

4.4. Кручення

Кручення - вид опору, при якому в поперечних перерізах бруса виникає тільки один силовий фактор - момент, що крутить T . Інші силові чинники відсутні.

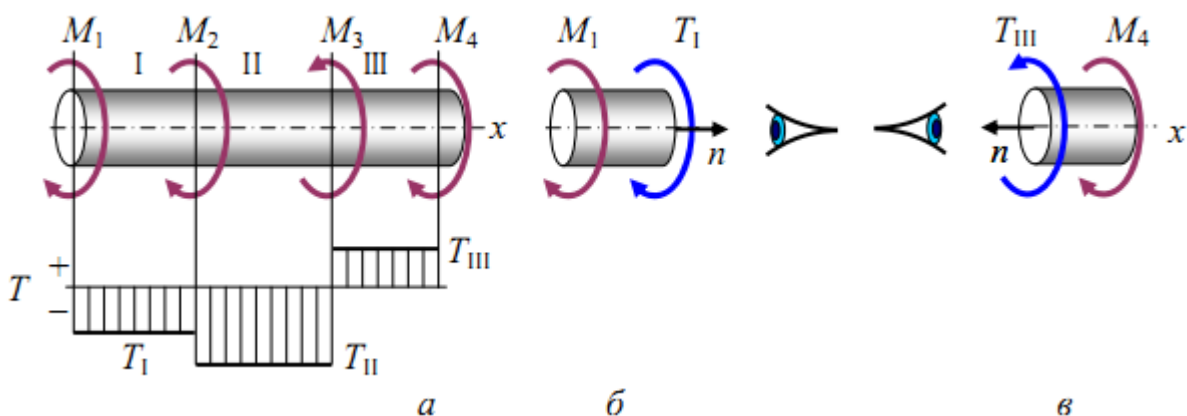
Брус, який працює тільки на кручення, називають валом.

Прийнято зовнішні силові фактори називати *обертаючими* або *скручуючими* моментами та позначати M , внутрішні зусилля - *крутить* моментом і позначати T (Від англ. **torsion, torque**).

У розрахунках на міцність і жорсткість при крученні знак крутного моменту значення не має, але для зручності побудови епюр прийнято правило: крутний момент вважається позитивним, якщо при погляді в торець відсіченої частини бруса прагне обертати перетин проти годинникової стрілки.

4.4.1. Внутрішні зусилля під час кручення

На підставі методу перерізів крутний момент у довільному поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює сумі алгебри зовнішніх скручують моментів, прикладених до бруса по одну сторону від аналізованого перерізу (рис.5.1).



Малюнок 5.1 – Епюра внутрішніх зусиль під час кручення

На рис. 5.1, б: $-M_x=0$; На $T_1-M_1=0$; M_1-T_1 . $T_{III}-M_4$ -
рис. 5.1, в: $-M_x=0$; 0 ; $T_{III}-M_4$.

У всіх випадках епюрах внутрішніх зусиль будують на осьовій лінії бруса. Величину силового фактора відкладають за нормаллю до осі

4.4.2. Напруги при крученні

Теорія брусів, що мають круглий суцільний або кільцевий переріз, ґрунтується на наступних положеннях.

Поперечні перерізи плоскі бруса до деформації залишаються плоскими і в деформованому стані - гіпотеза твердих дисків (Бернуллі).

Радіуси поперечних перерізів не викривляються та зберігають свою довжину. Форма перерізу залишається незмінною.

Відстань між поперечними перерізами вздовж осі бруса не змінюється. Для встановлення зв'язку напруги з внутрішніми зусиллями розглядаються кілька етапів розв'язання задачі.

4.4.3. Умова рівноваги – статичний бік завдання (рис. 5.2, в)

