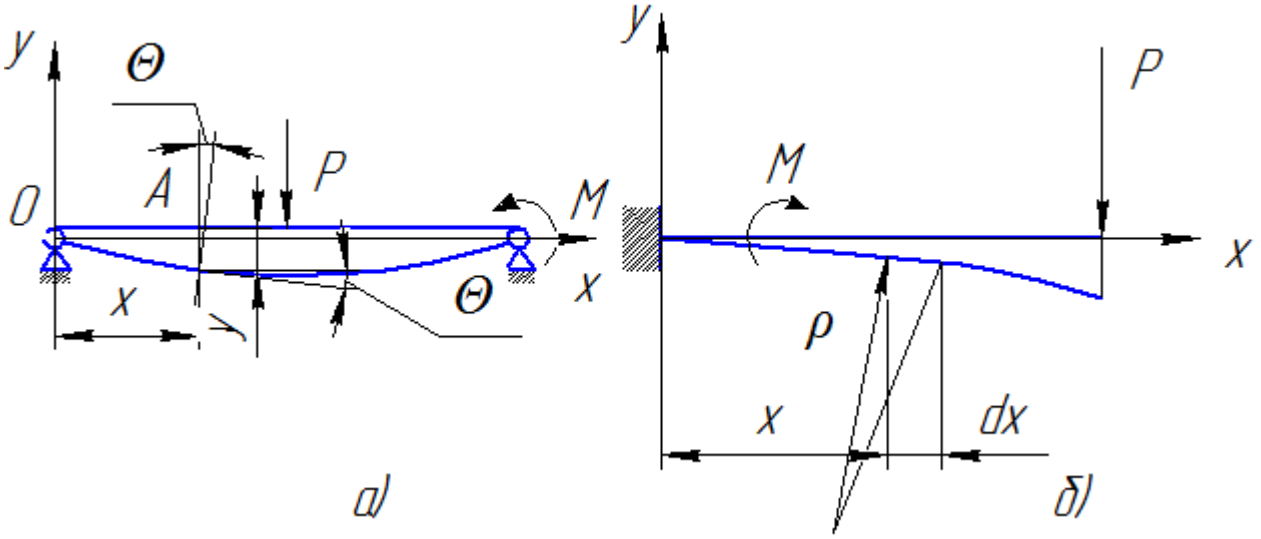
Тут ρ – радіус кривизни пружної лінії балки в точці, що знаходиться на відстані від початку координат (рис. 4.44, *б*).

Тоді є

$$y'' = tg\alpha = \frac{M}{E \cdot J_z \cdot \cos\alpha}.$$

На практиці зазвичай кути повороту поперечних перерізів $\alpha < 1^\circ$ тому можна прийняти, що $tg\alpha = \alpha$. тоді $\tau = dy/dx$ що призводить до лінеаризації рівнянь, а саме рівняння набувають вигляду

$$y'' = \frac{M}{E \cdot J_z}, \quad y' = \theta, \quad \theta = \frac{M}{E \cdot J_z}. \qquad \text{(НННН)}$$



Малюнок 4.44 – Визначення прогину балки

Шляхом інтегрування наведеного рівняння одержують вирази для визначення кутів повороту та прогинів перерізів балки.

Внаслідок дворазового інтегрування диференціального рівняння пружної лінії з'являються постійні інтегрування, що підлягають подальшому визначенню. При n ділянок навантаження кількість постійних дорівнює $2n$.

Для їх визначення використовують умови закріплення кінців балки, а також властивості плавності та безперервності пружної лінії на межах ділянок. З цих умов випливає, що в кожному поперечному перерізі балки значення прогину та кута повороту будуть єдиними.

