О.М. Пигнастый

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

Харьков, 2007

УДК 658.51.012
ББК ХХХ
П 32

Пигнастый О.М. Статистическая теория производственных систем. – Харьков, ХНУ им. Каразина, 2007. –388 с.

Изложен современный научно-теоретический подход к описанию производственных процессов. С использованием аппарата статистической механики рассмотрено функционирование производственного процесса с серийным и массовым выпуском продукции. Получены динамические уравнения балансов для макропараметров производственной системы. Подробно исследована устойчивость макропараметров производственного процесса при наличии возмущающих факторов внешней и внутренней сред. Записана оптимальная функция управления макропараметрами производственного процесса. Предложены механизмы управления макропараметрами производственной системы и методика построения систем управления производством.

Книга предназначена для специалистов промышленных предприятий, научных работников, преподавателей, аспирантов, студентов технических и экономических специальностей ВУЗов.

ББК ХХХ

Рецензенты:

Главный технолог Харьковского Государственного Авиационного Производственного Предприятия (ХГАПП) Харьковский авиационный завод — *Лысых Н.А.*

Заместитель председателя правления ЗАО «Корпорация ФЭД» — *Яснолобов В.П.*

Доктор физико-математических наук, профессор Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина — *Ходусов В.Д.*

Утверждено Ученым советом Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина протокол №6 от 27.06.07 г.

ISBN 978-966-623-485-5

Предисловие

Монография О.М.Пигнастого содержит изложение развитого им подхода к построению стохастической теории функционирования производственной системы. Взаимодействие большого количества элементов производственно-сбытовой системы с технологическим оборудованием и между собой должно являться причиной того или иного ее макроскопического состояния. Как в термодинамике совокупность молекул определяет термодинамические величины - плотность, давление, температуру, поток газа, так и макроскопические параметры производственно-сбытовой системы-заделы, темп определяются взаимодействием большого количества составляющих систему элементов. Хотя набор макроскопических величин, как в физической, так и в экономической системах от этого не изменился, существенно изменилась их природа. В обоих случаях они оказались усредненными величинами случайных поведений элементов, образующих как физическую, так и экономическую систему.

В монографии с применением математических методов статистического характера, широко распространенных в статистической физике, на микроскопическом уровне описано поведение отдельных элементов производственно-сбытовой системы. Показано, что микроскопический и макроскопический уровни производственной системы самосогласованны между собой. Макропараметры задаются агрегированием микросостояний множества элементов производственной системы, а значения микросостояний элементов производственной системы с заданной вероятностью определяются значениями макропараметров производственной системы. Используя вариационный принцип, с учетом особенностей технологического процесса построена инженерно-производственная функция производственной системы. Применяя распространенные в статистической физике методы агрегирования микроэлементов большой системы, записаны уравнения балансов макропараметров производственно-сбытовой системы. Показано, что в одномоментном описании уравнения балансов вырождаются в известные уравнения уровней Форрестера для производственно-сбытовой системы.

Монография является итогом многолетнего исследования О.М.Пигнастого по созданию весьма нетрадиционного подхода к описанию производственных систем с серийным и массовым выпуском продукции. Излагается и сама теория, и ряд конкретных результатов ее применения. Несмотря на то, что некоторые моменты в монографии представляются дискуссионными, можно ожидать, что вдумчивый читатель, несомненно, извлечет достаточно много ценного. Хотелось бы надеяться, что данная работа послужит фундаментом для дальнейших исследований в вопросах изучения социально-экономических систем.

Академик НАНУ

С.В.Пелетминский

От автора

К настоящему времени существует обширная литература по теории организации и планирования производственной системы предприятия. По этой теме издано значительное число монографий, в учебниках по экономической теории содержатся специальные разделы, посвященные рассмотрению отдельных положений функционирования производственных систем. Однако отсутствует какая-либо теория, связывающая воедино микроскопическое состояние элементов производственной системы предприятия с макроскопическими параметрами предприятия. В настоящей книге автор стремился восполнить указанный пробел.

Этим определено и построение материала книги. Книга разделена на четыре принципиально отличающиеся части.

В первой части в общепринятой терминологии кратко изложены общие положения, использующиеся для описания производственных систем и применяемый математический аппарат. В последующих частях книги автор старался придерживаться терминологии, принятой в теории организации и планирования производства.

Вторая часть посвящена микроскопическому описанию производственной системы. Детально изучается движение базового продукта по технологическим операциям производственного процесса от заготовки до готового изделия. Для этого вводится фазовое технологическое пространство, в котором действует технологическое поле. При воздействии технологического поля производственной системы происходит превращение исходного сырья и материалов в готовый продукт путем целенаправленного воздействия общественно-полезного труда. Целевая функция производственной системы задана таким образом, чтобы целевой функционал производственной системы при изготовлении базового продукта согласно заданной технологии имел минимум. Целевая функция является фундаментом построения производственной функции предприятия, в которой связаны между собою затраты, переносимые на базовый продукт и темп выпуска производственной системы. В основу построения производственной функции положены инженерные и технологические расчеты в пределах технологии производства базового продукта, что является актуальным в предпосылках построения теории функционирования производственной системы.

Третья часть посвящена макроскопическому описанию производственной системы. Для описания функционирования производственной системы, как правило, используют два макропараметра –

межоперационные заделы и темп движения заготовок от одной технологической операции к другой технологической операции. Макроскопические параметры получены как моменты функции распределения множества микросостояний базовых продуктов производственной системы. Макроскопические параметры производственной системы, таким образом, не являются независимыми, а связаны между собой через микроскопический уровень производственной системы. Эта связь выражена балансовыми уравнениями производственной системы, подробно рассмотренными в третьей части. Балансовые уравнения для макропараметров производственной системы представляют собой динамические уравнения в частных производных. Наличие балансовых уравнений раскрыло возможности исследования производственного процесса на устойчивость и построения оптимальных функций оперативного управления макропараметрами производственной системы. Условия устойчивости функционирования производственного процесса представлены в виде неравенств, определяющих соотношения между макропараметрами производственной системы.

Четвертая часть посвящена практическому применению результатов предложенной теории.

Представленное описание производственных систем является самосогласованной задачей. Для изучения микроскопического поведения элементов системы требуется знать моменты функции распределения, а сами моменты функции распределения определяются микросостоянием общего числа элементов производственной системы. Это обстоятельство учтено автором, дает возможность начинать изучение материала с любой из четырех частей.

Цель настоящей книги – ознакомить читателя с принципиально новым подходом к теории организации и планировании производственной системы предприятия. Основой для написания книги послужила многолетняя производственная практика автора. Наблюдая изо дня в день повторяющийся технологический процесс, были замечены закономерности между макропараметрами (межоперационными заделами и темпом движения заготовок от операции к операции) и микропараметрами производственного процесса, характеризующими отдельно взятый предмет труда. Как оказалось впоследствии, эти закономерности могут быть получены теоретически, если для описания функционирования производственной системы использовать аппарат статистической механики. Это послужило поводом для построения стохастической теории производственного процесса с серийным и массовым выпуском продукции.

Постоянно возникающие вопросы математического характера привели автора к мысли предложить совместную работу над стоящими задачами к.ф.-м.н. В.П.Демуцкому и д.ф.-м.н. В.Д.Ходусову, сотрудникам кафедры «Теоретической Ядерной Физики» ХНУ им. В.Н.Каразина, специалистам в вопросах статистической физики. Совместными усилиями производственные процессы перекладывались на язык математических формул. Существенную помощь на этом этапе теоретических изысканий оказали специалисты в области статистической физики, академик НАНУ Сергей Владимирович Пелетминский и чл.-корр. НАНУ, директор института Теоретической Физики им. А.И.Ахиезера, Николай Федорович Шульга. Автор искренне благодарен им за любезно предоставленное время и ценные замечания при обсуждении теоретических построений и правомерности применения аппарата статистической механики. Дальнейшее развитие исследований требовало тесного взаимодействия со специалистами в области экономической теории. С легкой руки проректора ХГУ Н.А.Азаренкова д.ф.-м.н., чл.корр НАНУ, была создана инициативная группа в составе заведующего кафедры «Экономической кибернетики и прикладной экономики» ХНУ им. В.Н.Каразина, профессора, к.ф.-м.н. В.Г.Михайленко, сотрудников этой кафедры В.А.Дубровина, Н.П.Дидиченко, сотрудников кафедры «Теоре-тической Ядерной Физики» ХНУ им. В.Н.Каразина В.П.Демуцкого, В.Д.Ходусова и сотрудников производственного отдела НПФ «Технология». В течение двух лет на семинарах инициативной группы, регулярно проходимых кафедрой «Экономической кибернетики и прикладной экономики» ХНУ им. В.Н.Каразина, подробно и всесторонне изучались представленные материалы. В результате совместной работы экономистов, математиков и производственников стохастическая теория описания производственных систем начала принимать вид, близкий к тому, который представленный в настоящей книге. Итогом работы инициативной группы стало два десятка научных работ, среди которых доклады на международных конференциях НАН по вопросам нетрадиционного применения методов статистической механики и доклады, опубликованные в научно-теоретическом журнале Президиума Национальной академии наук Украины «Доповіді НАНУ». Автор искренне признателен составу инициативной группы и лично заведующему кафедрой «Экономической кибернетики и прикладной экономики» ХНУ им. В.Н.Каразина Виталию Григорьевич Михайленко за большую помощь в организации и проведении семинаров. Особенно интересно проходили дискуссии в области методологии построения производственных систем с участием доц., к.т.н Н.П.Дидиченко и проф., д.ф.-м.н В.Д.Ходусова.

Автор старался сделать книгу легко читаемой и доступной для лиц, которые не являются специалистами по теории предприятия. Многие главы книги сохранили стиль опубликованных автором статей. Тема книги оказалась на стыке глубоких и обширных дисциплин – статистической механики, теории вероятностей, теории больших систем, теории устойчивости, теории управления предприятием, логистики, теории управления проектами, технологии производственных процессов и т.д. Это узловое расположение темы определило необходимость включения в текст фрагментов с элементарным изложением ряда основных вопросов по перечисленным дисциплинам. Некоторые из этих фрагментов могут показаться специалистам излишними, но они необходимы для понимания сути дела специалистам из других областей и студентам.

В рукописи монографию прочел В.П.Демуцкий. Его доброжелательная критика помогла мне исправить многие упущения. Я глубоко благодарен Виктору Петровичу за внимание и помощь.

Работа положена в основу двух грантов, представленных инициативной группе в 2006г и 2007г. фондом фундаментальных исследований для проведения более глубоких теоретических и практических исследований взаимосвязи между собою микроскопических и макроскопических параметров производственно-технических систем.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Огромные масштабы производства в сочетании с качественными изменениями в производительных силах ставят новые задачи и требуют новых методов их решений [1]. Исключительно важное значение приобретают математические методы в планировании и управлении производством. Процессы планирования и управления предприятием, представляющим собою социально-экономическую систему, характеризуются многомерностью параметров, многовариантностью, связаны с принятием решений в области неопределенности. При этом повышаются требования к качеству принимаемых решений. Современные социально-экономические системы настолько сложны, что нельзя рассчитывать на возможность их успешного анализа, если использовать лишь традиционные методы [2]. Это приводит к необходимости использования математических моделей описания производственных систем, большой вклад в разработку которых сделали Л.В.Канторович, В.М.Глушков, Дж.Форрестер, Ст.Бир, В.А.Балашевич, И.Ансофф, В.Леонтьев, И.Пригожин, Г.Хакен, И.Стюарт, Г.Николис. Изучение особенностей технологических процессов производства продукции и их влияние на макроскопические параметры производственно-сбытовой системы требует проникновения в микромир социально-экономической системы с помощью инструмента производственных функций [3] и пересмотра детерминированной модели предприятия. Производственная функция является своеобразным микроскопом в задачах изучения микромира производственно-сбытового предприятия. В моделях социально-экономических систем появился еще один уровень, на котором происходит взаимодействие огромного количества элементов. Взаимодействие между собой большого количества элементов производственно-сбытовой системы и является причиной того или иного ее макроскопического состояния.

Процесс неравномерного развития экономики, колебания объемов производства и сбыта, возникновение значительных спадов производства следует рассматривать не как стечение неблагоприятных обстоятельств, а как общую закономерность, свойственую рыночной экономике. Стабильно развивающееся предприятие может в определенный момент оказаться не способным следовать изменениям рыночной ситуации.

Необходимость системного подхода к изучению состояния и уровня использования производственных ресурсов предприятия как единого целого хозяйствующего объекта обусловливается характером объективных экономических законов, которые образуют единую взаимосвязанную систему, диктуется быстрым и непрерывным развитием рыночных отношений, усложнением внутриотраслевых и межотраслевых связей, все более полным применением экономико-математических методов и компьютерной техники, проведением принципов оптимальности в практике работы предприятий.

1.Производственное предприятие как социально-экономическая система

Производственное предприятие можно представить как сверхсложную открытую социально-экономическую систему, связанную специфическими отношениями со своей внешней и внутренней средой. Чтобы управлять такой системой и достигать заданных конечных результатов эффективности, необходимо использовать современные формы и методы теории управления сложными системами. Внешняя среда оказывает воздействие на систему в виде заказов, нормативов, правовых актов, состояния рынков. Внутренняя среда формируется технологией и организацией производства, его инфраструктурой. Блок управления определяет управляющие воздействия на управляемую подсистему в виде планов, заданий, нормативов, а изменение ее состояния приходит по обратной связи.

Входные параметры отражают связи производственной системы с другими системами, совокупность которых называется окружением или внешней средой по отношению к рассматриваемой системе. Входные параметры системы предопределяют необходимый и достаточный уровень ее производственного потенциала, выходные параметры системы характеризуют результативность системы и ее непосредственное влияние на внешнюю среду. К другому виду выработанных системой параметров относят параметры внутреннего состояния системы, отражающие ее способность к решению стоящих перед ней задач (в частности ее экономический и технический потенциал).

С позиций системного подхода производственная система является сложной динамической системой, в которой в единый комплекс объединены оборудование, средства контроля и управления, вспомогательные и транспортные устройства, обрабатывающий инструмент и среды. В постоянном движении и изменении находятся объекты производства (заготовки, полуфабрикаты, сборочные единицы, готовые изделия) и работники, осуществляющие технологический процесс. Состояние системы – это упорядоченная совокупность значений параметров (внутренних и внешних), определяющих ход происходящих в системе процессов. Множество значений параметров системы в различные моменты времени образует пространство состояний системы. Функционирование предприятия, таким образом, описывается как «смещение» в пространстве состояний. Универсальность подобного понятийного аппарата позволяет дать корректные, однозначные определения многим широко распространенным в теории менеджмента терминам. Например, стратегия может трактоваться как «невозмущенная траектория движения» предприятия в пространстве его состояний. Такой подход в теории и практике организационного развития не является чем-то принципиально новым. Его основы были предложены еще классиками менеджмента Ф.Тейлором, А.Файолем, Г.Эмерсоном. Общее представление об организации, как о системе универсальных схем и работ, было сформулировано в 20-х годах XX века в трудах А.А. Богданова, обосновавшего необходимость создания всеобщей организационной науки. В работах И.С.Ладенко рассмотрена общая проблематика взаимосвязи деятельности и управления на основе универсальных моделей. Ориентированное на практику модельное описание иерархической организации, как совокупности координируемых решений, разработано М.Месаровичем (Месарович, Мако, Тахакара, 1973, 1973). С.Никаноровым был предложен универсальный метод концептуального проектирования систем организационного управления (Никаноров, 1972, 1989). Новый всплеск интереса к процессно-ориентированным технологиям был вызван появлением в 90-х годах концепции реинжиниринга бизнес-процессов (Ойхман, Попов, 1997; Хаммер, Чампи, 1999). Возможность использования инженерных методик к социальной материи была доказана в целом ряде методологических работ последних десятилетий (Злотин Б.Н., Зусман А.В., 1989; Радшун Р.В., 1997; Корогодин В.И., Соснин Э.А., Пойзнер Б.Н., 2000). Показано, что все целенаправленные системы деятельности развиваются по однотипным закономерностям и поэтому опыт, накопленный естественными науками, может быть перенесен в сферу социального и организационного конструирования.

Сложная система может быть разбита на множество подсистем, задачи которых подчинены общей цели функционирования всей системы. Производственная система характеризуется наличием разветвленной информационной сети, сложными информационными связями между элементами и подсистемами. Элементы производственной системы взаимодействуют с внешней средой, функционируют в условиях воздействия случайных факторов. Иерархическая структура технологической системы означает возможность разбиения системы на подсистемы различных уровней, когда подсистемы низших уровней входят составными частями в подсистемы высших уровней, вплоть до уровня отрасли. В составе производственной системы предприятия обычно выделяют функциональные подсистемы управления технологическими процессами и транспортом (АСУТП), технико-экономического планирования, технической подготовки производства, материально технического снабжения, оперативного планирования и управления производством, сбыта готовой продукции, управления качеством, кадрами, финансами. Критерии оценки эффективности производственной системы можно разделить на технологические (количество выпущенной продукции за единицу времени), организационные (выражающие трудовые затраты на производство), экономические (отражают экономические процессы производства), комплексные (отражающие одновременно два и более показателя из разных групп) и экологические.

Предприятие, как открытая система, строит свое функционирование в существенной связи с внешней средой. Отсюда одной из центральных задач управления предприятием является задача позиционирования во внешней среде и отыскания оптимального положения в сети ресурсных потоков. В то же время, если все бизнес-процессы формализованы и построена корректная параметрическая модель управления предприятием, то природа этих факторов не имеет значения (учитывается только их динамика, Бир, 1971). Разделение параметров на «внешние» и «внутренние» весьма условно и определяется целями моделирования. При описании предприятия в терминах состояния, а процесса его функционирования в виде смещения в пространстве состояний, упомянутая сеть будет соответствовать координатным осям многомерного пространства. Сложность управления предприятием состоит в том, что не только предприятие «движется» к целевому состоянию, но и само пространство, в котором происходит движение, изменяется. Отсюда необходимость непрерывного мониторинга внешней среды, позволяющего своевременно реагировать на изменение внешних параметров. Отдельного рассмотрения требуют вопросы встречного влияния предприятия на параметры внешней среды (этому служат мероприятия Public relations, реклама и прочие методы стимулирования сбыта). Таким образом, функционирование предприятия представляет уникальный слабо предсказуемый стохастический процесс, в ходе которого предприятие переходит из одного состояния в другое, «смещается в пространстве состояний».

2.Производственный и технологический процессы. Основная терминология и определения.

Производственный процесс представляет собой совокупность действий работников и орудий труда, необходимых для изготовления конечного продукта. В состав производственного процесса входят действия по изготовлению, контролю качества, хранению, перемещению деталей, полуфабрикатов и сборочных единиц на всех стадиях изготовления. Производственный процесс обеспечивает организацию снабжения и обслуживания рабочих мест, участков и цехов, а также управление всеми звеньями производства, комплекс мероприятий по технологической подготовке производства.

В соответствии с ГОСТ 3.1109–82 технологический процесс – это часть производственного процесса, содержащая целенаправленные действия по изготовлению и (или) определению состояния предметов труда. Технологический процесс включает в себя последовательность технологических операций, в ходе которых происходит изменение размеров, формы, внешнего вида и внутренних свойств предмета производства и их контроль. Технологическая операция – это законченная часть технологического процесса, выполняемая на одном рабочем месте непрерывно одним или несколькими рабочими. Условие непрерывности операции означает выполнение предусмотренной ею работы без перехода к обработке другого изделия. Технологическая операция является основной единицей производственного планирования и учета. На основе технологических операций определяется трудоемкость изготовления изделия, устанавливаются нормы времени, расценки, задается требующееся количество работников, оборудования, приспособлений и инструмента, определяется себестоимость обработки, производится планирование производства и осуществляется контроль качества и сроков выполнения работ. В условиях автоматизированного производства под технологической операцией понимается законченная часть технологического процесса, выполняемая непрерывно на автоматической линии, которая состоит из нескольких станков, связанных автоматически действующими транспортно-загрузочными устройствами. Кроме технологических операций в состав технологического процесса включаются вспомогательные операции (транспортные, контрольные, маркировочные, по удалению стружки и т.д.), не изменяющие размеров, формы, внешнего вида или свойств обрабатываемого изделия, но необходимые для осуществления технологических операций. Технологическая операция может быть разбита на части – установы и технологические переходы. Установ представляет собой часть технологической операции, выполняемую при неизменном закреплении обрабатываемых заготовок или собираемой сборочной единицы. Технологический переход представляет собой законченную часть технологической операции, характеризуется постоянством применяемого инструмента и поверхностей, образуемых обработкой или соединяемых при сборке. Предмет или набор предметов производства, подлежащих изготовлению на предприятии, называются изделием. На производстве установлена терминология видов изделий. Деталью называется изделие, изготовленное из однородного по наименованию и марке материала без применения сборочных операций. Сборочная единица является частью изделия, собирается отдельно и в дальнейшем участвует в процессе сборки как одно целое. Сборочный комплект состоит из группы составных частей изделия, которые необходимо подать на рабочее место, для сборки изделия или его составной части. Изделия предприятия поставщика, применяемые как составная часть изделия, выпускаемого предприятием изготовителем, образуют категорию комплектующих.

В соответствии с ГОСТ 14.004-83 в зависимости от широты номенклатуры, регулярности, стабильности и объема выпуска изделий современное производство подразделяется на различные типы.

Единичное производство характеризуется широтой номенклатуры изготавливаемых изделий и малым объемом выпуска. На таких предприятиях количество выпускаемых изделий исчисляется штуками. На рабочих местах выполняются операции, повторяющиеся не регулярно или не повторяющиеся вообще. Используется универсальное точное оборудование, которое расставляется в цехах по технологическим группам (токарное оборудование, фрезерное и т.д.). Специальные приспособления или не создаются, или очень редко используются. Взаимозаменяемость деталей и узлов отсутствует, применяется пригонка по месту, квалификация рабочих очень высокая, технологическая документация сокращенная и упрощенная, технические нормы отсутствуют.

Серийное производство характеризуется ограниченной номенклатурой изделий, изготавливаемых периодически повторяющимися партиями и сравнительно большим объемом выпуска. В зависимости от количества изделий в партии или серии, различают мелкосерийное, среднесерийное и крупносерийное производство. Серийное производство является основным типом машиностроительного и приборостроительного производства. Объем выпуска предприятий серийного типа колеблется от десятков и сотен до тысяч регулярно повторяющихся изделий. При этом используется универсальное и специализированное, и частично специальное оборудование. Широко используются станки с ЧПУ, обрабатывающие центры, гибкие автоматизированные линии, управляемые от ЭВМ. Оборудование расставляется по технологическим группам с учетом направления основных грузопотоков цеха по предметно-замкнутым участкам. Технологическая оснастка в основном универсальная, однако во многих случаях, особенно в крупносерийном производстве, может быть и специальная. Средняя квалификация рабочих ниже, чем в единичном производстве. Используется универсальное оборудование, заранее настроенное наладчиками. В зависимости от объема выпуска и особенности изделий обеспечивается полная или частичная взаимозаменяемость сборочных единиц, очень редко используется подгонка по месту.

Массовое производство характеризуется узкой номенклатурой и большим выпуском изделий, непрерывно изготовляемых в течение продолжительного времени. Коэффициент закрепления операций на рабочих местах для массового производства близок к единице. На каждом рабочем месте закрепляется выполнение одной, постоянно повторяющейся операции. При этом используется специальное высокопроизводительное оборудование, которое расставляется по ходу технологического процесса, связывается транспортирующими устройствами и конвейерами с постами промежуточного автоматического контроля и промежуточными складами – накопителями заготовок. Широко применяются автоматические линии, управляемые от ЭВМ. Значительное применение находит высокопроизводительная технологическая оснастка. Широко используются точные и индивидуальные исходные заготовки с минимальными припусками на механическую обработку или вовсе без неё. Требуемая точность достигается методами автоматического получения размеров на настроенных станках при обеспечении взаимозаменяемости обрабатываемых заготовок и собираемых узлов. Подгонка деталей и узлов, подбор элементов недопустимы. Средняя квалификация рабочих на современном массовом производстве ниже, чем в серийном производстве. На настроенных заранее станках и автоматах работают рабочие операторы. Одновременно в цехах работают высококвалифицированные наладчики станков. Дальнейшее развитие автоматизации приводит к уменьшению общего числа рабочих мест за счет сокращения малоквалифицированных специалистов, а в перспективе полностью автоматизированные производства будут обслуживаться минимальным числом высококвалифицированных наладчиков сложного компьютеризированного оборудования. Технологическая документация массового производства разрабатывается самым детальным образом. Технические нормы тщательно рассчитываются и подвергаются экспериментальной отработке.

Каждый из типов производства может осуществляться разными методами. Основными из них являются непоточный и поточный метод производства. Даже на предприятиях массового производства всегда имеются цеха и участки с непоточным методом производства. При непоточном методе работы изделия собирают партиями на неподвижных сборочных местах. Поточным называется метод производства, при котором операции обработки или сборки изделия закреплены за определенным оборудованием или рабочими местами. Оборудование или рабочие места расположены в порядке выполнения операций, обрабатываемая деталь передается с одной операции на следующую операцию после выполнения предшествующих операций, как правило, при помощи специальных транспортных устройств.

В соответствии с ГОСТ 14.301-83 средства технологического оснащения производства подразделяются на технологическое оборудование, технологическую оснастку, средства механизации и автоматизации производственных процессов. Технологическое оборудование – это орудия производства, в которых для выполнения определенной части технологического процесса размещаются материалы (заготовки), средства воздействия на них и при необходимости источники энергии. Технологическая оснастка представляет собою орудия производства, добавляемые к технологическому оборудованию для выполнения определенной части технологического процесса. Средства механизации являются орудиями производства, в которых ручной труд человека частично или полностью заменен машинным с сохранением человека для управления машинами. В отличие от средств механизации, средства автоматизации - это орудия производства, в которых ручной труд человека заменен машинным, причем функции управления переданы машинам и приборам.

Любой технологический процесс производства характеризуется циклом последовательных операций изготовления деталей и сборочных единиц. На каждой операции неизбежно появляются колебания геометрических характеристик, физико-механических свойств материалов, которые отражают закономерности соответствующей операции и обусловлены комплексом случайных и систематических внешних и внутренних факторов, действующих в производстве. Они вызывают отклонения выходных параметров изделий. Степень соответствия параметров изготовленных изделий установленным допускам определяет как технологическую точность самих изделий, так и точность технологического процесса. Границы изменения параметров в процессе производства определяют технологические допуски, которые рассчитываются и устанавливаются заранее. Производственные погрешности подразделяются на систематические, которые вызываются детерминированными причинами и могут быть постоянными во времени или изменяться в пределах партии по определенному закону, и случайные, изменение величины и знака которых носит вероятностный характер. Систематические погрешности вызываются методическими причинами, которые возникают из-за определенных возможностей метода изготовления изделия или контроля его параметров, замены точных формул приближенными при технологических расчетах. Систематические погрешности вызываются неточностью изготовления оснастки, деформацией и износом оборудования, оснастки и инструмента, температурными воздействиями на деталь или рабочий инструмент в зоне обработки. Случайные производственные погрешности определяются неоднородностью сырья, отклонениями параметров комплектующих изделий, колебаниями технологического режима обработки, субъективными данными рабочих. В результате возникновения случайных погрешностей при изготовлении партии комплектующих изделий контролируемый параметр является случайной величиной и может принимать любое значение в границах определенного интервала. При разных технологических процессах рассеяние контролируемого параметра подчиняется различным математическим законам. Наибольшее практическое значение имеют законы нормального распределения, равнобедренного треугольника, эксцентриситета, равной вероятности. В то же время теоретические исследования показали, что для большинства случаев производственных процессов, особенно в механообработке деталей, точность технологических процессов (рассеяние контролируемых параметров) может определяться, исходя из закона нормального распределения. Это объясняется известным положением теории вероятностей о том, что распределение суммы большого числа взаимно независимых случайных слагаемых величин при отсутствии влияния доминирующих факторов подчиняется закону нормального распределения Гаусса. Результирующая погрешность в таком случае формируется в результате одновременного воздействия большого числа погрешностей, зависящих от исходного материала заготовок или их размеров, т.е. таких факторов, которые и представляют собой взаимно независимые случайные величины. Влияние каждой из них на контролируемый параметр имеет одинаковый порядок, а значит и распределение действительного значения параметра подчиняется закону нормального распределения. Если рассеяние размеров зависит только от переменных систематических погрешностей (например, от износа режущего инструмента), то распределение действительных размеров партии обработанных деталей подчиняется закону равной вероятности. При изготовлении изделий на точность их параметров часто одновременно воздействуют разные факторы, вызывающие появление как случайных погрешностей, образующихся по разным законам, так и систематических или переменных систематических погрешностей. В подобных случаях закон распределения истинных значений параметра представляет собой композицию нескольких законов распределения.

Технологический процесс изготовления изделия должен с наименьшими затратами обеспечивать требуемый уровень качества продукции, включая его надежность. Однако связь параметров технологического процесса с надежностью готового изделия весьма сложна и, кроме того, требования надежности, как правило, вступают в противоречие с такими основными требованиями к технологическому процессу, как его производительность и экономичность. Технологический процесс всегда стремятся оптимизировать и, тем самым, обеспечить требуемый уровень качества и высокую производительность и надежность технологического процесса. Надежность является одной из основных характеристик систем. Надежностью называется свойство системы, обеспечивающее безотказное выполнение функций в заданных условиях эксплуатации, в течение заданного промежутка времени. Ненадежность системы проявляется в отказах. Под отказом понимается событие, заключающиеся в нарушении работоспособности, т.е. переход системы в такое состояние, когда она не соответствует требованиям технического задания, не обеспечивает выполнение функций. Отказы технологических систем могут быть постепенными и внезапными. Постепенные отказы связаны с износом технологического оборудования, инструмента, оснастки, средств контроля, с температурными деформациями, химическими воздействиями и т.п..

Внезапные отказы могут быть вызваны ошибками операторов, наладчиков или быть следствием дефектов в заготовках и комплектующих при недостаточном их контроле. Главным образом они связанны с поломками в технологическом оборудовании или средствах управления технологическим процессом. Важно, что внезапные отказы могут быть сведены к минимуму за счет принятия мер по увеличению надежности оборудования. Появление сложных технических систем повлекло необходимость рассматривать надежность как технический параметр и измерять её числом, т.е. потребовались какие-то численные критерии надежности. В силу недостаточности информации о причинах и обстоятельствах отказов, общепринятое расчетное определение надежности базируется на вероятностном подходе. При этом вероятностная оценка надежности исходит из представления об отказах как о случайных событиях. Увеличение надежности технических систем возможно в результате уменьшения времени непрерывной работы технической системы. С одной стороны повышение надежности производственной системы связанно с увеличением затрат, с другой стороны, отказы элементов производственной системы приводят к снижению эффективности, причем такое снижение может быть весьма значительным. Технологическими показателями эффективности производственной системы являются количество выпущенной продукции, израсходованных топлива, энергии, сырья, материалов, реагентов, степень использования технологического оборудования.

Обеспечение выполнения работниками требований технологического процесса осуществляется службой главного технолога. Основной задачей технолога является разработка и внедрение технологических процессов, а также выпуск необходимой для этого технологической документации. ГОСТ 3.11.02-74 предусматривает несколько видов технологической документации. Маршрутная карта предназначена для описания технологического процесса изготовления и контроля по всем операциям в технологической последовательности с указанием соответствующих данных по оборудованию, оснастке, материальным, трудовым и другим нормативам. Описание операций технологического процесса изготовления деталей с их расчленением по технологическим переходам и с указанием режимов работы, расчетных норм и трудовых нормативов содержится в операционной карте. Карта эскизов и схем оформлена в виде графической иллюстрации технологического процесса изготовления изделия и отдельных его элементов. Эскизы и схемы дополняют или поясняют содержание операции. Технологическая инструкция содержит описание специфических приемов работ или методики контроля технологического процесса, правил пользования оборудованием и приборами, а также физико-химических явлений, происходящих при отдельных операциях технологического процесса. Материальная ведомость предназначена для подготовки производства и является подетальной и сводной ведомостью норм расхода материалов. Ведомость оснастки содержит перечень специальных и стандартных приспособлений и инструментов, необходимых для оснащения технологического процесса. Продукция должна изготавливаться не только по заданному технологическому маршруту указанными средствами, но и с наименьшими затратами. Технолог должен контролировать выполнение требований технологического процесса, правильность эксплуатации оборудования и оснастки, соблюдение технологической дисциплины на рабочих местах.

Задачи дальнейшего совершенствования и интенсификации промышленного производства путем повышения уровня его механизации и автоматизации могут быть решены посредством комплексного совершенствования всех звеньев производственного процесса, в том числе и складского хозяйства предприятий. Неравномерность циклов производства, транспортировки и потребления материальных ценностей объективно требует наличия на предприятии складского хозяйства. Склады создаются в начале и в конце транспортных грузопотоков или производственных процессов для временного накапливания грузов и своевременного снабжения производства материалами в нужных количествах. Временное накапливание грузов обусловлено характером производства и транспорта. Оно позволяет преодолеть временные, пространственные количественные и качественные несоответствия между наличием и потребностью в покупных материалах или полуфабрикатах в процессе производства и потребления. Склады на промышленных предприятиях играют важную роль в технологическом процессе производства, поддерживая или задавая ритм производства. От уровня технической оснащенности и организации работ на этих складах зависит организованность, общий ритм и эффективность производственного процесса. Большую роль складов в технологическом процессе изготовления изделий можно объяснить еще и тем, что они служат не только для временного накопления грузов. На них обычно выполняются, кроме операций складирования, еще и внутрискладские транспортные операции, погрузочные, разгрузочные, сортировочные, комплектовочные и промежуточные перегрузочные операции. Выполняются также некоторые технологические операции, которыми начинаются и заканчиваются производственные процессы. Ввиду неравномерности перемещения материальных потоков работа складских комплексов носит динамический и стохастический характер. Таким образом, на складах преобразуются грузопотоки, при этом изменяются параметры принимаемых и выдаваемых партий грузов по величине, составу, физическим характеристикам входящих грузов, времени отправки транспортных партий. Склады предприятий представляют собой неотъемлемую часть общего технологического процесса, производства. Они влияют на общий ритм и организацию производства, внутризаводские грузопотоки, простои внешнего транспорта. Из общего производственного цикла детали, заготовки, узлы изделий машиностроения проходят производственный процесс на технологическом оборудовании не более 15-20% времени, а остальное время они хранятся на складах. Таким образом, процессы складирования являются важной частью производственного цикла, подсистемой сложной системы производства. Особенностью складской подсистемы является то, что на складах грузы какое-то время находятся в стационарном состоянии, поэтому весьма удобно вести учет работы складов.

3. Анализ существующих моделей и методов управления предприятием.

Начало формирования аппарата системных исследований принято относить к 50-м годам XX века и связывать с работами Людвига фон Берталанфи. Впоследствии, благодаря трудам Н. Винера, У. Эшби, У. Мак-Куллоха, Г. Бейтсона, Ст. Бира, Г. Хакена, Р. Акоффа, Дж. Форрестера, М. Месаровича, С. Никанорова, И. Пригожина и В. Турчина возник целый ряд смежных с общей теорией систем направлений – кибернетика, синергетика, теория самоорганизации, теория хаоса, системотехника. Фундаментальные принципы и инструменты, разработанные в рамках этих направлений, позволяют построить корректную модель управления предприятием как сложной открытой организационной системой.

Оценка и выбор целей, наилучших способов их достижения, а также распределения ресурсов осуществляется с помощью моделей и критериев. Моделирование нашло широкое применение при принятии решений в экономике. Это обусловлено в первую очередь тем, что проведение натурных экспериментов и исследований в экономике чрезвычайно затруднено, а в ряде случаев из-за нехватки ресурсов, возможных нежелательных последствий и потери времени практически невозможно. Характерной чертой современного этапа экономической науки является ее математизация, которая проявляется в замене изучаемого экономического процесса адекватной математической моделью и последующим исследовании свойств этой модели либо аналитическими методами, либо на основе проведения вычислительных экспериментов. Подавляющее большинство экономических процессов протекает во времени, вследствие чего соответствующие математические модели являются динамическими. Моделирование позволяет предсказать поведение реальных систем, не прибегая к натурным экспериментам.

В зависимости от методов проведения расчетов по построенным моделям символические модели можно грубо подразделить на аналитические и статистические. Аналитические модели дают возможность с удовлетворительной точностью описать только сравнительно простые системы, где число взаимодействующих элементов не слишком велико. В системах же, функционирование которых определяется действием огромного количества факторов, в том числе и случайных, на первый план выходит метод статистического моделирования. Статистические модели имеют перед аналитическими преимущество. Они позволяют учесть большое число факторов и не требуют грубых упрощений. Однако результаты статистического моделирования труднее поддаются анализу и осмысливанию. Аналитические модели грубее и описывают явление лишь приближенно, зато результаты более наглядны и отчетливее отражают присущие явлению основные закономерности. Наилучшие результаты получаются при совместном применении аналитических и статистических моделей. Простая аналитическая модель позволяет вчерне разобраться в основных закономерностях явлений, наметить главные его контуры, а любое дальнейшее уточнение может быть получено статистическим моделированием.

Применение моделей дает возможность получить обширную информацию о различных сторонах работы системы, изучить процесс функционирования системы в целом с учетом разнообразных взаимодействий элементов сложной системы и совместного действия различных факторов, исследовать зависимость эффективности работы системы от ее характеристик и параметров, оценить эффективность и экономичность системы, найти ее оптимальный вариант, исследовать поведение системы под воздействием внешних и внутренних возмущений (исследовать устойчивость функционирования системы). При решении разнообразных вопросов в различных сферах деятельности, в частности задач управления экономикой, находят все большее распространение имитационные модели. Имитационные модели связаны обычно с многократным воспроизведением особенностей системы и окружающей ее среды, с выбором случайного, но реально возможного соотношения анализируемых параметров без фактического воспроизведения реальной системы. Подобно математическим моделям они основаны на символическом описании конкретного процесса, и в этом их существенное сходство. Однако если в математической модели можно получить решение, выраженное аналитически, то имитационная модель дает возможность лишь «проигрывать» выбираемые случайно или целенаправленно различные решения, определяемые набором численных характеристик. Это позволяет предсказать и анализировать динамику возможных ситуаций в будущем и тем самым оценивать последствия проверяемых стратегий с целью нахождения наилучшей. Другим важным свойство имитационных моделей является «анализ чувствительности» решений на их основе, то есть проверки устойчивости выходных характеристик решения по отношению к варьированию исходных предпосылок. Имитационная модель помогает выявить, если и не наилучшее решение, то «хорошее» для широкого набора условий, которые могут изменяться под влиянием не контролируемых внешних факторов. Имитация основана на многократной машинной или человеко-машинной имитации моделируемой системы в чрезвычайно ускоренном масштабе времени с использованием случайных элементов и с последующей обработкой полученных статистических результатов. Это дает возможность оценить показатели системы как средние значения по данным большого количества реализаций работы системы, позволяет целенаправленно воздействовать на систему, управлять происходящими в ней процессами. При всех достоинствах метода имитации нужно отметить его большую сложность и трудоемкость, а также тот факт, что исходные данные могут быть результатом эмпирических субъективных оценок, а не математических результатов. Метод имитации следует применять только тогда, когда накоплено и отлажено значительное количество моделей экономических объектов и явлений, которые могут изменяться в широких пределах во времени по мере накопления знаний о реальной системе, проанализированы связи между ними.

Для большинства технологических операций производства не существует адекватной функциональной модели. Поэтому широкое распространение получили модели, которые строятся на основе экспериментальных данных с помощью регрессионного анализа. Основная цель, которую при этом ставят, состоит в процессе формализации управления технологическим процессом.

Согласно ГОСТ 3.119-79 объектом моделирования и оптимизации является технологический процесс, причем подразумевается при этом, как непосредственные процессы производства определенной продукции, так и процессы обеспечения нормального функционирования. Для каждого вида продукции может быть указана одна или несколько технологических схем его получения из исходной продукции. Технологический процесс представляет собой логически упорядоченный набор операций, после проведения каждой из которых выпускается промежуточная или конечная продукция. Различные технологические схемы получения одного или нескольких видов продукции могут включать и одинаковые операции. Совокупность технологических схем условно называется технологией производства. Структура технологии может быть представлена наглядно в виде технологической сети. Технологическая сеть позволяет упорядочить последовательность возможных операций. Проектирование элементов технологических систем предполагает использование преимущественно нелинейных математических моделей. В качестве обобщенного критерия выступают производительность, надежность при ограничениях на затраты энергии, комплектующих, материалов.

4. Об особенностях построения статистической теории производственных систем.

4.1.Общие положения.

Производственная деятельность предприятия представляет собой замкнутую систему с обратной связью. На уровне отдельной фирмы увеличение продаж, превышающее производственную мощность предприятия, порождает планы расширения производства, что восстанавливает равновесие между спросом и объемом выпуска продукции. Сокращение же сбыта и роста запасов могут вызвать активизацию мероприятий по расширению рынка сбыта, чтобы увеличить продажи до уровня производства. Необходимость совершенствования продукции вызывает затраты на исследования, технический прогресс, развитие конкуренции, порождая потребность в дальнейшем обновлении изделий и в еще более широких исследованиях. Все эти, как и другие решения в области управления, принимаются в рамках системы с обратной связью, когда решение в конечном счете воздействует на среду, которая его вызвала (самосогласованная задача). Схема взаимосвязей в производственной системе, усилия, вызванные решениями и правилами поведения, запаздывания действий, а также искажение информации – все это вместе определяет устойчивость производственной системы и ее развитие. Сочетание различных действий фирмы может вызвать колебание в производстве, занятости рабочих и в использовании производственных мощностей. Поскольку одно действие порождает другое и так далее и может опять вернуться к первому, это порождает неустойчивость, которая характерна для устройств в регулирующих механизмах.

При построении динамической модели производственной системы переменные модели должны соответствовать переменным отражаемой системы. Переменные в модели и переменные производственной системы должны измеряться в тех же единицах. На первый взгляд это может показаться очевидным и элементарным, но данный принцип чаще всего нарушается при построении моделей производственного процесса. Потоки товаров должны измеряться натуральными, а не денежными единицами.

Потоки денежных средств следует выделить отдельно. Цены связывают те и другие показатели. Товары не могут быть представлены в виде соответствующей суммы денег, иначе не уловить значения цен и того фактора, что движение денег не синхронно движению товаров. Заказы на товары не суть товары, товары отгруженные не равнозначны счетам к получению денежных средств. Сосредоточение внимания на денежном потоке с применением денежного эквивалента труда и материалов во многих попытках анализа промышленно-сбытовых систем искажало их характер. В экономической модели следует использовать фактические цены, выраженные в деньгах, а не приведенные, т.е. умноженные на некоторый индекс. Фактические цены и их колебания вызывают важные психологические последствия. В рассматриваемых моделях приходится иметь дело с продолжительностью рабочей недели, численностью работающих, часовой производительностью труда и часовой ставкой заработной платы. Указанные величины могут быть взаимодействующими переменными в производственно-сбытовой системе с присущими им нелинейностями и ограничениями. Чем в большей степени переменные модели соответствуют реальным условиям, тем шире возможности непосредственного использования модели.

При составлении уравнений особое внимание следует уделять правильности размерности для каждого из членов уравнения. Размерный анализ играет важную роль в правильном составлении уравнений в технических и естественных науках. Каждый коэффициент должен появляться в уравнениях только тогда, когда он имеет самостоятельный смысл и только после этого следует проверять размерность членов уравнения на их совместимость. Построение модели должно быть объектом проверки, пока не будет доказано, что каждый коэффициент и применяемые единицы измерения могут быть обоснованы по их индивидуальному смыслу. В рассматриваемых моделях применяются методы агрегирования объектов.

При построении модели не следует основывать свои действия на допущении, что отображаемая система обязательно будет устойчивой. Многие модели, описанные в литературе по экономике и управлению, исходят из линейности отображаемой системы. Но в таких случаях, если быть последовательным, необходимо допустить и ее устойчивый характер. Имеются достаточные основания считать, что среди существующих реальных систем большинство являются неустойчивыми в обычном математическом понимании. Они не стремятся к состоянию статического равновесия. Они неустойчивы и обнаруживают стремление к увеличению амплитуды колебаний, которые поддерживаются непрерывными изменениями соотношений сил между нелинейными формами в системе. Современные социальные системы в высшей степени нелинейные и большую часть времени противодействуют ограничениям, связанным с недостатком рабочей силы, сокращением денежных ресурсов и преодолением инфляции, спадом деловой активности и недостатком необходимого количества средств производства. По-видимому, такие нелинейности в сочетании с тенденциями неустойчивости, создают характерный образ действий, который мы наблюдаем в экономических системах свободного предпринимательства. Линейный анализ не пригоден для нелинейных неустойчивых систем. Наблюдаемое поведение реальных систем приводит к заключению, что важные проявления часто имеют нелинейный характер. При построении модели системы, предполагающем устойчивость системы, из рассмотрения могут выпасть некоторые наиболее важные и интересные характеристики системы.

4.2. О характерных моментах статистической теории производственных систем.