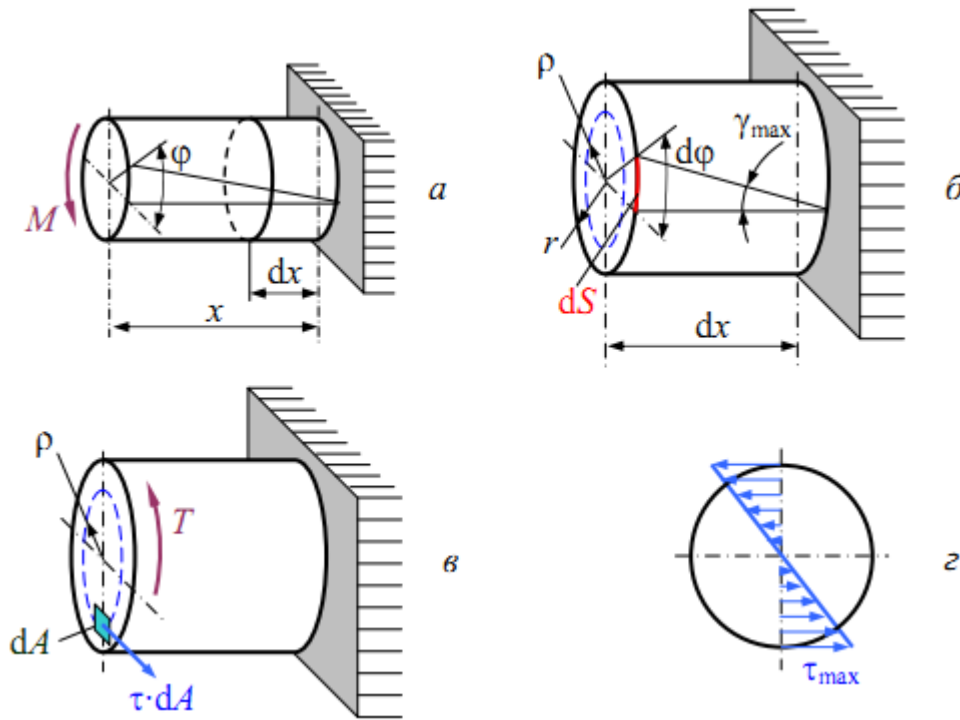


Рисунок 5.3 – Умова рівноваги бруса під час кручення

Якщо dA – Елементарне зусилля; $-dA$ – Елементарний крутний момент, то рівнодіючий момент дотичних напруг буде

$$T = \int r^2 \tau \, dA \quad (5.5)$$

Для знаходження напруг, що зсувають, розглядається фізична сторона завдання.

4.4.4. Фізична сторона завдання – закон Гука під час зсуву

З теорії процесу зсуву відомо, що напруги, що зсувають, з деформацією зсуву взаємопов'язані законом Гука при зрушенні

$$\tau = G \gamma \quad (55)$$

4.4.5. Деформаційна (геометрична) сторона задачі

Деформація зсуву визначається із співвідношень (рис.5i66). Лівий торець бруса завдовжки x під дією зовнішнього скручує моменту M повернеться на кут φ . В елементі завдовжки dx буде аналогічний кут $d\varphi$. Циліндра, що утворює, відхиляється від вихідного положення на куту. На поверхні елемента радіусом ρ куту набуває максимального значення

$$\gamma_{\max} = \rho \frac{d\varphi}{dx} = \frac{r}{\rho} \frac{d\varphi}{dx} \cdot \rho \quad (55b)$$

4.4.6. Математична сторона завдання

Розглянуті етапи поєднує математична сторона завдання. Використовуючи отримані раніше залежності, знаходиться рівняння для визначення напруги у довільній точці перерізу

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{J_p} \quad (\text{ввв2с})$$

Закон розподілу дотичних напруг – лінійний. У центрі – 0, так як $\tau = 0$; на периферії – τ_{\max} , так як $\tau_{\max} = r$ (Рис.44, r).

Оскільки $\tau_{\max} = \frac{T \cdot r}{J_p} = \frac{T \cdot W_p}{J_p}$, умова міцності при крученні можна перед- ставити як

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \leq [\tau] \quad (\text{гг})$$

де W_p – полярний момент опору поперечного перерізу.

Величини полярного моменту перерізу та полярного моменту опору визначається залежно від форми поперечного перерізу. Для перерізу у формі кільця (рис.5.555, а) полярний момент інерції дорівнює

$$J_p = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32},$$

а полярний момент опору

$$W_p = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D}.$$

Для прямокутного перерізу (мал.4.555, б) полярні моменти рівні

$$J_p = J_x + J_y,$$

$$J_x = \frac{b \cdot h^3 - b_1 \cdot h_1^3}{12}; \quad J_y = \frac{h \cdot b^3 - h_1 \cdot b_1^3}{12}$$

$$W_x = \frac{b \cdot h^3 - b_1 \cdot h_1^3}{6h}; \quad W_y = \frac{h \cdot b^3 - h_1 \cdot b_1^3}{6b}$$

