4.4. Кручение

Кручение – вид сопротивления, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один силовой фактор – крутящий момент *T*. Остальные силовые факторы отсутствуют.

Брус, работающий только на кручение, называют валом.

Принято внешние силовые факторы называть *вращающими* или *скручивающими* моментами и обозначать *M*, внутренние усилия – *крутящим* моментом и обозначать *T* (от англ. ***torsion***, ***torque***).

В расчетах на прочность и жесткость при кручении знак крутящего момента значения не имеет, но для удобства построения эпюр принято правило: крутящий момент считается положительным, если при взгляде в торец отсеченной части бруса от стремится вращать сечение против часовой стрелки.

4.4.1. Внутренние усилия при кручении

На основании метода сечений крутящий момент в произвольном поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения (рис.5.1).

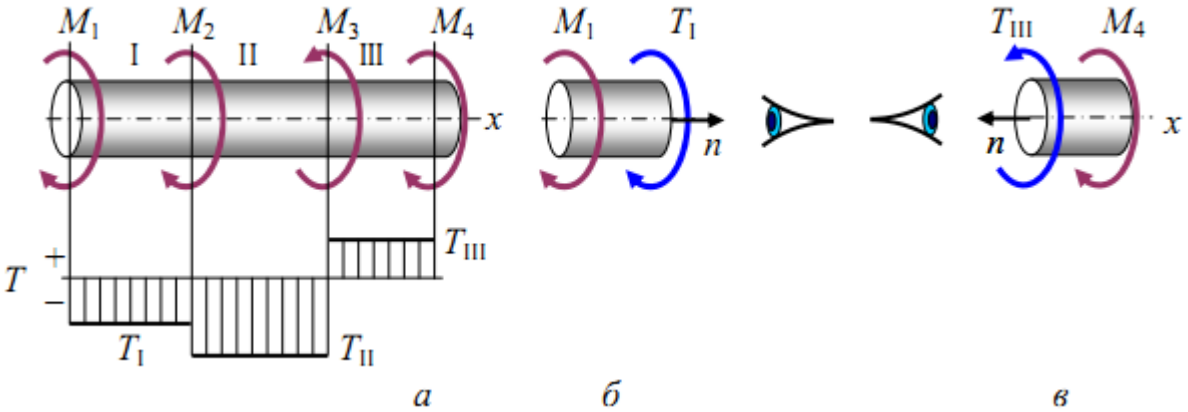

Рисунок 5.1 – Эпюра внутренних усилий при кручении

На рис. 5.1, б: $\sum M_x = 0;\quad T_1 + M_1 = 0;\ M_1 = T_1.$

На рис. 5.1, *в*: $\sum M_x = 0;\quad T_{III} - M_4 = 0;\ T_{III} = M_4.$

Во всех случаях эпюрах внутренних усилий строят на осевой линии бруса. Величину силового фактора откладывают по нормали к оси

4.4.2. Напряжения при кручении

Теория брусьев, имеющих круглое сплошное или кольцевое сечение, основана на следующих положениях.

Поперечные сечения бруса плоские до деформации остаются плоскими и в деформированном состоянии – гипотеза твердых дисков (Бернулли).

Радиусы поперечных сечений не искривляются и сохраняют свою длину. Форма сечения остается неизменной.

Расстояния между поперечными сечениями вдоль оси бруса не изменяются.

Для установления связи напряжений с внутренними усилиями рассматриваются несколько этапов решения задачи.

4.4.3. Условие равновесия – статическая сторона задачи (рис. 5.2, в)

