Державний вищий навчальний заклад

«Запорізький національний університет»

Міністерства освіти і науки України

Методичні матеріали

для виконання лабораторних робіт

за спеціальним курсом

«МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОЗИТИВНИХ СИСТЕМ»

для магістрів

спеціальності 8.04030101 – прикладна математика

Запоріжжя

Лабораторная работа №1

Тема : Построение и анализ дискретных математических моделей позитивной динамической системы

Задание на лабораторную работу

1. Проверить выполнение всех свойств матриц *A, B*. Исследовать ее на продуктивность.

2. Найти решение:

– статической модели В.Леонтьева, описываемой уравнением

$$X = AX + C$$

– дискретной динамической модели Карлина, описываемой уравнением

$$X_{t+1} = AX_t + C_t$$

– дискретной динамической модели В.Леонтьева, описываемой уравнением

$$X_t = AX_t + B\left(X_{t+1} - X_t\right) + C_t$$

3. Найти решение дискретной динамической модели позитивной динамической системы, описываемой уравнением

$$X_{t+1} = AX_t + B\left(X_{t+1} - X_t\right) + C_t,$$

предварительно проверив выполнимость условий позитивности.

4. Провести анализ указанных моделей и решений описывающих их уравнений.

5. Сравнить полученные решения, сделать общие выводы.

6. Полученные результаты представить таблично и графически; на графиках обязательно представить стационарное решение.

Лабораторная работа №2

Тема : Построение и анализ непрерывных математических моделей позитивной динамической системы

Задание на лабораторную работу

1. Проверить выполнение всех свойств матриц *A, B*. Исследовать ее на продуктивность.
2. Найти решение:

- статической модели В.Леонтьева
- непрерывной динамической модели Карлина
- непрерывной динамической модели В.Леонтьева

3. Найти решение непрерывной динамической модели позитивной динамической системы, предварительно проверив выполнимость условий позитивности.

4. Провести анализ указанных моделей и решений описывающих их уравнений.

5. Сравнить полученные решения, сделать общие выводы.

6. Полученные результаты представить таблично и графически; на графиках обязательно представить стационарное решение.

Продуктивность матрицы

Рассмотрим понятие продуктивности на примере матрицы A.

Матрица A коэффициентов a_{ij} модели позитивной динамической системы балансового типа имеет следующие **основные свойства**:

1) коэффициенты матрицы по определению являются неотрицательными, следовательно матрица A в целом также является неотрицательной:
$$A \geq 0;$$
2) диагональные элементы матрицы A меньше единицы:
$$a_{ii} < 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Основной характеристикой позитивной динамической системы является позитивность (неотрицательность) ее переменных. Встает вопрос, при каких условиях система способна обеспечить неотрицательные выходы при наличии неотрицатльных входов исследуемой системы. Ответ на этот вопрос связан с понятием продуктивности матрицы.

Определение: Неотрицательную матрицу A будем называть **продуктивной**, если существует такой неотрицательный вектор X, что
$$X \geq AX. \tag{1.6}$$

Для того, чтобы матрица A коэффициентов прямых материальных затрат была продуктивной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из перечисленных ниже условий:

1) матрица $(E - A)$ должна быть неотрицательно обратной, то есть должна существовать обратная матрица $(E - A)^{-1} \geq 0$;
2) матричный ряд $E + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ должен сходиться, причем его сумма равна обратной матрице
$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (E - A)^{-1};$$
3) наибольшее по модулю собственное значение λ характеристического уравнения $|\lambda E - A| = 0$ должно быть строго меньшим единицы, т.е.:
$$\max|\lambda(A)| < 1;$$
4) все главные миноры матрицы $(E - A)$, т.е. определители матриц, образованные элементами первых строк и первых столбцов этой матрицы, порядка от 1 до n должны быть положительными.

Рассмотрим **<u>способ нахождения матрицы</u>** $(E-A)^{-1}$.