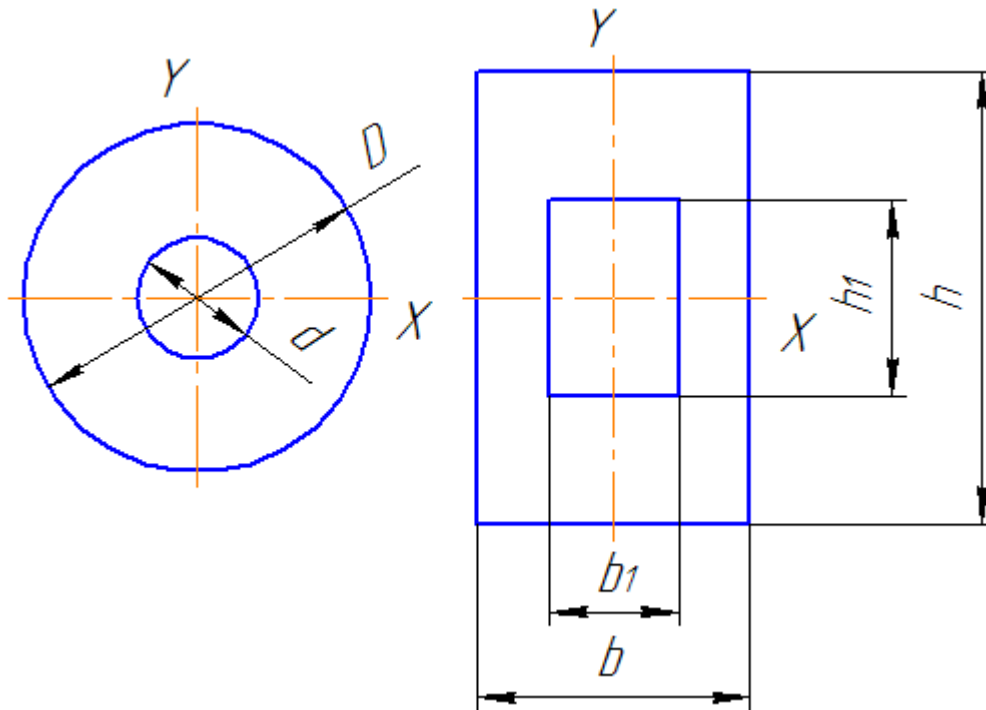


Рисунок 5.4 – Визначення полярного моменту опору під час кручення

4.4.7. Деформація валу під час кручення

З рівняння

$$d\varphi = \frac{T}{GJ_p} dx$$

знаходиться кут закручування елементарної ділянки

$$d\varphi = \frac{T}{GJ_p} dx.$$

Тоді кут закручування всього валу

$$\varphi = \int \frac{T}{GJ_p} dx.$$

Для валу постійної жорсткості перерізу (твір GJ_p) на довжині та постійного крутного моменту кут закручування валу

$$\varphi = \frac{Tl}{GJ_p}$$

. (aaa)

Цю залежність називають **закон Гука при крученні**. Твір GJ_p називають **жорсткістю перерізу при крученні**.

Між модулями пружності E і G завжди дотримується ставлення

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

При $\nu = 0,25-0,35$ $G = 0,375-0,4E$.

4.4.8. Розрахунок валів на жорсткість

За міру жорсткості валу приймають відносний кут закручування, тобто кут, що припадає на одиниці довжини. Тоді умова жорсткості записується

$$\varphi = \frac{T}{GJ_p} \cdot l \quad (555)$$

Допустимий кут має розмірність рад/м.

Зазвичай частіше використовують умову

$$\varphi = \frac{T}{GJ_p} \cdot \frac{180}{\pi} \quad (556)$$

Допустиме значення кута закручування залежить від призначення валу і приймається рівним 0,3-1,0-град/м.

Приклад 5.1.3 умови міцності та жорсткості виконати проектний роз-чет: визначити діаметр валу (рис. 5.5, а), побудувати епюри кутів закручування валу.