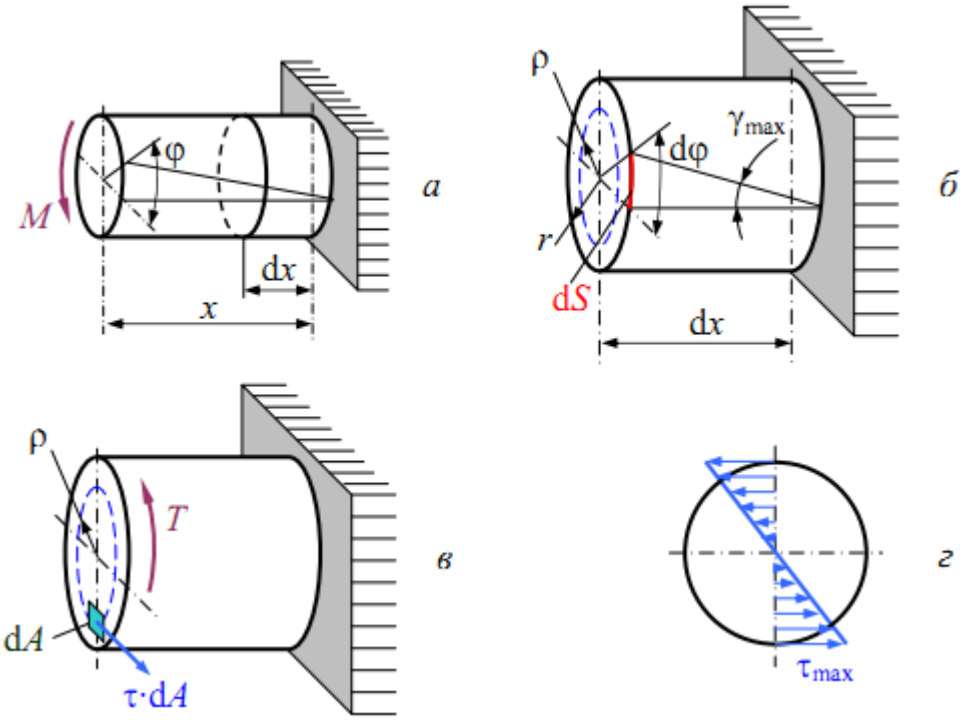

Рисунок 5.3 – Условие равновесия бруса при кручении

Если $\tau \cdot dA$ – элементарное усилие; $\rho(\tau \cdot dA)$ – элементарный крутящий момент, то равнодействующий момент касательных напряжений будет

$$T = \int \rho \cdot \tau \cdot dA. \qquad (5.5)$$

Для нахождения сдвигающих напряжений рассматривается физическая сторона задачи.

4.4.4. Физическая сторона задачи – закон Гука при сдвиге

Из теории процесса сдвига известно, что сдвигающие напряжения с деформацией сдвига взаимосвязаны законом Гука при сдвиге

$$\tau = G \cdot \gamma. \qquad (55)$$

4.4.5. Деформационная (геометрическая) сторона задачи

Деформация сдвига γ определяется из соотношений (рис.5и66). Левый торец бруса длиной x под действием внешнего скручивающего момента M повернется на угол φ. В элементе длиной dx будет аналогичный угол $d\varphi$. Образующая цилиндра отклоняется от исходного положения на угол γ. На поверхности элемента радиусом ρ угол γ принимает максимальное значение

$$\gamma_{\max} \approx tg\gamma_{\max} = \frac{dS}{dx} = \frac{r \cdot d\varphi}{dx}. \qquad (ввв)$$

4.4.6. Математическая сторона задачи

Рассмотренные этапы объединяет математическая сторона задачи.

Используя полученные ранее зависимости, находится уравнение для определения напряжения в произвольной точке сечения

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{J_p}. \qquad \text{(ввв2с)}$$

Закон распределения касательных напряжений – линейный. В центре $\tau = 0$, так как $\rho = 0$; на периферии $\tau = \tau_{\max}$, так как $\rho_{\max} = r$ (рис.44, *г*).

Так как $J_p / \rho_{\max} = \frac{J_p}{r} = W_p$, условие прочности при кручении можно представить как

$$\tau = \frac{T}{W_p} \le [\tau], \qquad \text{(гг)}$$

где и – полярный момент сопротивления поперечного сечения.

Величины полярного момента сечения и полярного момента сопротивления определяется в зависимости от формы поперечного сечения. Для сечения в форме кольца (рис. 5.555, *а*) полярный момент инерции равен

$$J_p = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{32},$$

а полярный момент сопротивления

$$W_p = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{16D}.$$

Для прямоугольного сечения (рис. 4.555, *б*) полярные моменты равны

$$J_p = J_x + J_y,$$

$$J_x = \frac{b \cdot h^3 - b_1 \cdot h_1^3}{12}; \qquad J_y = \frac{h \cdot b^3 - h_1 \cdot b_1^3}{12};$$

$$W_x = \frac{b \cdot h^3 - b_1 \cdot h_1^3}{6h}; \qquad W_y = \frac{h \cdot b^3 - h_1 \cdot b_1^3}{6b}.$$