При декількох ділянках навантаження визначення постійних для кожного з них викликає деякі складності. Існує кілька методів прискореного визначення постійних:

1. Метод безпосереднього інтегрування. Застосовуючи спеціальні методи при інтегруванні наближеного диференціального рівняння пружної лінії, можна домогтися рівності постійних на ділянках та звести завдання за будь-якої кількості ділянок до знаходження лише двох постійних;

2. спосіб початкових властивостей;

3. енергетичний метод (метод з допомогою інтегралу Мора).

Визначення переміщень методом початкових параметрів

Метод початкових параметрів дозволяє записати одне рівняння прогинів (або кутів повороту перерізів), придатне для всіх ділянок балки, тому називається універсальним або узагальненим.

Універсальне рівняння пружної лінії, що враховує всі основні типи навантажень – зосереджений момент, зосереджену силу, розподілену

навантаження змінної інтенсивності – має для балки при зазначених напрямках навантажень та осей (рис. 8.8) наступний вид:

$$y = y_0 - \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EJ_z} - \frac{R_0 x^3}{6EJ_z} - \frac{T(x-a)^2}{2EJ_z}\Big\|_{x-a} - \frac{P(x-b)^3}{6EJ_z}\Big\|_{x-b} - \int_{c_1}^{c_2} \frac{q(\xi)(x-\xi)^3 d\xi}{6EJ_z}. \quad \text{(кгкнл)}$$

Тут y_0, θ_0, M_0, R_0 - Початкові параметри; y_0 - прогин на початку координат; θ_0 - Кут повороту початкового перерізу; M_0 – згинальний момент на початку координат (опорі балки); R_0 - Поперечна сила в тому ж перерізі (опорна реакція). Параметри y_0, θ_0 – геометричні фактори, а M_0, R_0 - Силові.

Початкові параметри y_0, θ_0, M_0, R_0 можуть приймати будь-які значення: позитивні, негативні і рівні нулю. Визначають ці величини, виходячи з умови закріплення балки, а також навантаження лівого кінця, прийнятого за початок координат.