Находят матрицу $(E-A)$, а затем, применяя один из прямых методов обращения невырожденных матриц, вычисляют матрицу $(E-A)^{-1}$. Одним из наиболее употребительных методов обращения матриц является метод Жордана. Часто применяется также метод, основанный на применении формулы матричной алгебры

$$(E-A)^{-1} = \frac{(E-A)^{\nu}}{|E-A|}, \tag{1.11}$$

где в числителе матрица, присоединенная к матрице $(E-A)$, элементы которой представляют собой алгебраические дополнения для элементов транспонированной матрицы $(E-A)^T$, а в знаменателе – определитель матрицы $(E-A)$. Алгебраические дополнения в свою очередь для элемента с индексами i и j получаются умножением множителя $(-1)^{i+j}$ на минор, получаемый после вычеркивания из матрицы i-й строки и j-го столбца.

Обязательным условием корректности этих расчетов является условие продуктивности матрицы A.

<u>Пример:</u> Проверить, является ли матрица A продуктивной, если:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

а) Проверим выполнимость основных свойств матрицы A:

- все коэффициенты a_{ij} матрицы A являются неотрицательными, следовательно $A \geq 0$;
- все диагональные элементы a_{ii} $\left(i = \overline{1,n}\right)$ матрицы A меньше единицы.

Следовательно, все основные свойства матрицы A выполняются.

б) Проверим выполнимость необходимых и достаточных условий продуктивности матрицы A:

1) для матрицы $(E-A)$ должна существовать обратная матрица $(E-A)^{-1} \geq 0$.

Обратную матрицу $(E-A)^{-1}$ будем искать с помощью формул обращения невырожденных матриц, т.е. по формуле:

$$(E-A)^{-1}=\frac{(E-A)^{v}}{|E-A|}.$$

– Находим матрицу $(E-A)$:

$$(E-A)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,3&0,1&0,4\\0,2&0,5&0,0\\0,3&0,1&0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,7&-0,1&-0,4\\-0,2&0,5&-0,0\\-0,3&-0,1&0,8\end{pmatrix}.$$

– Вычисляем определитель этой матрицы:

$$|E-A|=\begin{vmatrix}0,7&-0,1&-0,4\\-0,2&0,5&-0,0\\-0,3&-0,1&0,8\end{vmatrix}=0,196.$$

– Транспонируем матрицу $(E-A)$:

$$(E-A)^{T}=\begin{pmatrix}0,7&-0,2&-0,3\\-0,1&0,5&-0,1\\-0,4&-0,0&0,8\end{pmatrix}.$$

– Находим алгебраические дополнения для элементов матрицы $(E-A)^{T}$:

$$A_{11}=(-1)^{2}\begin{vmatrix}0,5&-0,1\\0,0&0,8\end{vmatrix}=0,40;\quad A_{12}=(-1)^{3}\begin{vmatrix}-0,1&-0,1\\-0,4&0,8\end{vmatrix}=0,12;$$

$$A_{13}=(-1)^{4}\begin{vmatrix}-0,1&0,5\\-0,4&0,0\end{vmatrix}=0,20;\quad A_{21}=(-1)^{3}\begin{vmatrix}-0,2&-0,3\\0,0&0,8\end{vmatrix}=0,16;$$

$$A_{22}=(-1)^{4}\begin{vmatrix}0,7&-0,3\\-0,4&0,8\end{vmatrix}=0,44;\quad A_{23}=(-1)^{5}\begin{vmatrix}0,7&-0,2\\-0,4&0,0\end{vmatrix}=0,08;$$

$$A_{31}=(-1)^{4}\begin{vmatrix}-0,2&-0,3\\0,5&-0,1\end{vmatrix}=0,17;\quad A_{32}=(-1)^{5}\begin{vmatrix}0,7&-0,3\\-0,1&-0,1\end{vmatrix}=0,10;$$

$$A_{33}=(-1)^{6}\begin{vmatrix}0,7&-0,2\\-0,1&0,5\end{vmatrix}=0,33.$$

Таким образом, присоединенная к матрице $(E-A)$ матрица имеет вид:

$$(E-A)^{v}=\begin{pmatrix}0,40&0,12&0,20\\0,16&0,44&0,08\\0,17&0,10&0,33\end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу:

$$\left(E-A\right)^{-1}=\frac{1}{0{,}196}\begin{pmatrix}0{,}40 & 0{,}12 & 0{,}20\\ 0{,}16 & 0{,}44 & 0{,}08\\ 0{,}17 & 0{,}10 & 0{,}33\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020\\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408\\ 0{,}867 & 0{,}510 & 1{,}684\end{pmatrix}.$$

По виду обратной матрицы можно сказать, что она является неотрицательно определенной (все ее элементы неотрицательны). Следовательно первое условие выполняется.