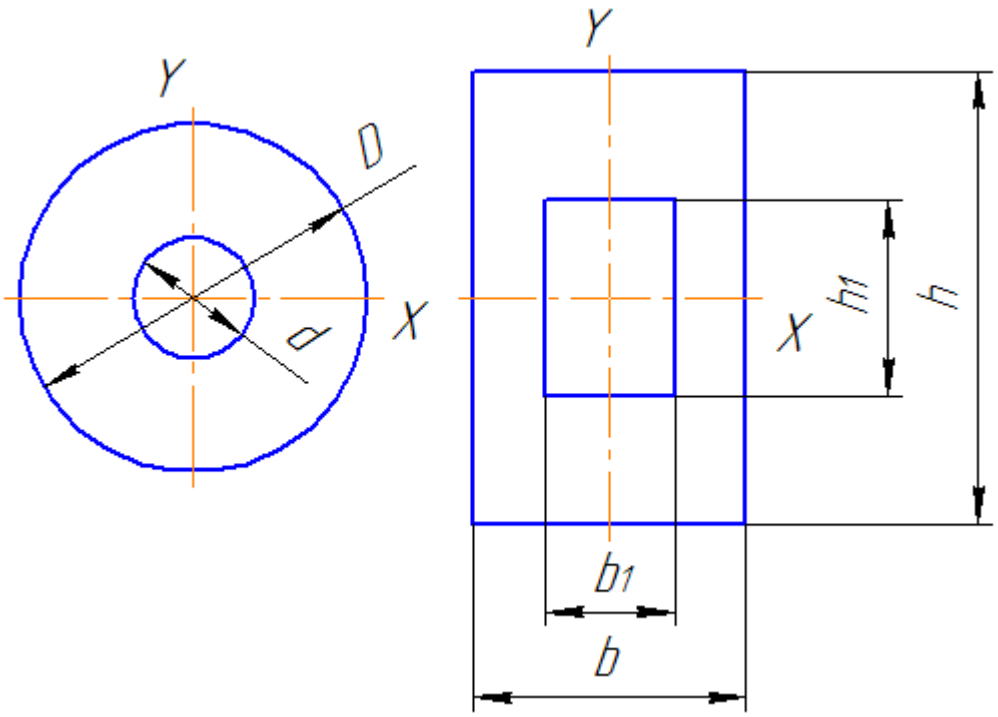

Рисунок 5.4 – Определение полярного момента сопротивления при кручении

4.4.7. Деформация вала при кручении

Из уравнения

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{G \cdot J_p}$$

находится угол закручивания элементарного участка

$$d\varphi = \frac{T}{G \cdot J_p} dx .$$

Тогда угол закручивания всего вала

$$\varphi = \int_l \frac{T}{G \cdot J_p} dx .$$

Для вала постоянной жесткости сечения (произведение ***G·Jp***) на длине и постоянного крутящего момента угол закручивания вала

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot J_p} \qquad .(aaa)$$

Эту зависимость называют ***закон Гука при кручении***. Произведение ***G·Jp*** называют ***жесткостью сечения при кручении***.

Между модулями упругости *E* и *G* всегда соблюдается отношение

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} .$$

При $\mu = 0{,}25 \ldots 0{,}35$ $G = (0{,}375 \ldots 0{,}4)E$.

4.4.8. Расчет валов на жесткость

За меру жесткости вала принимают относительный угол закручивания, то есть угол, приходящийся на единице длины. Тогда условие жесткости записывается

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{T}{G \cdot J_p} \le [\theta].(555)$$

Допустимый угол $[\theta]$ имеет размерность рад/м.

Обычно чаще используют условие

$$\theta = \frac{T}{G \cdot J_p} \cdot \frac{180}{\pi} \le [\theta].(\text{ууу})$$

Допускаемое значение угла закручивания зависит от назначения вала и принимается равным $[\theta] = (0.3 \ldots 1{,}0)$ град/м.

Пример 5.1. Из условия прочности и жесткости выполнить проектный расчет: определить диаметр вала (рис. 5.5, *а*), построить эпюры углов закручивания вала.

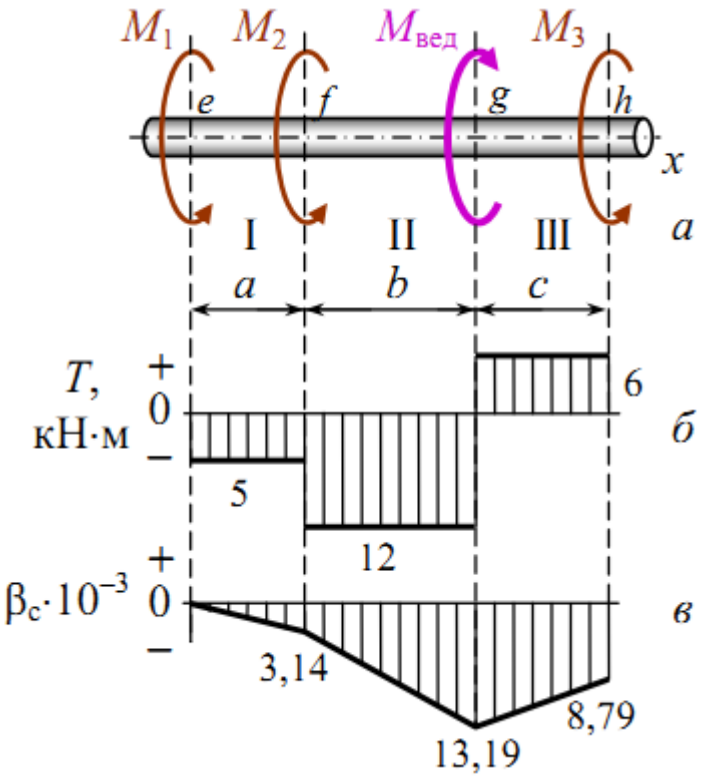

Рисунок 5.1 – Расчет прочности и жесткости вала, подвергаемого кручению

Исходные данные: M_1 = 5 кН·м; a = 0,6 м;
M_2 = 7 кН·м; b = 0,8 м;
M_3 = 6 кН·м; c = 0,8 м;
[σ] = 160 МПа; [Θ] = 0,8 град/м.