При построении статистической теории использована схема взаимодействия микроскопического и макроскопического уровня производственной системы (рис.1). Такой подход не является новым, широко используется при изучении физических систем. Однако исследовать социально-экономическую систему с использованием иерархии уровней описания социально-экономической системы предложено сравнительно недавно немецким физиком-теоретиком, специалистом в области статистической механики, Германом Хакеным [4]. Предложенный им «принцип подчиненности» является одним из основополагающих методов в «Синергетике», применяется при исследовании поведения самоорганизующихся динамических систем, в том числе и социально-экономических. Если рассмотреть в качестве элементарного объекта (базового продукта) производственной системы предмет труда или условное изделие [5], то производственная система может быть представлены в виде множества базовых продуктов. Если в любой момент времени мы знаем состояние каждого базового продукта, то нам известно и общее состояние производственного

Рис.1.Иерархия уровней описания предприятия как динамической системы

процесса в целом. Выбор базового продукта является первой фундаментальной точкой при построении модели производственного процесса. Для исследования поведения базового продукта введено технологическое фазовое пространство. Введение понятия фазового пространства для изучения социально-экономических систем не является новым [6]. Новым является выбор технологического фазового пространства с координатами, в которых может быть задано положение базового продукта на микроскопическом уровне в реально действующем производственном процессе. Агрегирование состояний базовых продуктов в технологическом фазовом пространстве дает возможность получить макропараметры производственного процесса (межоперационные заделы, темп….) в принятом представлении для производственных предприятий. Выбор технологического фазового пространства является второй фундаментальной точкой при построении модели производственного процесса. Если состояние базового продукта в технологическом фазовом пространстве описать через функцию распределения, то моменты функции распределения будут представлять собою макропараметры производственной системы. Агрегирование состояний базовых продуктов представлено с целью получения моментов (макропараметров производственной системы) осуществляется посредством интегрирования функции распределения. Причем следует заметить, что функция распределения состояний базовых продуктов зависит от моментов функции распределения, которые в свою очередь получаются через агрегирование состояний базовых продуктов. Как и следовало ожидать, микроскопическое состояние базовых продуктов определяет макропараметрами производственного процесса, а макропараметры производственного процесса микроскопическим состоянием базовых продуктов. Таким образом, производственная система представляет собой самосогласованную задачу микроскопического и макроскопического уровней производственной системы. Введение функции распределении состояний базовых продуктов в технологическом фазовом пространстве и представление связи микроскопического и макроскопического уровней в виде самосогласованной задачи является третьей фундаментальной точкой при построении модели производственного процесса, используется впервые. Данная постановка задачи с характерным ей математическим аппаратом широко используется в статистической физике, однако для экономических задач является новым подходом. Следующий шаг, который был предпринят для дальнейшего развития теории, получение микроскопических динамических уравнений, описывающих поведение каждого отдельного базового продукта в технологическом фазовом пространстве. Динамические уравнения получены с помощью вариационного принципа. Введена целевая функция и записан целевой функционал, которой имеет минимум, если производство базового продукта осуществляется строго с заданной технологией. Такой подход позволяет построить целевую функцию, а затем и инженерно-производственную функцию, исходя исключительно из инженерно-технологических расчетов. Построение инженерно-производственной функции из инженерно-технологических расчетов и является четвертой фундаментальной точкой при построении модели производственного процесса. Наряду с тем, что интересен сам подход построения инженерно-производственной функции с использованием вариационного принципа, в котором целевой функционал характеризует отклонение базового продукта от заданной технологии производства, сама инженерно-производственная функция представляет собою мост, связывающий микроскопический и макроскопический уровни производственной системы! Подобная постановка задачи при моделировании социально-экономических систем ранее не использовалась. Следующим логическим шагом являлось получение кинетического уравнения производственной системы, в котором инженерно-производственная функция определяет детерминированные характеристики производственной системы, а генераторная функция случайные характеристики производственной системы. Кинетическое уравнение, столь распространенное в физике, к сожалению, не используется в теории исследования социально-экономических систем или используется отдаленно.

Интегрирование кинетического уравнения производственной системы позволяет достаточно просто получить балансовые динамические уравнения для макропараметров производственной системы. Следует отметить, что балансовые уравнения получены через агрегирование состояний базовых продуктов на микроскопическом уровне. Методика получения балансовых уравнений для макропараметров из кинетического уравнения производственной системы является пятой фундаментальной точкой при построении модели производственного процесса. Следует отметить, что в своих работах В.В.Леонтьев макропараметры системы в балансовых уравнениях связывал через технологические коэффициенты, которые получал из данных статистики за многолетний период. Однако четких критериев устойчивости технологических коэффициентов В.В.Леонтьев не получил [7]. Если проводить аналогию с естественными науками, например физикой, то можно за некий аналог технологического коэффициента взять коэффициенты теплоемкости, теплопроводности, связывающие между собою макроскопические (термодинамические величины). Эти коэффициенты первоначально были получены опытным путем и затем уточнены с точки зрения микроскопического описания вещества при использовании аппарата статистической физики.

Систему балансовых уравнений макропараметров производственной системы можно замкнуть, используя известные в статистической механике приближенные методы. Наличие замкнутой системы балансовых уравнений дает возможность исследовать макропараметры производственной системы на устойчивости и оптимальное управление, оценить технологические риски производственной системы. Исследование балансовых уравнений на устойчивость по Ляпунову открывает новые возможности исследования макропараметров производственных систем и получения условий стабильной бесперебойной работы производства. Возможность вычислить критерии устойчивости макропараметров производственной системы являются шестой фундаментальной точкой при построении модели производственного процесса. Седьмой фундаментальной точкой при построении модели производственного процесса является возможность построения оптимальной функции управления макропараметрами производственной системы и оценки технологических рисков производственного процесса. Фундаментальные точки при построении модели производственного процесса подробно исследованы автором в последующих главах.

1. Балашевич В.А. Математические методы в управлении производством. – Минск: Вышэйш. школа, 1976. – 334 с.
2. Форрестер Дж. Антиинтуитивное поведение сложных систем / /Современные проблемы кибернетики, - М., 1977.
3. Шананин А.А.. Обобщенная модель чистой отрасли производства. // Математическое моделирование, 1997, том 9, №9, с.117-127
4. В.-Б. Занг, Синергетическая экономика. – М.: Мир, 1999г., 335 стр. под редакцией Германа Хакена.
5. Летенко В.А., Родионов Б.Н. Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием. Часть 2, Внутризаводское планирование. - М.: Высшая школа, 1979. – 232 с.
6. Прыткин Б.В., Технико-экономический анализ производства. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000г., 399стр.
7. Самин Д.К., 100 великих ученых.- М.: Вече, 2002, -592 с.

ЧАСТЬ 1.
ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

1. ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

Рассмотрены закономерности функционирования экономико-производственной системы. Проведен анализ основных календарно-плановых нормативов производственного процесса предприятия. Осуществлен сравнительный анализ различных типов производства. Для моделирования производственного процесса введено фазовое пространство, в котором естественным путем определяются технологические траектории производства.

Модель описания технологического процесса промышленного предприятия должна строиться в полном соответствии с особенностями организационных и технологических типов производства. Эффективность применения модели в значительной степени зависит от того, насколько модель согласуется с особенностями производственной системы, связи между элементами которой имеют чрезвычайно сложный организационный и технологический характер [1]. При построении модели производственной системы необходимо исходить от используемых в производстве календарно-плановых нормативов выпуска продукции, обеспечивающих через технологическую документацию закономерности взаимодействия между собой отдельных элементов производственной системы [2]. Модель производственной системы должна соответствовать организационному типу производства, предусматривать возможность получения оптимальных решений, описывать поведение системы при наличии в ходе производственного процесса возмущающих факторов и давать рекомендации для формирования управляющего воздействия, компенсирующего эти возмущения [3].

1.1.Особенности моделирования технологического процесса в единичном производстве

Единичное производство характеризуется изготовлением изделий единицами или небольшими сериями [3]. Повторяемость выпуска изделий либо отсутствует, либо нерегулярна и не влияет на особенности производственного процесса. Задача оперативного планирования заключается в своевременном изготовлении изделий и равномерной загрузке производственных участков при наиболее коротком производственном цикле. Характерной чертой единичного производства является тесная связь элементов календарно-плановых расчетов производства с планированием технической подготовки выполнения заказа. В изделиях наряду с оригинальными деталями имеются стандартные, в росте удельного веса которых заложен резерв повышения эффективности единичного производства. Значительно повышает технический уровень единичного производства групповой запуск деталей разного наименования и размеров, обладающих конструктивно-технологическим сходством, что позволяет организовать их совместную обработку, если не по всему технологическому маршруту, то, по крайней мере, при выполнении ряда совпадающих операций. Процесс выполнения заказа в единичном производстве состоит из этапа оформления заказа, подготовки производства и изготовления деталей. После оформления заказа составляются календарные графики (рис.1), включающие в себя расчет длительности производственного цикла.

№ п.п.	№ заказа	Трудоемкость по видам работ			Январь		Февраль		Март	
		Токарные	Расточные	Фрезерные	I	II	I	II	I	II
1	1536	872	280	400						
2	1537	1029	450	630						
3	1538	1172	720	600						
4	1539	7240	3420	3600						
5	1540	3300	1400	1820						

Рис.1. Календарный график обработки комплектов деталей по заказам

Кроме того, строятся цикловые графики, определяются календарные опережения в работе производственных участков, составляются сводные календарные графики. Выполняются расчеты загрузки производственных площадей и оборудования по календарным периодам и корректируются сводные графики с целью выравнивания загрузки по отдельным плановым периодам. Расчет длительности производственного цикла является ведущим показателем, принимается за основу при определении остальных календарно-плановых нормативов и определяется по критическому пути сетевого графика (рис.2). Для построения сетевого графика используется массив информации, характеризующий последовательность технологического процесса, материалоемкость и трудоемкость выполнения операций. Располагая сетевыми графиками по каждому изделию, строят сводный сетевой график производственного процесса, основными точками которого являются намеченные сроки выпуска изделий по плану. Сводный сетевой график (рис.3) обеспечивает календарную увязку в работе производственных подразделений, согласует пропускную способность и загрузку оборудования. В тех случаях, когда пропускная способность недостаточна для параллельной работы над разными заказами, должны быть запроектированы организационные меры по расшивке узких мест. Запланированные меры лимитируют выполнение заказов в установленные сетевым графиком сроки. В таких случаях требуется корректировка сроков выполнения работ путем увеличения времени опережения по сравнению с запланированным ранее расчетом. Для этого подсчитывается средняя плотность работ на протяжении цикла изготовления ведущих деталей по операциям и видам работ. Для упрощения расчетов календарно-плановых нормативов плотность работ предполагается постоянной на протяжении производственного цикла изделий, что в действительности может привести к значительным отклонениям от фактических значений. Плотность работ по отдельным отрезкам производственного цикла и по отдельным изделиям неодинакова и амплитуда колебаний достаточно велика. Для единичного производства характерно применение позаказной и комплектно-узловой системы планирования. При непродолжительном производственном цикле используется позаказная система планирования, при которой все необходимые для узловой и монтажной сборки детали подаются заблаговременно и комплектуются перед началом сборочных работ.

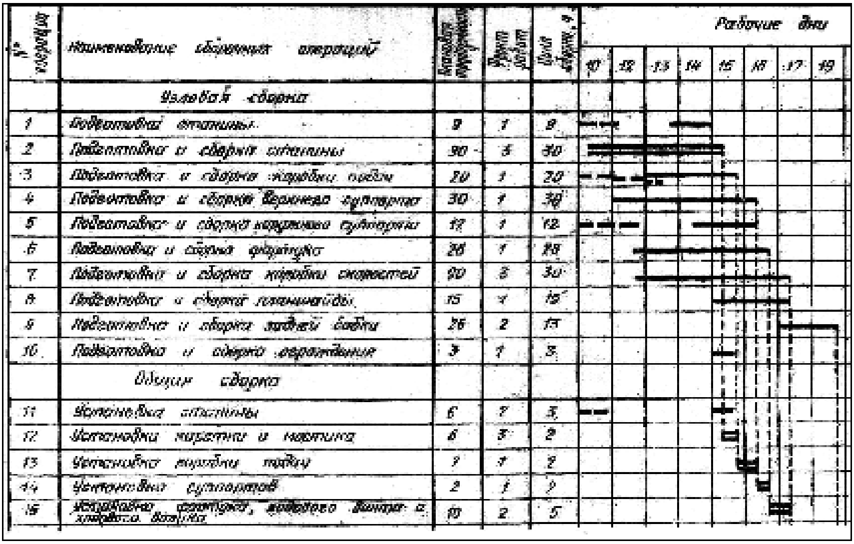

Рис.2. Сетевой график сборки объекта А

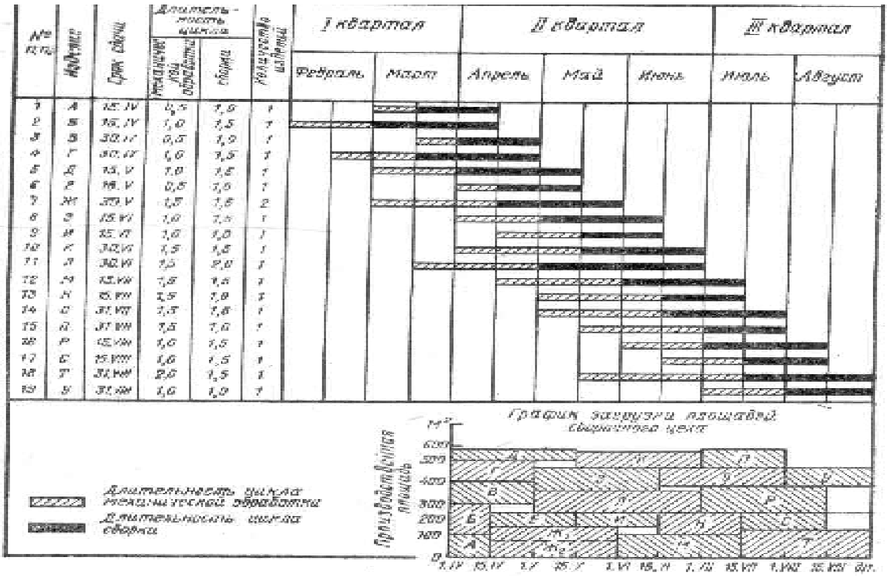

Рис.3. Сводный график запуска-выпуска изделий

Планово-учетной единицей является заказ или комплект заготовок. Позаказная система планирования наиболее проста в организационном отношении, дает возможность осуществить выбор количества деталей на условное изделие. Подача всех комплектующих и материалов к началу сборки вызывает длительное неиспользование материальных ценностей на всем протяжении сборочного цикла. Если продолжительность производственного цикла велика (больше месяца), рекомендуется применять подачу деталей несколькими очередями к этапам выполнения работ. Такой порядок соответствует комплектно-узловой системе планирования. В модели технологического процесса в единичном производстве следует учитывать ограничения, основными из которых являются ограничения по загрузке оборудования, производственных площадей и времени продолжительности смены (Табл.№1). В единичном производстве особое значение имеет сменно-суточное планирование, призванное ликвидировать отставание от плана отдельных операций и выровнять ход работ. Оперативный учет включает в себя: учет

Таблица №1. Ограничения при моделировании технологического процесса в единичном производстве

Коэффициент загрузки оборудования	$K_{зо} = \dfrac{\Theta_o}{M_{оборуд}} < 1$	Θ_o - планируемый объем работ в k-ом месяце; $M_{оборуд}$ – полная пропускная способность оборудования для узкого места в технологическом процессе
Коэффициент загрузки площадей	$K_{зп} = \dfrac{\Theta_п}{M_{площад}} < 1$	$\Theta_п$ - площади для выполнения планируемого объема работ в k-ом месяце; $M_{площад}$-полная пропускная способность площади для узкого места в технологическом процессе
Разработка сменного суточного задания	$\sum\limits_{k=1}^{n} N_к \cdot t_{к\,ед.об} \le 8час$	$N_к$ - количество заготовок при последовательном выполнении $к$ – ой операции с операционным временем выполнения операции $t_{к\,ед.об}$

выработки и заработной платы; учет движения заготовок и узлов; учет выполнения сменных заданий; учет комплектации хода производства. Первичный учет выработки в условиях единичного производства осуществляется на основе маршрутных карт и пооперационных нарядов при единицах измерения - штуках или нормо-часах.

1.2.Особенности моделирования технологического процесса в серийном производстве

В серийном производстве номенклатура изготовляемых изделий более стабильна и регулярно повторяется в программе выпуска, число выполняемых в цехах деталь-операций значительно превышает количество рабочих мест, что предопределяет изготовление изделия партиями [3]. Главной задачей оперативного планирования в условиях серийного производства является обеспечение периодичности изготовления изделий в соответствии с плановым заданием. Серийное производство в зависимости от масштабов выпуска изделий, их трудоемкости, регулярности повторения имеет разновидности, тяготеющие по своему характеру либо к единичному (мелкосерийному), либо массовому (крупносерийному) производству. Повышение серийности достигается унификацией деталей и типизацией технологических процессов. Календарно-плановые нормативы представляют собой ряд задач: определение размера партий единовременно изготавливаемых изделий с однократной затратой подготовительно-заключительного времени и периодичность их изготовления; продолжительность производственных циклов обработки и календарно-плановых опережений; расчет заделов. Определение норматива размера партии служит базой для регламентации периодичности переналадок оборудования и изготовления одноименных деталей. Для серийного производства характерно сокращение номенклатуры одновременно изготавливаемых изделий, что приводит к уменьшению числа переналадок. При этом параллельное изготовление видов продукции, дополняющих друг друга в структуре трудоемкости, обеспечивает более полную загрузку оборудования и рабочей силы. Планируемый объем выпуска должен постепенно возрастать, отражая динамику повышения производительности труда, иметь устойчивый характер и представлять собой небольшое количество вариантов, способствующих ритмичной работе производства и значительно облегчающих оперативное планирование. Размер партии обязан обеспечить непрерывную работу сборщиков в течение продолжительного времени, что содействует повышению производительности труда. В модели технологического процесса в серийном производстве следует учитывать ограничения, основными из которых являются ограничения по загрузке оборудования и распределению выпуска в стоимостном выражении в плановом периоде (табл.№2). Для сокращения длительности производственного цикла используют параллельно-последовательное движение деталей, характеризующееся коэффициентом параллельности. Наиболее точно длительность производственного цикла может быть установлена на основании планов-графиков работы производственных участков, представляющих собой расписание прохождения партий деталей по рабочим местам технологического процесса.

Таблица №2. Ограничения при моделировании технологического процесса в серийном производстве

выпуск деталей в каждом периоде должен обеспечивать полную загрузку оборудования	$$\sum_{i=1}^{n} t_{ij} \cdot x_{ik} \le \Phi_{jk} - \Delta\Phi_{jk}$$ t_{ij} - суммарное время обработки одной единицы i-го изделия на j-ом виде оборудования; x_{ik} - количество единиц i-го изделия, планируемое к выпуску в k-ом месяце; Φ_{jk} и $\Delta\Phi_{jk}$ - соответственно используемый фонд времени и заданное допустимое отклонение используемого фонда времени j-го вида оборудования в k-ом месяце;
равномерное распределение выпуска в стоимостном выражении	$$\sum_{i=1}^{n} Ц_i \cdot x_{ik} \le \Theta_k - \Delta\Theta_k$$ $Ц_i$ - оптовая цена i-го изделия; Θ_k и $\Delta\Theta_k$ - соответственно планируемый в k-ом месяце объем выпуска товарной продукции в оптовых ценах и заданное допустимое отклонение от объема выпуска;
N_i -программа выпуска i-го изделия в плановом периоде	$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} \le N_i$$

Различают план-график переменно-поточной линии, пооперационный план-график, план-график запуска-выпуска партий деталей, календарный график подачи деталей на сборку и их запуска на первую операцию. План-график переменно-поточной линии регламентирует периодичность запуска деталей в обработку и сроки переналадки линии с одного изделия на другое. Пооперационный план-график для производственных участков устанавливает порядок обработки деталей партиями для обеспечения непрерывной сборки изделий при небольшом числе деталь-операций. План-график запуска-выпуска партий деталей применяется к непрерывной или строго периодической сборке готовых изделий. Одним из основных календарно-плановых нормативов в серийном производстве являются заделы. При расчете заделов устанавливаются показатели: средний размер заделов как элемент нормирования величины незавершенного производства и требующие предприятию собственные оборотные средства; минимальные и максимальные размеры заделов как нормативные величины, необходимые для оперативного контроля их состояния и регулирования; переходящий нормативный размер заделов на конец (начало) планового периода. Для серийного производства применяются две системы планирования: групповая система планирования (по цикловым комплектам) и планирование по заделам. Групповая система характеризуется индивидуальными сроками подачи деталей на сборку. Планово-учетной единицей является цикловой комплект: комплект оригинальных деталей, сформированный по общности признаков периодичности и длительности производственного цикла и маршрута движения по операциям. Групповая система планирования способствует ритмичному и равномерному ходу производства и значительно сокращает время движения деталей. Сущность групповой системы планирования заключается в установлении и постоянном соблюдении комплектных календарных опережений в работе участков. Особенность планирования по заделам заключается в создании постоянной насыщенности всех стадий производственного процесса заделами деталей и узлов различной степени готовности при строгом соблюдении минимально расчетного уровня задела. Устанавливается ведущее изделие – условный представитель (базовый продукт), преобладающий в производственном процессе и постоянно изготавливающийся. Все остальные изделия как бы условно комплектуют это изделие. Условием применения данной системы планирования являются значительный объем и достаточная устойчивость выпуска продукции, что дает возможность не подвергать частой корректировке расчет условного комплекта. При дальнейшем увеличении объема выпуска в условиях поточной сборки изделий, что характерно для крупносерийного производства, согласованная работа производственных звеньев достигается путем соблюдения четкой периодичности изготовления деталей по стандартным календарным расписаниям. Основой для оперативной подготовки производства являются сменно-суточные планы, составленные для каждого рабочего места и участка в целом. Оперативный учет движения деталей осуществляется при помощи маршрутных листов и включает в себя задачи: контроль за соблюдением технологической дисциплины; сохранность партии деталей в производстве; учет движения деталей вдоль технологической цепочки. Единицами измерения являются условные детали и нормо-часы.

1.3.Особенности моделирования технологического процесса в массовом производстве

Массовое производство характеризуется узкой специализацией заводов, цехов и участков по выпуску продукции, ограниченной и устойчивой в течение длительного промежутка времени и производимой в заданном постоянном суточном темпе. Основной задачей оперативного планирования массового производства является обеспечение движения обрабатываемых деталей по операциям в заданном темпе. Отсюда значительная часть календарно-плановых нормативов массового производства носит устойчивый характер и непосредственно закладывается в основу планового регламента работы поточных линий. Оперативное планирование базируется на календарно-плановых нормативах: расчете темпа выпуска деталей $\left[c\right]_1$ в рамках графиков работы участков и расчете нормативов внутрилинейных (цеховых) и межлинейных (межцеховых) заделов $\left[c\right]_0$. Важными элементами оперативного планирования в массовом производстве является контроль и регулирование движения деталей и узлов вдоль технологической цепочки, учет и контроль выполнения планов, контроль состояния заделов. Исходным элементом непрерывно-поточного производства является расчет такта поточной линии r - промежутка времени между двумя последовательно обрабатываемыми на рассматриваемой технологической операции заготовками. Иногда удобней использовать обратную величину такту – темп поточной линии $\left[c\right]_1 = \frac{1}{r}$. На базе темпа поточной линии рассчитывается ритм поточной линии $R = \frac{n}{\left[c\right]_1}$ и количество рабочих мест $c_i = t_i \cdot \left[c\right]_1$, где n - величина транспортной партии; t_i - норма штучного времени на выполнение i-ой операции. В условиях массового производства вдоль технологического процесса должны выполняться равенства:

$$\frac{t_1}{c_1} = \frac{t_2}{c_2} = \ldots = \frac{t_j}{c_j} = \ldots. = \frac{t_N}{c_N} = \frac{1}{\left[c\right]_1}. \qquad (1)$$

Для того чтобы работа поточной линии осуществлялась бесперебойно в заданном темпе, необходимо насыщение всех стадий производственного процесса заделами, уровень которых строго регламентирован. Нормы заделов на непрерывно-поточных линиях определяются на основе практического опыта. Основными причинами отклонений от темпа в работе поточных линий являются производственно-технические неполадки (несвоевременная подача заготовок и материалов, брак заготовок, отклонения от контрольных норм качества в ходе изготовления продукции, массовые поломки инструмента), вспомогательные операции, прерывающие основной процесс (переналадка и подналадка оборудования), колебания в производительности труда рабочих.

В условиях массового производства наибольшее распространение получила система планирования по темпу выпуска. Слаженный ход звеньев производственной цепочки достигается путем выравнивания их производительности применительно к единой расчетной единице – темпу выпуска продукции. Планово-учетной единицей является условное изделие (базовый продукт [2]). Расчет производственных программ осуществляется цепным способом от конечной технологической операции к начальной. Большое значение в системе планирования по темпу выпуска продукции имеет вопрос корректировки квартальных заданий годового плана с учетом фактического состояния заделов по данным инвентаризации незавершенного производства. Помимо данных коррективов устанавливаются суточные графики сдачи основной продукции. Внутрицеховое планирование в массовом производстве в основном сводится к проектированию мер по ликвидации отставаний от графиков выпуска деталей. Основным звеном планирования, регулирования и учета выпуска продукции является поточная линия, работа которой регламентируется темпом выпуска продукции. По решающим звеньям производственного процесса ведется контроль временного графика, позволяющий непрерывно следить за темпами выполнения производственных заданий.

1.4.Принципы моделирования производственных систем

Рассмотрим вопрос моделирования производственных систем, основные характеристики технологического процесса которых приведены в таблице №3. Наблюдаемой натуральной единицей технологического процесса производственной системы является планово-учетная единица. Под элементами производственной системы будем понимать наблюдаемые планово-учетные единицы. Базовым продуктом производственной системы будем называть планово-учетную единицу [4]. Если известно все о состоянии каждого базового продукта, то разумно полагать, что известно все о состоянии производственной системы. Базовый продукт переходит из своего начального состояния (начальной заготовки) в конечное состояние (готовое изделие) в соответствии с определенным технологическим процессом.

Таблица №3. Сводная таблица характеристик технологического процесса

	Тип производства				
	Единичное		**Серийное**		**Массовое**
Определение типа производства	изготовлением изделий единицами или небольшими сериями по отдельным заказам. Повторяемость выпуска изделий либо отсутствует, либо нерегулярна и не влияет на особенности ведения производственного процесса.		номенклатура изготовляемых изделий более менее стабильна и регулярно повторяется в программе выпуска; число выполняемых в цехах деталь-операций значительно превышает количество рабочих мест		узкая специализацией на выпуске ограниченной и устойчивой в течение длительного промежутка времени изделий, изготовляемых на основе установленного плановым заданием суточного темпа выпуска продукции.
Главная задача производственного процесса	обеспечении своевременного изготовления изделий согласно заключенным договорам и равномерной загрузки производственных участков при наиболее коротком производственном цикле		установление и обеспечение периодичности изготовления изделий в соответствие с плановым заданием		организация и обеспечение движения обрабатываемых деталей и собираемых изделий по операциям в заданном темпе.
Система планирования производственного процесса	Позаказная	Комплектно-узловая	Групповая	По заделам	По темпу выпуска
Планово-учетная единица	Заказ	Комплект деталей	Цикловой комплект деталей	Условное изделие	Условное изделие
1	2		3		4

<table>
<tr><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Исходные данные для планирования производственного процесса</td><td rowspan="3">Сроки начала и окончания этапов работ</td><td>Технологические маршруты обработки деталей</td><td colspan="2">Технологические маршруты обработки деталей с указанием выполняемых операций, применяемого оборудования и норм выработки на обработку одной детали</td></tr>
<tr><td colspan="2">Закрепление детале-операций за станками</td><td>Темп выпуска про-дукции и заделы незавершенной продукции</td></tr>
<tr><td colspan="2">Размеры месячного производственного задания по детали каждого наименования</td><td>Годовой, квартальный, месячный, де-кадный план</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Основные макропоказатели производственного процесса</td><td colspan="2">длительности производственного цикла</td><td>размера партий изготовления изделий</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">сроки календарных опережений в работе отдельных производственных подразделений</td><td>нормативный размер партий деталей и периодичность их изготовления</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">загрузка производственных площадей по календарным периодам</td><td></td><td>Темп (ритм, такт)</td></tr>
<tr><td colspan="2">загрузки оборудования по периодам</td><td colspan="2">календарно-плановые опережения</td></tr>
<tr><td colspan="2">плотность работ на протяжении производственного цикла ведущих деталей</td><td colspan="2">Заделы</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Основные микропоказатели производственного процесса</td><td colspan="2">Продолжительность отдельных процессов производственного цикла</td><td colspan="2">Норматив среднего межоперационного времени обработки заготовки</td></tr>
<tr><td colspan="2">Процентное соотношение выполнения этапа работ</td><td colspan="2">Норма расхода сырья и материалов на отдельных операциях</td></tr>
<tr><td colspan="2">Процентное соотношение освоения материалов на каждом этапе выполнения работ</td><td colspan="2">Сменные нормы выполнения технологической операции</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Задачи оперативного учета производства</td><td colspan="2">учет выработки и заработной платы</td><td>Контроль за соблюдением технологической дисциплины</td><td>учет и контроль выполнения планов</td></tr>
<tr><td colspan="2">учет выполнения сменных заданий</td><td>Сохранность количества деталей в производстве</td><td>состояния заделов и оперативного регулирования хода выполнения планов</td></tr>
<tr><td colspan="2">учет комплектации хода производства</td><td>учет движения деталей в производстве</td><td>контроль и регулирование движения деталей вдоль технологической цепочки</td></tr>
</table>

1	2	3	4
Единица оперативного учета	Заказ ,шт. (Натуральное выражение)	норма-часы	Условное изделие
Типовые ограничения при планировании производственного процесса	по загрузке оборудования $K_{зо} = \frac{\Theta_o}{M_{оборуд}} < 1$ по загрузке площадей $K_{зп} = \frac{\Theta_n}{M_{площад}} < 1$ по программе выпуска	по загрузке оборудования $\sum_{i=1}^{n} t_{ij} \cdot x_{ik} \le \Phi_{jk} - \Delta\Phi_{jk}$ по распределению выпуска $\sum_{i=1}^{n} Ц_i \cdot x_{ik} \le \Theta_k - \Delta\Theta_k$ по программе выпуска $\sum_{k=1}^{n} x_{ik} \le N_i$	по темпу выпуска (по загрузке оборудования) $[c]_1 < [c]_{1\Psi}$ по заделам вдоль технологической цепочки $[c]_0 > [c]_{0\min}$ где $[c]_{1\Psi}$ -паспортная производительность технологического оборудования $[c]_{0\min}$ - минимально допустимые межоперационные заделы для обеспечения непрерывного производственного процесса

Изменение во времени свойств базового продукта производственной системы может быть представлено в виде движения базового продукта в пространстве наблюдаемых производственно- технологических параметров, а закон движения может быть получен с помощью методов вариационного исчисления. Пусть в моменты времени t_1 и t_2 система, состоящая из базовых продуктов, описывается наблюдаемыми параметрами $S(t_1)$ и $S(t_2)$ - стоимостью перенесенных затрат на базовый продукт в соответствующие моменты времени t_1 и t_2. Тогда между этими положениями система изменяется таким образом, чтобы интеграл $\int_{t_1}^{t_2} J(t, S(t), \dot{S}(t))dt$, отражающий затраты на переход потенциальных возможностей производственного процесса в стоимость базового продукта, имел минимум. Этот переход, а следовательно, и сам функционал, определяется конкретным технологическим процессом.

Такой подход в построении законов движения экономических систем будем называть принципом наименьшего действия. Согласно данному принципу система характеризуется целевой функцией $J(t, S(t), \dot{S}(t))$ и целевым функционалом $\int_{t_1}^{t_2} J(t, S(t), \dot{S}(t))dt$ [5]. Основным в таком описании является то, что движение системы полностью определено, если известна целевая функция $J(t, S(t), \dot{S}(t))$, где $\dot{S}(t) = \frac{dS}{dt}$ - интенсивность переноса затрат на базовый продукт. Чтобы установить связь между динамикой базового продукта и макропараметрами производственной системы в целом, полезно ввести понятие ансамбля. Под ансамблем будем понимать множество базовых продуктов, перемещающихся вдоль технологической линии от операции к операции. Отметим, что вдоль технологической линии движется много базовых продуктов, каждый из которых в один и тот же момент времени находится на разных стадиях завершения. Это значит, что в момент времени t_0 у них были разные начальные условия. Основная идея введения ансамбля заключается в рассмотрении вместо одного базового продукта их множества, но таких, которые описываются одной и той же целевой функцией $J(t, S(t), \dot{S}(t))$ (базовые продукты идентичны). Заметим, что введение ансамбля - удобный вычислительный прием получения средних характеристик в тех случаях, когда начальные условия для каждого базового продукта различны. Если точные начальные значения производственной системы нам неизвестны, мы можем рассмотреть плотность базовых продуктов в фазовом пространстве и, используя усреднение по ансамблю, вычислить среднее значение любой характеристики производственной системы.

1.5.Моделирование крупносерийного и массового производства

В условиях крупносерийного и массового производства наблюдаемыми на микроскопическом уровне производственного процесса величинами технологического процесса при движении базового продукта от операции к операции являются расход сырья и материалов (СиМ), затраты фонда оплаты труда (ФОТ) основных рабочих на операции, технологическое время выполнения операции, представленное в часах [6,7]. Введем в рассмотрение следующую величину:

$$m\left[\frac{\text{грн}}{\textit{час}}\right], \tag{2}$$

которая характеризует скорость перехода стоимости ресурсов и рабочей силы в стоимость базового продукта и может быть рассмотрена как фазовая координата фазового пространства производственной системы или как фазовая скорость соответствующей координаты. Величина $m\left[\frac{\text{грн}}{\textit{час}}\right]$ является наблюдаемой микроскопической величиной производственного процесса. Производственная система характеризуется не только скоростью накопления $m\left[\frac{\text{грн}}{\textit{час}}\right]$, но и суммарным накоплением перенесенных на базовый продукт затрат $\int m\cdot \mathrm{dt} = S[\text{грн}]$ за некоторый промежуток времени. Среднее значение величины $m\left[\frac{\text{грн}}{\textit{час}}\right]$ может быть найдено из нормативной документации цеха: норм расхода сырья и материалов, расценок на выполнение операций, среднего времени выполнения операции, паспортных данных работы оборудования. Таким образом, микроскопические величины $m\left[\frac{\text{грн}}{\textit{час}}\right]$ и $\int m\cdot \mathrm{dt} = S[\text{грн}]$ могут быть приняты в качестве фазовых координат. Если ввести в рассмотрение функцию распределения базовых продуктов $c\left(t,S,m\right)$ [2,4], нормированную на количество находящихся в производственном процессе базовых продуктов N:

$$\int_0^{S}\!\!d\int_0^{\infty} c\left(t,S,m\right)d\,m\,d\mathrm{S}=N(t), \tag{3}$$

то возможно выразить макропараметры производственного процесса через микроскопические величины производственной системы, описывающие поведение базового продукта при его

переходе от одной технологической операции к другой. Величина S_d представляет собою среднюю себестоимость изготовления базового продукта. Моменты функции распределения являются макропараметрами производственного процесса и имеют простую производственную интерпретацию:
нулевой

$$[c]_0 = \int_0^{\infty} c(t,S,m)\,dm \tag{4}$$

и первый

$$[c]_1 = \int_0^{\infty} c(t,S,m)\cdot m\,dm \tag{5}$$

моменты функции распределения представляют собой величину межоперационных заделов и темп движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки производственного процесса. Моменты более высокого порядка для описания производственной системы обычно не используются. Следует заметить, что макропараметры для описания производственной системы не являются независимыми величинами, а связаны через микроскопический уровень производственной системы посредством функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$, вид которой определяется технологией изготовления базового продукта, видом и производительностью обрабатывающего оборудования и т.д.. Связь макропараметров, описывающих производственный процесс через микроскопический уровень, является ключевым моментом для построения модели функционирования производственной системы.

Выводы

Рассмотрены особенности функционирования разных типов производственных систем. Проведен анализ календарно-плановых нормативов производственного процесса, использование которых целесообразно при моделировании технологических процессов. Рассмотрен подход к выбору координат. Введено понятие ансамбля базовых продуктов, представленных в фазовом пространстве множеством точек. Показано, что при неизвестных начальных значениях микропараметров технологического процесса среднее значение любой характеристики производственной системы может быть вычислено через усреднение по ансамблю базовых продуктов.

1. Форрестер Дж., Основы кибернетики предприятия.- М.:Изд. “Прогресс” 1961г. 341стр.
2. .Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок. Х.: ХНУ, 2003 .-272стр
3. Летенко В.А., Родионов Б.Н. Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием. Часть 2, Внутризаводское планирование. - М.: Высшая школа, 1979. – 232 с.
4. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции – Доповіді Національної академії наук України, 2005. –N7– С.66-71
5. Пригожин И. От существующего к возникающему: Время и сложность в физических науках: Пер. с англ.- М.: Наука. 1985. – 328
6. Разумов И.М., Шухгалтер Л.Я. и др. Организация и планирование машиностроительного производства. М.: «Машиностроение», 1974. – 592 с.
7. Климов Н.А. и др. Труд в капиталистическом производстве. М.: Наука, 1984. – 280 с.
8. Эшби У.Р. Введение в кибернетику. М.: Изд. Иностранной литературы, 1959. – 432 с.

2. О ПОДХОДАХ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ

С использованием вариационного и дифференциального принципов записана целевая функция производственной системы. Показаны различия в вариационном и дифференциальном подходе при построении целевой функции производственных систем. Определены интегралы движения при описании производственных систем.

Описание функционирования современного производства может быть представлено в виде процесса, в ходе которого производственная система переходит из одного своего состояния в другое. Состояние системы можно определить как состояние общего числа N базовых продуктов производственной системы [1,c.178]. Под базовым продуктом (или условным изделием [2,c.183]) понимается элемент производственной системы, на который происходит перенос стоимости живого труда, сырья, материалов и орудий труда в ходе его движения по операционной цепочке технологических карт. В ходе такого движения происходит целенаправленное превращение исходного сырья и материалов (межоперационной заготовки) в готовый продукт путем целенаправленного воздействия общественно-полезного труда. Состояние базового продукта может быть описано микроскопическими величинами $\left(\mathrm{S}_{\mathrm{j}}, m_j\right)$ [3], где S_{j} (грн) и $m_j = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S_j}{\Delta t}$ (грн/час) соответственно сумма общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенных производственной системой на j-й базовый продукт, $0 < j \leq N$. Рассматриваемую производственную систему будем характеризовать функцией $J\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}_{\mathrm{j}}, m_j\right)$. Если известно все о состоянии каждого базового продукта, то разумно полагать, что все известно о состоянии производственной системы. Базовый продукт переходит из своего начального состояния (начальной заготовки) в конечное состояние (готовое изделие) в соответствии с определенным технологическим процессом. Изменение во времени свойств базового продукта производственной системы может быть представлено в виде движения базового продукта в пространстве наблюдаемых производственно-технологических параметров, а закон движения получен с помощью методов вариационного исчисления. Пусть в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ система, состоящая из базовых продуктов, описывается наблюдаемыми параметрами $S_j(t_1)$ и $S_j(t_2)$. Тогда между этими положениями система движется таким образом, чтобы целевой функционал

$$I = \int_{t_1}^{t_2} J(t, S_j(t), m_j(t)) \cdot dt, \qquad (1)$$

определяемый конкретным технологическим процессом, наличием оборудования с заданными характеристиками и т.д., имел минимум. Такой подход в построении законов движения механических систем, называемый принципом наименьшего действия, широко используется в экономике при решении оптимизационных задач [4]. Согласно данному принципу экономическая система характеризуется целевой функцией

$$J = J(t, S_j(t), m_j(t)) \qquad (2)$$

и целевым функционалом (1). Так как целевая функция имеет вид (2), то для вычисления целевого функционала (1) необходимо задать функцию возрастания стоимости базового продукта при его движении вдоль технологической цепочки (ФВСБП)

$$\mathrm{S_j} = \mathrm{S_j}(t) \qquad (3)$$

в интервале времени $\mathrm{t_1 \le t \le t_2}$. Другими словами целевой функционал (1) есть функционал, зависящий от движения системы в заданном технологическом поле производственного процесса. Если произвольно задать функции ФВСБП (3), то получим некоторое возможное (т.е. допускаемое связями) движение. Выделим все возможные кривые ФВСБП (3), проходящие через две заданные точки пространства с координатами $\left(\mathrm{t_1, S_j}\left(\mathrm{t_1}\right)\right)$ и $\left(\mathrm{t_2, S_j}\left(\mathrm{t_2}\right)\right)$, то есть определим все возможные движения, переводящие производственную систему из заданного начального положения $\left(\mathrm{t_1, S_j}\left(\mathrm{t_1}\right)\right)$ в заданное конечное положение $\left(\mathrm{t_2, S_j}\left(\mathrm{t_2}\right)\right)$, которое она стала занимать в момент времени $\mathrm{t_2}$

2.1.Вариационный принцип построения целевой функции производственной системы

Пусть производственный процесс вдоль технологической цепочки изготовления базового продукта определяется функцией возрастания стоимости базового продукта при его движении вдоль технологической цепочки (3). Данная функция строится на основании операционных карт технологического процесса, определяет последовательность операций производства базового продукта и требуемые производственные ресурсы, необходимые для выполнения операции (сырье, трудовые ресурсы, электроэнергия и т.д.) [4]. Функция ФВСБП (3) соответствует оптимальному построению производственного процесса изготовления базового продукта. Целевой функционал (1) имеет для такого «планового» производственного процесса экстремальное (точнее стационарное) значение по сравнению с другими вариантами технологий изготовления базового продукта, представляющими собой семейство технологий изготовления базового продукта (ТИБП) за промежуток времени $\left(t_1, t_2\right)$

$$S_j = S_j(t, a), \quad t_1 \le t \le t_2, \quad -h \le a \le h, \tag{4}$$

где h - наперед заданное конечное число, определяемое область допустимых траекторий движения $S_j = S_j(t, a)$ j-го базового продукта вдоль технологической цепочки производственного процесса изготовления базового продукта. Семейство ТИБП (4) содержит в себе при $a = 0$ «плановый» производственный процесс в рамках заданной технологии производства базового продукта. Все семейство ТИБП производственной системы имеет общее начало $\left(t_1, S_j\left(t_1\right)\right)$ и общий конец $\left(t_2, S_j\left(t_2\right)\right)$.

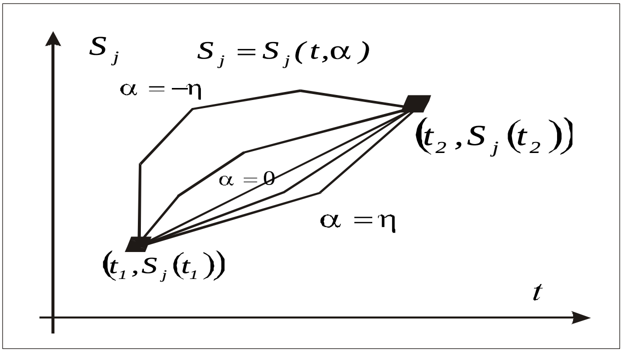

Рис.1. Семейство ТИБП производственной системы

Целевой функционал (1), вычисленный вдоль конкретной ТИБП, принадлежащей этому семейству, представляет собою функцию параметра a :

$$I(a) = \int_{t_1}^{t_2} J(t, S_j(t,a), m_j(t,a)) \cdot dt \tag{5}$$

Вычислим вариацию функционала (1), т.е. дифференциал по a :

$$dI = \int_{t_1}^{t_2} dJ \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial J}{\partial S_j} \cdot dS_j + \frac{\partial J}{\partial m_j} \cdot dm_j \right) \cdot dt = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial J}{\partial m_j} \cdot dS_j \Bigg|_{t_1}^{t_2} +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial J}{\partial S_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial m_j} \right) \cdot dS_j \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial J}{\partial S_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial m_j} \right) \cdot dS_j \cdot dt \, . \tag{6}$$

Интеграл преобразовали при помощи интегрирования по частям, используя для этого перестановочность операций варьирования d и дифференцирования по времени $\frac{d}{dt}$:

$$dm_j = d\,\frac{d}{dt} S_j(t,a) = \frac{\partial}{\partial a} \frac{d}{dt} S_j(t,a) \cdot da =$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial a} S_j(t,a) \cdot da = \frac{d}{dt} dS_j \tag{7}$$

Все пути базовых продуктов производственной системы имеют общее начало $\left(t_1, S_j\left(t_1\right)\right)$ и общий конец $\left(t_2, S_j\left(t_2\right)\right)$, поэтому при $t = t_1$ и при $t = t_2$ вариации $dS_j = 0$ и проинтегрированная часть обращается в ноль.

Для «планового» производственного процесса вариация целевого функционала (6) должна быть равна нулю:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial J}{\partial S_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial m_j} \right) \cdot dS_j \cdot dt = 0 \tag{8}$$

и заданные функции (ФВСБП) (3) для «плановой технологии» удовлетворяют уравнениям Эйлера:

$$\frac{\partial J}{\partial S_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial m_j} = 0 \ . \qquad (9)$$

Из зависимостей функций возрастания стоимости базового продукта при его движении вдоль технологической цепочки (3) может быть найден вид целевой функции (2), описывающей динамику движения базовых продуктов по операционному маршруту в заданном технологическом поле производственного процесса.