2) Проверим, сходится ли матричный ряд к $\left(E-A\right)^{-1}$, то есть:

$$\left(E-A\right)^{-1}\approx E+A+A^2+A^3+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}A^k\,.$$

– Найдем матрицу коэффициентов косвенных затрат 1-го порядка:

$$A^{(1)}=A^2=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4\\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0\\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4\\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0\\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}23 & 0{,}12 & 0{,}20\\ 0{,}16 & 0{,}27 & 0{,}08\\ 0{,}17 & 0{,}10 & 0{,}16\end{pmatrix}.$$

– Найдем матрицу коэффициентов косвенных затрат 2-го порядка:

$$A^{(2)}=AA^{(1)}=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4\\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0\\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}23 & 0{,}12 & 0{,}20\\ 0{,}16 & 0{,}27 & 0{,}08\\ 0{,}17 & 0{,}10 & 0{,}16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}153 & 0{,}103 & 0{,}132\\ 0{,}126 & 0{,}159 & 0{,}080\\ 0{,}119 & 0{,}083 & 0{,}100\end{pmatrix}.$$

– Найдем матрицу коэффициентов косвенных затрат 3-го порядка:

$$A^{(3)}=AA^{(2)}=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4\\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0\\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}153 & 0{,}103 & 0{,}132\\ 0{,}126 & 0{,}159 & 0{,}080\\ 0{,}119 & 0{,}083 & 0{,}100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}106 & 0{,}080 & 0{,}088\\ 0{,}094 & 0{,}100 & 0{,}066\\ 0{,}082 & 0{,}063 & 0{,}068\end{pmatrix}$$

– Найдем матрицу коэффициентов косвенных затрат 4-го порядка:

$$A^{(4)}=AA^{(3)}=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4\\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0\\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}106 & 0{,}080 & 0{,}088\\ 0{,}094 & 0{,}100 & 0{,}066\\ 0{,}082 & 0{,}063 & 0{,}068\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}074 & 0{,}059 & 0{,}060\\ 0{,}068 & 0{,}066 & 0{,}051\\ 0{,}058 & 0{,}047 & 0{,}046\end{pmatrix}$$

и т.д.

Таким образом, имеем:

$$\left(E-A\right)^{-1}\approx E+A+A^2+A^3+\ldots+A^{25}=\begin{pmatrix}2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}02\\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}41\\ 0{,}867 & 0{,}51 & 1{,}68\end{pmatrix},$$

следовательно, матричный ряд сходится к $\left(E-A\right)^{-1}$, и второе условие продуктивности выполняется.

3) Проверим: $\max\left|\lambda(A)\right| < 1$.

– Находим матрицу $(\lambda E - A)$:

$$\lambda E - A = \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 0{,}3 & -0{,}1 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & \lambda - 0{,}5 & -0{,}0 \\ -0{,}3 & -0{,}1 & \lambda - 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

– Составим характеристическое уравнение матрицы A:

$$\left|\lambda E - A\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 0{,}3 & -0{,}1 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & \lambda - 0{,}5 & -0{,}0 \\ -0{,}3 & -0{,}1 & \lambda - 0{,}2 \end{vmatrix} = 0.$$

– Раскрывая характеристический определитель, находим собственные числа матрицы A:

$$\left|\lambda E - A\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 0{,}3 & -0{,}1 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & \lambda - 0{,}5 & -0{,}0 \\ -0{,}3 & -0{,}1 & \lambda - 0{,}2 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $\lambda^3 - \lambda^2 + 0{,}17\lambda + 0{,}026 = 0$, решая которое получим:

$$\lambda_1 = 0{,}708; \quad \lambda_2 = 0{,}3869; \quad \lambda_3 = -0{,}0949,$$

абсолютные значения которых

$$\left|\lambda_1\right| = 0{,}708; \quad \left|\lambda_2\right| = 0{,}3869; \quad \left|\lambda_3\right| = \left|-0{,}0949\right| = 0{,}0949.$$

Наибольшее по модулю собственное значение $\lambda_1 = 0{,}708$ характеристического уравнения $\left|\lambda E - A\right| = 0$ строго меньше единицы, следовательно третье условие продуктивности выполняется.