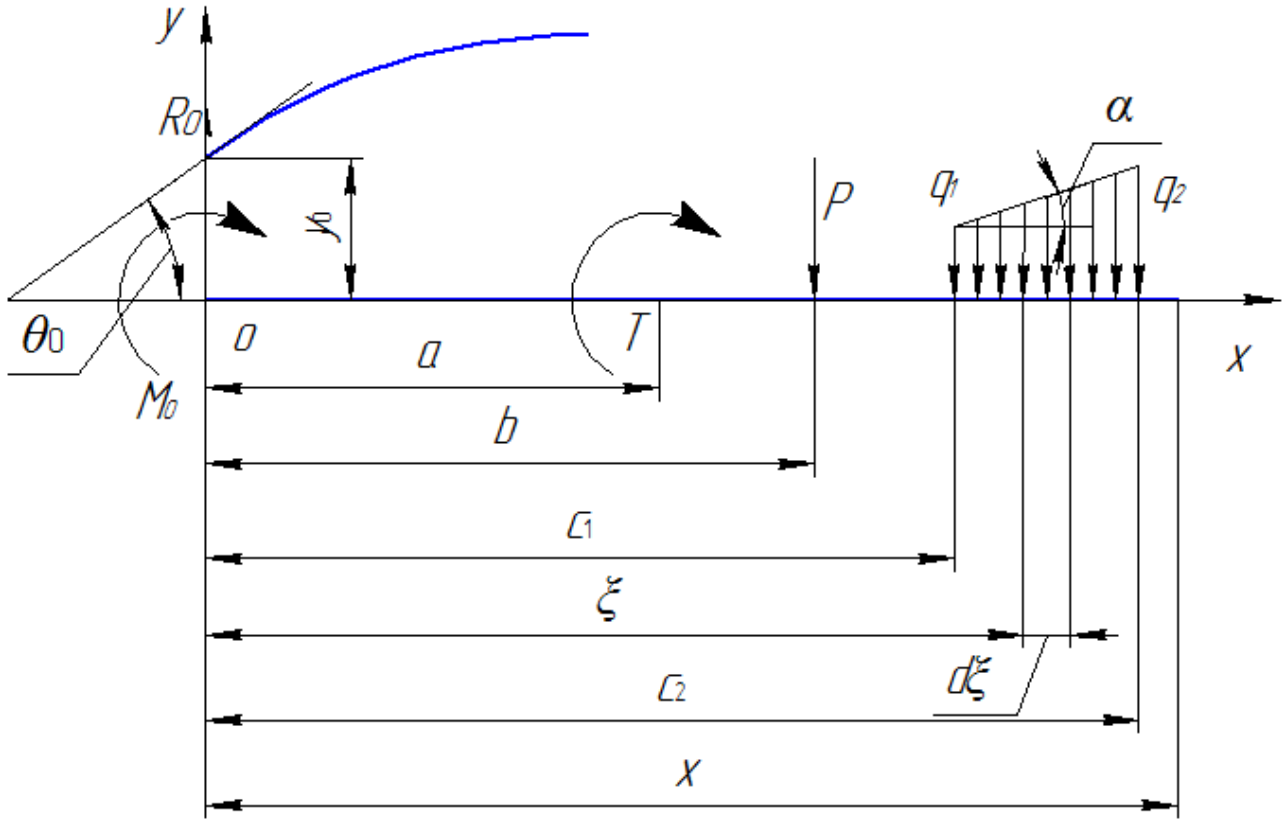


Рисунок 8.8 – Визначення універсального рівняння пружної лінії

На рис. 8.8 усі початкові параметри позитивні: y_0 відкладений вгору від осі; θ_0 - Поворот перерізу передбачається проти годинникової стрілки; M_0 - момент спрямований за годинниковою стрілкою; R_0 - Сила реакції спрямована вгору. Що стосується інших доданків у рівнянні, то їх знак визначається залежно від того, чи створює це навантаження позитивний чи негативний згинальний момент у перерізі з абсцисою x.

Знак $\|_{x-a}$ (переривник) показує, що відповідне доданок необ-

Ходімо враховувати тільки при $x > a$. Це означає, що при визначенні прогину в

якомусь перетині з координатою x до рівняння входять лише навантаження, що лежать ліворуч від цього перерізу.

Останній доданок, що входить до рівняння, відображає вплив розподіленого навантаження змінної інтенсивності $q(\xi)$, де z_1 - – z_2 фіксує положення цього навантаження на балці.

Якщо прикладено навантаження, розподілене за лінійним законом (за законом трапеції), то універсальне рівняння прогинів спрощується і набуває вигляду:

$$y = y_0 - \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EJ_z} + \frac{R_0 x^3}{6EJ_z} + \frac{T(x-a)^2}{2EJ_z}\Big\|_{x>a} +$$

$$+ \frac{P(x-b)^3}{6EJ_z}\Big\|_{x>b} + \frac{q_1(x-c_1)^4}{24EJ_z}\Big\|_{x>c_1} + \frac{q(x-c_2)^4}{24EJ_z}\Big\|_{x>c_2} \qquad \text{(шшш)}$$

$$+ \frac{k(x-c_1)^5}{120EJ_z}\Big\|_{x>c_1} + \frac{k(x-c_2)^5}{120EJ_z}\Big\|_{x>c_2}.$$

Тут $k = \dfrac{q_2 - q_1}{c_2 - c_1} = tg\alpha$.

При постійному розподіленому навантаженні ($q_1 = q_2$) дві останні складові рівняння виключаються.

Отже, універсальне рівняння прогинів містить такі доданки:

- чотири – для початкових параметрів;
- одне – для зовнішніх моментів;
- одне – для зосереджених сил;
- чотири – для навантаження, розподіленого за лінійним законом.

Усі складові знаходяться під знаком суми, що поширюється на всі навантаження цього виду.

Рівняння кутів повороту може бути легко отримано з рівняння прогинів шляхом обчислення похідної за координатою x.