Достаточно обширное семейство технологических процессов может быть описано функций ФВСБП вида

$$\mathrm{S_j}(t) = f(S)\cdot\frac{t^2}{2} + f_1(S)\cdot t + f_0(S) \ , \qquad (10)$$

в которой слагаемое $f(S)\cdot\frac{t^2}{2}$ определяет технологический процесс изготовления базового продукта, а слагаемые $f_1(S)\cdot t + f_0(S)$ порядок разнесения постоянных затрат производственного процесса. К такому семейству относятся производственные системы, функции ФВСБП которых построены на основании сетевого графика производственного процесса. Полагается, что технологический процесс (сетевой график производственного процесса) со временем меняется медленно, и можно считать функции f, f_1, f_0 зависящими только от места в технологической цепочке. Уравнения Эйлера для функции ФВСБП вида (10) может быть записано в форме

$$\dot{m}_{\mathrm{j}}(t) = f(S_{\mathrm{j}}) \ , \qquad \dot{S}_{\mathrm{j}}(t) = m_{\mathrm{j}} \qquad (11)$$

с соответственно вытекающей из уравнений (11) целевой функцией производственной системы

$$J(t, S_j(t), m_j(t)) = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{m_j^{\ 2}}{2} - F(S_j)\right),$$

$$f(S) = -\frac{\partial F(S)}{\partial S} \ . \qquad (12)$$

Функции (ФВСБП) (3) для «плановой технологии» наряду с вариационным принципом могут быть охарактеризованы и при помощи дифференциальных уравнений движения базовых продуктов производственной системы. Однако между дифференциальными уравнениями и вариационными принципами имеется одно принципиальное различие: дифференциальные уравнения выражают некоторую зависимость, связывающую момент времени t, положение базовых продуктов вдоль технологической цепочки производственной системы, скорости переноса затрат и ускорения переноса затрат на базовый продукт в этот момент времени. Если эта зависимость выполняется в каждой точке некоторого движения вдоль технологической цепочки, то данное движение отвечает «плановому технологическому процессу». Вариационный же принцип характеризует весь прямой путь в целом. Он формулирует стационарное свойство целевого функционала, которое выделяет «плановый технологический процесс» среди других возможных вариантов изготовления базового продукта. Вариационный принцип имеет более обозримую и компактную форму и часто используется в качестве фундамента для построения новых методов описания систем.

2.2. Дифференциальный принцип построения целевой функции производственной системы

Дифференциальные уравнения Эйлера для базовых продуктов производственной системы (9) представляют собою необходимые и достаточные условия равенства нулю вариации (6). Получим уравнения Эйлера (9) из общего уравнения производственной динамики базового продукта:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(f(S_{\mathrm{j}})-\ddot{S}_{\mathrm{j}}(t)\right)\cdot d\,S_{\mathrm{j}}=0\,,\quad \dot{m}_{\mathrm{j}}(t)=f(S_{\mathrm{j}})\,,\qquad \dot{S}_{\mathrm{j}}(t)=m_{\mathrm{j}} \tag{13}$$

где функция ФВСБП записана в форме (10) или (11).

Используя перестановочность операций варьирования d и дифференцирования по времени $\frac{d}{dt}$ (7), получим :

$$\sum_{j=1}^{N}\ddot{S}_{\mathrm{j}}(t)\cdot d\,S_{\mathrm{j}}=\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_{\mathrm{j}}(t)\cdot d\,S_{\mathrm{j}}-\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_{\mathrm{j}}(t)\cdot\frac{d}{dt}d\,S_{\mathrm{j}}= \tag{14}$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_{\mathrm{j}}(t)\cdot d\,S_{\mathrm{j}}-\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_{\mathrm{j}}(t)\cdot d\,\dot{S}_{\mathrm{j}}=\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_{\mathrm{j}}(t)\cdot d\,S_{\mathrm{j}}-d\sum_{j=1}^{N}\frac{\dot{S}_{j}^{2}(t)}{2}=$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_{\mathrm{j}}(t)\cdot d\,S_{\mathrm{j}}-d\sum_{j=1}^{N}\frac{m_{j}^{2}(t)}{2}\,,$$

где $\dfrac{d}{dt} d\,S_j = dm_j = d\,\dfrac{dS_j}{dt}$.

Обозначим работу технологических сил через потенциал технологического поля производственной системы $F(S_{\mathrm{j}})$:

$$\sum_{j=1}^{N} f(S_{\mathrm{j}}) \cdot d\,S_{\mathrm{j}} = -d \sum_{j=1}^{N} F(S_{\mathrm{j}}), \tag{15}$$

запишем уравнение динамики базового продукта (13) в виде:

$$d\sum_{j=1}^{N} \frac{m_j^2(t)}{2} - \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N} \dot{S}_{\mathrm{j}}(t) \cdot d\,S_{\mathrm{j}} - d\sum_{j=1}^{N} F(S_{\mathrm{j}}) = 0 \tag{16}$$

Проинтегрируем уравнение (16) по времени в пределах $\mathrm{t} = \mathrm{t}_1$ и $\mathrm{t} = \mathrm{t}_2$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(d\sum_{j=1}^{N} \frac{m_j^2(t)}{2} - d\sum_{j=1}^{N} F(S_{\mathrm{j}}) \right) \cdot dt - \left(\sum_{j=1}^{N} \dot{S}_{\mathrm{j}}(t) \cdot d\,S_{\mathrm{j}} \right)_{t=t_1}^{t=t_2} = 0\,. \tag{17}$$

Так как $d\,S_{\mathrm{j}}$ =0 при $\mathrm{t} = \mathrm{t}_1$ и $\mathrm{t} = \mathrm{t}_2$, следовательно $\left(\sum_{j=1}^{N} \dot{S}_{\mathrm{j}}(t) \cdot d\,S_{\mathrm{j}} \right)_{t=t_1}^{t=t_2}$ =0, и равенство (17) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(d\sum_{j=1}^{N} \frac{m_j^2(t)}{2} - d\sum_{j=1}^{N} F(S_{\mathrm{j}}) \right) \cdot dt = 0\,. \tag{18}$$

Равенство (18) может быть преобразовано

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(d\sum_{j=1}^{N} \frac{m_j^2(t)}{2} - d\sum_{j=1}^{N} F(S_{\mathrm{j}}) \right) \cdot dt = d\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{m_j^2(t)}{2} - \sum_{j=1}^{N} F(S_{\mathrm{j}}) \right) \cdot dt =$$

$$= d\int_{t_1}^{t_2} \Big(J(t, S_j(t), m_j(t) \Big) \cdot dt = 0\,, \tag{19}$$

где целевая функция производственной системы представлена в ранее рассмотренной форме (12).

Таким образом, основное уравнение динамики (13) привело нас к вариационному принципу $d\int_{t_1}^{t_2} \Big(J(t, S_j, m_j \Big) \cdot dt = 0$, а отсюда, как было указано выше, к уравнениям Эйлера (9)

2.3.Первые интегралы в модели микроскопического описания производственной системы

При движении базовых продуктов производственной системы вдоль технологической цепочки в фазовом пространстве (S,m) существуют такие функции экономических величин S_j, m_j, которые сохраняют при движении системы постоянные значения, зависящие только от начальных условий. Такие функции являются первыми интегралами (или интегралами движения) производственной системы и имеют немаловажное значение в исследовании экономических систем.

Если целевая функция для описания производственной системы не зависит явно от времени, то полная производная от нее может быть записана в виде:

$$\frac{dJ}{dt}=\sum_{j=1}^{N_1}\left[\frac{\partial J}{\partial S_j}\cdot\frac{dS_j}{dt}\right]+\sum_{j=1}^{N_1}\left[\frac{\partial J}{\partial m_j}\cdot\frac{dm_j}{dt}\right]. \quad (20)$$

Заменяем производные $\frac{\partial J}{\partial S}$ на их значения $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial m_j}\right)$ (9) , получаем

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N_2}\left[\left(\frac{\partial J}{\partial m_j}\right)\cdot\frac{dS_j}{dt}-J\right]=0. \quad (21)$$

Откуда величина

$$\sum_{j=1}^{N_2}\left[\left(\frac{\partial J}{\partial m_j}\right)\cdot\frac{dS_j}{dt}-J\right]=\text{const} \quad (22)$$

является постоянной в ходе функционирования производственной системы и есть интеграл движения системы. К подобным экономическим системам относятся системы, имеющие полный замкнутый технологический цикл.

Если представить целевую функцию производственной системы в виде разности членов, зависящих только от фазовых скоростей и зависящих только от фазовых координат, то интеграл движения примет вид

$$\sum_{j=1}^{N_1}\left[\left(\frac{\partial J}{\partial m_j}\right)\cdot\frac{dS_j}{dt}\right]-J_{\Pi}=const$$

или $$\sum_{j=1}^{N_1} \frac{a_0 \cdot m_j^2}{2} + b \cdot F\left(t, S_j\right) = \text{const}. \tag{23}$$

Системы, имеющие интеграл указанного вида, называются консервативными.

Следующий интеграл движения производственной системы $J\left(\mathrm{t}, \mathrm{S_j}, m_j\right)$ возникает вследствие однородности фазового пространства (целевая функция производственной системы не зависит явно от фазовой координаты):

$$\frac{\partial J}{\partial S} = 0 \ . \tag{24}$$

Как следствие однородности фазового пространства потребуем, чтобы целевая функция $J\left(\mathrm{t}, \mathrm{S_j}, m_j\right)$ замкнутой системы осталась неизменна при переносе системы как целого на отрезок dS. Изменение целевой функции $J\left(\mathrm{t}, \mathrm{S_j}, m_j\right)$ вследствие малого перемещения по фазовой координате равно

$$d\,J\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}_j m_j\right) = \sum_{j=1}^{N_1} \left[\frac{\partial J}{\partial S_j} \cdot d\,S \right] = d\,S \cdot \sum_{j=1}^{N_1} \frac{\partial J}{\partial S_j} \ . \tag{25}$$

Так как выбор dS произволен, потребуем, чтобы $d\,J_{\Pi}\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}_j m_j\right) = 0$, что эквивалентно равенству

$$\sum_{j=1}^{N_1} \frac{\partial J}{\partial S_j} = 0 \ . \tag{26}$$

В силу уравнений Эйлера (9) получаем

$$\sum_{j=1}^{N_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial J}{\partial m_j} \right) = 0 \tag{27}$$

Поменяв в выражении (26) операции суммирования и дифференцирования местами, запишем

$$\mathrm{P}_S = \sum_{j=1}^{N_1} \left(\frac{\partial J}{\partial m_j} \right) = const \ . \tag{28}$$

Постоянные величины есть интегралы движения системы. Исходное выражение (26) в силу определения величины воздействия производственной системы на j-й базовый продукт $f_j = \dfrac{\partial J}{\partial S_j}$, дает равенство

$$\sum_{j=1}^{N_1} f_j = 0, \qquad (29)$$

означающее, что сумма всех воздействий f_j на базовые продукты производственной системы, равна нулю.

Следующий интеграл движения производственной системы $J\left(\mathrm{t}, \mathrm{S_j}, m_j\right)$ возникает вследствие однородности фазового пространства по фазовой скорости, и уравнение Эйлера принимает вид:

$$\frac{\partial J}{\partial m_j} = 0\ . \qquad (27)$$

Это условие совпадает по форме с необходимым условием экстремума в классической задаче математического программирования при отсутствии ограничений.

2.4.Свойства целевой функции производственной системы

Из уравнений Эйлера (9) следуют свойства целевой функции. Если производственная система состоит из двух невзаимодействующих частей (производственных участков, цехов, площадок), то справедливо равенство:

$$J\left(\mathrm{t}, \mathrm{S_j}, m_j\right) = J_1\left(\mathrm{t}, \mathrm{S_{j_1}}, m_{j_1}\right) + J_2\left(\mathrm{t}, \mathrm{S_{j_2}}, m_{j_2}\right). \qquad (28)$$

Умножение целевой функции $J\left(\mathrm{t}, \mathrm{S_j}, m_j\right)$ производственной системы на произвольную постоянную не отражается на уравнениях движения базовых продуктов. Умножение целевой функции производственной системы на произвольную постоянную приводит только к выбору удобной системы единиц, с использованием которых происходит построение модели.

Целевая функция производственной системы определяется только с точностью до полной производной от любой функции координат $S_j(t)$ по времени t: $q(t,S_j)$. Последнее связано с тем, что вариация от функции $q(t,S_j)$ есть тождественный ноль:

$$dq(t,S_j)\cdot dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial q}{\partial S_j}\cdot dS_j\right]\cdot dt = dS_j\cdot\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial q}{\partial S_j}\cdot dt = 0. \qquad (29)$$

Выводы

С использованием вариационного и дифференциального принципов записана целевая функция производственной системы. Рассмотрены слагаемые целевой функции, характеризующие технологическое поле оборудования и собственные свойства базового продукта. Записаны первые интегралы при движении базового продукта вдоль технологической цепочки. Определены свойства целевой функции для базовых продуктов производственной системы. Для натуральных механических систем целевая функция (12) называется функцией Лагранжа и имеет размерность энергии (Джоуль).

1. Прыткин Б.В. Технико-экономический анализ производства. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. -399с.
2. Летенко В.А., Родионов Б.Н. Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием. Часть 2, Внутризаводское планирование. - М.: Высшая школа, 1979. – 232 с.
3. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции – Доповіді Національної академії наук України, 2005. –N7– С.66-71
4. Шананин А.А.. Обобщенная модель чистой отрасли производства. // Математическое моделирование, 1997, том 9, №9, с.117-127
5. Новак С.Н., Пигнастый О.М. О вариационном и дифференциальном принципах построения функции Лагранжа производственной системы – Сборник научных трудов УАБС НБУ: Институт экономики НАН Украины, Академия экономических наук Украины, УАБС НБУ, 2006. –N17– С.120-130

3.ОГРАНИЧЕНИЯ, НАКЛАДЫВАЕМЫЕ НА ФУКЦИОНИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ. ВИДЫ ОГРАНИЧЕНИЙ ПРИ ФУНКЦИОНИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ.

Рассмотрены виды ограничений при функционировании производственных систем.

Функционирование современного предприятия происходит при постоянно действующих ограничениях производственных ресурсов. Наличие ограничений накладывает отпечаток на технологию производства базовых продуктов [1,2], определяющую последовательность использования производственных ресурсов при переходе от одной технологической операции к другой. Состояние базового продукта в момент времени t задано микроскопическими величинами в технологическом пространстве $\left(\mathrm{S_j}, m_j\right)$ [2], где $\mathrm{S_j}$ (грн) и $m_j = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S_j}{\Delta t}$ (грн/час) соответственно сумма общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенных производственной системой на j-й базовый продукт, $0 < j \le N$. Микроскопические величины $\mathrm{S_j}$ и m_j определяют технологические траектории базовых продуктов $\mathrm{S_j} = \mathrm{S_j}(t)$. Для производственной системы существует задаваемый технологическим процессом целевой функционал [3,4]:

$$I = \int\limits_0^{T_d} J(t, S_j(t), m_j(t)) \cdot dt\,, \qquad (1)$$

который при движении базовых продуктов вдоль технологических траекторий имеет минимум.

Одним из важных видов ограничений для производственных систем являются интегральные ограничения, когда предполагается, что интеграл некоторой функции равен постоянной величине. Задача с такими ограничениями называется изопериметрической и имеет форму

$$I = \int\limits_0^{T_d} J(t, S_j(t), m_j(t)) \cdot dt \to \min\,, \qquad (2)$$

$$S_j(0) = S_{0j}\,, \quad S_j(T_d) = S_{dj}\,, \qquad 0 < j \le N \qquad (3)$$

$$G = \int_0^{T_d} g(t, S_j(t), m_j(t)) \cdot dt = const \tag{4}$$

Функция ограничений $g(t, S_j(t), m_j(t))$ есть непрерывно дифференцируемая функция, а G - заданная постоянная. Некоторыми примерами задач (2),(3) с ограничениями типа (4) являются:

а) задачи распределения фонда премирования по операциям или участкам;

б) задачи распределения энергоресурсов вдоль операций технологического процесса;

в) задачи распределения обслуживающего производственный процесс персонала (ремонтной службы, службы выполнения ППР, вспомогательных подсобных работников…) по операциям технологического процесса;

г) задачи распределения при ограниченном фонде рабочего времени основных рабочих, имеющих навыки работы на смежных технологических операциях, вдоль операций технологического процесса.

Интегральное ограничение учитывается посредством множителя Лагранжа y для целевого функционала (1) в виде

$$I = \int_0^{T_d} \left[J(t, S_j(t), m_j(t)) - y \cdot g(t, S_j(t), m_j(t)) \right] \cdot dt \to \min, \tag{5}$$

$$S_j(0) = S_{0j}, \quad S_j(T_d) = S_{dj}, \qquad 0 < j \le N$$

с функцией Лагранжа для производственной системы

$$L(t, S_j(t), m_j(t)) = \left[J(t, S_j(t), m_j(t)) - y \cdot g(t, S_j(t), m_j(t)) \right] \tag{6}$$

Уравнение Эйлера для функционала (5) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial m_j} - \frac{\partial L}{\partial S_j} = 0, \tag{7}$$

или

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial m_j} - \frac{\partial J}{\partial S_j} = f_g(t, S_j(t), m_j(t)), \tag{8}$$

где $$f_g(t, S_j(t), m_j(t)) = y \cdot \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial m_j} - \frac{\partial g}{\partial S_j} \right). \tag{9}$$

Дополнительное слагаемое (9) обусловлено наличием ограничений (4) для производственной системы.

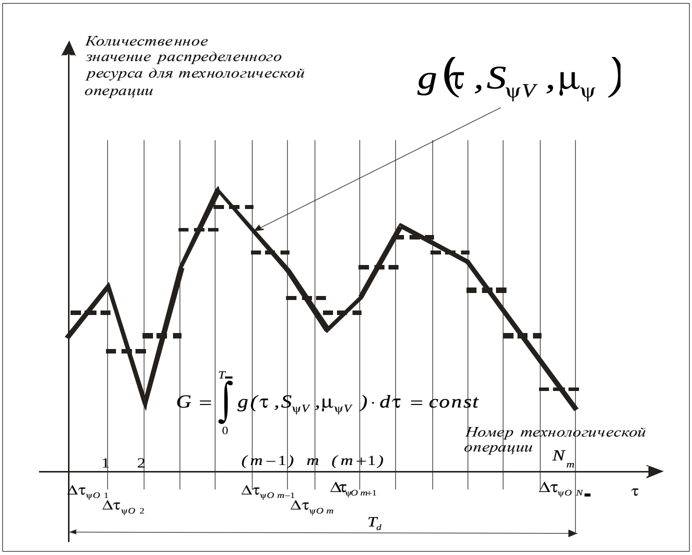

Рис.1. Распределение интегрального ресурса производственной системы для центрального базового продукта по технологическим операциям

Другим важным видом ограничений являются ограничения в форме равенств, связывающие фазовые координаты S_j и их изменения во времени m_j. Задача в этом случае принимает вид

$$I = \int_0^{T_d} J(t, S_j(t), m_j(t)) \cdot dt \to \min ,$$

$$S_j(0) = S_{0j}, \quad S_j(T_d) = S_{dj}, \quad 0 < j \le N$$

$$g_k(t, S_j(t), m_j(t)) = b_k, \quad 0 < k \le N_k . \qquad (10)$$

Распространенными примерами задач (2),(3) с ограничениями типа (10) являются:

а) задачи расчета темпа выпуска продукции при ограничениях, накладываемых на величину межоперационных технологических заделов вдоль технологической цепочки. Ограничения по межоперационным технологическим заделам могут быть обусловлены ограничениями на размер транспортных партий от одной технологической операции к другой, ограничениями на размер производственных площадей для складирования межоперационных технологических заделов и ограничениями на размер складских запасов сырья и материалов, необходимых для выполнения соответствующей технологической операции;

б) задачи расчета темпа выпуска продукции при ограничениях, заключающихся в выполнении операции при заданной расценке с использованием сырья, материалов в соответствии с ведомостью норм расхода сырья и материалов для конкретной технологической операции

Предполагается, что $N > N_k$. Разность $(N - N_k)$ представляет собою число степеней свободы производственной системы. Предпо-лагается также, что ранг матрицы Якоби $\left|\frac{\partial g_k}{\partial m_j}\right|$ равен количеству ее строк во всех точках траектории решения. Эти предположения полностью аналогичны предположениям в классических задачах математического программирования. Задача решается с помощью множителей Лагранжа y_k, $0 < k \le N_k$. При этом функция Лагранжа для производственной системы представляет собой выражение

$$L(t, S_j(t), m_j(t)) = \left[J(t, S_j(t), m_j(t)) + \sum_{k=1}^{N_k} y_k \cdot \left(b_k - g_k(t, S_j(t), m_j(t)) \right) \right] \quad (11)$$

с видом уравнений Эйлера

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial m_j} - \frac{\partial J}{\partial S_j} = f_g(t, S_j(t), m_j(t)), \quad (12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \left(b_k - g_k(t, S_j(t), m_j(t)) \right) = 0, \quad (13)$$

где $$f_g(t, S_j(t), m_j(t)) = \sum_k y_k \cdot \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial g_k}{\partial m_j} - \frac{\partial g_k}{\partial S_j} \right). \quad (14)$$

Уравнения Эйлера решаются совместно с граничными условиями и ограничениями-равенствами.

Третьим важным видом ограничений являются ограничения в форме неравенств, связывающие фазовые координаты S_j и их изменения во времени m_j. Задача в этом случае принимает вид

$$I = \int_0^{T_d} J(t, S_j(t), m_j(t)) \cdot dt \to \min,$$

$$S_j(0) = S_{0j}, \quad S_j(T_d) = S_{dj}, \quad 0 < j \le N$$

$$g_k(t, S_j(t), m_j(t)) \le b_k, \quad 0 < k \le N_k. \quad (15)$$

Из условия Куна-Таккера вытекают условия дополнительной нежесткости, состоящее в том, что любой множитель Лагранжа равен нулю, если соответствующее ограничение выполняется как строгое неравенство и что любое ограничение выполняется как равенство, если соответствующий множитель Лагранжа положителен.

Выводы

Проведен анализ видов ограничений, возникающих при функционировании производственной системы. Указан принцип построения функции Лагранжа производственной системы с ограничениями. Записаны уравнения Эйлера для производственной системы при наличии ограничений. Ограничения накладывают на производственную систему дополнительные связи, которые обуславливают дополнительное воздействие $f_g(t, S_j(t), m_j(t))$ на базовый продукт, изменяющее технологическую траекторию базового продукта $S_j = S_j(t)$ в рамках заданного технологического процесса.

1. Летенко В.А., Родионов Б.Н. Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием. Часть 2, Внутризаводское планирование. - М.: Высшая школа, 1979. – 232 с.
2. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции – Доповіді Національної академії наук України, 2005. –N7– С.66-71
3. Пигнастый О.М. Об особенностях построения моделей, описывающих функционирование производственных систем авиационно-космической промышленности, Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: Сб. науч. тр. Нац. аэрокосмич. ун-та им.Н.Е. Жуковского «ХАИ». Вып.43(4). Харьков: НАКУ, 2005.–N43(4)–С.120-136
4. Пигнастый О.М. Мікроскопічний метод автоматизованого опису соціально-єкономічних систем в АПК – Вестник ХНТУСГ, 2005. –N37, т.2 – С.191-196

4.ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ

Традиционная производственная функция описывает эффективные технические способы производства, при которых производится максимум желаемого товара при заданных затратах ресурсов. Процесс отыскания технических способов производства в экономической теории не рассматривается. Долгие годы эти вопросы считались задачами управления, выходящими за рамки экономики. В последнее время стало ясно, что задачи размещения ресурсов внутри фирмы совершенно аналогичны задачам размещения ресурсов между фирмами и отраслями.

Производственная функция представляет собою технологическое соотношение, стоящее перед фирмой. Именно предприниматель выбирает нужные пропорции и уровни объема продукции. Можно ли перейти к построению полезных производственных функций для отрасли или для промышленного сектора в целом? Сразу видна одна трудность: те факторы, которые мы считали фиксированными для отдельной фирмы, вовсе не обязательно будут фиксированными для отрасли (например предпринимательская способность). Другие факторы, такие как количество квалифицированного труда, которые не были фиксированы для отдельной фирмы, вполне могут быть значительно ограничены для отрасли. Формально мы можем учесть эти влияния на производственные функции предприятий путем включения совокупного продукта отрасли в производственную функцию фирмы.

Применение, инженерно-технических данных для расчета производственных функций еще переживает период младенчества. Однако вот уже много лет такая информация используется при анализе затрат, особенно бухгалтерами, а в последнее время и экономистами.

Вместо оценки производственной функции можно непосредственно оценить функцию затрат. Ее можно вывести из приведенной формы соотношений выпуска продукции и предельной производительности. На практике анализ кривых затрат часто намного более удобен, чем оценка производственных функций, так как имеющиеся данные о затратах обычно приводятся в денежном выражении.

4.1.Обзор производственных функций предприятия

Представление технологических возможностей в виде множества является наиболее всесторонним подходом к анализу производства. Выбор той или иной модели производственных соотношений зависит от многих условий. Важным критерием следует считать тот вес, который модель придает разумно агрегированным соотношениям, соответствующим микросоотношениям. Обзор проведен по материалам, опубликованным в журнале "Econometrica" (1963. Vol. 31, N 1. Jan.-Apr.).

4.1.1.Количественное представление технологических способов и затрат

Традиционный подход к теории фирмы состоит в том, чтобы указать производственную функцию, которая описывала бы максимально достижимый выпуск продукции при данных затратах ресурсов на существующем уровне технологических знаний. Для фирмы, выпускающей разные товары, производственная функция описывает максимальное значение выпуска одного вида продукции как функцию затрат ресурсов при условии, что выпуск всех остальных видов поддерживается постоянным. Для упрощения анализа производственная функция считается непрерывной и дифференцируемой, причем как ресурсы, так и продукция обладают бесконечной делимостью. Упрощенная производственная функция принимается однородной функцией первой степени [1], если при повторении технологического процесса увеличение расхода всех ресурсов в определенное число раз приводит к такому же пропорциональному увеличению выпуска. Подавляющее большинство работ по исследованию технологических условий функционирования производственных систем выполнены и исследованы на практике с помощью линейного анализа деятельности (activity analysis) [2]. Предполагается, что существует конечное число однородных товаров и конечное число базисных технологических способов производства этих товаров. Каждый базисный способ характеризуется величиной затрат ресурса и величиной выхода продукции. Технические знания общества вложены в эти базисные способы, и в применении они считаются постоянными и воспроизводимыми. Способы полагаются аддитивными. Это означает, что они независимы друг от друга; один способ можно сложить с другим и образовать новый способ, состоящий просто из суммы величин исходных способов. Каждый способ независим от других; или, другими словами, между ними нет взаимодействия. Способы считаются бесконечно делимыми и пропорционально воспроизводимыми. Так, если базисный способ выражается формулой "2 человеко-дня + 2.5 лопато-дня = 1 яма", тогда формула "$2 \cdot l$ человеко-дней + $2{,}5 \cdot l$ лопато-дней = l ям" выражает возможный способ. Число l обычно называется интенсивностью использования способа [3]. Ресурсы можно использовать в любых количествах до заданного верхнего предела. Это обстоятельство ограничивает производственное множество теми точками, которые соответствуют интенсивностям способов в пределах, допускаемых этими ограничениями. При анализе технологических возможностей процесс производства полагается постоянным и воспроизводимым при сходных условиях. Если нет ограничений на количество ресурсов, это означает, что каждая фирма в силу постулатов обладает одним и тем же производственным множеством. Согласно постулату пропорциональности, каждая фирма имеет постоянную отдачу от масштаба. В условиях совершенной конкуренции каждая фирма будет получать нулевые прибыли, какими бы ни были масштабы ее операций. Таким образом, эта модель оставляет неопределенным долгосрочный равновесный уровень объема производства фирмы. Неоклассический метод разрешения этой проблемы был предложен Калдором [4]. Калдор определил для каждой фирмы существенный элемент, называемый "предпринимательством". Его нельзя купить на рынке, это специфическое личное качество каждого члена коллектива. Фирма существует, когда каждый ее сотрудник применяет свои предпринимательские способности. Но поскольку предпринимательские способности зависят от личности, то и производственная функция будет меняться от одного человека к другому. Эта гипотеза "объясняет" как существование фирм, так и распределение их по размеру. Вследствие того, что модель анализа деятельности предприятия основана на технологических процессах фирмы, введение предпринимательских способностей в эту модель встречает немало трудностей. Ясно, что наилучшим подходом было бы рассмотрение количества предпринимательства как характеристики различия ограничений объема предпринимательства в длительном. периоде. Но это невозможно, поскольку не существует общепринятой количественной меры предпринимательства. Альтернативный подход заключается в том, чтобы отказаться от постоянства технологических законов и ввести для каждого предпринимателя свои базисные способы. Это могло бы быть полезным приемом в ряде случаев, но тогда теряется простота анализа.

Современные положения теории роста содержат немало специальных гипотез о производственных функциях. Одно полезное различие, тесно связанное с функциями периода классического анализа, проводится в ряде работ [5, 6] и касается различия между производственными функциями ex post и ex ante. Функция ex ante содержит полный набор возможностей замещения, открытых для предпринимателя, когда он выбирает свой способ производства. Функция ex post показывает возможности, доступные после того, как способ производства выбран. Этому различию можно придать форму специальной математической функции, используемой для описания соотношений.

4.1.2.Производственные функции и агрегирование

Существует широкий выбор алгебраических выражений, которые можно использовать для представления производственных функций. Простейшей моделью является линейная производственная функция, для которой характерна линейная зависимость выпуска от затрат. Если затраты представлены в виде труда и капитала: то линейная производственная функция принимает вид:

$$X = A \cdot L + B \cdot K \qquad (1)$$

в котором $X > 0$ - объем производства, $L > 0$ - затраты труда и $K > 0$ - размер капитала с коэффициентами пропорциональности $A > 0$, $B > 0$.

Это специализированная производственная функция, но ее простота объясняет ее широкое применение во многих моделях.

Наиболее популярна производственная функция Кобба-Дугласа [7]. В своей наиболее известной форме производственная функция Кобба-Дугласа записывается в виде

$$X = A \cdot L^a \cdot K^b \qquad (2)$$

Коэффициенты $a \geq 0$ и $b \geq 0$ представляют собою показатели эластичности производства по отношению к труду и капиталу. Степень однородности функции равна $(a + b)$. Если $(a + b)$ превышает единицу, налицо возрастающая отдача от масштаба. Равенство $(a + b)$=1 указывает на постоянную отдачу. Предельная норма замещения определяется равенством

$$dX = a \cdot A \cdot L^{a-1} \cdot K^b \cdot dL + b \cdot A \cdot L^a \cdot K^{b-1} \cdot dK = 0\,, \qquad (3)$$

$$dX = \frac{a \cdot X \cdot dL}{L} + \frac{b \cdot X \cdot dK}{K} = 0\,,$$

$$\frac{dX}{X} = \frac{a \cdot dL}{L} + \frac{b \cdot dK}{K} = 0\,,$$

откуда

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{a \cdot K}{b \cdot L}\,. \qquad (4)$$

и эластичность замещения ресурсов равна единице.

Функция Кобба-Дугласа имела долгую и успешную жизнь без серьезных соперников. Сильную конкуренцию ей составила новая функция Эрроу, Ченери, Минхаса и Солоу [8, 9], которую сокращенно называется SMAC. В современной литературе она встречается еще под названием функция с постоянной эластичностью замещения, или CES-функция (Браун и Де Кани также разработали эту функцию независимо [10]). Основное отличие функции SMAC заключается в том, что вводится постоянная эластичности замещения s , отличная от единицы (как в функции Кобба-Дугласа) и нуля (как в модели затраты-выпуск). Функция имеет вид

$$X = A \cdot \left(d \cdot L^{-r} + (1-d) \cdot K^{-r} \right)^{-\frac{1}{r}}. \qquad (5)$$

Это однородная функция первой степени, так что отдача от масштаба постоянна. Параметр эффективности A определяет объем продукции при данных затратах ресурсов. Параметр распределения d $(0 < d < 1)$ отвечает за деление фактора дохода. Параметр замещения r является функцией эластичности замещения

$$s = \frac{1}{1+r}\,. \qquad (6)$$

За счет подбора подходящих значений s функцию SMAC можно привести как к форме затраты-выпуск, так и к форме Кобба-Дугласа. Когда s стремится к единице, функция SMAC переходит в функцию Кобба-Дугласа. Представим (5) в виде:

$$\left(\frac{X}{A} \right)^{-r} = d \cdot L^{-r} + (1-d) \cdot K^{-r}\,. \qquad (7)$$

При $s \to 1$ из (5) следует $r \to 0$. Разложим (6) в ряд по малому параметру $r \to 0$:

$$\left(\frac{X}{A}\right)^{-r} \approx \left(\frac{X}{A}\right)^{-r}\Bigg|_{r=0} - \left(\left(\frac{X}{A}\right)^{-r} \cdot \ln\left(\frac{X}{A}\right)\right)\Bigg|_{r=0} \cdot r + 0\left(r^2\right) \approx 1 - \ln\left(\frac{X}{A}\right) \cdot r + 0\left(r^2\right)$$

$$d \cdot L^{-r} + (1-d) \cdot K^{-r} \approx \left(d \cdot L^{-r}\right)\Big|_{r=0} - d \cdot \left(L^{-r} \cdot \ln(L)\right)\Big|_{r=0} \cdot r +$$

$$+\left((1-d) \cdot K^{-r}\right)\Big|_{r=0} - (1-d) \cdot \left(K^{-r} \cdot \ln(K)\right)\Big|_{r=0} \cdot r + 0\left(r^2\right) \approx$$

$$\approx d - d \cdot \ln(L) \cdot r + (1-d) - (1-d) \cdot \ln(K) \cdot r + 0\left(r^2\right) \approx$$

$$\approx 1 - d \cdot \ln(L) \cdot r - (1-d) \cdot \ln(K) \cdot r + 0\left(r^2\right)$$

Приравнивая оба равенства, получаем

$$1 - \ln\left(\frac{X}{A}\right) \cdot r \approx 1 - d \cdot \ln(L) \cdot r - (1-d) \cdot \ln(K) \cdot r + 0\left(r^2\right),$$

откуда

$$\ln\left(\frac{X}{A}\right) \approx d \cdot \ln(L) + (1-d) \cdot \ln(K) + 0(r)$$

или в пределе получим

$$\frac{X}{A} \approx L^d \cdot K^{(1-d)} \tag{8}$$

Это функция Кобба-Дугласа с постоянной отдачей от масштаба. Аналогичным образом можно показать, что предельная форма при $r \to \infty$ представляет производственную функцию в форме затраты-выпуск.

Систематическое исследование общей задачи агрегирования производственных функций было развито в пионерской статье Клейна [11]. Для получения агрегированной (строго говоря, усредненной) производственной функции и агрегированных отношений предельных продуктивностей, аналогичных микрофункциям, он предложил построить взвешенное геометрическое среднее из соответствующих микропеременных, где веса были бы пропорциональны эластичностям для отдельных фирм. Эластичности макрофункции представляют собой взвешенное среднее микроэластичностей, причем веса пропорциональны затратам на факторы. Макровыручка представляется произведением макроцены на макроколичество, которое определяется как арифметическое среднее микровыручек; аналогичным образом определяются макроставка заработной платы и макрозатраты капитала. Клейновское агрегирование по фирмам имеет ряд любопытных следствий: макроставка заработной платы будет почти всегда отличаться от общей ставки фирм. Подобные же замечания можно сделать относительно цен продукции и капитала.

Большой вклад в формальную теорию агрегирования внес Натаф [12]. Он доказал, что при разумном агрегировании производственная функция должна быть сепарабельной. При этом объем продукции равен сумме двух составляющих, одна из которых связана с трудом, а другая с капиталом. Это условие накладывает сильные ограничения. Из трех уже рассмотренных производственных функций модель затраты-выпуск, очевидно, сепарабельна. Функция Кобба-Дугласа не отвечает этому условию, но после логарифмического преобразования становится сепарабельной; это объяснение клейновского использования средних геометрических. Трудности все равно остаются, потому что макроэластичности представляют собой арифметические средние микроэластичностей. Клейн показал, что для получения подходящих макроэластичностей нужно вычислить взвешенное среднее с весами, пропорциональными величине объема продукции. Но это означало бы, что мера макроресурса зависит от выпуска, чего не должно быть. Функция Кобба-Дугласа хорошо подходит для агрегирования, особенно на уровне фирмы. Хаутеккер в своем впечатляющем синтезе линейного программирования и производственной функции Кобба-Дугласа показал, что индивидуальные производственные функции типа линейного программирования порождают производственную функцию Кобба-Дугласа для отрасли в целом [13]. Для каждой фирмы предпринимательская способность отражается фиксированными отношениями затраты-выпуск: у оптимального предпринимателя будут низкие отношения, у неоптимального - высокие. Если эти отношения распределены по закону Парето, получается агрегированная функция Кобба-Дугласа. Синтез Хаутеккера представляет прекрасный пример интерпретации статических данных о множестве объектов. Однако появляются трудности при попытке аналитического объяснения динамического приспособления, поскольку предполагается, что изменения в соотношение факторов вносят новые фирмы, старые фирмы держатся своих старых коэффициентов или вымирают. Свойством сепарабельности обладает и производственная функция SMAC, представленная в форме (7).

Одна из основных практических проблем агрегирования заключается в том, что данные обычно публикуются в виде арифметических средних или итогов, тогда как наша система агрегирования требует геометрических средних.

Статистические задачи линейного агрегирования рассматривались Тейлом [14]. Тейл исследует, насколько законно применение макроотношений к агрегированным уровням при заданных микроотношениях и виде агрегирования. Рассмотрим производственную функцию Кобба-Дугласа в логарифмической форме для i -й фирмы:

$$x_i = a_i \cdot l_i + b_i \cdot k_i + a_i\,, \qquad i = 1,\dots,n\,, \tag{9}$$

где $x_i = \ln X_i\,,\;\; l_i = \ln L_i\,,\;\; k_i = \ln K_i\,.$

Будем искать производственную макрофункцию в виде

$$x = a \cdot l + b \cdot k + a + e \tag{10}$$

для наблюдаемых агрегированных уровней временного ряда. Рассмотрим регрессию затрат труда на i -й фирме по случайным агрегированным затратам труда и капитала для наблюдений, представленных временным рядом

$$l_i = B_{l_i} \cdot l + C_{l_i} \cdot k + D_{l_i} + U_{l_i}\,, \qquad k_i = B_{k_i} \cdot l + C_{k_i} \cdot k + D_{k_i} + U_{k_i} \qquad (10)$$

Коэффициенты регрессии B и C описывают систематические движения микропеременных как макровеличинное изменение. Случайные переменные U обладают обычными характеристиками. Подставляя эти уравнения в микроуравнение (9), получим агрегированную производственную функцию (10). Смещение оценок макропараметров при агрегировании измеряется ковариационными членами уравнений. К сожалению, трудно развить эти результаты дальше, поскольку нелегко предложить априорные ограничения на величину ковариаций. Количественной величине смещения требуется статистическая оценка. Обзор проблем агрегирования дает повод усомниться в применимости такого понятия, как агрегированная производственная функция. Разнообразие рыночных и технологических условий, какое наблюдается в современной экономике, внушает мысль о невозможности удовлетворить основным требованиям разумного агрегирования, за исключением, может быть, отдельных фирм в одной и той же отрасли или ограниченных секторов экономики.

4.1.3.Производственные функции, основанные на инженерных расчетах.

Развитие экономической теории на основе сведений о технологических процессах дало повод к разработке производственных функций и функций затрат с использованием технических достижений инженерной науки. Эта научная информация получена либо экспериментально, либо из повседневной инженерной практики. Подход к производственной функции на технической основе обладает значительными преимуществами, поскольку, во-первых, известна область применимости функции, а во-вторых, он позволяет относительно легко включить результаты технического прогресса. Более того, в отличие от подхода, основанного на статистическом анализе множества объектов и временных рядов, мы не связаны жесткими рамками фактических наблюдений.

Основной предмет изучения, инженерный "процесс", определяется так, как это удобно с точки зрения инженерного анализа. Подобным же образом объемы ресурсов часто указываются в технических единицах, например в единицах теплоты. Первой задачей является перевод технических единиц в величины, более подходящие для экономического анализа. Для этого может потребоваться описание других процессов, например производства тепла путем приобретения и сжигания топлива. Вторая и наиболее важная задача заключается в том, чтобы путем объединения этих процессов на отдельном предприятии получить производственную функцию предприятия. При определении и исследовании технологических функций следует стремиться к тому, чтобы функции были независимыми и аддитивными. К счастью, инженер тоже стремится избежать эффектов взаимодействия при описании процессов, которыми он занимается, так что подходящее агрегирование процессов на предприятии часто достигается с приемлемой точностью.

Метод производственных функций широко использовался в сельском хозяйстве. Хеди и его коллеги [15] вывели свои функции экспериментально:

$$Y = -5,68 - 0,316 \cdot N - 0,417 \cdot P + 0,63512 \cdot \sqrt{N} + \\ +8,5155 \cdot \sqrt{P} + 0,3410 \cdot \sqrt{N \cdot P}, \qquad (12)$$

где Y - урожайность зерна в бушелях на акр; N - число фунтов азота; P - число фунтов фосфата. По этому выражению можно рассчитать предельную продуктивность каждого удобрения, а затем найти оптимальную комбинацию удобрений для различных уровней относительных цен.

Ченери и Фергюсон [16, 17] первыми стали использовать технические данные в промышленных технологических функциях. В своем исследовании перекачки природного газа Ченери использовал инженерно-технические принципы газового производства для получения технологической и производственной функции для газопровода. Результат показал возрастание отдачи от масштаба. Фергюсон изучал технологию коммерческих воздушных перевозок с целью вывести производственное соотношение. Он занимался измерением агрегированной технологической функции, но включил в нее только прямые затраты ресурсов; расходы на администрацию, к примеру, он не учитывал. Технология химической промышленности изучалась Муром [18], причем было показано общее возрастание отдачи от масштаба. Вообще это, кажется, является общим результатом большей части инженерно-технических работ. Наиболее значительный обзор и пропаганда развития инженерных производственных функций содержатся в книге Смита [19]. Хотя основной целью его работы является теория инвестиций, большую часть своего труда он основывает на инженерном подходе к производственным отношениям. В частности, он показывает, что многие "решения наименьшей стоимости", найденные инженерами, идентичны решениям, получаемым с помощью неоклассической теории фирмы. Работа содержит также ценный обзор многофакторных производственных функций.

Технологические функции и производственные функции предприятия пригодны для ряда целей, таких как вывод кривых затрат предприятия, прогнозирования потребности в сырье и рабочей силе и т. д. Однако эти функции непригодны для проверки гипотез об экономии от масштаба фирмы. Даже если технологическая функция, или функция предприятия, показывает возрастающую отдачу, это еще не значит, что фирма фактически получает такие доходы. Рост доходов за счет технологических процессов может быть съеден высокими административными затратами и др. Технологические функции особенно полезны при анализе технического прогресса. Хирш [20, 21] показал, как улучшение технологических процессов дало уменьшение затрат труда при увеличении выпуска продукции. Технологическая функция в инструментальной промышленности предполагала, что удвоение совокупного продукта дало уменьшение затрат труда на 18-20% [22]. Попытка формального включения функций прогресса в системе экономики фирмы была сделана Чарнесом, Купером и Меллоном [23], но они работали главным образом в терминах кривых затрат, а не производственных функций. Они постулировали семейство кривых затрат - по одной на каждый период времени - в соответствии с функцией обучения. Предприниматели планируют расширение выпуска продукции по этому семейству кривых затрат, пока не будет достигнут равновесный объем продукции. Эрроу [9] разработал множество применений интегральных функций прогресса в теории производства. Однако в модели Эрроу обучение имеет место только в отрасли, производящей капитальные блага; общий эффект обучения в связи с последовательным улучшением использования имеющегося оборудования в модель не включен.

Развитие технологических функций на основе инженерно-технических данных с помощью моделей линейного программирования стало значительным достижением в развитии теории фирмы [24, 25]. Технологические возможности фирмы представляются конечным набором способов, а технические ограничения вводятся в виде фиксированных объемов некоторых ресурсов, таких, к примеру, как ограниченная производственная площадь. Используя симплексный или другой вычислительный метод, экономист может определить оптимальную комбинацию способов для любой заданной системы цен. При сравнении подхода на основе линейного программирования с эмпирическим исследованием традиционных производственных функций следует иметь в виду следующее. Во-первых, модель линейного программирования обычно интерпретируется как модель производства в коротком периоде с фиксированным предложением ряда ресурсов. С другой стороны, эмпирическое исследование производственных функций Кобба-Дугласа обычно связано с долгосрочными соотношениями, в которых все ресурсы переменные. Во-вторых, решение задачи с помощью модели программирования указывает, что фирмы должны делать, чтобы максимизировать свой чистый доход. В некотором смысле это улучшает существующую производственную функцию фирмы, придавая ей более высокий уровень эффективности.

4.1.4.Функции затрат

Было предпринято много попыток установить форму кривых затрат с помощью теоретических выкладок. В частности, считалось, что вид функции затрат для короткого периода очевиден из принципа уменьшающейся отдачи. Этот закон или принимался в качестве аксиомы, или доказывался с помощью аргументов типа reductio ad absurdum. Большинство экономистов до сих пор рассматривают уменьшающуюся предельную отдачу в качестве более чем обещающей гипотезы.

Существует еще гипотеза о том, что предельные затраты короткого периода постоянны в широких диапазонах выпускаемой продукции. Эта теория поддерживается исследователями, которые интенсивно изучали производственную деятельность предприятий [29]. Гипотеза служит основной предпосылкой в работе бухгалтеров, и, таким образом, практически она оказывается самой популярной гипотезой. Никто не предпринимал попыток показать, что эта форма функции затрат короткого периода является обязательным следствием некоторого набора фундаментальных и самоочевидных постулатов.