4) Проверяя четвертое условие продуктивности, получаем, что все главные миноры матрицы $(E - A)$ порядка от 1 до n являются положительными. Следовательно, это условие выполняется.

<u>Ответ:</u> Матрица A является продуктивной.

2. Варианты данных для лабораторных работ

Для всех вариантов:

№	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
t	0	1	2	3	4	5

Варианты	Задание
1 вариант	$A=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & 0{,}01 \end{pmatrix}$; $\widetilde{B}=\begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}2 \\ 0{,}17 & 0{,}01 \end{pmatrix}$; $\begin{matrix} X_1(0)=0{,}5 \\ X_2(0)=0{,}4 \end{matrix}$; ; $\begin{matrix} C_1=0{,}33 \\ C_2=0{,}21 \end{matrix}$
2 вариант	$A=\begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}03 \\ 0{,}13 & 0{,}22 \end{pmatrix}$; $\widetilde{B}=\begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}06 \\ 0{,}18 & 0{,}11 \end{pmatrix}$; $\begin{matrix} X_1(0)=6 \\ X_2(0)=8 \end{matrix}$; $\begin{matrix} C_1^0=0{,}6 \\ C_2^0=0{,}8 \end{matrix}$; $\begin{matrix} C_1=1{,}1 \\ C_2=2 \end{matrix}$; Функции непроизводственного потребления $C_i(t)$ заданы в виде: – линейно, т.е. $C_1(t)=C_1^0+C_1\,t$, – кубически, т.е. $C_2(t)=C_2^0+C_2\,t^3$.
3 вариант	$A=\begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}25 \end{pmatrix}$; $\widetilde{B}=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}07 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; $\begin{matrix} X_1(0)=0{,}6 \\ X_2(0)=0{,}4 \end{matrix}$; $\begin{matrix} C_1^0=0{,}2 \\ C_2^0=0{,}3 \end{matrix}$; $\begin{matrix} C_1=0{,}02 \\ C_2=0{,}001 \end{matrix}$; Функции непроизводственного потребления $C_i(t)$ заданы в виде: – квадратично, т.е. $C_1(t)=C_1^0+C_1\,t^2$, – гармонически, т.е. $C_2(t)=C_2^0+C_2\sin\omega t$, где $\omega=60$.
4 вариант	$A=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}07 \\ 0{,}05 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; $\widetilde{B}=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}09 \\ 0{,}2 & 0{,}08 \end{pmatrix}$; $\begin{matrix} X_1(0)=1{,}2 \\ X_2(0)=1{,}73 \end{matrix}$; $\begin{matrix} C_1^0=0{,}7 \\ C_2^0=1{,}4 \end{matrix}$; $\begin{matrix} C_1=0{,}2 \\ C_2=0{,}25 \end{matrix}$; Функции непроизводственного потребления $C_i(t)$ заданы в виде: – гармонически, т.е. $C_1(t)=C_1^0+C_1\cos\omega t$, где $\omega=45$, – гармонически, т.е. $C_2(t)=C_2^0+C_2\sin\omega t$, где $\omega=45$.
5 вариант	$A=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}12 \\ 0{,}08 & 0{,}07 \end{pmatrix}$; $\widetilde{B}=\begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}14 \\ 0{,}1 & 0{,}05 \end{pmatrix}$; $\begin{matrix} X_1(0)=0{,}9 \\ X_2(0)=0{,}85 \end{matrix}$; $\begin{matrix} C_1^0=0{,}38 \\ C_2^0=0{,}24 \end{matrix}$; $\begin{matrix} C_1=0{,}2 \\ C_2=0{,}11 \end{matrix}$; Функции непроизводственного потребления $C_i(t)$ заданы в виде: – экспоненциально, т.е. $C_1(t)=C_1^0+C_1\,e^t$, – гармонически, т.е. $C_2(t)=C_2^0+C_2\sin^2 t$.
6 вариант	$A=\begin{pmatrix} 0{,}13 & 0{,}12 \\ 0{,}1 & 0{,}09 \end{pmatrix}$; $\widetilde{B}=\begin{pmatrix} 0{,}11 & 0{,}17 \\ 0{,}09 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; $\begin{matrix} X_1(0)=3{,}8 \\ X_2(0)=4 \end{matrix}$; $\begin{matrix} C_1^0=0{,}7 \\ C_2^0=1{,}4 \end{matrix}$; $\begin{matrix} C_1=1{,}7 \\ C_2=2 \end{matrix}$; Функции непроизводственного потребления $C_i(t)$ заданы в виде: – экспоненциально, т.е. $C_1(t)=C_1^0+C_1\,e^t$, – линейно, т.е. $C_2(t)=C_2^0+C_2\,t$.