1. Определение внутренних усилий

Значение ведущего момента находится из условия равновесия вала

$$\sum M_x = 0;$$

$$M_{вед} = M_1 + M_2 + M_3 = 5 + 7 + 6 = 18 \text{кН} \cdot \text{м}.$$

Для расчетов на прочность и жесткость необходимо определить положение опасных сечений и величины крутящих моментов, действующих в этих сечениях вала. Воспользовавшись методом сечений находятся внутренние усилия и строится эпюра крутящих моментов (рис. 5.1, *б*). Из рисунка следует, что опасными сечениями являются все сечения на участке II, где действует скручивающий момент $T_{\max} = 12$ кН·м.

2. Проектный расчет вала сплошного сечение

В соответствии с рекомендациями допускаемое касательное напряжение по третьей теории прочности принимается равной $[\tau] = 0{,}5[\sigma] = 0{,}5 \cdot 160 = 80$ МПа.

Из условия прочности и жесткости при кручении определяются требуемые значения полярных моментов сопротивления

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \le [\tau], \Rightarrow W_p = \frac{T_{\max}}{[\tau]} = \frac{12000}{80 \cdot 10^6} = 0{,}00015 \text{ м}^3 = 1{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

$$\Theta = \frac{T_{\max}}{G \cdot J_p} \le [\Theta], \Rightarrow J_p = \frac{T_{\max}}{G \cdot [\Theta]} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{12000 \cdot 180}{80 \cdot 10^9 \cdot 0{,}8 \cdot \pi} = 1{,}074 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Для сплошного круглого сечения $W_p = \dfrac{\pi \cdot D^3}{16}$, тогда минимальный диаметр сечения для обеспечения прочности равен

$$D_{пр} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_p}{\pi}} = 0{,}0914 \text{м}.$$

Момент инерции сплошного круглого сечения $J_p = \dfrac{\pi \cdot D^4}{32}$, тогда минимальный диаметр сечения для обеспечения жесткости равен

$$D_{ж} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot W_p}{\pi}} == 0{,}1023 \text{ м}.$$

Для обеспечения одновременно прочности и жесткости принимается минимальный диаметр сечения вала не менее 0,1023 м. Принимается стандартный профиль вала диаметром $D_{ст} = 0{,}105$ м.

Площадь поперечного сечения вала $A = \dfrac{\pi \cdot D_{ст}^2}{4} = \dfrac{\pi \cdot 10{,}5^2}{4} = 86{,}8 \text{ см}^2$.

Момент инерции сечения $J_p = \dfrac{\pi \cdot D_{ст}^4}{32} = \dfrac{\pi \cdot 0{,}105^4}{32} = 1{,}193 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$.

Жесткость сечения $G \cdot J_p = 80 \cdot 10^9 \cdot 1{,}193 \cdot 10^{-5} = 0{,}955 \cdot 10 \quad \text{Н} \cdot \text{м}^2$.

Углы закручивания участков вала

$$\varphi_I = \frac{T_1 \cdot a}{G \cdot J_p} = \frac{-5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}6}{0{,}955 \cdot 10^6} = -0{,}00314;$$

$$\varphi_{II} = \frac{T_{II} \cdot b}{G \cdot J_p} = \frac{-12 \cdot 10^3 \cdot 0{,}8}{0{,}955 \cdot 10^6} = -0{,}01005;$$

$$\varphi_{III} = \frac{T_{III} \cdot c}{G \cdot J_p} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 0{,}7}{0{,}955 \cdot 10^6} = 0{,}00440.$$

Углы закручивания характерных сечений вала

$$\beta_0 = 0;$$

$$\beta_I = \varphi_I = -3{,}14 \cdot 10^{-3};$$

$$\beta_{II} = \varphi_I + \varphi_{II} = -(3{,}14 + 10{,}05) \cdot 10^{-3} = -13{,}19 \cdot 10^{-3};$$

$$\beta_{III} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} = -(3{,}14 + 10{,}05 - 4{,}40) \cdot 10^{-3} = -8{,}79 \cdot 10^{-3};$$

Эпюры углов закручивания показаны на рис. 5.1, *в* и *г*.

2.6. Расчет жесткости конструкции