Традиционная теория фирмы не помогает в создании кривой функции затрат длительного периода, как это было для короткого периода. Прежде всего экономия от масштаба возникает от простоты обращения с большими количествами. Второй причиной считается распределение риска и уменьшение затрат, связанных с неопределенностью [30]. Третьей и, вероятно, наиболее общепринятой причиной падения затрат является неделимость людей и оборудования. Крупное оборудование обычно более производительно, чем мелкое. Для каждого технологического процесса оптимальный размер оборудования может меняться, поэтому для уменьшения средних затрат до минимума требуются высокие параметры оборудования. Естественно, что вначале средние затраты будут уменьшаться с увеличением размера, но пока не достигнуто согласие о форме кривой при дальнейшем увеличении выпуска продукции. Е. А. Дж. Робинсон доказывал, что координация управления и контроля становится все менее эффективной, поэтому возрастающие затраты на управление приводят к росту средних затрат длительного периода. Саржан Флоренс и другие критикуют такое объяснение на основании того, что эти предположения не были проверены ни в одном систематическом эмпирическом исследовании. Можно также спорить о том, что последние достижения в развитии вычислительной и другой управленческой техники привели к повышению относительной эффективности больших управленческих органов.

Экономическая теория определяет затраты для фирмы как те выплаты, которые необходимо произвести, чтобы заставить факторы производства продолжать действовать вместе с фирмой. Для отрасли или для фирмы в явно монополистической ситуации "ценовое" определение долгосрочных средних затрат обычно неприемлемо. Цена включает в себя элементы монополистической прибыли на единицу выпускаемой продукции. Основная трудность заключается в получении статистических данных для оценки этих затрат без стоимости. На практике приходится пользоваться данными бухгалтерских отчетов. Большинство исследователей исключили из затрат бухгалтерскую прибыль. Вероятно, в большинстве случаев из-за этого получается недооценка затрат. Но никто не знает, влияет ли такое смещение на форму эмпирических кривых затрат. Чтобы судить об этом, необходимо тщательное изучение бухгалтерской отчетности.

Инженерные данные редко использовались экономистами для оценки функций затрат. Результаты инженерных исследований не так уж часто сформулированы в таком виде, чтобы их было легко перевести на язык экономики. Первые систематические попытки решения этой проблемы экономистами были предприняты Ченери и Фергюсоном [16, 31]. Ченери предложил описывать производственные функции и функции затрат в терминах наблюдаемых (или проектируемых) инженерных переменных. В своем примере с передачей по трубопроводам Ченери определил затраты как функцию от диаметра трубы, вязкости, коэффициента сжатия и мощности насосов. Фергюсон исследовал "предельные топливные затраты" авиации, преобразуя инженерные производственные функции в функции затрат.

Основные ограничения инженерных данных подобны ограничениям данных бухгалтерских затрат. Действительно, эти два набора данных часто очень тесно связаны. Бухгалтеры оценивают товарные затраты, разделяя производство на отдельные операции, и описывают затраты каждой операции, оценивая вложения труда и т.п. Инженерные данные, подобно цифрам бухгалтерских калькуляций, относятся к процессам. Одна из трудностей перевода этих результатов в функции затрат для некоторых отраслей заключается в том, что процессы и затраты на эти процессы могут взаимодействовать друг с другом и могут не быть сепарабельными. Однако на практике это может служить вполне достаточным приближением для множества разных отраслей. Второй главной трудностью является произвольность распределения комплексных затрат. Кажется, именно это послужило причиной того, что существует очень мало синтетических или инженерных исследований затрат многопродуктовых фирм. Важным применением синтетического подхода экономистов к затратам стало исследование перевозок Мейером, Пеком, Стенасоном и Цвиком [32]. Они распределили совместные железнодорожные расходы между пассажирскими и грузовыми перевозками посредством синтетического анализа взаимосвязей. Затраты на эти конкретные совместные производственные услуги были представлены в виде линейной комбинации пассажирской и грузовой нагрузок. Коэффициенты, полученные из данных уравнений, были использованы для распределения общих затрат. Это исследование стало важным шагом вперед в сфере инженерных или синтетических исследований затрат.

Несмотря на все возражения, которые могут быть высказаны против синтетического подхода к затратам, во многих случаях он оказывается единственным приемлемым методом. Вероятно, он является единственным практическим подходом для фирмы, выпускающей множество разных продуктов. Одно из самых важных различий в эмпирических функциях затрат заключается в разнице между исследованиями по множеству объектов и по временным рядам. При изучении по данным временных рядов видно, что изменения спроса приводят к возникновению различных уровней равновесного объема производства. Объем продукции и число фирм в отрасли приспосабливаются к новым уровням спроса. Для конкретной фирмы временной ряд выпускаемой продукции и суммарных затрат должен в идеале показывать функцию затрат для фирмы. С другой стороны, в исследованиях на множестве фирм в конкурентной отрасли нет наблюдаемой независимой силы, такой как спрос, которая создает различные уровни равновесного объема производства. При анализе на множестве объектов цена продукции одинакова для всех фирм. Как утверждал Фридмен, если мы определим общие затраты как идентичные общим поступлениям, исследование на множестве фирм несомненно даст неизменные средние затраты [33].

Уравнение, определяющее зависимость суммарных затрат от объема выпуска, используемое большинством авторов, обычно квадратичное:

$$C(Y) = a_0 + a_1 \cdot Y + a_2 \cdot Y^2 + e \qquad (13)$$

где Y - текущий объем выпуска; ε - случайное возмущение.

Предприняты попытки объединить наблюдения за короткий период и за длительный период для получения оценок кривых как короткого, так и длительного периода [34].

В таблицах №1,№»,№3 собраны разнообразные, хотя и не исчерпывающие результаты по исследованию затрат. К сожалению, невозможно учесть все ограничения в каждом исследовании и точно объяснить их влияние на эти результаты. Остается только надеяться, что краткое описание результатов в последней графе не слишком искажает выводы авторов. Тип данных указан в третьей графе; данные опросов обозначены буквой Q, инженерные данные - E, тогда как TS и CS описывают исследования временных рядов и совокупностей объектов соответственно. В графе "Период" указано, относится ли объект исследования к кривым краткосрочных (S) или долгосрочных (L) затрат.

Таблица №1. Результаты исследований кривых затрат. Общие отраслевые исследования

Автор	Отрасль	Тип	Период	Результат
Бэйн [35]	Обрабатывающая промышленность	Q	L	Небольшая экономия от масштаба многозаводских фирм
Эйтман, Гугри [36]	То же	Q	S	Предельные затраты ниже средних затрат при всех объемах выпуска ниже "производственной мощности"
Холл и Хитч [37]	" "	Q	S	В основном предельные затраты уменьшаются
Лестер [38]	" "	Q	S	Уменьшающиеся средние переменные затраты до производственной мощности
Мур [18]	" "	E	L	Экономия от масштаба вообще
[91]	Разные отрасли промышленности	CS	L	Небольшие или средние заводы обычно имеют самые низкие затраты. Блэр [9] делает другие выводы

Таблица №2. Результаты исследований кривых затрат.
Отраслевые исследования

Автор	Отрасль	Тип	Период	Результат
Альперт [39]	Металлообработка	E	L	Экономия от масштаба до 80000 фунтов в месяц, затем постоянная отдача
Джонстон [34]	Различная продукция	TS	S	"Прямые" затраты линей-но зависят от объема выпуска. Предельные затраты пос-тоянны
Дин [40]	Мебель	TS	S	Предельные затраты пос-тоянны. Краткосрочные средние затраты "не смогли возрасти"
Дин [41]	Кожаные ремни	TS	S	Значительно возрастающие предельные затраты. Дин отказался от их изучения
Дин [42]	Трикотаж	TS	S	Предельные затраты пос-тоянны. Краткосрочные средние затраты "не смогли возрасти"
Дин, Джеймс[43]	Обувные магазины	CS	L	Долгосрочные средние затра-ты характеризуются U-образ-ной кривой (интерпретируются *не* как возникающие из-за неэкономичности от масштаба)
Холтон [44]	Розничная торговля (Пуэрто-Рико)	E	L	Долгосрочные средние затраты характеризуются L-образ- ной кривой. Но Холтон утверждает, что расходы на управление могут недооцениваться при высоких объемах выпуска
Эзекиэль, Уайли [45,46]	Сталь	TS	S	Предельные затраты падают, но большие нор-мальные погрешности
Интема [47]	"	TS	S	Предельные затраты пос-тоянны
Нордин [48]	Электростанция	TS	S	Предельные затраты воз-растают

Таблица №3. Результаты исследований кривых затрат.
Коммунальные предприятия

Автор	Отрасль	Тип	Результат
Ломакс[49]	Газ (Великобритания)	CS	Долгосрочные средние затраты снижаются (нет анализа распределения)
Гриббин[50]	То же	CS	Тоже
Ломакс [51]	Электроэнергия (Великобритания)	CS	" "
Джонстон [34]	То же	CS	" "
"	" "	TS	Краткосрочные средние затраты падают, затем выравниваются, стремясь к постоянным предельным затратам на уровне производственной мощности
Мак-Налти[52]	Электроэнергия (США)	CS	Средние затраты на управление постоянны
Нерлов [53]	То же	CS	Долгосрочные средние затраты, за исключением затрат на транспортировку, возрастают
Джонстон [34]	Уголь(Великобритания)	CS	Широкий разброс затрат на тонну
"	Пассажирский автотранспорт (Великобритания)	CS	Долгосрочные средние затраты либо падают, либо постоянны
"	Пассажирский автотранспорт (Великобритания)	TS	Краткосрочные средние затраты уменьшаются
Джонстон [34]	Страхование жизни (Великобритания)	CS	Долгосрочные средние затраты падают
Бортс [54]	Железные дороги (США)	CS	Долгосрочные средние затраты либо постоянны, либо падают
Бортс [55]	То же	CS	Долгосрочные средние затраты возрастают на Востоке, падают на Юге и Западе
Бростер [56]	Железные дороги (Великобритания)	TS	Затраты производства на единицу продукции падают
Мансфильд, Уэйн [57]	То же	E	Предельные затраты постоянны

Почти все наблюдения были сделаны для уровней выпуска, находящихся намного ниже "производственной мощности" заводов. Результаты регрессии явно справедливы только для этих объемов выпуска, находящихся ниже производственной мощности. Исследования Дина (мебель, трикотаж) и исследование Джонстона в пищевой промышленности требуют объяснения. Свидетельства в пользу существования экономии от масштаба производства, т. е.

того, что долгосрочные средние затраты падают при увеличении выпуска продукции, снова четко установлены только для коммунальных предприятий. Кроме опросов и инженерных данных единственным исследованием долгосрочных затрат в промышленности является подсчет затрат в обувных магазинах, проведенный Дином и Джеймсом. Они вывели U-образную форму кривых затрат, но утверждали, что она была в основном за счет худших факторов, которые фирма должна была покупать по тем же ценам, а не за счет неэкономичности от масштаба производства. Исследования, основанные на инженерных данных, тоже неудовлетворительны, поскольку они оценивают только взаимоотношения между затратами на капитал и "производственной мощностью" оборудования. Неизвестно, что происходит с другими затратами (например, с административными), когда производственная мощность возрастает; они могут перекрыть возрастающую отдачу, которую должен бы получить завод. Эмпирические результаты ясно показывают, что коммунальным предприятиям и железным дорогам присущи снижающиеся (или по крайней мере постоянные) долгосрочные средние затраты, как это давно предсказывали экономисты. Для этих отраслей промышленности установленная теория никоим образом не опровергается. С другой стороны, для "конкурентных" отраслей промышленности гипотеза об U-образной форме кривых не внушает особого доверия. Она опровергается прямыми эмпирическими доказательствами. Вместо этого имеются непрямые, косвенные доказательства. По крайней мере нет достаточного объема данных, которые убедительно опровергали бы гипотезу об U-образной форме кривой долгосрочных затрат и те плодотворные результаты, которые следуют из нее.

4.2.Математический аппарат анализа производственных функций предприятия

Представлен известный математический аппарат исследования производственных функций. Рассмотрены эластичность производства по отношению к параметру масштаба увеличения затрат и эластичность замещения одного вида затрат другим.

Технологическая связь между выпуском продукции и затратами для производства продукции называется производственной функцией. Обозначив через q_j размеры выпуска продукта j-го наименования, производственную функцию можно записать в виде зависимости выпуска q_j от $n-$видов затрат $x_1, x_2, ..., x_n$

$$q_j = Q_j(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{1}$$

Полагается, что каждой точке пространства затрат $(x_1, x_2, ..., x_n)$ соответствует максимальный выпуск продукта j-го наименования. При анализе производственных возможностей предприятия считается, что производственная функция непрерывно дифференцируема и удовлетворяет двум аксиомам.

Первая аксиома утверждает, что увеличение любого вида затрат не приводит к уменьшению выпуска продукции

$$\left(x_i + \Delta x_i\right) \geq x_i, \quad Q_j(x_1, x_2, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) \geq Q_j(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n), \tag{2}$$

откуда следует выражение

$$\frac{\partial Q_j(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)}{\partial x_i} = MP_i \geq 0, \tag{3}$$

определяющее предельные затраты $i-$вида ресурса для выпуска продукта j-го наименования.

Вторая аксиома утверждает, что существует особая область, в которой форма

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 Q_j(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)}{\partial x_i \cdot \partial x_k}\right|_0 \cdot \Delta x_i \cdot \Delta x_k \leq 0, \tag{4}$$

является определенно отрицательной. Знак $\Big|_0$ означает, что рассматривается область в окрестности значений $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, ..., x_i = x_{i0}, ..., x_n = x_{n0}$. Соотношение (4) называется законом убывающей доходности: по мере того, как затраты одного вида добавляются к установленным объемам других затрат, достигается область, в которой предельный продукт затрат снижается. Классическим примером этого закона является добавление все большего и большего количества труда в производстве зерна на фиксированном участке земли. После достижения особой точки дополнительный выпуск продукции, производимый дополнительным человеком, будет падать вследствие исчерпания возможностей специализации и в связи с трудностями координации усилий [58].

Производственная функция в особой области характеризуется *отдачей от расширения масштабов производства* и возможностями *замещения*.

Доход от расширения масштаба производства характеризует производственную функцию с точки зрения «поведения» выпуска продукции, если все затраты изменяются в одинаковой пропорции. Производственная функция характеризуется постоянным доходом от расширения масштаба производства, если выпуск возрастает в той же пропорции в a -раз, что и затраты

$$a \cdot Q_j(x_1, x_2, ..., x_n) = Q_j(a \cdot x_1, a \cdot x_2, ..., a \cdot x_n). \quad (5)$$

Так, например, удвоение затрат приводит к увеличению выпуска продукции в два раза. Аналогично производственная функция характеризуется возрастающим (6) (убывающим (7)) доходом от расширения масштабов производства, если выполняются неравенства

$$a \cdot Q_j(x_1, x_2, ..., x_n) > Q_j(a \cdot x_1, a \cdot x_2, ..., a \cdot x_n), \quad (6)$$

$$a \cdot Q_j(x_1, x_2, ..., x_n) < Q_j(a \cdot x_1, a \cdot x_2, ..., a \cdot x_n). \quad (7)$$

Производственная функция может характеризоваться постоянным доходом от расширения масштаба производства в одних точках пространства и возрастающим (убывающим) доходом от расширения масштабов производства в других.

Локальным показателем изменения дохода от расширения масштабов производства, определенным в некоторой точке пространства затрат, является *эластичность производства.*

Разложим производственную функцию $Q_j(a \cdot x_1, a \cdot x_2, ..., a \cdot x_n)$ в окрестности $a \cdot x_1 \to x_1$, $(a-1) \cdot x_1 \to 0$, то есть $a \to 1$, в сходящийся ряд по малому параметру $da \to 0$

$$Q_j(a \cdot x_1, a \cdot x_2, ..., a \cdot x_n) = Q_j(a \cdot x_1, a \cdot x_2, ..., a \cdot x_n)\Big|_{a=1} +$$

$$+ \frac{\partial Q_j(a \cdot x_1, a \cdot x_2, ..., a \cdot x_n)}{\partial a}\Bigg|_{a=1} \cdot da +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 Q_j(a \cdot x_1, a \cdot x_2, ..., a \cdot x_n)}{(\partial a)^2}\Bigg|_{a=1} \cdot (da)^2 + ... \quad (8)$$

Представим ряд (8) в форме

$$\frac{Q_j(a \cdot x_1, a \cdot x_2, ..., a \cdot x_n)}{Q_j(a \cdot x_1, a \cdot x_2, ..., a \cdot x_n)\Big|_{a=1}} = 1 +$$

$$+\frac{1}{Q_j(a\cdot x_1,a\cdot x_2,...,a\cdot x_n)\Big|_{a=1}}\cdot\frac{\partial Q_j(a\cdot x_1,a\cdot x_2,...,a\cdot x_n)}{\partial a}\Bigg|_{a=1}\cdot da\ +$$

$$+\frac{1}{Q_j(a\cdot x_1,a\cdot x_2,...,a\cdot x_n)\Big|_{a=1}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 Q_j(a\cdot x_1,a\cdot x_2,...,a\cdot x_n)}{(\partial a)^2}\Bigg|_{a=1}\cdot(da)^2+...\quad(9)$$

Соотношение

$$\frac{Q_j(a\cdot x_1,a\cdot x_2,...,a\cdot x_n)}{Q_j(a\cdot x_1,a\cdot x_2,...,a\cdot x_n)\Big|_{a=1}}=\frac{Q_j(a\cdot x_1,a\cdot x_2,...,a\cdot x_n)}{Q_j(x_1,x_2,...,x_n)}=b\qquad(10)$$

представляет собою коэффициент изменения дохода от расширения масштаба производства

$$Q_j(a\cdot x_1,a\cdot x_2,...,a\cdot x_n)=b\cdot Q_j(x_1,x_2,...,x_n)\qquad(11)$$

а величина

$$e=\frac{a}{Q_j(a\cdot x_1,a\cdot x_2,...,a\cdot x_n)}\Bigg|_{a=1}\cdot\frac{\partial Q_j(a\cdot x_1,a\cdot x_2,...,a\cdot x_n)}{\partial a}\Bigg|_{a=1}\qquad(12)$$

есть не что иное, как эластичность производства по отношению к параметру масштаба a . Если ограничиться линейными членами разложения, то ряд (9) может быть представлен с учетов обозначений (10)-(12) в виде сходящегося ряда, характеризующего коэффициент дохода от расширения масштаба производства в окрестности $a\to 1$

$$b=1+e\cdot da+0((da)^2)\approx a+e\cdot da+0((da)^2),\quad a\to 1.\qquad(13)$$

При $e\to 0$ в окрестности $a\to 1$ выражение (13) принимает вид равенства (5).

Заметим, что

$$\frac{\partial Q_j(a\cdot x_1,a\cdot x_2,...,a\cdot x_n)}{\partial a}\Bigg|_{a=1}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Q_j(a\cdot x_1,a\cdot x_2,...,a\cdot x_i,...,a\cdot x_n)}{\partial a\cdot x_i}\cdot\frac{\partial a\cdot x_i}{\partial a}\Bigg|_{a=1}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Q_j(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)}{\partial x_i}\cdot x_i\Bigg|_{a=1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Q_j(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)}{\partial x_i}\cdot x_i\ .\qquad(14)$$

Тогда

$$e = \frac{a}{Q_j(a \cdot x_1, a \cdot x_2, ..., a \cdot x_n)}\bigg|_{a=1} \cdot \frac{\partial Q_j(a \cdot x_1, a \cdot x_2, ..., a \cdot x_n)}{\partial a}\bigg|_{a=1} =$$

$$= \frac{1}{Q_j(x_1, x_2, ..., x_n)} \cdot \frac{\partial Q_j(a \cdot x_1, a \cdot x_2, ..., a \cdot x_n)}{\partial a}\bigg|_{a=1} =$$

$$= \frac{1}{Q_j(x_1, x_2, ..., x_n)} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q_j(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)}{\partial x_i} \cdot x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{Q_j(x_1, x_2, ..., x_n)} \cdot \frac{\partial Q_j(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} e_i \ . \qquad (15)$$

Таким образом, эластичность производства по отношению к параметру масштаба в любой точке особой области равна сумме эластичности выпуска по отношению к различным затратам в этой точке

$$e = \sum_{i=1}^{n} e_i \ , \qquad e_i = \frac{x_i}{Q_j(x_1, x_2, ..., x_n)} \cdot \frac{\partial Q_j(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)}{\partial x_i} \ . \qquad (16)$$

Возможности замещения характеризуют производственную функцию с точки зрения различных комбинаций затрат, порождающие одинаковые уровни выпуска. Локальным измерением замещения между двумя затратами x_i и x_k, когда все остальные затраты остаются постоянными, в некоторой точке особой области может служить эластичность замещения между затратами x_i и x_k. Разложим производственную функцию $Q_j(x_1, x_2, ..., x_n)$ в окрестности $(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ по малому параметру dx_i и dx_k изменения затрат x_i и x_k в сходящийся ряд

$$Q_j(x_{10}, x_{20}, ..., x_i, ..., x_k, ..., x_{n0}) = Q_j(x_{10}, x_{20}, ..., x_{i0}, ..., x_{k0}, ..., x_{n0}) +$$

$$+ \frac{\partial Q_j(x_{10}, x_{20}, ..., x_i, ..., x_k, ..., x_{n0})}{\partial x_i}\bigg|_0 \cdot dx_i + \frac{\partial Q_j(x_{10}, x_{20}, ..., x_i, ..., x_k, ..., x_{n0})}{\partial x_k}\bigg|_0 \cdot dx_k +$$

$$+ \ 0^2\left(dx_k, dx_i\right) \quad (17)$$

и ограничимся линейными членами разложения.

Из того, что при замещении одного вида затрат x_i другим dx_k выпуск продукта $Q_j(x_1, x_2, ..., x_n)$ остается постоянным, то следует

$$dQ_j = Q_j(x_{10}, x_{20}, ..., x_i, ..., x_k, ..., x_{n0}) - Q_j(x_{10}, x_{20}, ..., x_{i0}, ..., x_{k0}, ..., x_{n0}) \equiv 0 \quad (18)$$

$$\left.\frac{\partial Q_j(x_{10}, x_{20}, ..., x_i, ..., x_k, ..., x_{n0})}{\partial x_i}\right|_0 \cdot dx_i + \left.\frac{\partial Q_j(x_{10}, x_{20}, ..., x_i, ..., x_k, ..., x_{n0})}{\partial x_k}\right|_0 \cdot dx_k = 0 \quad (19)$$

и

$$\frac{dx_i}{dx_k} = -\frac{\left.\dfrac{\partial Q_j(x_{10}, x_{20}, ..., x_i, ..., x_k, ..., x_{n0})}{\partial x_k}\right|_0}{\left.\dfrac{\partial Q_j(x_{10}, x_{20}, ..., x_i, ..., x_k, ..., x_{n0})}{\partial x_i}\right|_0}. \quad (20)$$

Равенство (20) характеризует эластичность замещения одного вида затрат на другой, т.е. чувствительность производственного процесса к изменению технологии посредством замещения одного вида затрат на другой. Некоторые частные случаи производственных функций в случае двух видов затрат представлены в таблице 1.

Таблица 1. Производственные функции в случае двух видов затрат

Тип	**Вид производственной функции** $Q = Q(x_1, x_2)$	**Эластичность замещения** e	**Эластичность производства**	**Параметры**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Линейная	$Q = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2$	∞	1	a_1, a_2 -предельный продукт затрат x_1, x_2
Кобба-Дугласа	$Q = b_0 \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$	1	$b_1 + b_2$	b_0 -фактор шкалы, b_1, b_2 -эластичность выпуска по отношению к затратам x_1, x_2
1	2	3	4	5
Затраты-Выпуск	$Q = \min\left(\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}\right)$	0	1 $\frac{x_1}{c_1} = \frac{x_2}{c_2}$	c_1, c_2 -количество затрат вида x_1, x_2, необходимых для выпуска единицы продукции

Анализа способов производствен-ной деятельности	$Q = \sum_{k=1}^{p} d_k \cdot y_k$ $\sum_{k=1}^{p} d_{jk} \cdot y_k \le x_j$	0	1	p-число способов производствен-ной деятельности, y_k - уровень интенсив-ности способа, d_k - выпуск продукции при единичной ин-тенсивности, d_{jk} - количество затрат вида j, необхо-димых для выпуска d_k при единичной интенсивности

Выводы

Проведен обзор наиболее часто встречающихся на практике производственных функций. Рассмотрена связь производственных функций с агрегированием. Осуществлен анализ подходов построения инженерно-производственных и технологических функ-ций, основанных на инженерных расчетах. Изложен известный математический аппарат исследования производственных функций.

1. Stigler G. J. The Theory of Price. Rev. edn. New York, 1952.
2. Dorfman R. Application of Linear Programming to the Theory of the Firm. Berkeley, 1951.
3. Koopmans T. C. Three Essays on the State of Economic Science. McGraw-Hill',. 1957.
4. Kaldor N. The Equilibrium of the Firm // Econ. Journ. 1934. Vol. 44.
5. Johansen L. Substitution Versus Fixed Production Coefficients in the Theory of Economic Growth: a Synthesis // Econometrica. 1959. Vol. 27.
6. Solow R. M. Substitution and Fixed Proportions in the Theory of Capital // Rew. Econ. Stud. 1962. Vol. 29.
7. Cobb C. W., Douglas P. H. A Theory of Production // Amer. Econ. Rev. 1928. Vol. 18. (SuppL).
8. Arrow К. J. Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency //Rev. Econ. a. Stat. 1961. Vol. 43.
9. Arrow К. J. The Economic Implications of Learning by Doing // Rev. Econ. Stud. 1962. Vol. 29.
10. Brown M., De Cani J. S. Technological Change and Distribution of Income. 1962. (Ms.).
11. Klein L. R. Macroeconomlcs and the Theory of Rational Behavior // Econometrica. 1946. Vol. 14.
12. Nataf A. Sur la Possibilite de Construction de certains Macromodeles // Econometrica. 1950. Vol. 16.
13. Houthakker H. The Pareto Distribution and the Cobb-Douglas Production Function in Activity Analysis // Ibid. Vol. 23.

14. Theil H. Linear Aggregation of Economic Relations. Amsterdam, 1954.
15. Heady E. 0., Dillon J. L. Agricultural Production Functions. Ames, 1962 (русский перевод: Хеди Е. Диллон Д. Производственные функции в сельском хозяйстве. М., 1965. - Прим. ред.).
16. Chenery H. B. Engineering Production Functions // Quart. Journ. Econ. 1949. Vol. 63.
17. Ferguson A. R. Commercial Air Transportation in the United States // Studies in the Structure of the American Economy / Ed. by W. Leontief. Oxford, 1953. Ch. 11.
18. Moore F. T. Economies of Scale: Some Statistical Evidence // Qurt. Journ. Econ. 1959. Vol. 73.
19. Smith V. L. Investment and Production. Cambridge, 1961.
20. Hirsch W. Z. Manufacturing Process Functions // Rev. Econ. a. Statist. 1952. Vol. 34.
21. Hirsch W. Z. Firm Progress Ratios // Econometrica. 1986. Vol. 24.
22. Asher H. Cost-Quantity Relationships in the Airframe Industry // Rand Corporation. 1956. R291.
23. Charnes A., Cooper W. WL Mellon B. A Model for Optimizing Production by Reference to Cost Surrogates // Econometrica. 1955. Vol. 23.
24. Markowits H. Process Analysis of the Metal Working Industries // RAND Corporation. 1953. RM-1085.
25. Markowits H. Industry-wide, Multi-industry, and Economy-wide Process Analysis // The Structural Interdependence of the Economy. London, 1963.
26. Marschak J., Andrews W. H. Random Simultaneous Equations and the Theory of Production // Econometrica. 1944. Vol. 12.
27. Mundlak Y. Estimation of Production Functions from a Combination of Cross Section and Time Series Data // Read at Meeting of Econometric Society. New York, 1961. (Mimeograph).
28. Nerlove M. Notes on the Identification and Estimation of the Cobb- Douglas Production Function. Stanford, 1959. (Mimeograph).
29. Andrews P. W. S. Manufacturing Business. London, 1949.
30. Whitin T. M.. Preston M. H. Random Variations, Risk and Returns to Scale // Quart. Journ. Econ. 1954. Vol. 68.
31. Ferguson A. R. Empirical Determination of a Multidimensional Marginal Cost Function // Econometrica. 1950. Vol. 18.
32. Meyer J. R., Peck M. J., Stenason J., Zwick C. The Economies of Competition in the Transportation Industries. Harvard, 1959.
33. Friedman M. Comment // Conference on Business Concentration and Price Policy. Princeton, 1955.
34. Johnston J. Statistical Cost Functions. New York, 1960.
35. Bain J. S. Barriers to New Competition. Cambridge (Mass.), 1956.
36. Eiteman W. J., Guthrie G. E. The Shape of the Average Cost Curve // Ibid. 1952. Vol. 42.
37. Hall R. L., Hitch C. J. Price Theory and Business Behavior // Ibid. 1939, Vol. 2.
38. Lester R. A. Shortcomings of Marginal Analysis for Wage-Employment Problems // Amer. Econ. Rev. 1946. Vol. 36.
39. Alpert S. B. Economy of Scale in the Metal Removal Industry // Journ. Industr. Econ. 1959. Vol. 17.
40. Dean J. Statistical Determination of Cost with Special Reference to Marginal Cost // Studies in Business Administration. Chicago, 1936. Vol. 7.
41. Dean J. Relation of Cost to Output for a Leather Belt Shop // Nat. Burean Econ. Res. Tech. Paper. 1941, N 2.
42. Dean J. Dept. Store Cost Functions // Studies in Mathematical Economics and Econometrics / Ed. by 0. Lange. Chicago, 1942.

43. Dean J., James R. W. The Long-run Behavior of Costs in a Chain of Shoe Stores // Studies in Business Administration. Chicago, 1942. Vol. 15.
44. Holton R. H. On the Measurement of Excess Capacity in Retailing // Rev. Econ. Stud. 1956-1957. Vol. 24.
45. Ezekiel M., Wylie K. H. Cost Curves for Steel Production // Journ. Polit. Econ. 1940. Vol. 48.
46. Ezekiel M., Wylie K. H. Cost Functions for the Steel Industry // Journ. Amer. Statist. Assoc. 1941. Vol. 36.
47. Yntema T. 6. Steel Prices, Volume and Costs // Temp. Nat. Econ. Comm. Papers. 1940. Vol. 1.
48. Nordin J. A. Note on a Light Plant's Cost Curves // Econometrica. 1947. Vol. 15.
49. Lomax К. S. Cost Curves for Gas Supply // Bull. Oxf. Inst. Statist. 1951. Vol.13.
50. Gribbin T. К. Production Costs in the Gas Industry // Oxf. Econ. Papers. 1953. Vol. 5.
51. Lomax К. S. Cost Curves for Electricity Generation // Economica. 1952. Vol. 19.
52. McNulty J. Administrative Costs and Scale of Operations in the U.S. Electricity Power Industry // Journ. Industr. Econ. 1956. Vol. 5.
53. Nerlove M. Return to Scale in Electricity Supply : Tech. Rep. 96. Stanford, 1961.
54. Boris G. H. Production Relations in the Railway Industry // Econo-metrica. 1952. Vol. 20.
55. Boris G. H. The Estimation of Rail Cost Functions // Ibid. 1960. Vol. 28.
56. Broster E. J. Variability of Railway Operating Costs // Econ. Journ. 1938. Vol. 48.
57. Mansfield EL Wein H. Regression Control Charts for Costs // App. Statist. 1958. Vol. 7.
58. В.И.Ленин Аграрный вопрос и «критики Маркса» (1901) – В.И.Ленин, Полн. собр. соч., т.5, стр. 100-103.

5.О МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

Рассмотрены методы исследования устойчивости макропараметров функционирования производственной системы. Определены условия применения разных методов исследования устойчивости производственных систем.

Теория устойчивости функционирования технологических процессов производственных систем является важнейшей математической основой автоматизированного управления производством. Автоматизированное управление производством необходимо всюду, где невозможно или нецелесообразно «ручное управление», то есть в тех случаях, в которых нужна большая точность и скорость управления, особенно при большом объеме информации, поступающей от диспетчерских пунктов, наблюдающих и отслеживающих производственный процесс. Функционирование технологических процессов производственной системы является устойчивым, если протекающие технологические процессы мало изменяются под действием внутренних и внешних возмущающих воздействий, и наоборот, неустойчивым, если происходящие в ней технологические процессы очень сильно изменяются даже под действием очень малых внешних возмущающих воздействий. Для управления производственной системой вводятся наблюдаемые диспетчерской службой предприятия макропараметры (гл.1,табл.3). Если под действием каких-либо малых внутренних или внешних возмущающих воздействий некоторые из макропараметров производственной системы отклоняются от заданного технологией режима, то возникает необходимость вернуть их в первоначальное невозмущенное состояние. Возникает вопрос: необходимо ли для этого использовать имеющиеся в распоряжении у диспетчера управляющие ресурсы или производственная система восстановит исходное состояние самостоятельно без дополнительных затрат средств? Кроме того, если макропараметры производственной системы восстанавливаются в задаваемом технологией производства состоянии с помощью регуляторов автоматизированной системы управления, то эти регуляторы (управляющие воздействия производственными ресурсами) могут приостановить свое действие с опозданием, вследствие чего макропараметры производственной системы успевают отклониться в противоположном направлении.

Снова действуют управляющие диспетчерами регуляторы, но опять с опозданием, что приводит к новым отклонениям макропараметров производственной системы в другую сторону. Таким образом, производственная система испытывает колебания макропараметров. Производственным процессом наряду с диспетчерской службой управляют технологическая служба, служба контроля качества, ремонтная и прочие службы. Данные службы образуют «гасители колебаний» производственной системы: служба контроля качества своевременно подправила технические условия на производимую продукцию, ремонтная служба без дополнительных ресурсов и времени восстановила вышедшее из строя оборудование и т.д. Если службы предприятия работают достаточно хорошо, то отклонения от заданного технологией режима будут оставаться малыми, то есть получающийся производственный процесс будет мало отличаться от заданного технологией производства режима. В этом случае функционирование производственной системы будет устойчиво.

Если же службы предприятия работают не достаточно хорошо, то отклонения макропараметров от заданного технологией производства значений с течением времени могут стать очень большими, то есть получающийся производственный процесс будет сильно отличаться от заданного первоначально. Конечно, неограниченное возрастание амплитуды колебания макропараметров производственной системы невозможно, так как при достаточно больших значениях амплитуды колебания макропараметров производственный процесс совершенно изменится или прекратится из-за того, что исчерпан тот или иной производственный ресурс, без которого производственный процесс невозможен. Для такой производственной системы заданный технологией производственный процесс является неустойчивым. Тем более, производственный процесс может стать неустойчивым, если имеются сильные внешние возмущающие воздействия, поступающие внезапно или непрерывно. Например, отключение подачи электроэнергии, выход из строя теплообменника, компрессора или другого оборудования могут настолько нарушить нормальный режим производства таким образом, что производственный процесс станет неустойчивым. Таким образом, устойчивость функционирования производственной системы является одним из главных требований, предъявляемых к производственной системе. Поэтому основная задача теории устойчивости функционирования производственных систем состоит в нахождении признаков устойчивости или неустойчивости производственного процесса, выраженных через наблюдаемые макропараметры производственной системы. Это делается посредством анализа того, как влияют на функционирование производственной системы их внутреннее строение и внешние возмущающие воздействия. Академик А.М.Ляпунов (1857-1918) создал весьма общую и глубокую математическую теорию устойчивости движения, которую изложил в своей важнейшей работе «Общая задача об устойчивости движения» [1], опубликованной в 1892 году. Основной математический аппарат теории устойчивости движения – это системы дифференциальных уравнений.

Исследование устойчивости не представляет обычно серьезных трудностей в тех случаях, когда дифференциальные уравнения возмущенного движения удается проинтегрировать в замкнутой форме. Но такого рода случаи являются исключительными и на практике встречаются редко. Поэтому усилия исследователей были направлены к тому, чтобы разработать методы решения задачи устойчивости не прибегая к интегрированию уравнений движения. При этом для решения задачи устойчивости пользовались методом линеаризации уравнений в малых возмущениях:

$$\frac{d\left[y\right]_n}{dt} = \sum_{m=1}^{N_n} a_{nm} \cdot \left[y\right]_m , \qquad n = 1, 2, 3, ...N_n , \qquad (1)$$

где $\left[y\right]_n$ - малое возмущение, a_{nm}- коэффициенты при малых возмущениях. Таким способом решали задачу Раус, Жуковский[2]. При этом задача значительно упрощалась вследствие линеаризации, а для установившихся движений разрешалась элементарно, так как при постоянных коэффициентам a_{nm} система уравнений (1) интегрируется в замкнутом виде. Но такого рода решение не является строгим. Происходит замена нелинейной системы уравнений линейной системой уравнений вида (1), то есть замена одной задачи другой. Правомерность такой замены необходимо обосновать. Кроме того, может случиться, что невозмущенное движение при исследовании лишь первого приближения окажется устойчивым, хотя оно в самом деле неустойчиво, и наоборот. Можно, однако, привести и такие примеры, когда первое приближение действительно решает задачу устойчивости. Отсюда возникает основная задача: установить необходимые и достаточные условия устойчивости по первому приближению. Эту задачу поставил Ляпунов и дал полное ее решение для установившихся и периодических решений. Выяснив условия, при которых задача решается в первом приближении, Ляпунов также рассмотрел некоторые основные случаи, когда при исследовании устойчивости нельзя ограничиваться рассмотрением первого приближения. Для решения поставленных задач Ляпунов разработал специальные приемы. Все эти приемы и вообще все способы решения задачи устойчивости Ляпунов разделяет на две категории. К первой категории относятся те способы, которые приводятся к непосредственному рассмотрению возмущенного движения, то есть к определению общего или частного решения соответствующих дифференциальных уравнений. Эти решения приходится искать в виде некоторых рядов. Совокупность способов первой категории Ляпунов назвал *первым методом.* Можно, однако указать и другие способы решения задачи устойчивости, которые не требуют нахождения частных или общих решений уравнений возмущенного движения, а приводят к отысканию некоторых функций от времени и возмущенных переменных, обладающих специальными свойствами. Примером служит известная теореме Лагранжа об устойчивости равновесия, когда силовая функция обращается в максимум. Здесь устойчивость обеспечивается существованием силовой функции, обладающей специальными свойствами. Совокупность всех способов второй категории Ляпунов назвал *вторым методом*.

В основу своего второго метода Ляпунов положил несколько основных установленных им теорем. Эти теоремы оказались настолько эффективными, что при их помощи удалось исключительно просто решить задачу об устойчивости по первому приближению. Вместе с тем они позволили Ляпунову рассмотреть и некоторые основные случаи, когда первое приближение задачи не решает проблемы устойчивости и, следовательно, задача делается особенно сложной. Второй метод Ляпунова в настоящее время является основным методом решения задачи устойчивости. В связи с новыми задачами об устойчивости нелинейных систем и в связи с проблемами стабилизации управляемых движений в последние годы интерес ко второму методу Ляпунова весьма возрос. Исследования вопросов эффективного построения функций Ляпунова для прикладных задач были развиты в большом числе работ отечественных и зарубежных специалистов. При этом были установлены универсальность и эффективность второго метода Ляпунова для широкого круга проблем. Этот круг проблем включает задачи об устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования, задачи исследования устойчивости систем с запаздываниями воздействий во времени, задачи устойчивого функционирования стохастических систем и т.д. Выяснилось также, что метод функций Ляпунова может быть использован для решения проблем синтеза оптимальных управляемых систем с обратной связью, так как он тесно переплетается с методами динамического программирования в теории оптимальных процессов.

5.1.Исследование устойчивости функционирования производственных систем первым методом Ляпунова. Метод линеаризации.

Представим взаимосвязь макропараметров производственной системы в виде системы балансовых уравнений, полученных путем агрегирования микропараметров производственной системы

$$\frac{d[c]_n}{dt} = f_n([c]_1, [c]_2, ..., [c]_n, ..., [c]_{N_n}),$$

$$[c]_n = [c]_n(t), \qquad n = 1, 2, 3, ...N_n. \qquad (2)$$

Пусть системе балансовых уравнений (2) соответствует невозмущенное решение:

$$[c]_n^* = [c]_n^*(t). \qquad (3)$$

На практике в качестве невозмущенного решения обычно выбирается такое движение, то есть такой режим производственного процесса, который желательно осуществить как можно точнее. Отклонения от невозмущенного движения, которые обычно вызываются внешними возмущающими воздействиями на производственную систему, в этом случае нежелательны.

Пусть наблюдаемые технологической или диспетчерской службой макровеличины производственного процесса получат случайные малые возмущения $[y]_n$:

$$[y]_n = [c]_n - [c]_n^*. \qquad (4)$$

Линеаризуем систему уравнений макропараметров производственной системы (2) относительно малых возмущений (4) в окрестности невозмущенного состояния (3):

$$\frac{d[y]_n}{dt} = \sum_{m=1}^{N_n} a_{nm} \cdot [y]_m, \qquad a_{nm} = \left. \frac{\partial f_n([c]_1, [c]_2, ..., [c]_n, ..., [c]_{N_n})}{\partial [c]_m} \right|_0,$$

$$n = 1, 2, 3, ...N_n. \qquad (5)$$

Символ $\Big|_0$ обозначает, что разложение слагаемого осуществлено в окрестности невозмущенного состояния (3). Если коэффициенты a_{nm} постоянны и возмущения ищем пропорциональными $\exp(J \cdot t)$, то системе уравнений в малых возмущениях (5) соответствует характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-J) & a_{21} & \dots\dots\dots & a_{m1} & \dots\dots\dots & a_{N_m1} \\ a_{12} & (a_{22}-J) & \dots\dots\dots & a_{m2} & \dots\dots\dots & a_{N_m2} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots\dots\dots & (a_{mn}-J) & \dots\dots\dots & a_{N_mm} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{1N_m} & a_{2N_m} & \dots\dots\dots & a_{mN_m} & \dots\dots\dots & (a_{N_mN_m}-J) \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

Если корни J_j характеристического уравнения (6) имеют отрицательную реальную часть, то производственный процесс устойчив. Случай положительной реальной части J_j свидетельствует об экспоненциальном нарастании амплитуды возмущений со временем, т.е. о неустойчивости.

Решение вопроса устойчивости для системы уравнений в малых возмущениях (5) усложняется в случае, если коэффициенты a_{nm} не являются постоянными.

5.2.Исследование устойчивости функционирования производственных систем вторым методом Ляпунова. Метод функций Ляпунова.

Представим также взаимосвязь макропараметров производственной системы в виде системы балансовых уравнений, полученных путем агрегирования микропараметров производственной системы (2)

$$\frac{d[c]_n}{dt} = f_n([c]_1, [c]_2, \dots, [c]_n, \dots, [c]_{N_n}), \qquad n = 1, 2, 3, \dots\dots N_n .$$

Пусть системе балансовых уравнений (2) соответствует невозмущенное решение (3):

$$\left[c\right]_n^* = \left[c\right]_n^*(t,S) .$$

Пусть наблюдаемые технологической или диспетчерской службой макровеличины производственного процесса получат случайные малые возмущения $\left[y\right]_n$ (4):

$$\left[y\right]_n = \left[c\right]_n - \left[c\right]_n^* .$$

Система уравнений макропараметров производственной системы (2) относительно малых возмущений (4) в окрестности невозмущенного состояния (3) имеет вид:

$$\frac{d\left[y\right]_n}{dt} = g_n(\left[y\right]_1, \left[y\right]_2, ..., \left[y\right]_n, ..., \left[y\right]_{N_n}) , \quad n = 1,2,3,.......N_n . \qquad (7)$$

Если удастся найти положительно определенную функцию $V(\left[y\right]_1, \left[y\right]_2, ..., \left[y\right]_n, ..., \left[y\right]_{N_n})$, такую что

$$V(0,0,...,0,...,0) \equiv 0 , \qquad V(\left[y\right]_1, \left[y\right]_2, ..., \left[y\right]_n, ..., \left[y\right]_{N_n}) > 0 \qquad (8)$$

и

$$\frac{dV(\left[y\right]_1, \left[y\right]_2, ..., \left[y\right]_n, ..., \left[y\right]_{N_n})}{dt} \le 0 , \qquad (9)$$

то производственный процесс устойчив, причем в случае строгого неравенства (9) производственный процесс устойчив асимптотически. Покажем это на примере. Пусть дана система уравнений в малых возмущениях

$$\frac{d\left[y\right]_1}{dt} = -\left[y\right]_2 + a\cdot\left(\left[y\right]_1\right)^3 , \quad \frac{d\left[y\right]_2}{dt} = \left[y\right]_1 + a\cdot\left(\left[y\right]_2\right)^3 . \qquad (10)$$

Для системы уравнений в малых возмущениях (10) можно записать функцию Ляпунова

$$V(\left[y\right]_1, \left[y\right]_2) = \left(\left[y\right]_1\right)^2 + \left(\left[y\right]_2\right)^2 , \quad V(\left[y\right]_1 = 0, \left[y\right]_2 = 0) \equiv 0 , \qquad (11)$$

для которой

$$\frac{dV(\left[y\right]_1, \left[y\right]_2)}{dt} = \frac{d\left(\left(\left[y\right]_1\right)^2 + \left(\left[y\right]_2\right)^2\right)}{dt} = \left[y\right]_1\cdot\left(-\left[y\right]_2 + a\cdot\left(\left[y\right]_1\right)^3\right) +$$

$$+\left[y\right]_2\cdot\left(\left[y\right]_1 + a\cdot\left(\left[y\right]_2\right)^3\right) = a\cdot\left(\left(\left[y\right]_1\right)^4 + \left(\left[y\right]_2\right)^4\right) \le 0 . \qquad (12)$$

Откуда условия асимптотической устойчивости $a < 0$ и неасимптотической устойчивости $a = 0$.