7 вариант	$A=\begin{pmatrix}0{,}08 & 0{,}03\\ 0{,}13 & 0{,}22\end{pmatrix}$; $\widetilde{B}=\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}06\\ 0{,}18 & 0{,}11\end{pmatrix}$; $\begin{matrix}X_1(0)=6\\ X_2(0)=8\end{matrix}$; $\begin{matrix}C_1^0=0{,}6\\ C_2^0=0{,}8\end{matrix}$; $\begin{matrix}C_1=1{,}1\\ C_2=2\end{matrix}$; Функции непроизводственного потребления $C_i(t)$ заданы: – квадратично, т.е. $C_1(t)=C_1^0+C_1\,t^2$. – гармонически, т.е. $C_2(t)=C_2^0+C_2\sin\omega t$, где $\omega=45$.
8 вариант	$A=\begin{pmatrix}0{,}02 & 0{,}1\\ 0{,}05 & 0{,}25\end{pmatrix}$; $\widetilde{B}=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}07\\ 0{,}2 & 0{,}1\end{pmatrix}$; $\begin{matrix}X_1(0)=0{,}6\\ X_2(0)=0{,}4\end{matrix}$; $\begin{matrix}C_1^0=0{,}2\\ C_2^0=0{,}3\end{matrix}$; $\begin{matrix}C_1=0{,}02\\ C_2=0{,}001\end{matrix}$; Функции непроизводственного потребления $C_i(t)$ заданы: – гармонически, т.е. $C_1(t)=C_1^0+C_1\sin\omega t$, где $\omega=60$, – гармонически, т.е. $C_2(t)=C_2^0+C_2\cos\omega t$, где $\omega=60$.
9 вариант	$A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}07\\ 0{,}05 & 0{,}2\end{pmatrix}$; $\widetilde{B}=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}09\\ 0{,}2 & 0{,}08\end{pmatrix}$; $\begin{matrix}X_1(0)=1{,}2\\ X_2(0)=1{,}73\end{matrix}$; $\begin{matrix}C_1^0=0{,}7\\ C_2^0=1{,}4\end{matrix}$; $\begin{matrix}C_1=0{,}2\\ C_2=0{,}25\end{matrix}$; Функции непроизводственного потребления $C_i(t)$ заданы: – гармонически, т.е. $C_1(t)=C_1^0+C_1\sin^2 t$, – экспоненциально, т.е. $C_2(t)=C_2^0+C_2\,e^t$.
10 вариант	$A=\begin{pmatrix}0{,}13 & 0{,}12\\ 0{,}1 & 0{,}09\end{pmatrix}$; $\widetilde{B}=\begin{pmatrix}0{,}11 & 0{,}17\\ 0{,}09 & 0{,}1\end{pmatrix}$; $\begin{matrix}X_1(0)=3{,}8\\ X_2(0)=4\end{matrix}$; $\begin{matrix}C_1^0=0{,}7\\ C_2^0=1{,}4\end{matrix}$; $\begin{matrix}C_1=1{,}7\\ C_2=2\end{matrix}$; Функции непроизводственного потребления $C_i(t)$ заданы: – линейно, т.е. $C_1(t)=C_1^0+C_1\,t$, – кубически, т.е. $C_2(t)=C_2^0+C_2\,t^3$.