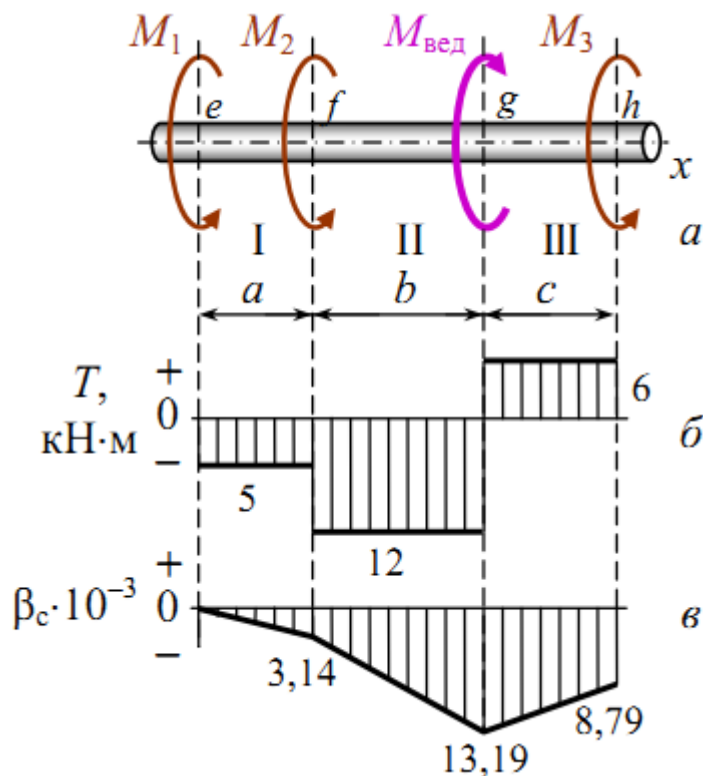


Рисунок 5.1 – Розрахунок міцності та жорсткості валу, що піддається крученню

Вихідні дані: $M_1 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м};$ $a = 0,6 \text{ м};$
 $M_2 = 7 \text{ кН} \cdot \text{м};$ $b = 0,8 \text{ м};$
 $M_3 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м};$ $c = 0,8 \text{ м};$
 $[\sigma] = 160 \text{ МПа};$ $[\Theta] = 0,8 \text{ град/м}.$

1. Визначення внутрішніх зусиль

Значення провідного моменту перебуває з умови рівноваги валу

$$-M_x=0;$$

$$M_{вед} = M_1 - M_2 - M_3 = 5 - 7 - 6 = -18 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для розрахунків на міцність і жорсткість необхідно визначити положення небезпечних перерізів і величини моментів, що крутять, що діють у цих перерізах валу. Skorиставшись методом перерізів знаходяться внутрішні зусилля і будується епюра моментів, що крутять (мал. 5.1, б). З малюнка випливає, що небезпечними перерізами є всі перерізи на ділянці II, де діє скручуючий момент $T_{\max} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

2. Проектний розрахунок валу суцільного перетину

Відповідно до рекомендацій допускається дотична напруга за третьою теорією міцності приймається рівною $\tau = 0,5 \cdot \sigma = 0,5 \cdot 160 = 80 \text{ МПа}$.

З умови міцності та жорсткості при крученні визначаються необхідні значення полярних моментів опору

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq \tau \Rightarrow W_p \geq \frac{T_{\max}}{\tau} = \frac{12000}{80 \cdot 10^6} = 0,00015 \text{ м}^3 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$$

$$G/J_p \geq \frac{T_{\max}}{\varphi} \Rightarrow J_p \geq \frac{T_{\max}}{G \cdot \varphi} = \frac{12000 \cdot 180}{80 \cdot 10^9 \cdot 0,8} = 1,074 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Для суцільного круглого перерізу $W_p = \frac{D^3}{16}$ тоді мінімальний діаметр

перерізу для забезпечення міцності дорівнює

$$D_{пр-3} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_p}{1}} = 0,0914 \text{ м}.$$

Момент інерції суцільного круглого перерізу $J_p = \frac{D^4}{32}$ тоді мінімаль-

ний діаметр перерізу для забезпечення жорсткості дорівнює

$$D_{ж} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot J_p}{1}} = 0,1023 \text{ м}.$$

Для забезпечення одночасно міцності та жорсткості приймається мінімальний діаметр перерізу валу не менше $0,1023 \text{ м}$. Приймається стандартний профіль валу діаметром $D_{ст} = 0,105 \text{ м}$.

Площа поперечного перерізу валу $A = \frac{D_{ст}^2}{4} = \frac{0,105^2}{4} = 2,756 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 27,56 \text{ см}^2$.

Момент інерції перерізу $J_p = \frac{D_{ст}^4}{32} = \frac{0,105^4}{32} = 1,193 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$.

Жорсткість перерізу $G/J_p = 80 \cdot 10^9 / 1,193 \cdot 10^{-5} = 6,705 \cdot 10^{14} \text{ Н} \cdot \text{м}^2$. Кути закручування ділянок валу

$$-I \quad \frac{T_{I-a}}{GJ_{\rho}} = \frac{-5 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{0,955 \cdot 10^6} = -0,00314;$$

$$-II \quad \frac{T_{II-b}}{GJ_{\rho}} = \frac{-12 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{0,955 \cdot 10^6} = -0,01005;$$

$$-III \quad \frac{T_{III-c}}{GJ_{\rho}} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{0,955 \cdot 10^6} = 0,00440.$$

Кути закручування характерних перерізів валу

$$-0- 0;$$

$$-I-I -3,14 \cdot 10^{-3};$$

$$-II-I-II -3,14 \cdot 10^{-3} - 13,19 \cdot 10^{-3};$$

$$-III-II -3,14 \cdot 10^{-3} - 4,40 \cdot 10^{-3} - 8,79 \cdot 10^{-3} \quad ;$$

Епюри кутів закручування показано на рис. 5.1, віл.

2.6. Розрахунок жорсткості конструкції