Простейшим случаем, когда теоремы Ляпунова дают возможность установить устойчивость невозмущенного движения, будет очевидно тот, когда уравнения (7) допускают интеграл движения

$$V([y]_1,[y]_2,...,[y]_n,...,[y]_{N_n}) = H = const\,, \tag{13}$$

где $V([y]_1,[y]_2,...,[y]_n,...,[y]_{N_n})$ знакоопределенная функция. Действительно,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dH}{dt} = 0\,. \tag{14}$$

Первый интеграл вида (14) имеют консервативные производственные системы.

5.3.Исследование устойчивости функционирования производственных систем первым методом Ляпунова. Метод собственных функций.

Представим взаимосвязь макропараметров производственной системы в виде системы балансовых уравнений, полученных путем агрегирования микропараметров производственной системы (2)

$$\frac{d[c]_n}{dt} = f_n([c]_1,[c]_2,...,[c]_n,...,[c]_{N_n})\,, \qquad n = 1,2,3,.......N_n\,,$$

где макропараметры производственной системы есть функции времени и координаты $[c]_n = [c]_n(t,S)$.

Пусть системе балансовых уравнений (2)

$$\frac{\partial[c]_n}{\partial t} + \frac{\partial[c]_n}{\partial S}\cdot\frac{dS}{dt} = f_n([c]_1,[c]_2,...,[c]_n,...,[c]_{N_n})\,,\ n = 1,2,3,.......N_n\,, \tag{15}$$

соответствует невозмущенное решение:

$$[c]_n^* = [c]_n^*(t,S)\,. \tag{16}$$

Наблюдаемые технологической или диспетчерской службой макровеличины производственного процесса получат случайные малые возмущения $[y]_n$ (4):

$$[y]_n = [c]_n - [c]_n^*\,.$$

Линеаризуем систему уравнений макропараметров производственной системы (2) относительно малых возмущений (4) в окрестности невозмущенного состояния (3):

$$\frac{\partial[y]_n}{\partial t}+\frac{\partial[y]_n}{\partial S}\cdot\frac{dS}{dt}=\sum_{m=1}^{N_n}a_{nm}\cdot[y]_m\ , \qquad (17)$$

$$a_{nm}=\left.\frac{\partial f_n([c]_1,[c]_2,...,[c]_n,...,[c]_{N_n})}{\partial[c]_m}\right|_0\ , \qquad n=1,2,3,.......N_n\ .$$

Если коэффициенты a_{nm} не зависят от времени, то малое произвольное возмущения можно представить в виде разложения в ряд Фурье:

$$[y]_n=\{y_n\}_0+\sum_{j=1}^{\infty}\{y_n\}_j\cdot\sin\left[k_j\cdot S\right]+\sum_{j=1}^{\infty}[y_n]_j\cdot\cos\left[k_j\cdot S\right];\ k_j=\frac{2\cdot p\cdot j}{S_d} \qquad (18)$$

где $\{y_n\}_0$, $\{y_n\}_j$, $[y_n]_j$ - коэффициенты разложения малых возмущений $[y]_n$ макропараметров производственной системы $[c]_n$ вдоль технологической цепочки производственного процесса. Подставляя в систему уравнений (17) вместо $[y]_n$ их разложение в ряд Фурье (18), получим системы уравнений для коэффициентов разложения малых возмущений $[y]_n$ макропараметров производственной системы $[c]_n$.

Если дополнительно коэффициенты a_{nm} не зависят не только от времени, но еще и от координаты, то исследование системы уравнений (17) на устойчивость значительно упрощается. Система уравнений (17) распадается на множество систем уравнений вида (5) с постоянными коэффициентами, описывающими поведения коэффициентов разложения $\{y_n\}_0$, $\{y_n\}_j$, $[y_n]_j$ малых возмущений $[y]_n$ макропараметров производственной системы. Каждой системе уравнений соответствует характеристическое уравнение вида (6). Если корни J_j характеристического уравнения (6) имеют отрицательную реальную часть, то производственный процесс устойчив. Случай положительной реальной части J_j свидетельствует об экспоненциальном нарастании амплитуды возмущений со временем, т.е. о неустойчивости.

Решение вопроса устойчивости для системы уравнений в малых возмущениях (5) усложняется в случае, если коэффициенты a_{nm} являются функциями координаты.

5.4.Исследование устойчивости функционирования производственных систем вторым методом Ляпунова. Энергетический метод.

Метод собственных функций позволяет аналитически получить критерий устойчивости функционирования производственной системы по Ляпунову только в простейших случаях, так как для этого надо решить дифференциальное уравнение (17) с переменными коэффициентами $a_{nm} = a_{nm}(S)$. Однако, если поставить более скромную задачу, а именно, отказаться от определения собственной частоты колебаний и искать только условия устойчивости производственной системы, то можно получить условия устойчивости в более сложных случаях.

Действительно, если производственной системе с заданной целевой функцией (2.1.29) можно поставить в соответствии функционал

$$W = \int_{0}^{S_d} w \cdot dS \,, \tag{19}$$

обладающий свойством

$$\frac{dW}{dt} \le 0 \,, \tag{20}$$

то исследование устойчивости производственной системы относительно малых возмущений $\left[y\right]_n$ (4) сводится к исследованию минимума функционала (19). Если подынтегральная функция (19) является первым интегралом движения производственной системы

$$w = h = const \tag{21}$$

или представляет собою комбинацию первых интегралов движения

$$w = w(h_j) = const \,, \tag{22}$$

$$h_j = const \,,$$

то условие (20) переходит в тождественное равенство

$$\frac{dW}{dt} \equiv 0 \,, \tag{23}$$

а исследование устойчивости производственной системы относительно малых возмущений $[y]_n$ сводится только к исследованию минимума функционала (19). Для устойчивости функциионирования производственного процесса необходимо, чтобы любое малое возмущение $[y]_n$ приводило к увеличению значения функционала (19) относительно своего невозмущенного состояния $W|_0$

$$W - W|_0 = \left(\int_0^{S_d} w \cdot dS - W|_0 \right) = \int_0^{S_d} \left(w - w|_0 \right) \cdot dS > 0\,, \tag{24}$$

Из произвольности малых возмущений $[y]_n$ следует, что подынтегральное выражение должно быть определенно положительно в любой точке S:

$$w - w|_0 = \left(w|_0 + \sum_{n=0}^{N} \frac{\partial w}{\partial [c]_n}\bigg|_0 \cdot [y]_n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \frac{\partial^2 w}{\partial [c]_n \partial [c]_m}\bigg|_0 \cdot [y]_n \cdot [y]_m + \ldots.. \right) - w|_0 \geq 0 \tag{25}$$

причем равенство выполняется только для $[y]_0 = [y]_1 = \ldots = [y]_n = \ldots. = [y]_N \equiv 0$. Действительно, если малое возмущение $[y]_n$ представлено d -функцией

$$[y]_n = [y]_d \cdot d(S - S_d)\,, \tag{26}$$

$d(S - S_d) \equiv 1$, при $S \equiv S_d$ и $d(S - S_d) \equiv 0$, при $S \neq S_d$,
то подынтегральное выражение функционала принимает вид

$$w = w|_0 + \sum_{n=0}^{N} \frac{\partial w}{\partial [c]_n}\bigg|_{S=S_d} \cdot [y]_d + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \frac{\partial^2 w}{\partial [c]_n \partial [c]_m}\bigg|_{S=S_d} \cdot [y]_d^{\,2} + \ldots.. \text{ для } S \equiv S_d$$

и

$$w \equiv 0 \text{ для } S \neq S_d\,. \tag{27}$$

Для невозмущенного состояния макропараметров производственной системы

$$\frac{\partial w}{\partial [c]_n}\bigg|_0 = 0\,, \tag{28}$$

откуда выражение (25) принимает вид с точностью до членов второго порядка малости

$$w - w|_0 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \frac{\partial^2 w}{\partial [c]_n \partial [c]_m}\bigg|_0 \cdot [y]_n \cdot [y]_m \geq 0 \tag{29}$$

Энергетический принцип широко используется при исследовании устойчивости равновесного состояния жидкости, газа, плазмы [3]. Отказ от нахождения частоты собственных колебаний и инкремента неустойчивости макропараметров производственной системы, лежащий в основе энергетического принципа исследования устойчивости производственных систем, позволяет решить более общую задачу устойчивости функционирования производства.

5.5. Техническая устойчивость функционирования производственных систем.

Понятие технической устойчивости и технической неустойчивости функционирования производственных систем в технических приложениях имеет даже большее значение, чем устойчивость и неустойчивость функционирования производственных систем по Ляпунову [3]. Введем определение технической устойчивости функционирования производственных систем. Прежде всего, будем рассматривать функционирование производственной системы не на полуоси $0 \le t < \infty$, а на конечном отрезке времени, так как реальные производственные процессы протекают в течение конечного отрезка времени. Будем считать, что конечный отрезок времени имеет вид $0 \le t \le T$. В дальнейшем будем рассматривать внутренние и внешние возмущающие воздействия на производственный процесс со следующими свойствами:

а) материальная система может испытывать возмущающие воздействия не только при $t \le 0$, но и на всем отрезке $0 \le t \le T$ или на какой-либо его части.

б) если имеются возмущающие воздействия при $t \le 0$, то они могут изменять не только начальные условия производственного процесса, но и уравнения, описывающие через малые возмущения макропараметров функционирование производственной системы (7):

$$\frac{d\,[y]_n}{dt} = g_n(t,[y]_1,[y]_2,\dots,[y]_n,\dots,[y]_{N_n}) + G_n(t,[y]_1,[y]_2,\dots,[y]_n,\dots,[y]_{N_n}),$$

$$n = 1,2,3,\dots\dots N_n . \qquad (30)$$

Функции $G_n(t,[y]_1,[y]_2,\dots,[y]_n,\dots,[y]_{N_n})$ представляют собою возмущения уравнений (7). В технических приложениях известны или заданы ограничения, которые не должны превосходить все возмущения макропараметров производственного процесса и возмущения уравнений, описывающих через макропараметры функционирование производственного процесса:

$$\left|[y]_n(t)\right| \le e_n(t), \qquad \left|G_n(t,[y]_1,[y]_2,\dots,[y]_n,\dots,[y]_{N_n})\right| \le h_n(t). \qquad (31)$$

Невозмущенное движение будет технически устойчивым на отрезке $0 \le t \le T$, если при любых начальных возмущениях и последующих возмущениях макропараметров производственного процесса $[y]_n(t)$ и возмущениях уравнений $G_n(t,[y]_1,[y]_2,...,[y]_n,...,[y]_{N_n})$ на отрезке $0 \le t \le T$ выполняются условия а) и б). Из представленного выше следует, что анализ технической устойчивости можно свести к анализу устойчивости по Ляпунову. Общие методы анализа технической устойчивости более сложны, чем методы анализа устойчивости по Ляпунову[4].

Выводы

Всякому, кто имел дело с теорией или применением обыкновенных дифференциальных уравнений, хорошо известно, как важно уметь выяснить асимптотические свойства решений. Сюда относится изучение вопросов о том, будут ли решения колеблющимися, будут ли они ограниченными, устойчивыми в том или ином смысле. Между тем получить решение в явном виде и затем исследовать его непосредственно удается лишь в редких, исключительных случаях, даже если привлекать специальные функции. Поэтому со всей остротой встает задача качественного исследования свойств решений данного дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений без использования явного вида этих решений. Задача в общем виде чрезвычайно сложна. Даже одно из наиболее простых и весьма важных для технического приложения уравнений – линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами представляет собой постоянный вызов искусству аналитика. Для многих важных классов дифференциальных уравнений существует большое количество подчас остроумных и сильных методов такого исследования. К сожалению, обширная литература по этим методам в подавляющем большинстве состоит из узкоспециализированных книг по математике, физике и механике. Практически отсутствует литература по подходам к исследованию устойчивости функционирования социально-экономических систем. Такое положение вопросов обуславливает целесообразность рассмотрения методов исследования устойчивости систем, широко известных физикам, применительно к проблемам экономики. На примере анализа условий устойчивого функционирования производственного процесса изложены методы исследования устойчивости функционирования производственно-сбытовых систем в терминах, понятных и инженерам, и экономистам. Показана целесообразность применения того или иного метода для анализа условий устойчивого функционирования конкретного производственного процесса. Как правило, условия устойчивого функционирования производственного процесса сводятся к оптимальному соотношению между темпом движения заготовок от одной технологической операции к другой технологической операции и межоперационными запасами (заделами) сырья и материалов, или говоря более обобщающе – между темпом выпуска предприятия и имеющимися на предприятии запасами сырья и материалов. Таким образом, исследование устойчивого функционирования производственного процесса тесно переплетается с такой наукой, как управление запасами предприятия. Анализ устойчивости макропараметров функционирования производственного процесса методом, применяемым в настоящей главе для исследования технической устойчивости производственных систем, позволяет получить условия обеспечения производственной системы сырьем и материалом «точно в срок». Такой подход в практике снабжения сырьем и материалом широко используется зарубежными фирмами.

1. Ляпунов А.М. Общая задача устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950, - 395 с.
2. Жуковский Н.Е. О прочности движения. Ученые записки Моск.ун-та, отдел физ.матем., вып.4, 1882.
3. Половин Р.В., Демуцкий В.П. Основы магнитной гидродинамики. М.: Энергоатомиздат, 1987,208 с.
4. Карачаров К.А., Пилютик А.Г. Введение в техническую теорию устойчивости движения. ГИФМЛ, 1962.

6. УПРАВЛЕНИЕ МАКРОПАРАМЕТРАМИ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРОЦЕССА

Поставлена динамическая задача управления производственным процессом. Показано различие задач оптимального стратегического и оптимального оперативного управления производственным процессом. Рассмотрены виды управления производственным процессом.

6.1. Стратегическое и оперативное управление макропараметрами производственного процесса

Динамическая задача управления производственным процессом – это задача распределения ограниченных ресурсов предприятия для достижения поставленных перед производством целей на протяжении некоторого промежутка времени от начального момента t_0 до конечного $t_{кон}$. Задача состоит в выборе управляющих параметров производственного процесса для каждой технологической операции вдоль технологической цепочки как функций времени $\Upsilon(t,S)$ [1]. Выбор управляющих параметров производственного процесса $\Upsilon_k(t,S)$, $k=0,1,2,3......N_k$ определяет вид функций времени макропараметров производственного процесса $[c]_k(t,S)$ [2-5], с помощью которых описывается поведение производственной системы. Макропараметры производственного процесса $[c]_k(t,S)$ в каждый момент времени выбираются таким образом, чтобы минимизировать заданный целевой функционал

$$I=\int_{t_0}^{t_{кон}} J(t,[c]_k(t,S),\frac{d[c]_k}{dt}(t,S),\Upsilon_k(t,S))\cdot dt+$$

$$+I_k(t,[c]_k(t_k,S),\frac{d[c]_k}{dt}(t_k,S)),\ k=0,1,2,3......N_k,\quad (1)$$

определяющий задачи производственного процесса на промежуток времени $(t_{кон}-t_0)$. Функция $I_k\left(t,[c]_k,d[c]_k/dt\right)$ в выражении для функционала (1) называется функцией конечных параметров и показывает, что функционал (1) зависит от конечного состояния и от конечного момента времени.

Вариация функционала (1) задает систему дифференциальных уравнений, связывающих макропараметры производственного процесса $\left[c\right]_k(t,S)$ и управляющие параметры производственного процесса $\Upsilon_k(t,S)$. Задача, представленная в такой форме, называется задачей управления производственным процессом.

Пусть стратегический план развития производства на промежуток времени $\left(t_{кон}-t_0\right)$ требует перевода производственной системы из начального состояния в момент времени t_0 со значением макропараметров производственного процесса $\left[c\right]_k^*(t_0,S)$ в конечное состояние в момент времени $t_{кон}$ со значением макропараметров производственного процесса $\left[c\right]_k^*(t_{кон},S)$. Для перевода производственной системы из начального состояния в конечное задается управление производственным процессом $\Upsilon_k^*(t,S)$. Стратегическое планирование развитием производства на промежуток времени $\left(t_{кон}-t_0\right)$ требует, чтобы целевой функционал (1), описывающий процесс перехода от макропараметров производственного процесса $\left[c\right]_k^*(t_0,S)$ к $\left[c\right]_k^*(t_{кон},S)$ при заданном стратегическом управлении производственным процессом $\Upsilon_k^*(t,S)$

$$I^* = \int_{t_0}^{t_{кон}} J(t,\left[c\right]_k^*(t,S),\frac{d\left[c\right]_k^*}{dt}(t,S),\Upsilon_k^*(t,S))\cdot dt +$$

$$+I_k^*(t,\left[c\right]_k^*(t_k,S),\frac{d\left[c\right]_k^*}{dt}(t_k,S)),\ k=0,1,2,3......N_k, \quad (2)$$

имел оптимальное значение. Задачу, представленную в форме оптимизации целевого функционала (2), будем называть задачей *стратегического управления производственным процессом*. Задача стратегического управления производственным процессом определяет поведение во времени макропараметров производственной системы $\left[c\right]_k(t,S)$, $k=0,1,2,3......N_k$ (3.2.2) при заданном на предприятии стратегическом управлении производственным процессом $\Upsilon_k^*(t,S)$:

$$\left[c\right]_k(t,S)=\left[c\right]_k^*(t,S)\ ,\ k=0,1,2,3......N_k\ ;\qquad (3)$$

$$\Upsilon_k(t,S)=\Upsilon_k^*(t,S)\ .$$

Пусть в ходе переходного процесса от макропараметров производственного процесса $\left[c\right]_k^*(t_0,S)$ к $\left[c\right]_k^*(t_{кон},S)$ при заданном стратегическом управлении производственным процессом $\Upsilon_k^*(t,S)$ макропараметры производственного процесса $\left[c\right]_k(t,S)$, $k=0,1,2,3......N_k$ (3.2.2) получат случайные малые возмущения $\left[y\right]_k$ [6-9]:

$$\left[y\right]_k=\left[c\right]_k-\left[c\right]_k^*,\qquad \frac{\left[y\right]_k}{\left[c\right]_k^*}<<1\qquad (3.7.2)$$

для ликвидации которых от диспетчерской службы предприятия требуются дополнительные управляющие воздействия u_k:

$$Y_k(t,S)-Y_k^*(t,S)=\sum_{m=0}^{N_k}q_{km}\cdot u_m\ ,\qquad \frac{\sum_{m=0}^{N_k}q_{km}\cdot u_m}{Y_k^*(t,S)}<<1\qquad (1.6.4)$$

Будем полагать, что управляющие воздействия u_k обеспечивают асимптотическую устойчивость заданного стратегического управления производственным процессом (3) и нацелены на ликвидацию малых отклонений $\left[y\right]_k$ от заданных значений макропараметров производственной системы $\left[c\right]_k(t,S)$.

Линеаризуем целевой функционал производственной системы (1) относительно малых возмущений $\left[y\right]_k$:

$$I=\int_{t_0}^{t_{кон}}J(t,\left[c\right]_k(t,S),\frac{d\left[c\right]_k}{dt}(t,S),\Upsilon_k(t,S))\cdot dt+$$

$$+I_k(t,\left[c\right]_k(t_k,S),\frac{d\left[c\right]_k}{dt}(t_k,S))=$$

$$= \int_{t_0}^{t_{кон}} J\left(t,\left(\left[c\right]_k^{*}+\left[y\right]_k\right),\frac{d\left(\left[c\right]_k^{*}+\left[y\right]_k\right)}{dt},\left(\Upsilon_k+\sum_{m=0}^{N_k} q_{km}\cdot u_m\right)\right)\cdot dt +$$

$$+ I_k\left(t,\left(\left[c\right]_k^{*}+\left[y\right]_k\right),\frac{d\left(\left[c\right]_k^{*}+\left[y\right]_k\right)}{dt}\right)=$$

$$= I^{*} + \int_{t_0}^{t_{кон}} J\left(t,\left[y\right]_k,\frac{d\left[y\right]_k}{dt},\sum_{m=0}^{N_k} q_{km}\cdot u_m\right)\cdot dt + I_{\Delta k}\left(t,\left[y\right]_k,\frac{d\left[y\right]_k}{dt}\right)=$$

$$= I^{*} + I_{\Delta}\left(t,\left[y\right]_k,\frac{d\left[y\right]_k}{dt}\right),\ k=0,1,2,3......N_k\ , \quad (5)$$

где функционал

$$I_{\Delta}\left(t,\left[y\right]_k,\frac{d\left[y\right]_k}{dt}\right)= \int_{t_0}^{t_{кон}} J\left(t,\left[y\right]_k,\frac{d\left[y\right]_k}{dt},\sum_{m=0}^{N_k} q_{km}\cdot u_m\right)\cdot dt +$$

$$+ I_{\Delta k}\left(t,\left[y\right]_k,\frac{d\left[y\right]_k}{dt}\right) k=0,1,2,3......N_k\ , \quad (6)$$

определяет стратегию оперативного управления макропараметрами производственного процесса. Задачу, представленную в форме оптимизации целевого функционала (6), будем называть задачей *оперативного управления производственным процессом*. Задача оперативного управления производственным процессом определяет поведение во времени возмущений макропараметров производственной системы $\left[c\right]_k(t,S)$, $k=0,1,2,3......N_k$ (3.2.2) и требуемые возмущающие воздействия, обеспечивают асимптотическую устойчивость заданного стратегического управления производственным процессом.

Таким образом, целевой функционал (1) можно представить в виде суммы двух целевых функционалов

$$I = I^* + I_\Delta \left(t, [y]_k, \frac{d[y]_k}{dt} \right), \; k = 0,1,2,3......N_k, \qquad (7)$$

первый из которых определяет стратегическое планирование и управление макропараметрами производственного процесса, второй – оперативное планирование и управление отклонениями макропараметров производственного процесса от заданного стратегическим планированием. Задачи стратегического и оперативного управления макропараметрами производственного процесса принципиально отличаются друг от друга. В задаче стратегического управления макропараметрами производственного процесса поведение макропараметров, описывающих переход от начального состояния производственного процесса $[c]_k^*(t_0, S)$ в момент времени t_0 к конечному состоянию $[c]_k^*(t_{кон}, S)$ в момент времени $t_{кон}$ при заданном стратегическом управлении производственным процессом $\Upsilon_k^*(t,S)$ является неизвестным и определяется в процессе решения вариационной задачи. Решение задачи стратегического управления макропараметрами производственного процесса дает возможность определить поведение макропараметров $[c]_k^*(t,S)$, отвечающее оптимальному переходному процессу. Таким образом, функции $[c]_k^*(t,S)$ являются неизвестными и определяются в ходе решения задачи оптимального переходного процесса. Напротив, в задаче оперативного управления макропараметрами производственного процесса поведение макропараметров, описывающих переход от начального состояния к конечному состоянию, задано. Определению подлежит вид управляющего воздействия на малые отклонения макропараметров производственной системы $[y]_k$ от заданных значений $[c]_k^*(t,S)$. Вид управляющего воздействия должен быть таков, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость переходного процесса $\left[c\right]_k^*(t,S)$ при требовании наименьших затрат производственных ресурсов (энергии, сырья, трудовых ресурсов и т.д.), расходуемых на формирование управляющих воздействий.

При строгой формулировке задачи управления время t изменяется как непрерывная величина. Предполагается, что время изменяется на протяжении некоторого промежутка времени от начального момента t_0 до конечного $t_{кон}$. Однако в производственной практике встречаются задачи, в которых требуется определить $t_{кон}$. Задачи управления, в которых время измеряется как дискретная величина, рассмотрены в работах Чанга [10], Ариса [11] и др. исследователей [12,13].

Если целевые функционалы (2) и (6) не зависят явно от времени, то уравнения, характеризующие поведение макропараметров производственного процесса $\left[c\right]_k(t,S)$, $k = 0,1,2,3......N_k$ и их случайных малых отклонений $\left[y\right]_k$ от заданных значений макропараметров производственной системы $\left[c\right]_k(t,S)$, являются автономными, т.е. независимыми явно от времени.

Задача с целевым функционалом вида (1) называется обычно задачей Больца. Если функция конечных параметров тождественно равна нулю, так что

$$I = \int_{t_0}^{t_{кон}} J(t,\left[c\right]_k(t,S),\frac{d\left[c\right]_k}{dt}(t,S),\Upsilon_k(t,S))\cdot dt\,,\quad k = 0,1,2,3......N_k\,, \tag{8}$$

то такую задачу называют задачей Лагранжа. Задачу, в которой целевая функция тождественно равна нулю, так что

$$I = I_k(t,\left[c\right]_k(t_k,S),\frac{d\left[c\right]_k}{dt}(t_k,S))\,,\quad k = 0,1,2,3......N_k\,, \tag{9}$$

обычно называют задачей Майера.

6.2. Виды управления макропараметрами производственного процесса

На современных предприятиях для управления производственными процессами, как правило, используют два основные вида управления: управление по разомкнутому контуру и управление по замкнутому контуру. Оптимальное управление по разомкнутому контуру производственного процесса является решением задачи Больца

$$\max_{\Upsilon_k(t,S)} I = \int_{t_0}^{t_{кон}} J\left(t,[c]_k(t,S),\frac{d[c]_k}{dt}(t,S),\Upsilon_k(t,S)\right)\cdot dt +$$

$$+I_k\left(t,[c]_k(t_k,S),\frac{d[c]_k}{dt}(t_k,S)\right),\ k=0,1,2,3......N_k, \quad (10)$$

определяется как функция времени

$$\Upsilon_k = \Upsilon_k(t,S) \quad (11)$$

и не зависит от макропараметров производственного процесса $[c]_k(t,S)$, $k=0,1,2,3......N_k$. Управление по разомкнутому контуру полностью определяется в начальный момент времени t_0, а поведение макропараметров производственного процесса $[c]_k(t,S)$ отыскивается в результате интегрирования балансовых уравнений для макропараметров производственной системы [2-5]. Оптимальное управление производственнім процессом по замкнутому контуру (с обратной связью) является решением задачи Больца (10), определяется поведением макропараметров производственного процесса $[c]_k(t,S)$:

$$0=\left(\Upsilon_k(t,S),[c]_k(t,S)\right). \quad (12)$$

В отличие от управления по разомкнутому контуру, когда все решения принимаются заранее (11), при управлении по замкнутому контуру решения можно пересматривать с учетом дополнительной информации (12), которая определяется текущими значениями макропараметров производственной системы. Задача управления по замкнутому контуру назывется еще задачей синтеза.

Примеры этих двух видов управления широко распространены в теории управления экономическими системами. Автоматический стабилизатор, такой, как сдельно-премиальная оплата труда работника производственного подразделения, является характерным примером задачи управления по замкнутому контуру.

Выводы

Сформулирована динамическая задача управления производственным процессом предприятия. Выбор управляющих параметров производственного процесса $\Upsilon_k(t,S)$, $k=0,1,2,3......N_k$ определяет вид функций времени макропараметров производственного процесса $\left[c\right]_k(t,S)$ [2-5], с помощью которых описывается поведение производственной системы. Поставлена задача стратегического и оперативного управления макропараметрами производственного процесса $\left[c\right]_k(t,S)$. Показано, что задачи стратегического и оперативного управления макропараметрами производственного процесса принципиально отличаются друг от друга. Решение задачи стратегического управления макропараметрами производственного процесса дает возможность определить поведение макропараметров $\left[c\right]_k^*(t,S)$, отвечающее оптимальному переходному процессу. При этом функции $\left[c\right]_k^*(t,S)$ определяются в ходе решения задачи оптимального переходного процесса. Напротив, в задаче оперативного управления макропараметрами производственного процесса поведение макропараметров $\left[c\right]_k^*(t,S)$, описывающих переход от начального состояния к конечному состоянию, задано. Определению подлежит вид управляющего воздействия на малые отклонения макропараметров производственной системы $\left[y\right]_k$ от заданных значений $\left[c\right]_k^*(t,S)$. Вид управляющего воздействия должен быть таков, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость переходного процесса $\left[c\right]_k^*(t,S)$ при требовании наименьших затрат производственных ресурсов (энергии, сырья, трудовых ресурсов и т.д.), расходуемых на формирование управляющих воздействий.

1. Пигнастый О.М. Задача оптимального оперативного управления макропараметрами производственной системы с массовым выпуском продукции – Доповіді Національної академії наук України, 2006. –N5– С.79-85
2. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции – Доповіді Національної академії наук України, 2005. –N7– С.66-71
3. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Теория предпри-ятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок. Х.: ХНУ, 2003 .-272стр
4. Демуцкий В.П., Пигнастый О.М., Ходусов В.Д., Азаренкова М.Н. Использование методов статистической физики для исследования экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции – Вестник ХНУ (физическая серия), 2005. –N710– С.128-134
5. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Макроскопические уравнения для описания экономико-производственной системы с массовым выпуском продукции – Вестник ХНУ, 2005. –N664– С.107-112
6. Демуцкий В.П., Пигнастый О.М. Вопросы устойчивости макроскопических параметров технологических процессов массового производства – Доповіді Національної академії наук України, 2006. –N3– С.63-67
7. Демуцкий В.П., Пигнастый О.М., Синергетическая экономика производственного предприятия с массовых выпуском продукции. Международная конференция НАНУ Статистическая физика: Общие проблемы и новые применения», Львов, 2005г., стр.59
8. Демуцкий В.П., Пигнастый О.М., Мелешенко С.Ю., Пищик Е.Н. Об устойчивости функционирования процессов массового производства, Интегрированные компьютерные технологии в машиностроении ИКТМ-2005, 2005 г., стр.206-215
9. Demutskiy V.P., Pignastiy O.M., Thermodynamical analogies in the problems of stability of socio-economic systems functioning and optimal control. Международная конференция НАНУ «Статистическая физика: Общие проблемы и новые применения», Харьков, 2006г., стр.151
10. Chang S.S. L., Synthesis of Optimal Control Systems, New York, McGraw-Hill Book Company, 1961
11. Aris R., Discrete Dynamic Programming, , New York, Blaisdell, 1964
12. Fan L.T. and Wang C.S., The Discrete Maximum Principle, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1964

13. Wilde D.J. and Beightler C.S., Foundations of Optimization, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, Inc., 1967
14. Михайленко В.Г., Дидиченко Н.П., Дубровин А.А., Ходусов В.Д., Демуцкий В.П., Пигнастый О.М. Особенности моделирования технологических процессов производственных систем – Вестник ХНУ (экономическая серия), 2006. –N719– С.267-276

ЧАСТЬ 2.
МИКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

1.ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ С МАССОВЫМ ВЫПУСКОМ ПРОДУКЦИИ

С использованием вариационного принципа построена целевая функция производственной системы с массовым выпуском продукции. Состояния элементов производственной системы в любой момент времени задается точками в двумерном фазовом пространстве. Определены уравнения технологических траекторий. Записаны уравнения Эйлера, описывающие поведение элементов производственной системы

Хорошо известно, что основные уравнения теории относительности [1], электродинамики [2], аналитической механики [3], термодинамики равновесных процессов, теории упругости [4], механики сплошной среды [5], ряда вопросов экономической теории [6] получаются при помощи вариационного принципа. Во многих современных физических теориях вариационный принцип представляет собою рабочий и, по существу, единственный рациональный аппарат исследования систем. При помощи вариационного принципа оказалось возможным объединить и синтезировать различные феноменологические и статистические методы в термодинамике, механике, теории больших систем. Анализ [1-6] показывает, что вариационное уравнение Эйлера может быть положено в основу при построении физических, биологических, социологических, экономических моделей и теорий. В частности, в последнее время в мировой литературе появляется много теоретических работ, посвященных макроскопической теории функционирования социально-экономических систем, в рамках которой требуется выявить зависимость между микроскопическим поведением отдельного элемента системы и общим состоянием макропараметров системы [7]. Вопросам получения уравнений Эйлера, описывающих микроскопическое поведение элемента производственной системы, и посвящен настоящий раздел.

1.1.Микроскопические параметры производственной системы с массовым выпуском продукции

Функционирование современного производства может быть представлено в виде стохастического процесса, в ходе которого производственная система переходит из одного состояния в другое. Состояние системы определяется как состояние общего числа N

базовых продуктов производственной системы [8,с.178]. Под базовым продуктом (или условным изделием [9,с.183]) понимается элемент производственной системы, на который происходит перенос стоимости живого труда, сырья, материалов и орудий труда в ходе его движения по операционной цепочке технологических карт. В ходе такого движения происходит превращение исходного сырья и материалов (межоперационной заготовки) в готовый продукт путем целенаправленного воздействия на него общественно-полезного труда. Состояние базового продукта в момент времени t может быть описано микроскопическими величинами в пространстве $\left(\mathrm{S}_{\mathrm{j}}, m_j\right)$ [10], где S_{j} (грн) и $m_j = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S_j}{\Delta t}$ (грн/час) соответственно сумма общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенных производственной системой на j-й базовый продукт, $0 < j \le N$. Микроскопические величины S_{j} и m_j определяют технологические траектории базовых продуктов $\mathrm{S}_{\mathrm{j}} = \mathrm{S}_{\mathrm{j}}(t)$ в технологическом пространстве $\left(\mathrm{S}_{\mathrm{j}}, m_j\right)$. В ходе производственного процесса базовый продукт должен изготавливаться строго в соответствии с заданной технологией производства. Отклонение от технологии производственного процесса считается недопустимым, приводит к нежелательным результатам, влечет за собой брак при изготовлении продукции. Технология производства базового продукта определяет средние значения и последовательность использования производственных ресурсов при переходе от одной технологической операции изготовления базового продукта к другой. Каждая $m-$ая технологическая операция характеризуется средним использованием производственных ресурсов (ресурсы сырья, материалов, электроэнергии, труда и т.д.) $\Delta S_{y\ m}$ (грн), необходимых для осуществления воздействия над базовым продуктом, и средней интенсивностью переноса данных ресурсов $k_{y\ m}$ (грн/час) производственным оборудованием на базовый продукт в соответствии с заданным технологическим процессом. Общая сумма средних затрат $\Delta S_{y\ m}$, перенесенных на базовый продукт на $m-$ой технологической операции с межоперационным заделом $N_{y\ m}$, может быть представлена в виде суммы двух разных по характеру переноса затрат слагаемых [13, с.364]:

$$\Delta S_{y\ m} = \Delta S_{y\,V\,m} + \Delta S_{y\,C\,m}\,. \qquad (1)$$

Величина $\Delta S_{y\,V\,m}$ представляет собою сумму условно-переменных затрат (усредненных значений прямой заработной платы, расхода сырья, материалов, топлива, электроэнергии на единицу продукции) для соответствующей технологической операции, потребляемых базовым продуктом непосредственно в ходе его технологической обработки. Напротив, величина $\Delta S_{y\,C\,m}$ включает в себя условно-постоянные затраты (усредненные на единицу времени затраты, связанные с амортизацией оборудова-ния, арендной платы, заработанной платы обслуживающего персонала, расходов, связанных с управлением и организацией производства), переносимые на базовый продукт за промежуток времени, в течение которого базовый продукт находится в межоперационных заделах $m-$ой технологической операции и технологическая обработка (воздействие технологического обору-дования) над ним не производится. Деление переносимых на базовый продукт затрат на условно-переменные и условно-постоянные является условным и определяется особенностями технологии производства базового продукта и учетной политикой предприятия. Средняя интенсивность переноса условно-переменных затрат $k_{y\,V\,m}$ (грн/час) определяется паспортными или фактически действу-ющими характеристиками оборудования для $m-$ой технологической операции, а средняя интенсивность переноса условно-постоянных затрат $k_{y\,C\,m}$ (грн/час) порядком разнесения затрат, утвержденным на предприятии. В соответствии со структурой разделения затрат, перенесенных на базовый продукт на $m-$ой технологической операции, средняя интенсивность переноса данных ресурсов $k_{y\ m}$ (грн/час) производственным оборудованием на базовый продукт может быть также представлена в виде средней интенсивности переноса условно-переменных затрат $k_{y\,V\,m}$ (грн/час) за среднее операционное время $\Delta t_{y\,O\,m}$ для $m-$ой технологической операции и средней интенсивности переноса условно-постоянных затрат $k_{y\,C\,m}$ (грн/час) за среднее межоперационное время $\Delta t_{y\,C\,m}$, в течение которого базовый продукт находится в межоперационном заделе между

$(m-1)-$ой и $m-$ой технологической операцией в ожидании своей очереди для выполнения $m-$ой технологической операции. Расчет времени межоперационного пролеживания базового продукта $\Delta t_{y\,C\,m}$ является наиболее сложным элементом в расчете длительности производственного цикла T_d. Длительность $\Delta t_{y\,C\,m}$ определяется целым рядом факторов: уровнем специализации участка и рабочих мест, числом операций в технологическом процессе, загрузкой оборудования и т.д.. В заводской практике длительность межоперационного времени $\Delta t_{y\,C\,m}$ часто устанав-ливают без должного обоснования [9]. Для повышения обоснованности длительности среднего межоперационного времени $\Delta t_{y\,C\,m}$ применяют методы математической статистики, в частности, множественную корреляцию. Таким образом, технологию производственного процесса изготовления базового продукта можно представить в виде траектории $S_y = S_y(t)$, определяющей среднюю величину и последовательность переноса ресурсов производственной системы на базовый продукт при его движении вдоль технологической цепочки от одной технологической операции к другой. Траектория $S_y = S_y(t)$, заданная через усредненные параметры технологического процесса, является центральной технологической траекторией, а базовый продукт, движущийся по данной траектории - центральным. Центральная технологическая траектория однозначно задает производственный процесс изготовления базового продукта в рассматриваемом фазовом пространстве (S,m):

$$S_{y\ m} = \sum_{k=1}^{m} \Delta S_{y\ k} = \sum_{k=1}^{m} \left(\Delta S_{y\,V\,k} + \Delta S_{y\,C\,k} \right)$$

$$\Delta S_{y\,V\,k} = a_{y\,V\,m} \cdot k_{y\,V\,m} \cdot \Delta t_{y\,O\,m}; \qquad \Delta S_{y\,C\,k} = a_{y\,C\,m} \cdot k_{y\,C\,m} \cdot \Delta t_{y\,C\,m}, \qquad (2)$$

где $a_{y\,V\,m}$, $a_{y\,C\,m}$ коэффициенты пропорциональности между заданной интенсивностью переноса затрат производственным оборудованием на элементы производственной системы и интенсивностью потребления затрат отдельным базовым продуктом при его обработке на $m-$ой технологической операции.

Используя предельный переход

$$S_{y\ m}=\sum_{k=1}^{m}\Delta S_{y\ k}=\sum_{k=1}^{m}\left(\Delta S_{y\,V\,k}+\Delta S_{y\,C\,k}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(a_{y\,V\,m}\cdot k_{y\,V\,m}\cdot\Delta t_{y\,O\,m}+a_{y\,C\,m}\cdot k_{y\,C\,m}\cdot\Delta t_{y\,C\,m}\right)\approx$$

$$\approx\sum_{k=1}^{m}\left(a_{y\,V\,m}\cdot k_{y\,V\,m}\cdot\Delta t_{y\,O\,m}\right)+\sum_{k=1}^{m}\left(a_{y\,C\,m}\cdot k_{y\,C\,m}\cdot\Delta t_{y\,C\,m}\right)\approx$$

$$\approx\int_{0}^{t_{y\,O}}a_{y\,V}(t_{y\,O})\cdot k_{y\,V}(t_{y\,O})\cdot dt_{y\,O}+\int_{0}^{t_{y\,M}}a_{y\,C}(t_{y\,M})\cdot k_{y\,C}(t_{y\,C})\cdot dt_{y\,C} \qquad (3)$$

получаем уравнения поведения центрального базового продукта для рассматриваемого технологического процесса

$$\begin{cases}\dfrac{dS_{y\,V}\left(t_{y\,O}\right)}{dt_{y\,O}}=a_{y\,V}\left(t_{y\,O}\right)\cdot k_{y\,V}(t_{y\,O}),\\ \dfrac{dS_{y\,C}\left(t_{y\,C}\right)}{dt_{y\,C}}=a_{y\,C}\left(t_{y\,C}\right)\cdot k_{y\,C}(t_{y\,C}),\\ t=t_{y\,O}+t_{y\,C}\\ S_{y}\left(t\right)\approx S_{y\,V}\left(t\right)+S_{y\,C}\left(t\right)\approx\displaystyle\int_{0}^{t_{y\,O}}a_{y\,V}(t)\cdot k_{y\,V}(t)\cdot dt+\int_{0}^{t_{y\,M}}a_{y\,C}(t)\cdot k_{y\,C}(t)\cdot dt\end{cases} \qquad (4)$$

где $t=t_{y\,O}+t_{y\,C}$ -время нахождения базового продукта в производственном процессе, соответствующем центральной технологической траектории. Для центральной технологической траектории справедливо соотношение

$$\Delta t_{y\,O\,m}+\Delta t_{y\,C\,m}=\mathrm{N}_{y\ m}\cdot\Delta t_{y\,O\,m} \qquad (5)$$

Тот факт, что $m-$ая технологической операция производственного процесса характеризуется только величинами $\Delta S_{y\ m}$ (грн) и $k_{y\ m}$ (грн/час), а не более высокими производными (грн/час^2), (грн/час^3), …….. является выражением утверждения, что состояние производственной системы предприятия полностью определяется знанием координат $\mathrm{S}_{\mathrm{j}}\left(t\right)$ (грн) и их скоростей изменения во времени $m_{j}\left(t\right)$ (грн/час) [9-12]. Для описания производственных систем с серийным и массовым выпуском продукции на практике используются макропараметры - межоперационные заделы $\left[c\right]_{0}$ и темп движения базовых продуктов $\left[c\right]_{1}$ вдоль операционной цепочки технологического процесса, для определения которых достаточно значений микропараметров базовых продуктов $\mathrm{S_j}(t)$, $m_j(t)$ [9,10].

При исследовании поведения производственных систем будем исходить из вариационного принципа, полагая, что для каждой производственной системы существует целевой функционал

$$I = \int_0^{T_d} J(t, S_j(t), m_j(t)) \cdot dt \,, \tag{6}$$

определяемый конкретным технологическим процессом, наличием оборудования с заданными характеристиками и т.д., который для движения базового продукта согласно заданного технологического процесса имеет минимум и вариация dI следовательно равна нулю

$$dI = d\int_0^{T_d} J(t, S_j(t), m_j(t)) \cdot dt = 0 \,, \tag{7}$$

Из равенства нулю вариации dI следуют уравнение Эйлера, описывающее поведение j-го базового продукта в ходе процесса его технологической обработки

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial m_j} - \frac{\partial J}{\partial S_j} = 0 \tag{8}$$

1.2.Вид целевой функции производственной системы с массовым выпуском продукции

Определим целевой функционал (6) для рассматриваемой производственной системы. Пусть в момент времени t_1 в окрестности $m-$ой технологической операции ($m = 1, N_m$) на промежутке $\Delta S_{y\ m}$ между двумя технологическими операциями находится определяемый технологическим процессом межоперационный задел $N_{y\ m}$ базовых продуктов, движущихся по технологическим траекториям $\mathrm{S_1}(t)$, $\mathrm{S_2}(t)$, …, $\mathrm{S_j}(t)$, …, $\mathrm{S}_{N_y}(t)$ (рис.1).

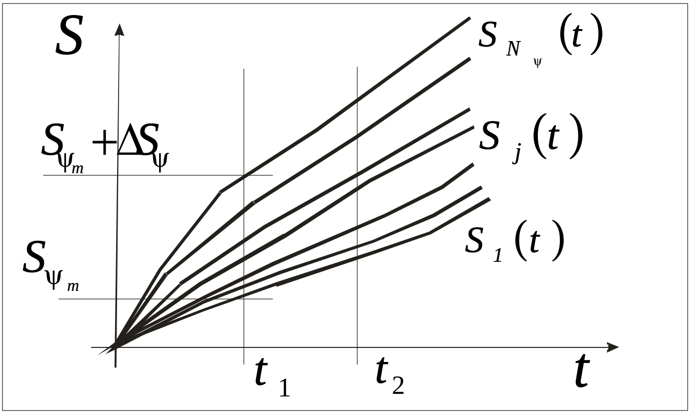

Рис.1. Технологические траектории базовых продуктов производственной системы

На j-й базовый продукт (грн/час), находящийся на $m-$ой технологической операции воздействует технологическое оборудование с мгновенной интенсивностью передачи базовому продукту условно-переменных $k_{jV\,m}$ и условно-постоянных $k_{jC\,m}$ производственных ресурсов.

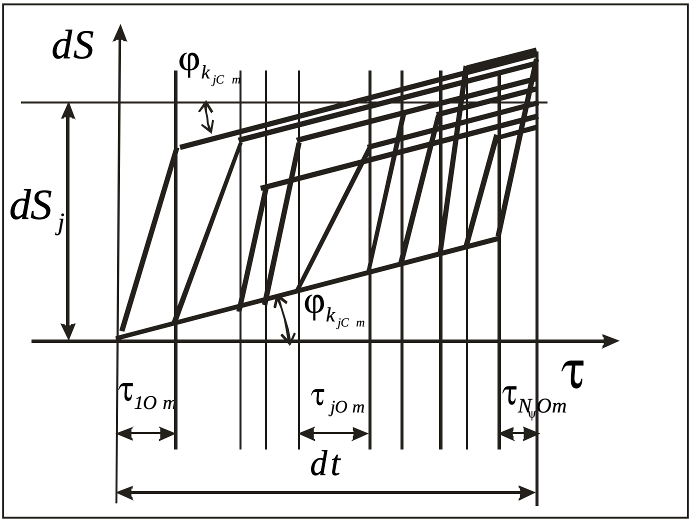

Рис.2. Технологические траектории базовых продуктов в окрестности $m-$ой технологической операцией

Временную ось разобьем на промежутки времени $dt = (t_2 - t_1)$. Размер временного промежутка выберем таким образом, чтобы он с одной стороны был много меньше характерного времени производственного цикла T_d, с другой стороны за это время можно осуществить большое количество технологических операций (рис.2,3)

$$T_d \approx \sum_{m=1}^{N_m} \left(\Delta t_{yO\,m} + \Delta t_{yC\,m} \right) >> \left(\Delta t_{yO\,m} + \Delta t_{yC\,m} \right) \geq dt >> \Delta t_{yO\,m}, \qquad (9)$$

где $N_m >> 1$ - количество технологических операций в производственном процессе изготовления базового продукта; T_d - время последовательного прохождения базовым продуктом технологических операций. В производственной практике для изготовления продукта используют от нескольких десятков до нескольких тысяч технологических операций при норме межоперационных заделов до нескольких десяток тысяч.

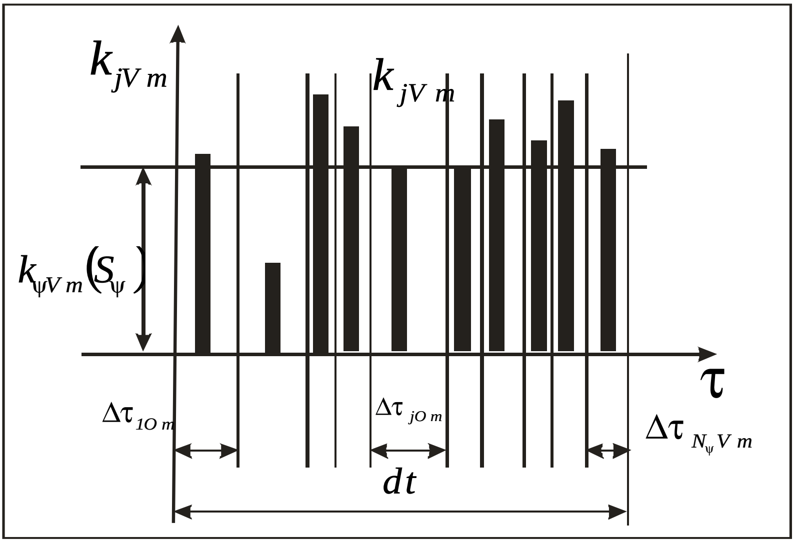

Рис.3. Мгновенная интенсивность передачи производственных ресурсов технологическим оборудованием $m-$ой технологической операцией как функция операционного времени

Интенсивность передачи условно-переменных производственных ресурсов на j-й базовый продукт k_{jVm} (грн/час) является случайной величиной. Плотность распределения этой случайной величины (рис.5) и ее моменты определяются паспортными параметрами работы технологического оборудования $y_k\left(k, S_{yV}\right)$ и параметрами технологического процесса $y_t\left(\Delta t_O, S_{yV}\right)$ [3]:

$$\int_0^\infty y_k\left(k, S_{yV}\right)\cdot dk = 1, \qquad \int_0^\infty y_t\left(\Delta t_O, S_{yV}\right)\cdot d\left(\Delta t_O\right) = 1 \tag{10}$$

$$\int_0^\infty y_k\left(k, S_{yV}\right)\cdot k \cdot dk = k_{yV}\left(S_{yV}\right), \int_0^\infty y_t\left(\Delta t_O, S_{yV}\right)\cdot \Delta t_O \cdot d\left(\Delta t_O\right) = \Delta t_{yOm}\left(S_{yV}\right) \tag{11}$$

$$\int_0^\infty y_k\left(k, S_{yV}\right)\cdot (k)^2 \cdot dk = \left(k_{yV}\left(S_{yV}\right)\right)^2 + \left(h_{yV}\left(S_{yV}\right)\right)^2, \quad \frac{\left(h_{yV}\left(S_{yV}\right)\right)^2}{\left(k_{yV}\left(S_{yV}\right)\right)^2} \ll 1$$

$$\int_0^\infty y_t\left(\Delta t_O, S_{yV}\right)\cdot\left(\Delta t_O\right)^2\cdot d\Delta t_O = \left(\Delta t_{yOm}\left(S_{yV}\right)\right)^2 + \left(g_{yV}\left(S_{yV}\right)\right)^2, \quad \frac{\left(g_{yV}\left(S_{yV}\right)\right)^2}{\left(\Delta t_{yOm}\left(S_{yV}\right)\right)^2} \ll 1 \tag{12}$$

Вид функции (закон распределения случайной величины) $y_k\left(k, S_{yV}\right)$ с математическим ожиданием $k_{yV}\left(S_{yV}\right)$ и дисперсией $\left(h_{yV}\left(S_{yV}\right)\right)^2$, описывающей работу технологического оборудования, определяется типом оборудования. Математическое ожидание $k_{yV}\left(S_{yV}\right)$ и дисперсия $\left(h_{yV}\left(S_{yV}\right)\right)^2$ характеризует плановый норматив расхода сырья и материалов и среднеквадратичное отклонение от планового норматива при выполнении $m-$ой технологической операции за среднее операционное время Δt_{yOm}. Соответственно вид функции $y_t\left(\Delta t_O, S_{yV}\right)$ с математическим ожиданием $\Delta t_{yOm}\left(S_{yV}\right)$ и дисперсией $\left(g_y\left(S_{yV}\right)\right)^2$, описывает интенсивность работы технологического оборудования. Величина математического ожидания Δt_{yOm} и дисперсии $\left(g_y\left(S_{yV}\right)\right)^2$

характеризует плановый норматив сменных норм на выполнение технологической операции и среднеквадратичное отклонение от планового норматива в зависимости от профессионализма и стажа работника, выполняющую данную технологическую операцию при плановом нормативе расхода сырья и материалов.

Практика показывает, что для серийного и массового производства отклонения от норматива составляет до 10 процентов, что определяется техническими условиями на поставляемое сырье и материалы (например, отклонение на толщину листового проката). Отклонение по фонду заработной платы разных работников на предприятии для одной и той же технологической операции составляет до 20 процентов. Откуда можно для практических оценок использовать $\dfrac{\left(h_{yV}\left(S_{yV}\right)\right)^2}{\left(k_{yV}\left(S_{yV}\right)\right)^2} \approx 0{,}01$, $\dfrac{\left(g_{yV}\left(S_{yV}\right)\right)^2}{\left(\Delta t_{yOm}\left(S_{yV}\right)\right)^2} \approx 0{,}04$.

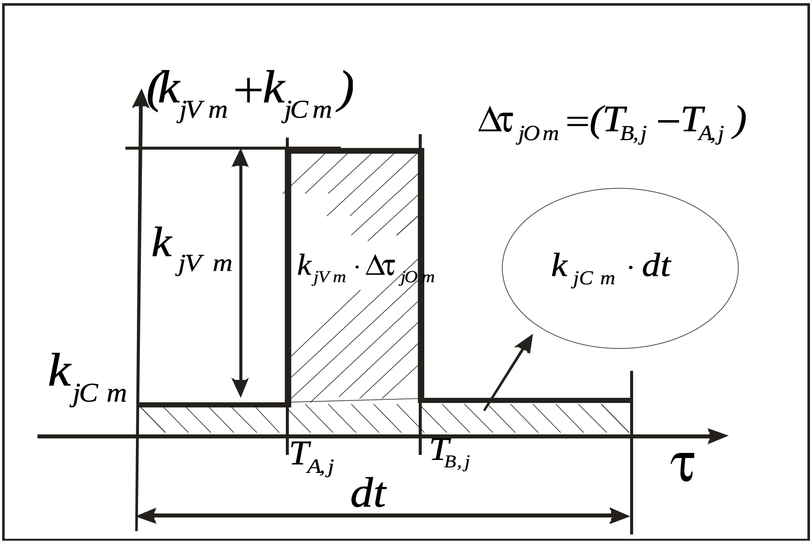

Рис.4. Мгновенная интенсивность передачи производственных ресурсов технологическим оборудованием $m-$ой технологической операцией на j-й базовый продукт

Приращение стоимости $\mathrm{dS_j}$ j-го базового продукта за время dt может быть выражено через мгновенную интенсивность передачи технологическим оборудованием условно-переменных $k_{jV\,m}$ (грн/час) и мгновенную интенсивность передачи технологической линией условно-постоянных $k_{jC\,m}$ (грн/час) производственных ресурсов (затрат) (рис.3, 4):

$$\mathrm{dS_j} \approx a_{jV}(S_{yV}) \cdot k_{jV}(S_{yV}) \cdot \Delta t_{jO}(S_{yV}) \cdot dv_j(S_{yV}) + a_{jC}(S_{yV}) \cdot k_{jC}(S_{yV}) \cdot dt \quad (13)$$

где $dv_j(S_{yV})$ - вероятность того, что j-й базовый продукт прошел технологическую обработку на $m-$ой технологической операции.

Как правило, закон изменения мгновенной интенсивности передачи технологическим оборудованием условно-постоянных затрат $k_{jC\,m}$ (грн/час) задается на расчетный период, много больше характерного времени производственного цикла T_d изготовления базового продукта

$$\frac{k_{y\,C\,m}}{T_d} >> \frac{dk_{y\,C\,m}}{dt}, \quad (14)$$

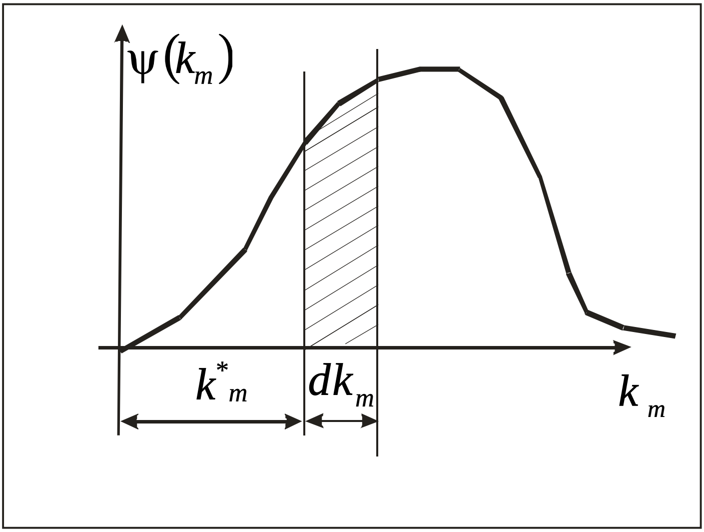

Рис.5. Плотность распределения интенсивности передачи производственных ресурсов технологическим оборудованием для $m-$ой технологической операцией

что позволяет считать интенсивность передачи технологическим оборудованием условно-постоянных производственных ресурсов $k_{jC\,m}$ независимой от времени и номера базового продукта, находящегося на в межоперационном заделе на $m-$ой технологической операции.

Тогда заказ в количестве N_p>>1 базовых продуктов за промежуток времени $dt=\left(t_2-t_1\right)$ переместится вдоль своих технологических траекторий $\mathrm{S_j}\left(t\right)$ на $m-$ой технологической операции и получит приращение перенесенной стоимости производственных ресурсов (рис. 2)

$$\mathrm{dS}=\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{N}_p}\mathrm{dS_j}\left(t\right) \tag{15}$$

при суммарном переносе производственных ресурсов технологическим оборудованием на базовые продукты (рис.3,4):

$$\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{N}_p}\mathrm{dS_j}\left(t\right)\cong\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_p}\Big(a_{jV}(S_{yV})\cdot k_{jV}(S_{yV})\cdot\Delta t_{jO}(S_{yV})\cdot dv_j(S_{yV})+a_{jC}(S_{yV})\cdot k_{jC}(S_{yV})\cdot dt\Big)\cong$$

$$\cong\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_p}\Big(a_V(S_{yV})\cdot k_{jV}(S_{yV})\cdot\Delta t_{jO}(S_{yV})\cdot dv_j(S_{yV})+a_{yC}(S_{yV})\cdot k_C(S_{yV})\cdot dt\Big)\cong$$

$$\approx\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_p}a_V(S_{yV})\cdot k_{jV}(S_{yV})\cdot\Delta t_{jO}(S_{yV})\cdot dv_j(S_{yV})+\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_p}a_{yC}(S_{yV})\cdot k_C(S_{yV})\cdot dt\cong$$

$$\cong a_{yV}(S_{yV})\cdot\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_p}k_{jV}(S_{yV})\cdot\Delta t_{jO}(S_{yV})\cdot dv_j(S_{yV})+\mathrm{N}_p\cdot a_{yC}(S_{yV})\cdot k_C(S_{yV})\cdot dt \tag{16}$$

Коэффициенты пропорциональности $a_{yV}(S_{yV})$, $a_{yC}(S_{yV})$ между заданной интенсивностью переноса затрат производственным оборудованием на элементы производственной системы и интенсивностью потребления затрат отдельным базовым продуктом при его обработке на $m-$ой технологической операции определяются потерями непроизводственного характера, которые составляют общецеховые условно-постоянные накладные расходы dS_z, не относящиеся к конкретной технологической операции. Усредненные коэффициенты пропорциональности $a_{yV}(S_{yV})$, $a_{yC}(S_{yV})$ задаются, например, функциями от оптимальных фактических раскроев материала, КПД передачи энергоносителей к базовому продукту на конкретной технологической операции и т.д. и удовлетворяют равенству

$$dS_z + \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{N}_p} \mathrm{dS_j}(t) = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}_p} k_{jV}(S_{yV}) \cdot \Delta t_{jO}(S_{yV}) \cdot dv_j(S_{yV}) + \mathrm{N}_p \cdot k_C(S_{yV}) \cdot dt \qquad (17)$$

а отношение

$$\frac{\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{N}_p} \mathrm{dS_j}(t)}{\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_p} k_{jV}(S_{yV}) \cdot \Delta t_{jO}(S_{yV}) \cdot dv_j(S_{yV}) + \mathrm{N}_p \cdot k_C(S_{yV}) \cdot dt} = h_S \qquad (18)$$

есть не что иное, как коэффициент использования ресурсов в производственном процессе. Усредненные коэффициенты пропорциональности $a_{yV}(S_{yV})$, $a_{yC}(S_{yV})$ могут быть определены как

$$a_{yV}(S_{yV}) = \frac{\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_p} a_{jV}(S_{yV}) \cdot k_{jV}(S_{yV}) \cdot \Delta t_{jO}(S_{yV})}{\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_p} k_{jV}(S_{yV}) \cdot \Delta t_{jO}(S_{yV})} \qquad (19)$$

$$a_{yC}(S_{yV}) = \frac{\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_p} a_{jC}(S_{yV}) \cdot k_{jV}(S_{yV}) \cdot \Delta t_{jO}(S_{yV})}{\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_p} k_{jV}(S_{yV}) \cdot \Delta t_{jO}(S_{yV})}. \qquad (20)$$

Таким образом, при движении вдоль технологической траектории для базового продукта следует неравенство

$$\mathrm{dS_j} - k_{jV}(S_{yV}) \cdot \Delta t_{jO}(S_{yV}) \cdot dv_j(S_{yV}) - k_C(S_{yV}) \cdot dt \le 0 \qquad (21)$$

причем равенство выполняется только при полном потреблении базовым продуктом производственных ресурсов, переданных технологическим оборудованием, т.е. при

$$a_{yV}(S_{yV}) = 1, \qquad a_{yC}(S_{yV}) = 1 \qquad (22)$$

Вероятность того, что j-й базовый продукт прошел технологическую обработку на $m-$ой технологической операции $dv_j(S_{yV})$ представляет собою отношение

$$dv_j(S_{yV}) = \frac{dt}{\left(\Delta t_{yO\,m} + \Delta t_{yC\,m}\right)} \qquad (23)$$

и не зависит от номера базового продукта,
а общее время нахождения базового продукта на $m-$ой технологической операции $\left(\Delta t_{yO\,m} + \Delta t_{yC\,m}\right)$ может быть записано как среднее операционное время $\Delta t_{yO\,m}$ и межоперационный задел N_y базовых продуктов (5)

$$dv_j(S_{yV}) = \frac{dt}{N_y \cdot \Delta t_{yO\,m}} \qquad (25)$$

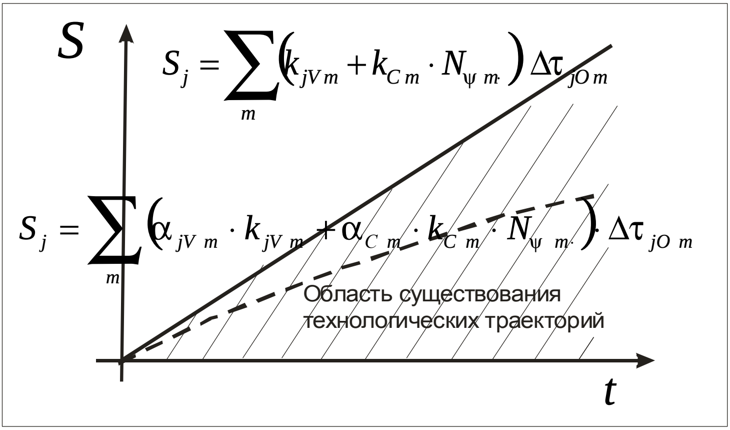

Рис.6. Область существования технологических траекторий базовых продуктов производственной системы

Целевую функцию производственной системы будем строить из требования того, чтобы производственные ресурсы, передаваемые технологическим оборудованием с мгновенной интенсивностью передачи условно-переменных $k_{jV\,m}$ (грн/час) и условно-постоянных $k_{jC\,m}$ (грн/час) производственных ресурсов, полностью переносились на $j-ый$ базовый продукт в соответствии с заданным технологическим процессом изготовления базового продукта

$$d\Omega_j = dS_j - a_{jV}(S_{yV}) \cdot k_{jV}(S_{yV}) \cdot \Delta t_{jO}(S_{yV}) \cdot dv_j(S_{yV}) - a_{jC}(S_{yV}) \cdot k_{jC}(S_{yV}) \cdot dt \qquad (26)$$

и производственной системы в целом

$$\sum_{j=1}^{N_p} d\Omega_j = \sum_{j=1}^{N_p} \left[dS_j - a_{jV}(S_{yV}) \cdot k_{jV}(S_{yV}) \cdot \Delta t_{jO}(S_{yV}) \cdot dv_j(S_{yV}) - a_{jC}(S_{yV}) \cdot k_{jC}(S_{yV}) \cdot dt \right] \quad (27)$$

Разделим обе части равенства (26) на dt

$$\frac{d\Omega_j}{dt} = \frac{dS_j}{dt} - a_{jV}(S_{yV}) \cdot k_{jV}(S_{yV}) \cdot \Delta t_{jO}(S_{yV}) \cdot \frac{1}{N_y \cdot \Delta t_{yO\,m}} - a_{jC}(S_{yV}) \cdot k_{jC}(S_{yV}) \quad (28)$$

Выражение (28) в соответствии с (21) имеет экстремум. Работа производства в рамках заданного технологического процесса должна быть поставлена таким образом, чтобы фактические значения скорости изменения затрат $\frac{dS_j}{dt}$, потребляемых $j-ым$ базовым продуктом, для каждого базового продукта были близки к заданным технологическим процессом значениям $\left[a_{jV}(S_{yV}) \cdot k_{jV}(S_{yV}) \cdot \Delta t_{jO}(S_{yV}) \cdot \frac{1}{N_y \cdot \Delta t_{yO\,m}} - a_{jC}(S_{yV}) \cdot k_{jC}(S_{yV}) \right]$ мгновенной интенсивностью передачи производственных ресурсов от технологического оборудования к базовому продукту, т.е. $\frac{d\Omega_j}{dt} \to 0$.

При отклонениях $\frac{dS_j}{dt}$ от $\left[a_{jV}(S_{yV}) \cdot k_{jV}(S_{yV}) \cdot \Delta t_{jO}(S_{yV}) \cdot \frac{1}{N_y \cdot \Delta t_{yO\,m}} - a_{jC}(S_{yV}) \cdot k_{jC}(S_{yV}) \right]$ и, соответственно $\frac{d\Omega_j}{dt}$ от нуля, производство базового продукта осуществляется с отклонением от технологического процесса, что не только нежелательно, но и просто недопустимо. Последствиями увеличения величины отклонения являются увеличение объема бракованной продукции, количества перебоев в производственном процессе и другие нежелательные последствия. В связи с этим будем требовать для производственного процесса минимум отклонений $\frac{d\Omega_j}{dt}$ от нулевого значения, что обеспечивается на практике взаимодействием службы главного технолога и службы контроля качества.

Так как работа технологического оборудования определяется тремя первыми моментами (10), (11), (12) функций технологического процесса $y_k\left(k, S_{yV}\right)$ и $y_t\left(\Delta t_O, S_{yV}\right)$, то целесообразно целевую функцию производственной системы представить в виде квадратичной формы

$$A\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\left(\frac{\mathrm{d}\Omega_j}{dt}\right)^2 =$$

$$= A\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\left(\frac{\mathrm{dS_j}}{dt}-a_{jV}(S_{yV})\cdot k_{jV}(S_{yV})\cdot\Delta t_{jO}(S_{yV})\cdot\frac{1}{N_y\cdot\Delta t_{yOm}}-a_{jC}(S_{yV})\cdot k_{jC}(S_{yV})\right)^2 \quad 29)$$

представляющей собою сумму квадратов отклонений от заданных значений переноса ресурсов в единицу времени в соответствии со строго определенным технологическим процессом. Множитель A есть постоянная величина, определяющая единицы измерения целевой функции.

Целевой функции (29) соответствует целевой функционал производственной системы

$$A\cdot\int_0^{T_d}\sum_{j=1}^{N_p}\left(m_j-a_{jV}(S_{yV})\cdot k_{jV}(S_{yV})\cdot\Delta t_{jO}(S_{yV})\cdot\frac{1}{N_y\cdot\Delta t_{yOm}}-a_{jC}(S_{yV})\cdot k_{jC}(S_{yV})\right)^2 dt \quad (30)$$

Так как интенсивность передачи технологическим оборудованием условно-постоянных производственных ресурсов k_{jCm} и коэффициент использования оборудования $a_{jC}(S_{yV})$ не зависят от времени и номера базового продукта, находящегося в межоперационном заделе на $m-$ой технологической операции (14), (20), то целевой функционал (30) может быть упрощен

$$A\cdot\int_0^{T_d}\sum_{j=1}^{N_p}\left(m_j-a_{jV}(S_{yV})\cdot k_{jV}(S_{yV})\cdot\Delta t_{jO}(S_{yV})\cdot\frac{1}{N_y\cdot\Delta t_{yOm}}-a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\right)^2 dt \quad (31)$$

Так как случайные величины $k_{jV}(S_{yV})$, $\Delta t_{jO}(S_{yV})$, соответствующие технологической обработки $j-$го базового продукта на $m-$ой технологической операции, не коррелированны между собою (9, стр.33), то при $N_p >> 1$ справедливо предельное равенство (10, стр.272-274):

$$\sum_{j=1}^{N_p}\left(m_j\cdot a_{jV}(S_{yV})\cdot k_{jV}(S_{yV})\cdot\Delta t_{jO}(S_{yV})\cdot\frac{1}{N_y\cdot\Delta t_{yOm}}\right)\approx a_{yV}(S_{yV})\cdot k_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{1}{N_y}\sum_{j=1}^{N_p}m_j+$$

$$+\sum_{j=1}^{N_p}\left(m_j\cdot a_{jV}(S_{yV})\cdot\Delta k_{jV}(S_{yV})\cdot\left(\Delta^2 t_{jO}(S_{yV})\right)^2\cdot\frac{1}{N_y\cdot\Delta t_{yOm}}\right) \quad (32)$$

где $\sum_{j=1}^{N_p}\left(m_j\cdot a_{jV}(S_{yV})\cdot\Delta k_{jV}(S_{yV})\cdot\left(\Delta^2 t_{jO}(S_{yV})\right)^2\cdot\frac{1}{N_y\cdot\Delta t_{yOm}}\right)$ представляет собою величину третьего порядка малости из-за наличия множителя $\Delta k_{jV}(S_{yV})\cdot\left(\Delta^2 t_{jO}(S_{yV})\right)^2$, то

$$\sum_{j=1}^{N_p}m_j\cdot a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\approx a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\cdot\sum_{j=1}^{N_p}m_j\,. \quad (33)$$

Аналогично проведем разложения и для других слагаемых целевой функции:

$$\sum_{j=1}^{N_p}a_{jV}(S_{yV})\cdot k_{jV}(S_{yV})\cdot\Delta t_{jO}(S_{yV})\cdot\frac{1}{N_y\cdot\Delta t_{yOm}}\cdot a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\approx$$

$$\approx\frac{N_p}{N_y}\cdot a_{yV}(S_{yV})\cdot k_{yV}(S_{yV})\cdot a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV}) \quad (34)$$

$$\sum_{j=1}^{N_p}\left(a_{jV}(S_{yV})\cdot k_{jV}(S_{yV})\cdot\Delta t_{jO}(S_{yV})\cdot\frac{1}{N_y\cdot\Delta t_{yOm}}\right)^2\approx$$

$$\approx\frac{1}{N_p}\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot k_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{N_p}{N_y}\right)^2+\left(\frac{1}{N_y}\cdot a_{yV}(S_{yV})\right)^2\sum_{j=1}^{N_p}\left(\cdot\Delta k_{jV}(S_{yV})\right)^2+$$

$$+\left(\frac{a_{yV}(S_{yV})\cdot k_{yV}(S_{yV})}{\Delta t_{yOm}}\cdot\frac{1}{N_y}\right)^2\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\left(\Delta^2 t_{jO}(S_{yV})\right)^2\approx$$

$$\approx\frac{1}{N_p}\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot k_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{N_p}{N_y}\right)^2+\frac{1}{N_p}\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{N_p}{N_y}\right)^2\cdot\left(h_{yV}\left(S_{yV}\right)\right)^2+$$

$$+\frac{1}{N_p}\cdot\left(\frac{a_{yV}(S_{yV})\cdot k_{yV}(S_{yV})}{\Delta t_{yOm}}\cdot\frac{N_p}{N_y}\right)^2\cdot\left(g_y\left(S_{yV}\right)\right)^2+$$

$$+\frac{1}{N_p}\cdot\left(\frac{a_{y\,V}(S_{y\,V})}{\Delta t_{y\,O\,m}}\cdot\frac{N_p}{N_y}\right)^2\cdot\frac{\left(\left(h_{y\,V}\left(S_{y\,V}\right)\right)^4+\left(g_y\left(S_{y\,V}\right)\right)^4\right)}{2} \qquad (35)$$

где в силу свойств (10), (11)

$$\frac{1}{N_p}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\left(\Delta k_{jV}(S_{yV})\right)^2\approx\left(h_{yV}\left(S_{yV}\right)\right)^2,\qquad \frac{1}{N_p}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\left(\Delta^2 t_{jO}(S_{yV})\right)^2\approx\left(g_y\left(S_{y\,V}\right)\right)^2,$$

$$\frac{1}{N_p}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\Delta k_{jV}(S_{yV})\approx 0,\qquad \frac{1}{N_p}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\Delta^2 t_{jO}(S_{yV})\approx 0,\qquad \frac{1}{N_p}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\Delta k_{jV}(S_{yV})\cdot\Delta^2 t_{jO}(S_{yV})\approx 0$$

$$\frac{1}{N_p}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\left[\Delta k_{jV}(S_{y\,V})\cdot\Delta^2 t_{jO}(S_{y\,V})\right]^2\le\frac{1}{2\cdot N_p}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\left(\left[\Delta k_{jV}(S_{y\,V})\right]^4+\left[\Delta^2 t_{jO}(S_{y\,V})\right]^4\right) \qquad (36)$$

а коэффициент использования оборудованием условно-переменных производственных ресурсов $a_{jV}(S_{yV})$ взят постоянным

$$a_{jV}(S_{yV})=a_{y\,V}(S_{y\,V})=\text{const}. \qquad (36)$$

С учетом (32)-(36) целевой функционал (31) до членов второго порядка малости принимает вид

$$A\cdot\int_0^{T_d}\left(\sum_{j=1}^{N_p}m_j^2+2\cdot F_{1y}(S_{yV})\cdot\sum_{j=1}^{N_p}m_j-2\cdot W_{0y}(S_{yV})\right)dt \qquad (37)$$

где

$$F_{1y\,V}(S_{y\,V})=-\frac{1}{N_y}\cdot a_{y\,V}(S_{y\,V})\cdot k_{y\,V}(S_{y\,V}), \qquad (38)$$

$$F_{1y\,C}(S_{y\,V})=-a_{y\,C}(S_{y\,V})\cdot k_{y\,C}(S_{y\,V}), \qquad (39)$$

$$F_{1y}(S_{y\,V})=F_{1y\,V}(S_{y\,V})+F_{1y\,C}(S_{y\,V}), \qquad (40)$$

$$F_{0y\,V}(S_{y\,V})=-\frac{1}{2\cdot N_p}\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot k_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{N_p}{N_y}\right)^2$$

$$\Phi_{0y\,V}(S_{y\,V})=-\frac{1}{2\cdot N_p}\cdot\left(\frac{a_{yV}(S_{yV})\cdot k_{yV}(S_{yV})}{\Delta t_{yO\,m}}\cdot\frac{N_p}{N_y}\right)^2\cdot\left(g_y\left(S_{yV}\right)\right)^2-\frac{1}{2\cdot N_p}\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{N_p}{N_y}\right)^2\cdot\left(h_{yV}\left(S_{yV}\right)\right)^2$$

(41)

$$F_{0y\,VC}(S_{y\,V}) = -a_{y\,C}(S_{y\,V})\cdot k_{y\,C}(S_{y\,V})\cdot a_{y\,V}(S_{y\,V})\cdot k_{y\,V}(S_{y\,V})\cdot \frac{N_p}{N_y} \qquad (42)$$

$$F_{0y\,C}(S_{y\,V}) = -\frac{N_p}{2}\cdot\left(a_{y\,C}(S_{y\,V})\cdot k_{y\,C}(S_{y\,V})\right)^2 \qquad (43)$$

$$F_{0y}\,(S_{y\,V}) = F_{0y\,V}(S_{y\,V}) + F_{0y\,VC}(S_{y\,V}) + F_{0y\,C}(S_{y\,V})$$

$$W_{0y}\,(S_{y\,V}) = F_{0y}\,(S_{y\,V}) + \Phi_{0y\,V}(S_{y\,V}) \qquad (44)$$

Функция $W_{0y}\,(S_{y\,V})$ представляет собою производственный потенциал предприятия, создает технологическое поле производственного процесса. Данное поле задается непосредственно технологическим потенциалом $F_{0y\,V}(S_{y\,V})$, определяемым условно-переменными затратами предприятия, и потенциалом накладных затрат $F_{0y\,C}(S_{y\,V})$, определяемым условно-постоянными затратами предприятия и потенциалом взаимодействия $F_{0y\,VC}(S_{y\,V})$.

Вариация функционала (37) дает уравнения Эйлера (8) для движения базового продукта вдоль технологических траекторий.

При $A = \frac{1}{2}$ целевая функция производственной системы примет вид

$$J(t, S_j, m_j) = \sum_{j=1}^{N_p}\frac{m_j^{\,2}}{2} + F_{1y}\,(S_{yV})\cdot\sum_{j=1}^{N_p} m_j - W_{0y}\,(S_{yV}) \qquad (45)$$

Целевая функция производственной системы (45) имеет общий вид с функцией Лагранжа, используемой при описании движения заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле [1].

1.3.Первые интегралы движения производственной системы с массовым выпуском продукции

Так как воздействие производственного поля (работа оборудования, обслуживающего персонала и т.д.) не зависит от состояния конкретного базового продукта

$$\frac{\partial J(t,S_j,m_j)}{\partial S_j}=0, \qquad (46)$$

то производственная система, описываемая целевой функцией (45), допускает N_p интегралов движения

$$\frac{\partial J(t,S_j,m_j)}{\partial m_j}=m_j+F_{1y}(S_{yV})=P_j, \qquad (47)$$

соответствующих N_p циклическим координатам S_j.

Так как базовые продукты идентичны, то следует полагать

$$m_j+F_{1y}(S_{yV})=P_j=P \qquad (48)$$

Просуммируем обе части равенства по общему количеству базовых продуктов и, используя соотношение (28)

$$\sum_1^{N_p}\left[m_j+F_{1y}(S_{yV})\right]=N_p\cdot P=\sum_1^{N_p}\frac{d\Omega_j}{dt}=0, \qquad (49)$$

где с учетом (10), (11), (12)

$$-\sum_1^{N_p}F_{1y}(S_{yV})=\sum_1^{N_p}\left[a_{jV}(S_{yV})\cdot k_{jV}(S_{yV})\cdot\Delta t_{jO}(S_{yV})\cdot\frac{1}{N_y\cdot\Delta t_{yOm}}+a_{jC}(S_{yV})\cdot k_{jC}(S_{yV})\right] \qquad (50)$$

определяем значение постоянной P:

$$P_j=P=0. \qquad (51)$$

Так как целевая функция (45) не зависит явно от времени, то партия из N_p базовых продуктов допускает еще один интеграл движения

$$H=\sum_1^{N_p}m_j\cdot\frac{\partial J(,S_j,m_j)}{\partial m_j}-J(,S_j,m_j)=\sum_{j=1}^{N_p}\frac{m_j^{\,2}}{2}+W_{0y}(S_{yV})=const \qquad (52)$$

1.4.Уравнение Эйлера для центрального базового продукта производственной системы

Для описания поведения партии базовых продуктов введем среднюю скорость изменения затрат базового продукта

$$m_y=\frac{1}{N_p}\sum_{j=1}^{N_p}m_j, \qquad (53)$$

описывающую поведение центрального базового продукта. Скорость изменения затрат для $j-$го базового продукта может быть записана через скорость изменения затрат центрального базового продукта m_y и отклонение скорости изменения затрат $j-$го базового продукта от скорости изменения затрат центрального базового продукта Δm_j:

$$m_j = m_y + \Delta m_j, \qquad \frac{1}{N_p}\sum_{j=1}^{N_p}\Delta m_j = 0. \tag{54}$$

Правая часть (53) может быть записана как полная производная по времени от выражения

$$S_y = \frac{1}{N_p}\sum_{j=1}^{N_p} S_j, \tag{55}$$

представляющего собой место нахождения центрального базового продукта. Тогда выражение для квадратичной формы имеет вид

$$\sum_{j=1}^{N_p}\frac{m_j^{\,2}}{2} = \sum_{j=1}^{N_p}\frac{\left(m_y + \Delta m_j\right)^2}{2} = N_p\cdot\frac{m_y^{\,2}}{2} + \sum_{j=1}^{N_p}\frac{\left(\Delta m_j\right)^2}{2} \tag{56}$$

Сумма квадратов отклонений Δm_j описывает поведение находящихся в технологическом процессе условных границ партии базовых продуктов и может быть выражена через средне-квадратичное отклонение скорости изменения затрат центрального базового продукта

$$s_y^{\,2} = \frac{2}{N_p}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\frac{\left(\Delta m_j\right)^2}{2}, \qquad \frac{s_y^{\,2}}{m_y^{\,2}} \ll 1 \tag{57}$$

Подставив (53), (56) с учетом (57), в выражение для целевой функции (45), получим

$$J(S_j, m_j) = N_p\cdot\left(\frac{m_y^{\,2} + s_y^{\,2}}{2}\right) + N_p\cdot F_{1y}(S_{yV})\cdot m_y - W_{0y}(S_{yV}) \tag{58}$$

В соответствии с (10), (11), (12) и (57) целевая функция (58) может быть представлена в виде суммы слагаемых нулевого и второго порядков малости

$$J(S_j, m_j) = J_0(S_y, m_y) + J_2(\Delta S_y, s_y) \tag{59}$$

$$J_0(S_y, m_y) = N_p \cdot \frac{m_y^{\,2}}{2} + N_p \cdot F_{1y}(S_{yV}) \cdot m_y - F_{0y}(S_{yV}), \tag{60}$$

$$J_2(\Delta S_y, s_y) = N_p \cdot \frac{s_y^{\,2}}{2} - \Phi_{0y}(S_{yV}), \tag{61}$$

в которой первое слагаемое $J_0(S_y, m_y)$ описывает поведение центрального продукта партии, находящейся в производственном процессе, второе слагаемое $J_2(\Delta S_y, s_y)$ описывает отклонение «условной границы» от положения центрального базового продукта.

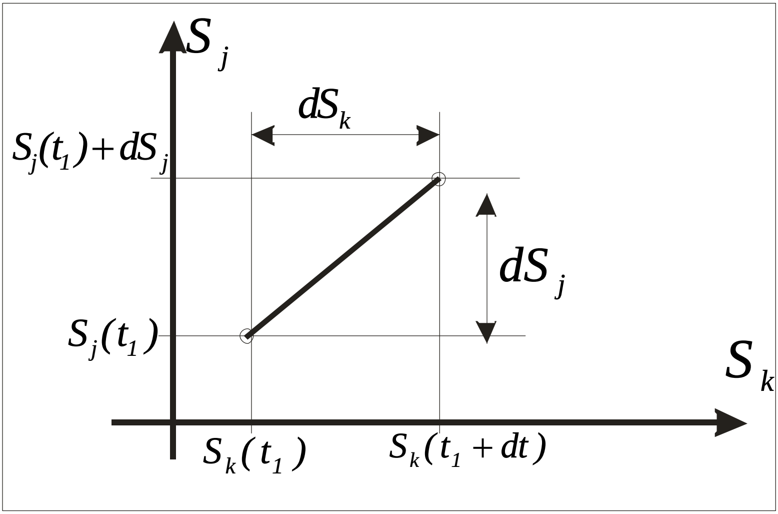

Рис.7. Длина дуги dx в координатном пространстве $\left(S_j, S_k\right)$

Интеграл движения (52) также может быть записан в виде суммы двух слагаемых нулевого и второго порядка малости

$$H = H_0 + H_2 = const, \tag{62}$$

$$H_0 = N_p \cdot \frac{m_y^{\,2}}{2} + F_{0y}(S_{yV}) = C_0, \tag{63}$$

$$H_2 = N_p \cdot \frac{s_y^{\,2}}{2} + \Phi_{0y}(S_{yV}) = C_2, \tag{64}$$

откуда

$$m_y = \sqrt{\frac{2}{N_p}\cdot\left[C_0 - F_{0y}(S_{yV})\right]}, \qquad s_y = \sqrt{\frac{2}{N_p}\cdot\left[C_2 - \Phi_{0y}(S_{yV})\right]} \tag{65}$$

Мгновенную интенсивность передачи условно-переменных затрат $k_{jV\,m}$ (грн/час) можно записать через производительность работы технологического оборудования $\left[c\right]_{1y}$ и плановые межоперационные заделы $\left[c\right]_0$

$$k_{yV}(S_{yV}) = \left[c\right]_{1y}\cdot\Delta S_y(S_{yV}) = \frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\cdot N_y \tag{66}$$

и записать через них выражения (38)-(44):

$$F_{1yV}(S_{yV}) = -\frac{1}{N_y}\cdot a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\cdot N_y = -a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0},$$

$$F_{1yC}(S_{yV}) = -a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV}),$$

$$F_{1y}(S_{yV}) = -\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0} + a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\right), \tag{67}$$

$$F_{0yV}(S_{yV}) = -\frac{N_p}{2}\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)^2$$

$$F_{0yC}(S_{yV}) = -\frac{N_p}{2}\cdot\left(a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\right)^2$$

$$F_{0yVC}(S_{yV}) = -N_p\cdot a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\cdot a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}$$

$$F_{0y}(S_{yV}) = -\frac{N_p}{2}\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0} + a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\right)^2 = -\frac{N_p}{2}\cdot\left(F_{1y}(S_{yV})\right)^2 \tag{68}$$

$$\Phi_{0yV}(S_{yV}) = -\frac{1}{2\cdot N_p}\cdot\left(\frac{a_{yV}(S_{yV})\cdot k_{yV}(S_{yV})}{\Delta t_{yO\,m}}\cdot\frac{N_p}{N_y}\right)^2\cdot\left(g_y\left(S_{yV}\right)\right)^2 - \frac{1}{N_p}\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{N_p}{N_y}\right)^2\cdot\left(h_{yV}\left(S_{yV}\right)\right)^2 =$$

$$= -\frac{N_p}{2}\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)^2\cdot\left(\frac{g_y\left(S_{yV}\right)}{\Delta t_{yO\,m}}\right)^2 - \frac{N_p}{2}\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)^2\cdot\left(\frac{h_{yV}\left(S_{yV}\right)}{k_{yV}(S_{yV})}\right)^2 =$$

$$= -\frac{N_p}{2}\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2\cdot\left(\left(\frac{g_y\left(S_{yV}\right)}{\Delta t_{yOm}}\right)^2+\left(\frac{h_{yV}\left(S_{yV}\right)}{k_{yV}(S_{yV})}\right)^2\right) \qquad (69)$$

$$W_{0y}(S_{yV}) = F_{0y}(S_{yV}) + \Phi_{0yV}(S_{yV})$$

Тогда целевая функция производственной системы примет вид

$$J(S_j, m_j) = J_0(S_y, m_y) + J_2(\Delta S_y, s_y)$$

$$J_0(S_y, m_y) = N_p\cdot\frac{m_y^{\ 2}}{2} + N_p\cdot F_{1y}(S_{yV})\cdot m_y + \frac{N_p}{2}\cdot\left(F_{1y}(S_{yV})\right)^2, \qquad (70)$$

$$J_2(\Delta S_y, s_y) = N_p\cdot\frac{s_y^{\ 2}}{2} + \frac{N_p}{2}\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2\cdot\left(\left(\frac{g_y\left(S_{yV}\right)}{\Delta t_{yOm}}\right)^2+\left(\frac{h_{yV}\left(S_{yV}\right)}{k_{yV}(S_{yV})}\right)^2\right) \qquad (71)$$

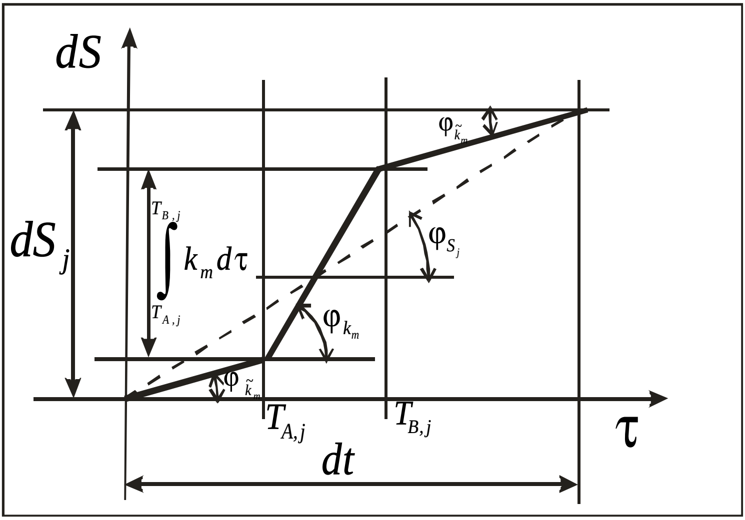

Рис.8. Приращение стоимости $\mathrm{dS_j}$ j-го базового продукта на m–ой технологической операцией

Будем полагать, что число базовых продуктов в партии есть величина постоянная, $N_p = const$. Как известно [11], умножение целевой функции на произвольную постоянную не отражается на уравнениях движения системы, и целевую функцию производственной системы можно представить в виде

$$J_{y0}(S_y, m_y) = \frac{1}{2} \cdot \left(m_y + F_{1y}(S_{yV})\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(m_y - a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} - a_{yC}(S_{yV}) \cdot k_{yC}(S_{yV}) \right)^2, \quad (72)$$

$$J_{y2}(\Delta S_y, s_y) = \frac{{s_y}^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} \right)^2 \cdot \left(\left(\frac{g_y\left(S_{yV}\right)}{\Delta t_{yOm}} \right)^2 + \left(\frac{h_{yV}\left(S_{yV}\right)}{k_{yV}(S_{yV})} \right)^2 \right) \quad (73)$$

с уравнениями Эйлера (8)

$$\frac{\partial J_0(S_y, m_y)}{\partial m_y} = m_y - a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} - a_{yC}(S_{yV}) \cdot k_{yC}(S_{yV})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial J_0(S_y, m_y)}{\partial m_y} = \frac{dm_y}{dt} - \frac{d}{dt} \left(a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} + a_{yC}(S_{yV}) \cdot k_{yC}(S_{yV}) \right) =$$

$$= \frac{dm_y}{dt} - m_y \cdot \frac{\partial}{\partial S_{yV}} \left(a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} + a_{yC}(S_{yV}) \cdot k_{yC}(S_{yV}) \right)$$

$$\frac{\partial J_0(S_y, m_y)}{\partial S_y} = \left(m_y - a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} - a_{yC}(S_{yV}) \cdot k_{yC}(S_{yV}) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial S_y} \left(-a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} - a_{yC}(S_{yV}) \cdot k_{yC}(S_{yV}) \right)$$

$$\frac{dm_y}{dt} = m_y \cdot \frac{\partial}{\partial S_{yV}} \left(a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} + a_{yC}(S_{yV}) \cdot k_{yC}(S_{yV}) \right) +$$

$$+ \left(m_y - a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} - a_{yC}(S_{yV}) \cdot k_{yC}(S_{yV}) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial S_y} \left(-a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} - a_{yC}(S_{yV}) \cdot k_{yC}(S_{yV}) \right) =$$

$$=$$

$$\left(-a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} - a_{yC}(S_{yV}) \cdot k_{yC}(S_{yV}) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial S_y} \left(-a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} - a_{yC}(S_{yV}) \cdot k_{yC}(S_{yV}) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial S_{yV}} \left(a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} + a_{yC}(S_{yV}) \cdot k_{yC}(S_{yV}) \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial S_{yV}} \left(F_{1y}(S_{yV}) \right)^2 \quad (74)$$

$$\frac{\partial J_2(\Delta S_y, s_y)}{\partial s_y} = s_y, \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial J_2(\Delta S_y, s_y)}{\partial s_y} = \frac{ds_y}{dt}, \qquad \frac{\partial J_2(\Delta S_y, s_y)}{\partial \Delta S_y} = 0$$

$$\frac{ds_y}{dt}=0, \qquad \frac{d(\Delta S_y)}{dt}=s_y=a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\cdot\sqrt{\left(\frac{g_y\left(S_{yV}\right)}{\Delta t_{yOm}}\right)^2+\left(\frac{h_{yV}\left(S_{yV}\right)}{k_{yV}(S_{yV})}\right)^2} \tag{75}$$

В теоретической механике целевую функцию, обеспечивающую равенство нулю вариации целевого функционала, называют функцией Лагранжа.

1.5. О выборе вида целевой функции производственной системы.

При исследовании поведения производственных систем мы исходили из вариационного принципа, полагая, что для каждой производственной системы существует целевой функционал

$$I=\int_0^{T_d} J(t,S_j(t),m_j(t))\cdot dt\ , \tag{6}$$

определяемый конкретным технологическим процессом, наличием оборудования с заданными характеристиками и т.д., который для движения базового продукта согласно заданного технологического процесса имеет минимум и вариация dI, следовательно, равна нулю

$$dI=d\int_0^{T_d} J(t,S_j(t),m_j(t))\cdot dt=0\ , \tag{7}$$

Из равенства нулю вариации dI следуют уравнения Эйлера, описывающие поведение j-го базового продукта в ходе процесса его технологической обработки

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial m_j}-\frac{\partial J}{\partial S_j}=0 \tag{8}$$

Рассмотрим построение целевой функции на примере исследования поведения центрального базового продукта при его движении вдоль технологической цепочки производственного процесса. В ходе производственного процесса состояние параметров, описывающих центральный базовый продукт, должно быть таким, чтобы они в каждый момент времени были достаточно близки к значениям, определяемым технологией производства базового продукта. Таким требованиям удовлетворяет целевая функция производственной системы вида

$$J_{y0}(S_{yV},m_y)=\frac{1}{n}\cdot\left(m_y-a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^n,\ n\text{-целое.} \qquad (76)$$

Подставим (76) в (8)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial J_{y0}(S_{yV},m_y)}{\partial m_y}=\frac{d}{dt}\left(m_y-a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^{n-1}=$$

$$=(n-1)\cdot\left(m_y-a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^{n-2}\left(\frac{dm_y}{dt}-\frac{d}{dt}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\right),$$

$$\frac{\partial J_{y0}(S_{yV},m_y)}{\partial S_{yV}}=$$

$$=-\left(m_y-a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^{n-1}\cdot\frac{\partial}{\partial S_{yV}}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right),$$

получим уравнение Эйлера

$$(n-1)\cdot\left(\frac{dm_y}{dt}-\frac{d}{dt}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\right)=$$

$$=-\left(m_y-a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial S_{yV}}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right). \qquad (77)$$

Используя равенство

$$\frac{d}{dt}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)+m_y\cdot\frac{\partial}{\partial S_{yV}}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right),$$

уравнение Эйлера (77) можно представить в ином виде

$$\frac{dm_y}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)+\frac{(n-2)}{(n-1)}\cdot m_y\cdot\frac{\partial}{\partial S_{yV}}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)$$

+

$$+\frac{1}{(n-1)}\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial S_{yV}}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right). \quad (78)$$

При $(n\le -1)$ целевая функция характеризует производственный процесс с максимально возможными отклонениями от параметров процесса по заданной технологии, что не представляет практический интерес. При n =0 целевая функция представляет собою постоянную величину с видом целевого функционала

$$I=\int_0^{T_d}\left(m_y-a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^0\cdot dt=\int_0^{T_d}dt=T_d-0=T_d. \quad (79)$$

Функционал вида (79) представляет собою частный случай задачи о быстродействии [стр.364, 6]. Как известно, целевая функция определена с точностью до прибавления к ней полной производной от произвольной функции координат и времени [стр.13, 6]. Таким образом, при $n=1$ целевой функционал можно записать как сумму двух слагаемых

$$I=\int_0^{T_d}\left(m_y-a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^1\cdot dt=$$

$$=\int_0^{T_d}\frac{dS_{yV}}{dt}\cdot dt-\int_0^{T_d}a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\cdot dt. \quad (80)$$

Первое слагаемое исчезает при варьировании целевого функционала и вид уравнения Эйлера при этом остается неизменным

$$\frac{\partial J}{\partial S_{yV}} = 0\,. \tag{81}$$

Уравнения Эйлера в виде (81) соответствует рассмотрению производственного процесса в статике.

При $n = 2$ целевая функция (76) приобретает известный нам вид

$$J_{y0}(S_y, m_y) = \frac{1}{2}\cdot\left(m_y - a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2 a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\,, \tag{72}$$

для случая рассмотрения функционирования производственной системы в пренебрежении условно-постоянными накладными расходами

$$a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV}) = 0. \tag{77}$$

с видом уравнения Эйлера

$$\frac{dm_y}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right) + \\ + \left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial S_{yV}}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right). \tag{82}$$

При $n = 3$ уравнение Эйлера можно записать как

$$\frac{dm_y}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right) + \\ + \frac{\left(m_y + a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial S_{yV}}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right). \tag{83}$$

Целевая функция производственной системы может быть представлена и в виде других функций, например абсолютного значения некоторой функции

$$J_{y0}(S_{yV}, m_y) = \left| m_y - a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right|. \tag{84}$$

Однако, неаналитичность подынтегральной функции приводит к трудоемким вычислениям и вынуждает отказаться от представления целевой функции в таком виде.

Выводы

С использованием вариационного принципа записана целевая функция для базового продуктов производственной системы. Определены слагаемые целевой функции, характеризующие технологическое поле оборудования и собственные свойства базового продукта. Записаны первые интегралы при движении базового продукта вдоль технологической цепочки. Определены свойства целевой функции для базовых продуктов производственной системы. Рассмотрен механизм выбора вида целевой функции производственной системы.

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1988. 512 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1982. 624 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1966. 300 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1982. 248 с.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.1 – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1973. 536 с.
6. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975. - 605 с.
7. Занг 3.В.-Б. Синергетическая экономика, под редакцией Германа Хакена –М.: Мир, 1999г., 335стр.
8. Прыткин Б.В. Технико-экономический анализ производства. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. -399с.
9. Летенко В.А., Родионов Б.Н. Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием. Часть 2, Внутризаводское планирование. -М.: Высшая школа, 1979. –232 с.
10. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции – Доповіді Національної академії наук України, 2005. –№7– С.66-71
11. Шананин А.А.. Обобщенная модель чистой отрасли производства. // Математическое моделирование, 1997, том 9, №9, с.117-127
12. Бессонов В.А., Иванилов И.П. Темповые производственные зависимости с ограниченным эффективным множеством – Доклады Академии наук СССР, 1989. том 309, –№5– С.1033-1036

13. Савицкая Г.В. Анализ хозяйственной деятельности предприятия. Мн: Новое знание, 2002. – 704 с.
14. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. Учеб. Пособие для втузов.- 2-е изд., - М.: Высш. шк., 2000. – 383 с.
15. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Учеб. Пособие для втузов.- 2-е изд., - М.: Высш. шк., 2000. – 480 с.
16. Демуцкий В.П., Пигнастый О.М., Синергетическая экономика производственного предприятия с массовых выпуском продукции. Международная конференция НАНУ «Статистическая физика: Общие проблемы и новые применения», Львов, 2005г., стр.59
17. Пигнастый О.М. Мікроскопічний метод автоматизованого опису соціально-економічних систем в АПК – Вестник ХНТУСГ, 2005. –N37, т.2 – С.191-196
18. Пигнастый О.М. Инженерно-производственная функция предприятия серийным или массовым выпуском продукции. Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: Сб. науч. тр. Нац. аэрокосмич. ун-та им.Н.Е. Жуковского «ХАИ». Вып.42(3). Харьков: НАКУ, 2005.–N42(3)–С.111-117
19. Демуцкий В.П., Пигнастый О.М., Ходусов В.Д., Азаренкова М.Н. Применение методов статистической физики для описания стационарного функционирования производственных систем – Вестник ХНУ, 2006. –N732– С.79-86
20. Новак С.Н., Пигнастый О.М. О вариационном и дифференциальном принципах построения функции Лагранжа производственной системы – Сборник научных трудов УАБС НБУ: Институт экономики НАН Украины, Академия экономических наук Украины, УАБС НБУ, 2006. –N17– С.120-130
21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Электродинамика. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1969. 271 с.
22. Демуцкий В.П., Пигнастый О.М. и др. Математичні моделі та інформаційні технології в сучасній економіці / Під редакцією д.е.н., проф. А.О.Єпіфанова. – Суми: УАБС НБУ, 2007. – 246 с.

2.РАСЧЕТ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ЦИКЛА ДЛЯ ПРЯМОТОЧНОЙ ЛИНИИ ПРЕДПРИЯТИЯ С СЕРИЙНЫМ И МАССОВЫМ ВЫПУСКОМ ПРОДУКЦИИ

Одним из основных календарно-плановых нормативов оперативного планирования производства является продолжительность производственного цикла изготовления базового продукта T_d [1, 161]. Нормативная продолжительность производственного цикла изготовления базового продукта T_d имеет вид [1, с.170]:

$$T_d = \sum_{m=1}^{N_m} \frac{\left(\frac{\Delta t_{y\,O\,m}}{c_m} + \Delta t_{y\,C\,m} \right)}{s_m \cdot q_m} \cdot K_{пар\ m} + \Delta t_{y\,ест\ m} \qquad (1)$$

где $\Delta t_{y\,O\,m}$ - среднее операционное время, $\Delta t_{y\,C\,m}$ - межоперационное время, c_m - число рабочих мест, параллельно занятых на выполнении операции, s_m - число рабочих смен в сутках, q_m -длительность рабочей смены, $K_{пар\ m}$ - коэффициент параллельности, $\Delta t_{y\,ест\ m}$ - время естественных процессов соответственно для $m-$ой технологической операции ($m=1,N_m$). Определение межоперационного времени базового продукта $\Delta t_{y\,C\,m}$ является наиболее сложным элементом в расчете длительности производственного цикла T_d и его часто устанавливают без должного обоснования [1, 170]. Как правило, нормативы среднего межоперационного времени базового продукта $\Delta t_{y\,C\,m}$ рассчитывается с учетом особенностей производственных участков и характера обрабатываемых продуктов. Для этого используется обработка обширных статистических наблюдений методом множественной корреляции. Наиболее точно длительность производственного цикла может быть установлена на основании планов-графиков работы производственных участков, представляющих собою расписание прохождения базового продукта вдоль технологической цепочки. При наличии таких графиков длительность производственного цикла T_d и его структура для каждой партии базовых продуктов устанавливается в органическом сочетании с процессами изготовления других партий, обрабатываемых на том же производственном участке с учетом пропускной способности рабочих мест [1, 171].

2.1.Применение целевой функции производственной системы для расчета продолжительности производственного цикла

В аналитическом виде движение базового продукта вдоль центральной технологической траектории может быть описано с помощью целевой функции производственной системы в нулевом приближении относительно отклонений технологических параметров производственного процесса от параметров, заданных центральной технологической траекторией:

$$J_{y0}(S_y, m_y) = \frac{1}{2} \cdot \left(m_y - a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} - a_{yC}(S_{yV}) \cdot k_{yC}(S_{yV}) \right)^2, \tag{2}$$

где S_y (грн) и $m_y = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S_y}{\Delta t}$ (грн/час) соответственно усредненная сумма общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенных производственной системой на центральный базовый продукт; $[c]_{1y}(S_{yV})$ (шт/час) - производительность технологического оборудования; $[c]_0(S_{yV})$ (шт/грн) – плотность межоперационных заделов; $k_{yC}(S_{yV})$ (грн/час) – средняя интенсивность переноса условно-постоянных затрат за среднее межоперационное время $\Delta t_{yC}(S_{yV})$, в течение которого базовый продукт находится в межоперационном заделе между $(m-1)-$ой и $m-$ой технологической операцией; $a_{yV}(S_{yV})$, $a_{yC}(S_{yV})$ коэффициенты пропорциональности между интенсивностью переноса затрат производственным оборудованием на элементы производственной системы и интенсивностью потребления затрат базовым продуктом при его обработке на $m-$ой технологической операции [2]. Каждая технологическая операция характеризуется средним использованием производственных ресурсов $\Delta S_y(S_{yV})$ (грн), необходимых для осуществления воздействия над базовым продуктом, и средней интенсивностью переноса данных ресурсов $k_y(S_{yV})$ (грн/час) производственным оборудованием на базовый продукт в соответствии с заданным технологическим процессом. Общая сумма средних затрат $\Delta S_y(S_{yV})$, перенесенных на базовый продукт на технологической операции с межоперационным заделом $N_y(S_{yV})$, может быть представлена в виде суммы условно-переменных $\Delta S_{yV}(S_{yV})$ и условно-постоянных $\Delta S_{yC}(S_{yV})$ затрат [3, с.364]:

$$\Delta S_y\,(S_{yV}) = \Delta S_{yV}\,(S_{yV}) + \Delta S_{yC}\,(S_{yV})\ . \qquad (3)$$

Таким образом, технология производства представлена в виде центральной технологической траектории $S_y = S_y\,(t)$, определяющей среднюю величину и последовательность переноса ресурсов производственной системы на базовый продукт при его движении в технологическом пространстве (S,m):

$$S_{y\ m} = \sum_{k=1}^{m} \Delta S_{y\ k} = \sum_{k=1}^{m} \left(a_{y\,V\,m} \cdot k_{y\,V\,m} \cdot \Delta t_{y\,O\,m} + a_{y\,C\,m} \cdot k_{y\,C\,m} \cdot \Delta t_{y\,C\,m} \right) \qquad (4)$$

Целевая функция производственной системы (2) соответствует минимуму целевого функционала

$$I = \int_0^{T_d} J(t, S_j(t), m_j(t)) \cdot dt\ , \qquad (5)$$

определяемому заданным технологическим процессом (4), в ходе которого производственные ресурсы передаются от технологического оборудования к базовым продуктам с минимальными потерями.

Соответствующее целевой функции (2) уравнение Эйлера интегрируется в общем виде. При этом нет даже необходимости выписывать само уравнение Эйлера, а следует исходить сразу из его интеграла движения

$$H_{y0} = m_y \cdot \frac{\partial J_{y0}(,S_y,m_y)}{\partial m_y} - J_{y0}(,S_y,m_y) = \frac{1}{2}\cdot m_y^{\ 2} \quad -\frac{1}{2}\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0} + a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV}) \right)^2 \qquad (6)$$

Целевая функция (2) определена с точностью до константы. Если, например, в качестве константы принять максимальное значение $C_1 = Max\left[\frac{1}{2}\cdot m_y^{\ 2}\right]$ вдоль технологической цепочки, то равенство (6) приобретет вид

$$H_{y0\_C} = \frac{1}{2}\cdot m_y^{\ 2} + \Pi(S_{yV}) \qquad (7)$$

$$\Pi(S_{yV}) = C_1 - \frac{1}{2}\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0} + a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV}) \right)^2 > 0,$$

$$H_{y\,0\,\_C} = H_{y0} + Max\left[\frac{1}{2}\cdot m_y^{\ 2}\right] \qquad (8)$$

аналогичный закону сохранения энергии заряженной частицы при ее движении в электромагнитном поле с функцией Лагранжа

$J_{y0\_C}(S_y,m_y) = J_{y0}(S_y,m_y) - C_1 =$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(m_y - a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0} - a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\right)^2 - C_1 = \frac{1}{2}\cdot m_y^{\ 2} + m_y\cdot A_0 - \Pi(S_{yV}), \quad (9)$$

$$A_0 = \left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0} + a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\right) \quad (10)$$

Интеграл движения (6) есть дифференциальное уравнение первого порядка. Интегрируя его путем разделения переменных, имеем

$$m_y = \frac{dS_y}{dt} = \sqrt{2\cdot\left(H_{y0} + \frac{1}{2}\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0} + a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\right)^2\right)} \quad (11)$$

откуда

$$dt = \frac{dS_y}{\sqrt{2\cdot\left(H_{y0} + \frac{1}{2}\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0} + a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\right)^2\right)}} \quad (12)$$

Производя интегрирование вдоль всей технологической цепочки производственного процесса базового продукта, находим длительность производственного цикла T_d

$$T_d = \int_0^{T_d} dt = \int_0^{S_d} \frac{dS_y}{\sqrt{2\cdot\left(H_{y0} + \frac{1}{2}\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0} + a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\right)^2\right)}} \quad (13)$$

Рассматривая случай, при котором производственные ресурсы передаются от технологического оборудования к базовым продуктам без потерь, положим H_{y0}=0. Последнее дает приближенное выражение для длительности производственного цикла T_d и средней скорости потребления затрат m_y

$$T_d = \int_0^{S_d} \frac{dS_y}{\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0} + a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\right)} \quad (14)$$

$$m_y = \frac{dS_{yV}}{dt} = \left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0} + a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\right) \quad (15)$$

Для большинства производственных систем с массовым выпуском продукции условно-постоянные затраты значительно меньше условно-переменных, откуда следует выражение

$$T_d \approx \int_0^{S_d} \frac{dS_y}{a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}}, \qquad m_y \approx a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0} \tag{16}$$

Заменив процедуру интегрирования суммированием и используя выражение для плотности межоперационных заделов

$$\left[c\right]_{0\ m} = \frac{N_{y\ m}}{\Delta S_{y\ m}} \tag{17}$$

получаем

$$T_d \approx \sum_{m=1}^{M} \frac{\Delta S_{y\ m}}{a_{yVm} \cdot \frac{\left[c\right]_{1y\ m}}{\left[c\right]_{0\ m}}} \approx \sum_{m=1}^{M} \frac{N_{y\ m}}{a_{yVm} \cdot \left[c\right]_{1y\ m}} \tag{18}$$

Производительность технологического оборудования $\left[c\right]_{1y}(S_{yV})$ обратно пропорционально среднему операционному времени $\Delta t_{y\,O\,m}$

$$\left[c\right]_{1y}(S_{yV}) = \frac{c_m}{\Delta t_{y\,O\,m}} \tag{19}$$

Для центральной технологической траектории в случае серийного или массового производства справедливо соотношение

$$\left(\frac{\Delta t_{y\,O\,m}}{c_m} + \Delta t_{y\,C\,m} \right) = \mathrm{N}_{y\ m} \cdot \frac{\Delta t_{y\,O\,m}}{c_m} \tag{20}$$

Подставляя (19) и (20) в (18), получаем привычный вид для расчета длительности производственного цикла T_d технологического процесса в пренебрежении временем естественных процессов $\Delta t_{y\,ecm\,m}$

$$T_d \approx \sum_{m=1}^{M} \frac{\frac{\Delta t_{yOm}}{c_m} + \Delta t_{y\,C\,m}}{a_{yVm}} \approx \sum_{m=1}^{N_m} \frac{\left(\frac{\Delta t_{y\,O\,m}}{c_m} + \Delta t_{y\,C\,m} \right)}{s_m \cdot q_m} \cdot K_{nap\ m} \tag{21}$$

Коэффициент пропорциональности $a_{y\,V\,m}$ несет следующий технологический смысл

$$a_{y\,V\,m} = \frac{s_m \cdot q_m}{K_{nap\ m}} \tag{22}$$

2.2.Условия стационарности технологического процесса.

Для технологического процесса с серийным или массовым выпуском продукции количество базовых продуктов, находящихся в межоперационном заделе, много больше единицы, $\mathrm{N}_{y\ m} >> 1$, откуда из (20) вытекает соотношение

$$\left(1+\frac{\Delta t_{y\,C\,m}}{\left(\frac{\Delta t_{y\,O\,m}}{c_m}\right)}\right)=\mathrm{N}_{y\ m}\,, \qquad \frac{\Delta t_{y\,C\,m}}{\Delta t_{y\,O\,m}} \approx \frac{\mathrm{N}_{y\ m}}{c_m} >> 1 \tag{23}$$

Таким образом, длительность производственного цикла T_d (21) технологического процесса с серийным или массовым выпуском продукции определяется межоперационным временем $\Delta t_{y\,C\,m}$ пребывания базового продукта на $m-$ой технологической операции ($m=1,N_m$). Как уже подчеркивалось ранее, межоперационное время пребывания базового продукта на $m-$ой технологической операции $\Delta t_{y\,C\,m}$ является наиболее сложным элементом в расчете длительности производственного цикла T_d, часто устанавливается без должного обоснования [1,170], связано с количеством базовых продуктов, находящихся в межоперационном заделе, приближенным соотношением (20). Изменение количества базовых продуктов, находящихся в межоперационном заделе, может быть представлено через производительность работы технологического оборудования

$$\frac{d\mathrm{N}_{y\ m}(t)}{dt}=\left[c\right]_{1y\ (m-1)}\cdot d_{(m-1)}(t,t_{1\ (m-1)},t_{2\ (m-1)})-\left[c\right]_{1y\ m}\cdot d_m(t,t_{1\ m},t_{2\ m})\,, \quad m=1,N_m\,, \tag{24}$$

$$\left[c\right]_{1y\ m}=\frac{c_m}{\Delta t_{y\,O\,m}}\,, \qquad (0\le t_{1\ m}<t_{2\ m}\le T_d)$$

с начальными условиями для количества базовых продуктов, находящихся в межоперационном заделе

$$\mathrm{N}_{y\ m}(0)=\mathrm{N}_{y\ m0}\,, \qquad m=1,N_m \tag{25}$$

Функция $d_m(t,t_{1\,m},t_{2\,m})$ определяет членение периода производственного цикла T_d на фазы [1, с.206] с временами начала $t_{1\,m}$ и окончания $t_{2\,m}$ технологической обработки базового продукта на $m-$ой технологической операции:

$$d_m(t,t_{1\,m},t_{2\,m})=1 \quad \text{при} \quad t_{1\,m}\le t\le t_{2\,m} \tag{26}$$

$$d_m(t,t_{1\,m},t_{2\,m})=0 \quad \text{при} \quad 0\le t<t_{1\,m} \quad \text{или} \quad t_{2\,m}<t\le T_d$$

Добавив систему уравнений (24) с начальными условиями (25) к выражению для определения длительности производственного цикла T_d (18), получаем полную систему уравнений расчета длительности производственного цикла T_d

$$T_d \approx \sum_{m=1}^{M}\frac{N_{y\,m}}{a_{yV\,m}\cdot[c]_{1y\,m}}, \qquad m=1,N_m, \qquad \mathrm{N}_{y\,m}(0)=\mathrm{N}_{y\,m0}, \tag{27}$$

$$\frac{d\mathrm{N}_{y\,m}(t)}{dt}=[c]_{1y\,(m-1)}\cdot d_{(m-1)}(t,t_{1\,(m-1)},t_{2\,(m-1)})-[c]_{1y\,m}\cdot d_m(t,t_{1\,m},t_{2\,m}).$$

Система уравнений (27) дает условия стационарности производственного процесса

$$\frac{d\mathrm{N}_{y\,m}(t)}{dt}=[c]_{1y\,(m-1)}\cdot d_{(m-1)}(t,t_{1\,(m-1)},t_{2\,(m-1)})-[c]_{1y\,m}\cdot d_m(t,t_{1\,m},t_{2\,m})=0, \tag{28}$$

которые могут быть выражены в виде равенств

$$\mathrm{N}_{y\,m}(t)=\mathrm{N}_{y\,m0}=const \tag{29}$$

или используя свойства (26) функции $d_m(t,t_{1\,m},t_{2\,m})$

$$[c]_{1y\,(m-1)}=[c]_{1y\,m} \tag{30}$$

Используя (19) $[c]_{1y}(S_{yV})=\dfrac{c_m}{\Delta t_{y\,O\,m}}$, условие стационарности (или синхронизации) можно записать в более привычном для управления производством виде [1, с.192, формула (XXXIV-5)]

$$\frac{\Delta t_{y\,O\,1}}{c_1}=\frac{\Delta t_{y\,O\,2}}{c_2}=\frac{\Delta t_{y\,O\,3}}{c_3}=\ldots=\frac{\Delta t_{y\,O\,m}}{c_m}=\ldots=\frac{\Delta t_{y\,O\,N_m}}{c_{N_m}} \tag{31}$$

Условие стационарности (31) используется для расчета работы поточных технологических линий. Для того, чтобы работа поточной линии осуществлялась бесперебойно в заданном темпе, необходимо насыщение всех стадий производственного процесса заделами, уровень которых должен быть строго регламентирован. Постоянное значение операционных заделов (29) в течение всего производственного цикла позволяет без особых трудностей определить длительность производственного цикла T_d :

$$T_d \approx \sum_{m=1}^{M} \frac{\mathrm{N}_{y\ m0}}{a_{yV\,m} \cdot [c]_{1y\ m}}, \qquad m = 1, N_m . \tag{32}$$

Величина межоперационных заделов $\mathrm{N}_{y\ m0}$ определяется ограничениями, связанными с особенностями технологического процесса, размерами транспортных партий, страховыми заделами и т.д..

Условие стационарности (31) в общем случае построения технологического процесса производственных систем трудно реализуемо. На практике используется методика членения периода производственного цикла T_d на фазы [1, с.206]. Величина межоперационных заделов $\mathrm{N}_{y\ m}(t)$ представляется в виде периодичной функции с периодом колебания T_d. Полная система уравнений для расчета длительности производственного цикла T_d представляется в виде

$$T_d \approx \sum_{m=1}^{M} \frac{N_{y\ m}}{a_{yV\,m} \cdot [c]_{1y\ m}}, \qquad m = 1, N_m, \qquad \mathrm{N}_{y\ m}(0) = \mathrm{N}_{y\ m0}, \tag{33}$$

$$\int_0^{T_d} \frac{d\mathrm{N}_{y\ m}(t)}{dt} dt \approx \int_0^{T_d} \Big([c]_{1y\ (m-1)} \cdot d_{(m-1)}(t, t_{1\ (m-1)}, t_{2\ (m-1)}) - [c]_{1y\ m} \cdot d_m(t, t_{1\ m}, t_{2\ m}) \Big) dt \approx 0 .$$

Система уравнений (33) дает условия квазистационарности производственного процесса

$$\int_0^{T_d} \Big([c]_{1y\ (m-1)} \cdot d_{(m-1)}(t, t_{1\ (m-1)}, t_{2\ (m-1)}) - [c]_{1y\ m} \cdot d_m(t, t_{1\ m}, t_{2\ m}) \Big) dt \approx 0 \tag{34}$$

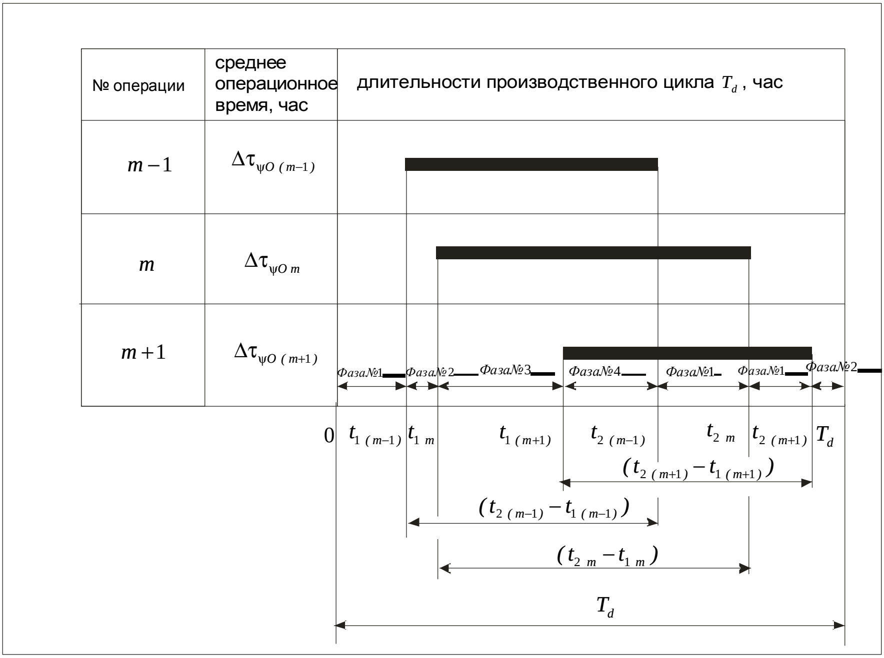

Рис.1. Разделение производственного цикла на фазы при расчете межоперационных заделов базовых продуктов

Произведя интегрирование по периоду производственного цикла T_d, и учитывая, что характеристики работы производственного оборудования $[c]_{1y\ (m-1)}$ и $[c]_{1y\ m}$ за период производственного цикла не меняются со временем, получаем условия квазистационарности производственного процесса (условия синхронизации производственного процесса).

$$[c]_{1y\ (m-1)} \cdot (t_{2\ (m-1)} - t_{1\ (m-1)}) - [c]_{1y\ m} \cdot (t_{2\ m} - t_{1\ m}) \approx 0 \qquad (35)$$

$$[c]_{1y\ (m-1)} \cdot (t_{2\ (m-1)} - t_{1\ (m-1)}) \approx [c]_{1y\ m} \cdot (t_{2\ m} - t_{1\ m}) \quad \text{или} \quad \frac{t_{2\ (m-1)} - t_{1\ (m-1)}}{[c]_{1y\ m}} \approx \frac{t_{2\ m} - t_{1\ m}}{[c]_{1y\ (m-1)}} \qquad (36)$$

Условия (36) можно с учетом (19) $[c]_{1y\ m}) = \dfrac{c_m}{\Delta t_{y\ O\ m}}$ выразить через основное операционное время

$$\frac{(t_{2\,(m-1)}-t_{1\,(m-1)})\cdot c_{(m-1)}}{\Delta t_{yO\,(m-1)}}\approx\frac{(t_{2\,m}-t_{1\,m})\cdot c_m}{\Delta t_{yO\,m}} \tag{37}$$

Расчет изменений межоперационного задела за период производственного цикла T_d по фазам может быть представлен в привычном для управления производством виде [1, с.206, формула (XXXIV-11)]

$$\mathrm{N}_{y\,m}(T_d)-\mathrm{N}_{y\,m}(0)\approx\frac{(t_{2\,(m-1)}-t_{1\,(m-1)})\cdot c_{(m-1)}}{\Delta t_{yO\,(m-1)}}-\frac{(t_{2\,m}-t_{1\,m})\cdot c_m}{\Delta t_{yO\,m}} \tag{38}$$

2.3.Определение длительности производственного цикла в случае нестационарного значения величины межоперационных заделов технологической цепочки производственного процесса.

Для определения длительности производственного цикла T_d воспользуемся выражением для целевой функции (2). Целевому функционалу (5) с целевой функцией (2) соответствует уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial m_y}\left(m_y-a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}-a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\right)^2=$$

$$=\frac{\partial}{\partial S_{yV}}\left(m_y-a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}-a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\right)^2 \tag{39}$$

Продифференцировав обе части, можно записать

$$\frac{d}{dt}\left(m_y-a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}-a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\right)=$$

$$=\left(m_y-a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}-a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\right)\frac{\partial}{\partial S_{yV}}\left(m_y-a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}-a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\right) \tag{40}$$

Так как воздействие производственного поля (работа оборудования, обслуживающего персонала и т.д.) на партию из N_p базовых продуктов не зависит от состояния конкретного базового продукта партии

$$\partial J(t,S_j,m_j)\big/\partial S_j=0, \qquad \sum_{j=1}^{N_p}\partial J(t,S_j,m_j)\big/\partial S_j=0 \tag{41}$$

где введенные усредненные величины определены как

$$m_y=\frac{1}{N_p}\sum_{j=1}^{N_p}m_j\,,\quad S_{yV}=\frac{1}{N_p}\sum_{j=1}^{N_p}S_j\,,\qquad m_j=m_y+\Delta m_j\,,\quad S_j=S_{yV}+\Delta S_j\,, \tag{42}$$

то производственная система, описываемая целевой функцией (2), в нулевом приближении допускает N_p интегралов движения

$$\partial J(t,S_j,m_j)\big/\partial m_j=m_j-a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}-a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})=P_j\,, \tag{43}$$

соответствующих N_p циклическим координатам S_j. Из идентичности базовых продуктов следует $P_j=P$. Производя суммирование по количеству базовых продуктов в партии и учитывая, что производственные ресурсы передаются от технологического оборудования к базовым продуктам без потерь (то есть $P=0$), выражение (43) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{N_p}\partial J(t,S_j,m_j)\big/\partial S_j=\sum_{j=1}^{N_p}\partial J(t,S_{yV},m_{yV})\big/\partial S_{yV}=$$

$$=\sum_{j=1}^{N_p}\left(m_j-a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}-a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\right)=\sum_{j=1}^{N_p}P_j=0. \tag{44}$$

Откуда с учетом обозначений (42) следует

$$m_y-a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}-a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})=0. \tag{45}$$

С учетом (45) уравнение Эйлера (40) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(m_y-a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}-a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})\right)=0. \tag{46}$$

или

$$m_y-a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}-a_{yC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV})=const=0 \tag{47}$$

Последнее дает приближенное выражение для длительности производственного цикла T_d и средней скорости потребления затрат m_y, аналогичное выражению (14)

$$T_d = \int_0^{S_d} \frac{dS_{yV}}{\left(a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} + a_{yC}(S_{yV}) \cdot k_{yC}(S_{yV}) \right)}. \quad (48)$$

Как говорилось ранее, для большинства производственных систем с массовым выпуском продукции условно-постоянные затраты значительно меньше условно-переменных. Принимая это во внимание и дополняя равенство (48) выражением для плотности межоперационных заделов

$$T_d \approx \int_0^{S_d} \frac{dS_{yV}}{a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0}}$$

$$\frac{\partial [c]_0}{\partial t} = -\frac{\partial [c]_{1y}}{\partial S_{yV}} d_y(t, S_{yV}, t_1(S_{yV}), t_2(S_{yV})) = \frac{\partial \Theta(t, S_{yV})}{\partial t} \quad (49)$$

получаем систему уравнений для нестационарного состояния межоперационных заделов вдоль технологической цепочки производственного процесса.

Произведение $\frac{\partial [c]_{1y}}{\partial S_{yV}} \cdot d_y(t, S_{yV}, t_1(S_{yV}), t_2(S_{yV}))$ есть наперед заданная табличная функция от времени t и координаты S_{yV}, определяющая последовательность работы оборудования. Произведя интегрирование выражения (49), получаем

$$[c]_0(t, S_{yV}) = \Theta(t, S_{yV}) - \Theta(0, S_{yV}) = [c]_0(0, S_{yV}) + \Theta(t, S_{yV}) \quad (50)$$

Подставляя (50) в выражение (49), получим

$$T_d \approx \int_0^{S_d} \frac{dS_{yV}}{a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0(0, S_{yV}) + \Theta(t, S_{yV})}} \approx \int_0^{S_d} \frac{[c]_0(0, S_{yV}) + \Theta(t, S_{yV})}{a_{yV}(S_{yV}) \cdot [c]_{1y}} dS_{yV} \approx$$

$$\approx \int_0^{S_d} \frac{[c]_0(0, S_{yV})}{a_{yV}(S_{yV}) \cdot [c]_{1y}} dS_{yV} + \int_0^{S_d} \frac{\Theta(t, S_{yV})}{a_{yV}(S_{yV}) \cdot [c]_{1y}} dS_{yV} \quad (51)$$

Выражение для определения длительности производственного цикла T_d содержит два слагаемых. Первое слагаемое соответствует длительности производственного цикла при условии сохранения неизменным первоначального состояния межоперационных заделов

(32), второе слагаемое представляет собою поправку к длительности производственного цикла T_d за счет наличия нестационарного состояния межоперационных заделов вдоль технологической цепочки.

Выводы

С использованием выражения для целевой функции для партии базовых продуктов производственной системы записано выражение для расчета длительности производственного цикла T_d. Получены формула для расчета длительности производственного цикла T_d, отвечающая стационарному состоянию межоперационных заделов базовых продуктов, и поправка к длительности производственного цикла T_d, возникающая при наличии нестационарного состояния межоперационных заделов вдоль технологической цепочки. Используя вариационный принцип, записаны аналитические выражения для расчета длительности производственного цикла T_d, соответствующие выражениям, используемым на практике. Определена в аналитическом виде формула для расчета длительности производственного цикла T_d для нестационарного случая состояния межоперационных заделов базовых продуктов.

1. Летенко В.А., Родионов Б.Н. Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием. Часть 2, Внутризаводское планирование. - М.: Высшая школа, 1979. – 232 с.
2. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции – Доповіді Національної академії наук України, 2005. –№7– С.66-71
3. Савицкая Г.В. Анализ хозяйственной деятельности предприятия. Мн: Новое знание, 2002. – 704 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1988. 512 с.
5. Новак С.Н., Пигнастый О.М. О вариационном и дифференциальном принципах построения функции Лагранжа производственной системы – Сборник научных трудов УАБС НБУ: Институт экономики НАН Украины, Академия экономических наук Украины, УАБС НБУ, 2006. –N17– С.120-130
6. Михайленко В.Г., Дидиченко Н.П., Дубровин А.А., Ходусов В.Д., Демуцкий В.П., Пигнастый О.М. Особенности моделирования технологических процессов производственных систем – Вестник ХНУ (экономическая серия), 2006. –N719– С.267-276

7. Пигнастый О.М. Об особенностях построения моделей, описывающих функционирование производственных систем авиационно-космической промышленности, Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: Сб. науч. тр. Нац. аэрокосмич. ун-та им.Н.Е. Жуковского «ХАИ». Вып.43(4). Харьков: НАКУ, 2005.–N43(4)–С.120-136
8. Демуцкий В.П., Пигнастый О.М., Ходусов В.Д., Азаренкова М.Н. Использование методов статистической физики для исследования экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции – Вестник ХНУ (физическая серия), 2005. –N710– С.128-134
9. Пигнастый О.М. Мікроскопічний метод автоматизованого опису соціально-єкономічних систем в АПК – Вестник ХНТУСГ, 2005. –N37, т.2 – С.191-196
10. Пигнастый О.М. Инженерно-производственная функция предприятия серийным или массовым выпуском продукции. Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: Сб. науч. тр. Нац. аэрокосмич. ун-та им.Н.Е. Жуковского «ХАИ». Вып.42(3). Харьков: НАКУ, 2005.–N42(3)–С.111-117
11. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции – Доповіді Національної академії наук України, 2005. –N7– С.66-71
12. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок. – Харьков, 2003. – 272 с.

ЧАСТЬ 3.
МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

1.СТАХОСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ С МАССОВЫМ ВЫПУСКОМ ПРОДУКЦИИ

Построена математическая модель экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции. Состояние производственной системы в любой момент времени задается точкой в двумерном фазовом пространстве. Введена функция распределения для базового продукта и для нее записано уравнение, являющееся аналогом кинетического уравнения в физике. Определены инженерно-производственная и генераторная функции. В нулевом приближении записана замкнутая система уравнений для моментов функции распределения.

В современных рыночных условиях хозяйствования предприятие, как сложная социально-экономическая система, находится в процессе постоянных внутренних и внешних изменений. С одной стороны, предприятие вынуждено приспосабливаться к постоянно изменяющимся процессам внешних условий хозяйствования, с другой стороны, не менее важным источником изменений служат процессы самоорганизации и усложнения факторов внутренней среды предприятия. В ходе постоянного развития внешней среды меняются рынки сбыта, товарный ассортимент, технология и способы производства, что требует постоянного совершенствования организационно-экономического механизма управления предприятием, более полного использования внутренних резервов повышения хозяйствования. Течение процесса внутриорганизационных изменений не является хаотичным и непредсказуемым, а подчиняется действию комплекса социальных, экономических, организационных законов и закономерностей. В этих условиях основу процесса развития предприятия составляет разработка соответствующей модели стратегии, реализацию которой можно рассматривать как трансформационный процесс. Результирующие стратегии призваны стабилизировать движение предприятия в рассматриваемом внешнем окружающем пространстве в выбранном направлении. Сам же процесс формирования стратегии часто сводится к разработке модели планирования возникновения изменений факторов внешней и внутренней среды, а также модели оптимального управления ими. Моделирование сложных экономических систем является эффективным методом их исследования [1]. Один из распространенных классов образуют системы, в которых детерминированный характер наблюдаемых процессов сочетается с их стохастической природой.

Закономерности, присущие равновесным состояниям в системах экономического обмена, во многом аналогичны тем, которые имеют место в физических (термодинамических) системах. Они оказались столь глубокими и полезными, что провозглашены для термодинамических систем и систем экономического обмена в качестве неких общих принципов: Ле Шателье-Самуэльсона, Карно-Хикса и др. [2]. На основании данных принципов функционирование современного массового производства может быть представлено в виде стохастического процесса, в ходе которого производственная система переходит из одного состояния в другое [3]. Состояние системы можно определить как состояние общего числа N базовых продуктов производственной системы. Под базовым продуктом (или предметом труда) будем понимать элемент производственной системы, на который происходит перенос стоимости живого труда, сырья, материалов и орудий труда в ходе его движения по операционной цепочке технологических карт. В ходе такого движения происходит превращение исходного сырья и материалов в готовый продукт путем целенаправленного воздействия общественно-полезного труда. Поведение базового продукта подчиняется определенным законам в соответствии с установленным на предприятии технологическим процессом, производственным планом, наличием трудовых ресурсов и оборудования. Состояние базового продукта будем описывать микроскопическими величинами $\left(\mathrm{S_j}, m_j\right)$, где $\mathrm{S_j}$ (грн) и $m_j = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S_j}{\Delta t}$ (грн/час) соответственно сумма общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенных производственной системой на j-й базовый продукт, $0 < j \le N$. Состояние системы в некоторый момент времени будет определено, если определены микроскопические величины $\left(\mathrm{S_1}, m_1; \ldots\ldots \mathrm{S_N}, m_N\right)$ и целевая функция производственной системы $J\left(\mathrm{t}, \mathrm{S_j}, m_j\right)$ (2.1.1.45), а в любой другой момент времени найдено из уравнений состояния базовых продуктов (2.1.1.8):

$$\frac{dS_j}{dt} = m_j, \qquad \frac{\partial J}{\partial S_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial m_j} = 0 \qquad (1)$$

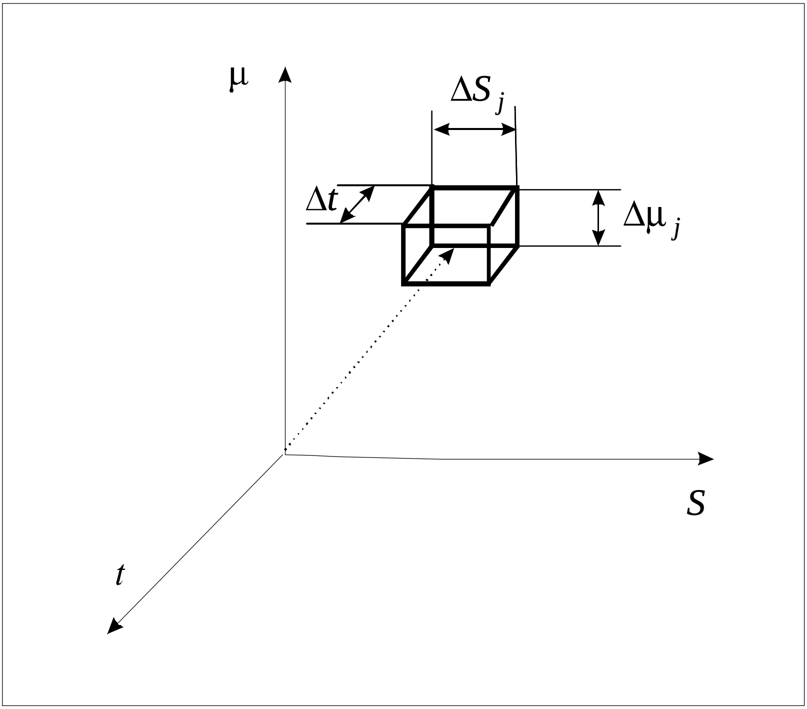

Рис.1. Элементарная ячейка фазового пространства

Однако, если количество базовых продуктов N много больше единицы, то решить систему (1) из $2 \cdot N$-уравнений практически невозможно. Последнее уточнение требует перехода от микроскопического описания производственной системы к макроскопическому с элементами вероятностной природы. Основная трудность в таком описании состоит в том, чтобы выделить характеристики микросостояний базовых продуктов, которые можно было бы измерить на уровне состояния предприятия. Вместо того, чтобы рассматривать состояние производственной системы с микровеличинами $\left(\mathrm{S}_1, m_1; \ldots\ldots \mathrm{S}_\mathrm{N}, m_N\right)$, введем соответствующим образом нормированную дискретную функцию распределения числа N базовых продуктов в фазовом пространстве $\left(\mathrm{S}, m\right)$. Каждая точка в данном пространстве будет задавать состояние базового продукта. Разумно ожидать, что при больших N эту функцию будет хорошо аппроксимировать непрерывная функция распределения базовых продуктов $c(t, S, m)$.

Если производственная система состоит из нескольких видов базовых продуктов, то для описания системы потребуется получить функцию распределения для каждого вида базовых продуктов. Разобьем фазовое пространство на такое число ячеек, чтобы размеры ячейки $\Delta\Omega = \Delta \mathrm{S} \cdot \Delta m$ были много меньше характерных размеров производственной системы и в то же время содержали внутри себя большое число базовых продуктов. Вместо того, чтобы фиксировать точные значения микроскопических величин базового продукта, будем приближенно характеризовать состояние производственной системы числом базовых продуктов в каждой ячейке $\Delta\Omega$. Если размеры ячейки достаточно малы, то приближенное описание будет нести в себе почти столь же подробную информацию, что и точное. Таким образом, мы приходим к необходимости наряду с основным пределом при $N \to \infty$, рассматривать и предельный случай при стремящихся к нулю размерах ячейки. В силу того, что величина $c(t,S,m)\cdot d\Omega$ представляет собой число базовых продуктов в бесконечно малой ячейке $\Delta\Omega$ фазового пространства (S,m), мы можем по изменению фазовой координаты S и фазовой скорости m базового продукта со временем судить и об изменении самой функции $c(t,S,m)$ [4]:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S}\cdot m + \frac{\partial c}{\partial m}\cdot f(t,S) = \mathrm{J}_{\mathrm{Gen}}(t,S,m), \tag{2}$$

где $f_j(t,S)$ - инженерно-производственная функция, характеризующая технологический процесс изготовления продукции в соответствии с производственным планом, наличием трудовых ресурсов и оборудования предприятия. Скорость изменения затрат m базового продукта и функция $f(t,S)$ может быть найдена из системы уравнений состояния базового продукта (1):

$$\frac{dS}{dt} = m; \qquad \frac{dm}{dt} = f(t,S), \tag{3}$$

а генераторная функция $\mathrm{J}_{\mathrm{Gen}}(t,S,m)$ определяется плотностью оборудования вдоль технологической цепочки и его техническими характеристиками [4]. Функция $\mathrm{J}_{\mathrm{Gen}}(t,S,m)$ при $t \to \infty$ стремится свести начальное распределение базовых продуктов по скоростям изменения затрат к состоянию с равновесной функцией распределения в соответствии с технологическим процессом. Будем считать функцию $c(t,S,m)$ нормированной

$$\int_0^\infty dS \cdot \int_0^\infty dm \cdot c\left(t, S, m\right) = N \ . \qquad (4)$$

Условие нормировки (4) представляет собой закон сохранения количества базовых продуктов, находящихся в производственном процессе. Инженерно-производственная функция $f(t,S)$ определяется из документооборота предприятия: таблиц норм расходов сырья (материалов), нормативных цен на сырье (материалы), сменных норм и расценок за выполнение работником технологических операций. Предствив из документооборота стоимость затрат $\Delta S_{y\ m}$ (2.1.1.1), потребляемых в ходе $m-$ой технологической операции с межоперационным заделом базовых продуктов $N_{y\ m}$, и время выполнения технологической операции

$$\Delta t_m = \Delta t_{y\,O\,m} + \Delta t_{y\,C\,m} = \mathrm{N}_{y\ m} \cdot \Delta t_{y\,O\,m} \, , \qquad (2.1.1.5)$$

можно в табличном виде получить зависимость для скорости изменения затрат $m_m = m(t_m)$ базового продукта при его движении вдоль технологической цепочки производственного процесса. Предел отношения $\lim\limits_{\Delta t_m \to 0} \dfrac{\Delta m_m}{\Delta t_m} = f(t,S)$ определим как инженерно-производственную функцию технологического процесса предприятия. По смыслу инженерно-производственная функция представляет собой некий аналог силы, перемещающий базовый продукт вдоль технологической цепочки производственного процесса. При таком перемещении на базовый продукт оказывается воздействие со стороны орудий труда (оборудования). Таким образом происходит увеличение затрат, перенесенных на базовый продукт при его движении вдоль технологической цепочки производственного процесса. Оборудование воздействует на базовый продукт, изменяя его качественно и количественно. Мы можем говорить только о вероятности того, что после воздействия со стороны технологического оборудования базовый продукт будет находиться в том или ином состоянии. Процесс воздействия со стороны технологического оборудования на базовый продукт будем обозначать $\left[m \to m'\right]$, где m и m' - соответственно скорости изменения затрат, которые несет базовый продукт до и после воздействия. Полное же количество базовых продуктов, находящихся в единице объема технологического фазового пространства, испытавших в единицу времени воздействие со стороны технологического оборудования, можно написать в виде произведения потока базовых продуктов $c(t,S,m)\cdot m$ на вероятность для каждого из них испытать воздействие $[m \to \tilde{m}]$ в некотором малом элементе $d\Omega$ технологического фазового пространства (S,m). Что касается вероятности испытания воздействия $[m \to \tilde{m}]$, то о ней можно, по крайней мере, утверждать, что она пропорциональна плотности расположения оборудования $l_{оборуд}$ вдоль технологической цепочки. Таким образом, число базовых продуктов, испытавших в единицу времени воздействие со стороны технологического оборудования и принявшие значения в пределах $(\tilde{m};\tilde{m}+d\tilde{m})$, можно написать в виде

$$y\,[m \to \tilde{m}]\cdot l_{оборуд}\cdot m\cdot c(t,S,m)\cdot d\tilde{m}\cdot d\mathrm{S}\cdot dm\,, \qquad (5)$$

где $y\,[m \to \tilde{m}]$ - функция, определяемая паспортными данными работы технологического оборудования. Некоторые свойства этой функции могут быть получены из весьма общих соображений, если представить, что полная вероятность перехода в любое состояние равна единице:

$$\int_0^\infty y\,[m \to \tilde{m}]\cdot d\tilde{m} = 1\,. \qquad (6)$$

Наряду с этим в элемент объема $d\mathrm{S}\cdot dm$ поступают базовые продукты с объема $d\mathrm{S}\cdot d\tilde{m}$ посредством обратного перехода $y\,[\tilde{m} \to m]$ в количестве:

$$y\,[\tilde{m} \to m]\cdot l_{оборуд}\cdot \tilde{m}\cdot c(t,S,\tilde{m})\cdot d\tilde{m}\cdot d\mathrm{S}\cdot dm\,, \qquad (7)$$

а общее число базовых продуктов в элементе объема $d\Omega$ изменяется в единицу времени на величину:

$$d\Omega\cdot J_{Gen} = d\Omega\cdot l_{оборуд}\cdot \int_0^\infty \left\{ y\,[\tilde{m} \to m]\cdot \tilde{m}\cdot c(t,S,\tilde{m}) - y\,[m \to \tilde{m}]\cdot m\cdot c(t,S,m) \right\} d\tilde{m} \qquad (8)$$

Принимая во внимание нормировочное свойство (6) функции $y\,[m \to \tilde{m}]$, уравнение (2) можно представить в виде:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S}\cdot m + \frac{\partial c}{\partial m}\cdot f(t,S) = l_{оборуд}\cdot \left\{ \int_0^\infty \left[y\,[\tilde{m} \to m]\cdot \tilde{m}\cdot c(t,S,\tilde{m}) \right]\cdot d\tilde{m} - m\cdot c \right\} \qquad (9)$$

В большинстве интересных с практической точки зрения случаях функция $y\,[\tilde{m} \to m]$ не зависит от состояния базового продукта до испытания воздействия $\tilde{m}$ со стороны технологического оборудования, что приводит к упрощению интегро-дифференциального уравнения (9):

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial S}\cdot m+\frac{\partial c}{\partial m}\cdot f(t,S)=l_{оборуд}\cdot\left\{y\left[\tilde{m}\to m\right]\cdot\left[c\right]_1-m\cdot c\right\}. \qquad (10)$$

Нулевой $\int\limits_0^\infty dm\cdot c\left(t,S,m\right)=\left[c\right]_0$ и первый $\int\limits_0^\infty dm\cdot m\cdot c\left(t,S,m\right)=\left[c\right]_1=\left\langle m\right\rangle\cdot\left[c\right]_0$ моменты функции распределения имеют простую производственную интерпретацию: заделы базовых продуктов и их темп движения вдоль технологической цепочки. С помощью моментов функции распределения можно записать уравнения для описания макровеличин производственной системы. Умножив уравнение (10) соответственно на 1, m, m^2 и проинтегрировав по всему диапазону m, получим уравнения балансов [5]:

$$\frac{\partial\left[c\right]_0}{\partial t}+\frac{\partial\left[c\right]_1}{\partial S}=\int\limits_0^\infty dm\cdot J_{Gen},$$

$$\frac{\partial\left[c\right]_1}{\partial t}+\frac{\partial\left[c\right]_2}{\partial S}=f(t,S)\cdot\left[c\right]_0+\int\limits_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial\left[c\right]_2}{\partial t}+\frac{\partial\left[c\right]_3}{\partial S}=2\cdot f(t,S)\cdot\left[c\right]_1+\int\limits_0^\infty dm\cdot m^2\cdot J_{Gen}.$$

Уравнения балансов (11), представляющие собой уравнения заделов, темпа и дисперсии базовых продуктов вдоль технологической цепочки, незамкнуты. Возможность получить замкнутую систему уравнений основана на свойствах функции $y\left[\tilde{m}\to m\right]$ и наличии малого параметра $Kv=\frac{l_{св}}{x}<<1$ [4], представляющего собой отношение длины свободного движения $l_{св}$ базовых продуктов вдоль технологической цепочки между единицами оборудования к характерному размеру технологической цепочки. В нулевом приближении по малому параметру $Kv<<1$

$$J_{Gen}=\sum_{m=0}^{\infty}\left(Kv\right)^m\cdot J_{G\_m},\quad J_{Gen\_0}=l_{оборуд}\cdot\left\{y\left[\tilde{m}\to m\right]\cdot\left[c\right]_1-m\cdot c\right\}=0, \qquad (12)$$

из уравнения балансов (11) следует замкнутая система уравнений для описания производственной системы

$$\frac{\partial [c]_0}{\partial t}+\frac{\partial\left([c]_0\cdot\langle m\rangle\right)}{\partial S}=0;$$

$$\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial t}+\langle m\rangle\cdot\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial S}=-\frac{1}{[c]_0}\cdot\frac{\partial P_m}{\partial S}+f(t,S)\,; \qquad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\langle m\rangle^2\cdot[c]_0}{2}+\frac{P_m}{2}\right\}+\frac{\partial}{\partial S}\left(\langle m\rangle\cdot\left\{\frac{\langle m\rangle^2\cdot[c]_0}{2}+\frac{3\cdot P_m}{2}\right\}+\Theta\right)=f(t,S)\cdot\langle m\rangle\cdot[c]_0\,;$$

где

$$P_m(t,S)=\int_0^\infty dm\cdot\left(m-\langle m\rangle\right)^2\cdot c(t,S,m),\quad \Theta=\langle m\rangle\cdot\left\{\frac{[c]_0\cdot s_y{}^2-P_m}{2}+\frac{[c]_0\cdot\left(m_y-\langle m\rangle\right)^2}{2}\right\},$$

а m_y и $s_y{}^2$ определены как

$$\int_0^\infty m\cdot y\,[m\to\tilde{m}]\cdot d\tilde{m}=m_y\,;\qquad \int_0^\infty\left(m-m_y\right)^2\cdot y\,[m\to\tilde{m}]\cdot d\tilde{m}=s_y{}^2 \qquad (14)$$

и задаются паспортными данными оборудования.

Если положить заданным темп базовых продуктов $[c]_1(t,S)$ вдоль технологической цепочки, то в качестве частного случая из системы уравнений (13) получаем известное в кибернетической экономике уравнение уровня Форрестера [6], которое в настоящее время является основным уравнением для описания функционирования производственно-сбытовых систем.

Таким образом, в нулевом приближении по малому параметру Kv форма функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$ для описания функционирования производственной системы определяется уравнением (10). Моменты функции распределения $c(t,S,m)$ удовлетворяют замкнутой системе уравнений (13), которая служит для описания поведения макроскопических параметров идеальной производственной системы. Идеальность производственной системы заключается в отсутствии для замкнутой системы уравнений (13) в нулевом приближении по малому параметру Kv членов, описывающих диссипативные производственные процессы.

ВЫВОДЫ

Таким образом, в нулевом приближении по малому параметру Kv форма функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$ для описания функционирования производственной системы определяется уравнением (10). Моменты функции распределения $c(t,S,m)$ удовлетворяют замкнутой системе уравнений (13), которая служит для описания поведения макроскопических параметров идеальной производственной системы. Идеальность производственной системы заключается в отсутствии для замкнутой системы уравнений (13) в нулевом приближении по малому параметру Kv членов, описывающих диссипативные производственные процессы.

1. Рушицький Я.Я., Мілованов Т. С., Модифікована модель Філіпса-Лоренца для єкономічної системи (корпорації фірм) із стабільним капіталом., Доповіді Національної академії наук України, 1997, N12, стр.36-40
2. Энтропийные методы моделирования сложных систем: Пер.с англ.- Наука., М., 1978г., 248стр.
3. Прыткин Б.В., Технико-экономический анализ производства. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000г., 399стр.
4. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок. Х.: ХНУ, 2003 .-272стр
5. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982.-608 стр.
6. Форрестер Дж., Основы кибернетики предприятия.- М.:Изд. “Прогресс” 1961г. 341стр.

2.УРАВНЕНИЯ БАЛАНСОВ В СТАХОСТИЧЕСКОМ ОПИСАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ С МАССОВЫМ ВЫПУСКОМ ПРОДУКЦИИ

Получены уравнения балансов в описании производственных систем с массовым выпуском продукции. В нулевом приближении записана замкнутая система уравнений для моментов функции распределения.

Состояние производственной системы определим как состояние общего числа N базовых продуктов [1,2]. Выделим характеристики микросостояний базовых продуктов, которые можно было бы измерить на уровне состояния предприятия [3,4]. Такими характеристиками микросостояний базовых продуктов в технологическом пространстве (S,m) могут быть микроскопические величины S_j (грн) и $m_j = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S_j}{\Delta t}$ (грн/час), представляющие собою соответственно сумму общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенных производственной системой на j-й базовый продукт, $0 < j \le N$ [4]. Состояние базового продукта в некоторый момент времени будет известно, если заданы начальные условия – микроскопические величины $\left(\mathrm{t}_0,\mathrm{S}_\mathrm{j},m_j\right)$ и задана целевая функция производственной системы $J\left(\mathrm{t},\mathrm{S}_\mathrm{j},m_j\right)$ (2.1.45). Целевая функция $J\left(\mathrm{t},\mathrm{S}_\mathrm{j},m_j\right)$ определяет технологический процесс изготовления базового продукта. Состояние базового продукта в технологическом пространстве (S,m), перемещающегося от операции к операции вдоль технологической траектории, может быть найдено из уравнений состояния базовых продуктов:

$$\frac{dS_j}{dt} = m_j\,, \qquad \frac{\partial J}{\partial S_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial m_j} = 0 \tag{2.1.8}$$

Если количество базовых продуктов N много больше единицы, то решить систему (2.1.1.8) из $2\cdot N$-уравнений практически невозможно. Последнее уточнение требует перехода от микроскопического описания производственной системы к макроскопическому описанию с элементами вероятностной природы. Разобьем фазовое пространсво на такое число ячеек, чтобы размеры ячейки $d\Omega = d\mathrm{S}\cdot dm$ были много меньше характерных размеров производственной системы и в то же время содержали внутри себя большое число базовых продуктов. Состояние производственной системы будем характеризовать числом базовых продуктов $c(t,S,m)\cdot d\Omega$ в каждой ячейке $d\Omega$ со значениями характеристик микросостояний $\left(\mathrm{S_j},m_j\right)$ в диапазонах от S до $\left(\mathrm{S+dS}\right)$ и от m до $\left(m+dm\right)$. В силу того, что величина $c(t,S,m)\cdot d\Omega$ представляет собой число базовых продуктов в бесконечно малой ячейке $d\Omega$ фазового пространства $\left(\mathrm{S},m\right)$, мы можем по изменению фазовой координаты S и фазовой скорости m базового продукта со временем судить и об изменении самой функции $c(t,S,m)$ [2]:

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial S}\cdot m+\frac{\partial c}{\partial m}\cdot f(t,S)=\mathrm{J_{Gen}}(t,S,m), \qquad (3.1.2)$$

$$\frac{dS}{dt}=m, \qquad \frac{\partial J}{\partial S}-\frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial m}=0$$

где $\dfrac{dm}{dt}=f(t,S)$ – инженерно-производственная функция, характеризующая установленный на предприятии технологический процесс изготовления продукции в соответствии с производственным планом, наличием трудовых ресурсов и оборудования

$\mathrm{J_G}(t,S,m)$ - генераторная функция производственной системы с массовым выпуском продукции [4]. Функция $\mathrm{J_{Gen}}(t,S,m)$ при $t\to\infty$ стремится свести начальное распределение базовых продуктов по скоростям изменения затрат к состоянию с равновесной функцией распределения в соответствии с технологическим процессом.

Будем считать функцию $c(t,S,m)$ нормированной

$$\int_0^\infty d\mathrm{S}\cdot\int_0^\infty dm\cdot c\left(t,S,m\right)=N. \qquad (1)$$

Условие нормировки (1) определяет в текущий момент времени количество базовых продуктов, находящихся в производственном процессе. Моменты функции распределения $c(t,S,m)$ базовых продуктов по скоростям изменения затрат являются макропараметрами производственной системы и имеют определенный производственный и экономический смысл. Макропараметры производственной системы связаны между собою через микроскопический уровень производственной системы (через функцию распределения базовых продуктов $c(t,S,m)$). Эта связь выражена в виде балансовых уравнений, полученных путем агрегирования слагаемых кинетического уравнения для функции распределения базовых продуктов (3.1.2). Вид функции распределения $c(t,S,m)$ базовых продуктов определяется ее моментами, изменения которых в технологическом пространстве и времени задается балансовыми уравнениями.

Если удалось выделить характеристики микросостояний базовых продуктов, которые можно измерить на микроскопическом уровне состояния предприятия, то макропараметры, описывающие состояние производственной системы на макроскопическом уровне, определяются через моменты функции распределения. Данные макропараметры должны совпадать с фактически используемыми в производственной деятельности наблюдаемыми макропараметрами технологического процесса.

Начальным моментом k-го порядка случайной величины при условии нормировки (1) является выражение [5, с.115]:

$$\int_0^\infty dm \cdot m^k \cdot c\left(t,S,m\right) = \left[c\right]_k\left(t,S\right), \quad k = 0,1,2,3......N_k \tag{2}$$

Под уравнением баланса k-го порядка относительно моментов функции распределения $c(t,S,m)$ базовых продуктов будем понимать агрегированное по всему диапазону изменения случайной величины m равенство

$$\int_0^\infty dm \cdot m^k \cdot \frac{\partial c}{\partial t} + \int_0^\infty dm \cdot m^{k+1} \cdot \frac{\partial c}{\partial S} + \int_0^\infty dm \cdot m^k \cdot f \cdot \frac{\partial c}{\partial m} = \int_0^\infty dm \cdot m^k \cdot \mathrm{J}_{\mathrm{Gen}} \,, \tag{3}$$

которое получается при умножении слагаемых кинетического уравнения (3.1.2) на случайную величину m^k с последующим интегрированием по всему диапазону изменения случайной величины m. Таким образом, начальные моменты (2) связаны между собою балансными соотношениями (3):

$$Z_k\left(t,S,\left[c\right]_0\left(t,S\right),\left[c\right]_1\left(t,S\right),\left[c\right]_2\left(t,S\right),...,\left[c\right]_k\left(t,S\right),...,\left[c\right]_{N_k}\left(t,S\right)\right)=0.$$

Выражение (2) обеспечивает связь между микроскопическими и макроскопическими параметрами производственной системы. Связь микропараметров и макропараметров производственной системы осуществляется через операцию агрегирования (интегрирования по всем возможным состояниям случайной величины).

Как известно [5, с.153], вид функции распределения определяется как непосредственно законом распределения, так и моментами случайной величины. Например, функция распределения случайной величины с показательным законом распределения, нормированная на количество базовых продуктов в технологической цепочке производственного процесса (1), записывается в форме

$$c\left(t,S,m\right)=\frac{\left[c\right]_0^2\left(t,S\right)}{\left[c\right]_1\left(t,S\right)}\cdot e^{-\frac{\left[c\right]_0\left(t,S\right)}{\left[c\right]_1\left(t,S\right)}\cdot m} \tag{4}$$

или

$$c\left(t,S,m\right)=\frac{\left(\int\limits_0^\infty dm\cdot c\left(t,S,m\right)\right)^2}{\int\limits_0^\infty dm\cdot m\cdot c\left(t,S,m\right)}\cdot e^{-\frac{\int_0^\infty dm\cdot c\left(t,S,m\right)}{\int_0^\infty dm\cdot m\cdot c\left(t,S,m\right)}\cdot m}$$

где

$$\left[c\right]_0\left(t,S\right)=\int\limits_0^\infty dm\cdot c\left(t,S,m\right), \qquad \left[c\right]_1\left(t,S\right)=\int\limits_0^\infty dm\cdot m\cdot c\left(t,S,m\right).$$

Выражение (4) представляет собою самосогласованную задачу в рамках заданного закона распределения (показательного закона) случайной величины. Таким образом, чтобы определить функцию распределения случайной величины, необходимо знать поведение ее первых двух моментов $\left[c\right]_0\left(t,S\right)$, $\left[c\right]_1\left(t,S\right)$ во времени t и координате S. С другой стороны, чтобы определить значения первых двух моментов $\left[c\right]_0\left(t,S\right)$, $\left[c\right]_1\left(t,S\right)$, необходимо знать выражение для функции распределения $c\left(t,S,m\right)$ случайной величины m. Уравнение связи (2) между собою микроскопических и макроскопических параметров производственной системы с показательным законом распределения случайной величины представлено системой двух уравнений:

$$\begin{cases} \int\limits_0^\infty dm\cdot c\left(t,S,m,\left[c\right]_0,\left[c\right]_1\right)=\left[c\right]_0, \\ \int\limits_0^\infty dm\cdot m\cdot c\left(t,S,m,\left[c\right]_0,\left[c\right]_1\right)=\left[c\right]_1 \end{cases} \tag{5}$$

и уравнениями балансов

$$Z_0\left(t,S,\left[c\right]_0\left(t,S\right),\left[c\right]_1\left(t,S\right)\right)=0, \qquad Z_1\left(t,S,\left[c\right]_0\left(t,S\right),\left[c\right]_1\left(t,S\right)\right)=0. \tag{6}$$

Выражение для функции распределения случайной величины с нормальным законом распределения, нормированной на количество базовых продуктов в технологической цепочке производственного процесса (1), записывается в форме

$$c\left(t,S,m\right)=\frac{\left[c\right]_0\left(t,S\right)}{\sqrt{2\cdot p\cdot\left(\frac{\left[c\right]_2\left(t,S\right)}{\left[c\right]_0\left(t,S\right)}-\frac{\left[c\right]_1^2\left(t,S\right)}{\left[c\right]_0^2\left(t,S\right)}\right)}}\cdot e^{-\left(\frac{\left(m-\frac{\left[c\right]_1\left(t,S\right)}{\left[c\right]_0\left(t,S\right)}\right)^2}{2\cdot\left(\frac{\left[c\right]_2\left(t,S\right)}{\left[c\right]_0\left(t,S\right)}-\frac{\left[c\right]_1^2\left(t,S\right)}{\left[c\right]_0^2\left(t,S\right)}\right)}\right)} \tag{7}$$

с уравнениями связи (2) между собою микроскопических и макроскопических параметров производственной системы:

$$\begin{cases}\int_0^\infty dm\cdot c\left(t,S,m,\left[c\right]_0,\left[c\right]_1,\left[c\right]_2\right)=\left[c\right]_0,\\ \int_0^\infty dm\cdot m\cdot c\left(t,S,m,\left[c\right]_0,\left[c\right]_1,\left[c\right]_2\right)=\left[c\right]_1,\\ \int_0^\infty dm\cdot m^2\cdot c\left(t,S,m,\left[c\right]_0,\left[c\right]_1,\left[c\right]_2\right)=\left[c\right]_2,\end{cases} \tag{8}$$

и уравнениями балансов

$$\mathrm{Z}_0\left(t,S,\left[c\right]_0\left(t,S\right),\left[c\right]_1\left(t,S\right),\left[c\right]_2\left(t,S\right),\left[c\right]_3\left(t,S\right)\right)=0,$$

$$\mathrm{Z}_1\left(t,S,\left[c\right]_0\left(t,S\right),\left[c\right]_1\left(t,S\right),\left[c\right]_2\left(t,S\right),\left[c\right]_3\left(t,S\right)\right)=0,$$

$$\mathrm{Z}_2\left(t,S,\left[c\right]_0\left(t,S\right),\left[c\right]_1\left(t,S\right),\left[c\right]_2\left(t,S\right),\left[c\right]_3\left(t,S\right)\right)=0. \tag{9}$$

Выражения (2)-(9) показывают, что выбор микроскопических и макроскопических параметров описания производственной системы не может быть произвольным, должен удовлетворять связям между микроскопическими и макроскопическими параметрами производственной системы (2). Как правило, для описания экономических систем «идут сверху» [6, 7]: определяют необходимые для описания производственной системы макроскопические параметры. Данным макроскопическим параметрам пытаются найти соответствующую комбинацию микропараметров, удовлетворяющую связям (2). Решение подобной задачи требует определенного искусства, подобного тому, как осуществляется поиск функций Ляпунова в задачах устойчивости движения. Поход «сверху» характерен для экономистов [7,с.17]. Технологи и инженеры поступают противоположно. Отрабатывая технологические процессы, работая непосредственно с базовым продуктом и отслеживая отклонения параметров базового продукта при переходе от одной технологической операции к другой, инженерам проще выделить микроскопические параметры, характеризующие базовый продукт. Какая комбинация из этих микропараметров подходит для описания поведения базового продукта на микроскопическом уровне в рамках принятых макропараметров производственной системы определяют уравнения связей (2). В примерах для уравнений связей (5), (8) задан закон распределения случайной величины (показательный и нормальный) с моментами функции распределения случайной величины, определенными через уравнения балансов макропараметров производственной системы (6), (9). В общем случае вид функции распределения случайной величины неизвестен. Как правило, вид функции распределения случайной величины и соотношения между макропараметрами экономической системы задают из имеющихся статистических данных с использованием различных методов статистической обработки результатов. Если же для определения функции распределения случайной величины ввести кинетическое уравнение (3.1.2), то система уравнений для описания функционирования производственной системы с массовым выпуском продукции при условиях нормировки (1) примет вид

$$\int_0^\infty dm \cdot m^k \cdot c\left(t,S,m\right) = \left[c\right]_k , \quad k = 0,1,2,3......N_k \tag{10}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial c}{\partial m} \cdot f(t,S) = \mathrm{J}_{\mathrm{Gen}}(t,S,m) , \tag{3.1.2}$$

Закон распределения случайной величины определяется особенностями технологического процесса, задающими вид инженерно-производственной $f(t,S)$ и генераторной функций $\mathrm{J}_{\mathrm{Gen}}(t,S,m)$. Если каждое слагаемое уравнения (3.1.2) умножить на m^k, $k = 0,1,2,3......N_k$ и проинтегрировать по всему диапазону изменения случайной величины m, то получим уравнения балансов k-го порядка вида (3), связывающие макроскопические параметры производственной системы между собою. Вид функции распределения случайной величины, а следовательно и уравнения связи между собою макропараметров производственной системы (3) однозначно задает технология изготовления базового продукта. Каждому техно-логическому процессу соответствуют свои инженерно-производственная и генераторная функции, а следовательно функция распределения случайной величины.

2.1. Балансовые уравнения для макропараметров производственной системы, выраженные через начальные моменты функции распределения случайной величины.

2.1.1. Макропараметры производственной системы, выраженные через начальные моменты функции распределения случайной величины.

За характеристики микросостояний базовых продуктов в технологическом пространстве $\left(\mathrm{S_j}, m_j\right)$ выберем наблюдаемые микроскопические величины $\mathrm{S_j}$ (грн) и $m_j = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S_j}{\Delta t}$ (грн/час), представляющие собою соответственно сумму общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенных производственной системой на j-й базовый продукт, $0 < j \le N$ [4]. Скорость изменения затрат j-го базового продукта m_j в ходе его движения от операции к операции технологического процесса является случайной величиной [2, 4] с функцией распределения базовых продуктов $c\left(t, S, m\right)$. Функция распределения случайной величины $c\left(t, S, m\right)$ обладает свойством

$$c\left(t, S, 0\right) = c\left(t, S, \infty\right) = 0. \qquad (11)$$

Наблюдаемыми макропараметрами (2) производственной системы с массовым выпуском продукции являются межоперационные заделы базовых продуктов (нулевой начальный момент)

$$\int_0^\infty dm \cdot c\left(t, S, m\right) = \left[c\right]_0 \left(t, S\right) \text{ (шт/грн)} \qquad (12)$$

и темп движения базовых продуктов от одной технологической операции к другой (первый начальный момент)

$$\int_0^\infty dm \cdot m \cdot c\left(t, S, m\right) = \left[c\right]_1 \left(t, S\right) \text{ (шт/час).} \qquad (13)$$

В описании производственных систем используются и макропараметры, которые являются более высокими начальными моментами

$$\int_0^\infty dm \cdot m^2 \cdot c\left(t, S, m\right) = \left[c\right]_2 \left(t, S\right), \qquad \int_0^\infty dm \cdot m^3 \cdot c\left(t, S, m\right) = \left[c\right]_3 \left(t, S\right)$$

или их комбинациями. Однако их экономическая интерпретация затруднена и данные макропараметры, как правило, не являются наблюдаемыми [3, 4, 8].

2.1.2. Уравнение баланса для момента нулевого порядка функции распределения случайной величины. Уравнение заделов базовых продуктов.

Умножим каждое слагаемое интегро-дифференциального уравнения, описывающее поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат (3.1.2), на единицу и проинтегрируем его по всему диапазону случайной величины m:

$$\int_0^\infty dm\cdot\frac{\partial c(t,S,m)}{\partial t}+\int_0^\infty dm\cdot m\cdot\frac{\partial c(t,S,m)}{\partial S}+\int_0^\infty dm\cdot f\cdot\frac{\partial c(t,S,m)}{\partial m}=$$

$$=\int_0^\infty dm\cdot J_G(t,S,m)\,. \quad (14)$$

Вычислим интегралы для каждого слагаемого балансового уравнения (14). Воспользуемся введенными обозначениями для начальных моментов функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат (12), (13) и, считая переменные t,S,m независимыми, получим

$$\int_0^\infty dm\cdot\frac{\partial c(t,S,m)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty dm\cdot c(t,S,m)=\frac{\partial[c]_0}{\partial t} \quad (15)$$

$$\int_0^\infty dm\cdot m\cdot\frac{\partial c(t,S,m)}{\partial S}=\frac{\partial}{\partial S}\int_0^\infty dm\cdot m\cdot c(t,S,m)=\frac{\partial[c]_1}{\partial S}\,. \quad (16)$$

Из свойства функции распределения $c(t,S,m)$ случайной величины m (11)

$$\int_0^\infty dm\cdot f(t,S)\cdot\frac{\partial c(t,S,m)}{\partial m}=f(t,S)\cdot\int_0^\infty dc(t,S,m)=\left|\begin{array}{l} из\_свойств\_функции \\ c(t,S,m)\_получаем: \\ c(t,S,m)\big|_{m=0}=0 \\ c(t,S,m)\big|_{m=\infty}=0 \end{array}\right|=0. \quad (17)$$

Соединяя вместе интегралы (15), (16), (17), получим уравнение баланса нулевого порядка относительно начальных моментов функции распределения случайной величины:

$$\frac{\partial[c]_0}{\partial t}+\frac{\partial[c]_1}{\partial S}=\int_0^\infty dm\cdot J_G(t,S,m)\,. \qquad (18)$$

2.1.3. Уравнение баланса для момента первого порядка через начальные моменты функции распределения случайной величины. Уравнение темпа базовых продуктов.

Умножим каждое слагаемое интегро-дифференциального уравнения, описывающее поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат (3.1.2), на m и проинтегрируем его по всему диапазону случайной величины m :

$$\int_0^\infty dm\cdot m\cdot\frac{\partial c\left(t,S,m\right)}{\partial t}+\int_0^\infty dm\cdot m^2\cdot\frac{\partial c\left(t,S,m\right)}{\partial S}+\int_0^\infty dm\cdot m\cdot f\cdot\frac{\partial c\left(t,S,m\right)}{\partial m}=$$

$$=\int_0^\infty dm\cdot m\cdot J_G(t,S,m)\,; \qquad (19)$$

Вычислим интегралы для каждого слагаемого балансового уравнения (19). Используя обозначениями для начальных моментов функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат (12), (13) и, считая переменные t,S,m независимыми, получим

$$\int_0^\infty dm\cdot m\cdot\frac{\partial c\left(t,S,m\right)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty dm\cdot m\cdot c\left(t,S,m\right)=\frac{\partial[c]_1}{\partial t}\,, \qquad (20)$$

$$\int_0^\infty dm\cdot m^2\cdot\frac{\partial c\left(t,S,m\right)}{\partial S}=\frac{\partial}{\partial S}\int_0^\infty dm\cdot m^2\cdot c\left(t,S,m\right)=\frac{\partial[c]_2}{\partial S}\,, \qquad (21)$$

$$\int_0^\infty dm\cdot m\cdot f(t,S)\cdot\frac{\partial c\left(t,S,m\right)}{\partial m}=f(t,S)\cdot\int_0^\infty dm\cdot m\cdot\frac{\partial c\left(t,S,m\right)}{\partial m}=$$

$$=f(t,S)\cdot\int_0^\infty dm\cdot\left[\frac{\partial\left[m\cdot c\left(t,S,m\right)\right]}{\partial m}-c\left(t,S,m\right)\right]=$$

$$= f(t,S)\cdot\int_0^\infty d\left[m\cdot c\left(t,S,m\right)\right]- \ f(t,S)\cdot\left[c\right]_0 =$$

$$\left|\begin{array}{l}\int_0^\infty dm\cdot c\left(t,S,m\right)= m\cdot c\left(t,S,m\right)\Big|_0^\infty = 0,\\ так,\ как\ \ c\left(t,S,0\right)=0,\ \ c\left(t,S,\infty\right)=0\end{array}\right| =$$

$$=-f(t,S)\cdot\left[c\right]_0 . \qquad (22)$$

Соединяя вместе интегралы, получим уравнение движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки:

$$\frac{\partial\left[c\right]_1}{\partial t}+\frac{\partial\left[c\right]_2}{\partial S} = f(t,S)\cdot\left[c\right]_0+\int_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m) . \qquad (23)$$

Для целевой функции технологического процесса вида

$$J_{y\,0}(S,m)=\frac{1}{2}\cdot\left(m_y - a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)^2, \qquad (2.1.72)$$

когда постоянные затраты, переносимые производственной системой на базовый продукт, много меньше переменных затрат и ими можно пренебречь, инженерно-производственная функция принимает вид

$$f(t,S)=\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial S_y}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right), \qquad (24)$$

что позволяет записать балансовое уравнение (24) в виде

$$\frac{\partial\left[c\right]_1}{\partial t}+\frac{\partial\left[c\right]_2}{\partial S} = a_{yV}(S_{yV})\cdot\left[c\right]_{1y}\cdot\frac{\partial}{\partial S_y}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)+\int_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m) . \qquad (25)$$

где $\left[c\right]_{1y}$ -производительность работы технологического оборудования. Усредненные коэффициенты пропорциональности $a_{yV}(S_{yV})$ задаются функциями от оптимальных фактических раскроев материала, КПД передачи энергоносителей к базовому продукту на конкретной технологической операции.

2.1.4. Уравнение баланса для момента второго порядка через начальные моменты функции распределения случайной величины.

Умножим каждое слагаемое интегро-дифференциального уравнения, описывающее поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат (3.1.2), на m^2 и проинтегрируем его по всему диапазону случайной величины m :

$$\int_0^\infty dm \cdot m^2 \cdot \frac{\partial c(t,S,m)}{\partial t} + \int_0^\infty dm \cdot m \cdot m^2 \cdot \frac{\partial c(t,S,m)}{\partial S} +$$

$$+\int_0^\infty dm \cdot m^2 \cdot f \cdot \frac{\partial c(t,S,m)}{\partial m} = \int_0^\infty dm \cdot m^2 \cdot J_{Gen} . \quad (26)$$

Вычислим интегралы для каждого слагаемого балансового уравнения (19). Воспользуемся введенными обозначениями для начальных моментов функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат (12), (13) и, считая переменные t,S,m независимыми, получим

$$\int_0^\infty dm \cdot m^2 \cdot \frac{\partial c(t,S,m)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty dm \cdot m^2 \cdot c(t,S,m) = \frac{\partial [c]_2}{\partial t} , \quad (27)$$

$$\int_0^\infty dm \cdot m \cdot m^2 \cdot \frac{\partial c(t,S,m)}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}\int_0^\infty dm \cdot m \cdot m^2 \cdot c(t,S,m) = \frac{\partial [c]_3}{\partial S} \quad (28)$$

$$\int_0^\infty dm \cdot m^2 \cdot f(t,S) \cdot \frac{\partial c(t,S,m)}{\partial m} = f(t,S) \cdot \int_0^\infty dm \cdot m^2 \cdot \frac{\partial c(t,S,m)}{\partial m} =$$

$$= f(t,S) \cdot \int_0^\infty dm \cdot \frac{\partial \left\{m^2 \cdot c(t,S,m)\right\}}{\partial m} - f(t,S) \cdot \int_0^\infty dm \cdot c(t,S,m) \frac{\partial m^2}{\partial m} =$$

$$= f(t,S) \cdot \int_0^\infty dm \cdot \frac{\partial \left\{m^2 \cdot c(t,S,m)\right\}}{\partial m} - 2 \cdot f(t,S) \cdot \int_0^\infty dm \cdot c(t,S,m) \cdot m =$$

$$= f(t,S) \cdot \left\{m^2 \cdot c(t,S,m)\right\}\Big|_{m=0}^{m=\infty} - 2 \cdot f(t,S) \cdot \int_0^\infty dm \cdot c(t,S,m) \cdot m =$$

$$= -2 \cdot f(t,S) \cdot \int_0^\infty dm \cdot c(t,S,m) \cdot m = -2 \cdot f(t,S) \cdot [c]_1 , \quad (29)$$

Соединяя вместе вычисленные интегралы, получим уравнение дисперсии темпа движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки:

$$\frac{\partial[c]_2}{\partial t}+\frac{\partial[c]_3}{\partial S}=2\cdot f(t,S)\cdot[c]_1+\int_0^\infty dm\cdot m^2\cdot J_{Gen}(t,S,m) \qquad (30)$$

Для целевой функции технологического процесса вида (2.1.72), когда постоянные затраты, переносимые производственной системой на базовый продукт, много меньше переменных затрат и ими можно пренебречь, инженерно-производственная функция принимает вид (24), что позволяет записать балансовое уравнение (30) в форме

$$\frac{\partial[c]_2}{\partial t}+\frac{\partial[c]_3}{\partial S}=2\cdot[c]_1\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial S_y}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)+$$

$$+\int_0^\infty dm\cdot m^2\cdot J_{Gen}(t,S,m)$$

2.1.5. Общая система уравнений для макропараметров производственной системы, выраженных через начальные моменты функции распределения случайной величины.

Микроскопическим величинам $\mathrm{S_j}$ (грн) и $m_j=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S_j}{\Delta t}$ (грн/час) базовых продуктов в технологическом пространстве $\left(\mathrm{S_j},m_j\right)$, представляющим собою соответственно сумму общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенных производственной системой на j-й базовый продукт, соответствует система балансовых уравнений

$$\frac{\partial[c]_0}{\partial t}+\frac{\partial[c]_1}{\partial S}=\int_0^\infty dm\cdot J_{Gen}(t,S,m)\,,$$

$$\frac{\partial[c]_1}{\partial t}+\frac{\partial[c]_2}{\partial S}=f(t,S)\cdot[c]_0+\int_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m)\,,$$

$$\frac{\partial[c]_2}{\partial t}+\frac{\partial[c]_3}{\partial S}=2\cdot f(t,S)\cdot[c]_1+\int_0^\infty dm\cdot m^2\cdot J_{Gen}(t,S,m)\,, \qquad (31)$$

$$\frac{\partial[c]_k}{\partial t}+\frac{\partial[c]_{k+1}}{\partial S}=k\cdot f(t,S)\cdot[c]_{k-1}+\int_0^\infty dm\cdot m^k\cdot J_{Gen}(t,S,m)\,,$$

$$k=0,1,2,3,...,N_k\,.$$

Макроскопические параметры производственной системы являются начальными моментами функции распределения базовых продуктов $c(t,S,m)$ по скоростям изменения затрат m, связаны между собою через балансовые уравнения (31). Связь макро-скопических параметров друг с другом обеспечивается через микроскопический уровень при помощи уравнений связи (2.2), где каждый из макроскопических параметров производственной системы получен путем агрегирования микроскопических параметров:

$$\int_0^\infty dm\cdot m^k\cdot c(t,S,m)=[c]_k(t,S)\,,\quad k=0,1,2,3,...,N_k\,. \qquad (2.2)$$

Функция распределения базовых продуктов $c(t,S,m)$ по скоростям изменения затрат m нормирована на количество базовых продук-тов, находящихся в производственном процессе в текущий момент времени

$$\int_0^\infty dS\cdot\int_0^\infty dm\cdot c(t,S,m)=N(t)\,, \qquad (2.1)$$

задается кинетическим уравнением технологического процесса

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial S}\cdot m+\frac{\partial c}{\partial m}\cdot f(t,S)=\mathrm{J}_{\mathrm{Gen}}(t,S,m)\,, \qquad (3.1.2)$$

$$\frac{dS}{dt}=m\,,\qquad \frac{\partial J}{\partial S}-\frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial m}=0$$

с заданной технологическим процессом инженерно-производствен-ной $\frac{dm}{dt}=f(t,S)$ и генераторной $\mathrm{J}_{\mathrm{Gen}}(t,S,m)$ функциями производст-венной системы [4].

Как правило, начальные моменты функции распределения случайной величины выше третьего для описания производст-венных процессов не используются [3, 4, 8].

2.2. Балансовые уравнения для макропараметров производственной системы, выраженные через центральные моменты функции распределения случайной величины.

2.2.1. Макропараметры производственной системы, выраженные через центральные моменты функции распределения случайной величины.

При рассмотрении большинства практически интересных задач описания производственно-сбытовых систем моменты функции распределения случайной величины выше второго не используются. Однако имеются случаи, когда необходимо отслеживать производственный процесс более точно, чем позволяет модель с двумя макроскопическими параметрами: заделами и темпом базовых продуктов вдоль технологической цепочки производственного процесса. В данном случае полезным является второй центральный момент функции распределения базовых продуктов $c(t,S,m)$ по скоростям изменения затрат m, представляющий собою информацию о среднеквадратичном отклонении темпа движения базовых продуктов от своего математического ожидания при переходе базовых продуктов от одной технологической операции к другой.

Оставим без изменения выбор характеристик микросостояний базовых продуктов в технологическом пространстве $(\mathrm{S_j},m_j)$ $\mathrm{S_j}$ (грн) и

$m_j = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S_j}{\Delta t}$ (грн/час), представляющих собою соответственно сумму общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенных производственной системой на j-й базовый продукт, $0 < j \le N$ [4].

В качестве макропараметров производственной системы с массовым выпуском продукции примем величины, представляющие собою межоперационные заделы базовых продуктов (начальный момент нулевого порядка)

$$\int\limits_0^{\infty} dm \cdot c(t,S,m) = [c]_0(t,S) \text{ (шт/грн)}, \qquad (12)$$

темп движения базовых продуктов от одной технологической операции к другой (первый начальный момент)

$$\int_0^\infty dm \cdot m \cdot c\left(t,S,m\right) = \left[c\right]_1\left(t,S\right) \text{ (шт/час)}, \tag{13}$$

среднеквадратичное отклонение

$$\frac{1}{\left[c\right]_0} \cdot \int_0^\infty dm \cdot \left(m \cdot \left[c\right]_0 - \left[c\right]_1\right)^2 \cdot c\left(t,S,m\right) = s_c^2\left(t,S\right)\left(\frac{шт}{час}\right)^2 \tag{32}$$

или дисперсию темпа движения базовых продуктов от одной технологической операции к другой при математическом ожидании $\left[c\right]_1\left(t,S\right)$ (13) случайной величины $m \cdot \left[c\right]_0\left(t,S\right)$

$$P_c\left(t,S\right) = \int_0^\infty dm \cdot \left(m \cdot \left[c\right]_0 - \left[c\right]_1\right)^2 \cdot c\left(t,S,m\right) = \left[c\right]_0 \cdot s_c^2\left(t,S\right)\left(\frac{шт}{час}\right)^2 \cdot \frac{шт}{грн}. \tag{33}$$

Среднеквадратичное отклонение связано с начальными моментами соотношением

$$s_c^2 = \frac{1}{\left[c\right]_0} \cdot \int_0^\infty dm \cdot \left(m \cdot \left[c\right]_0 - \left[c\right]_1\right)^2 \cdot c =$$

$$= \frac{1}{\left[c\right]_0} \cdot \int_0^\infty dm \cdot \left(\left(m \cdot \left[c\right]_0\right)^2 - 2 \cdot m \cdot \left[c\right]_0 \cdot \left[c\right]_1 + \left(\left[c\right]_1\right)^2\right) \cdot c =$$

$$= \left[c\right]_0 \cdot \int_0^\infty dm \cdot m^2 \cdot c \; - 2 \cdot \left[c\right]_1 \cdot \int_0^\infty dm \cdot m \cdot c + \frac{\left(\left[c\right]_1\right)^2}{\left[c\right]_0} \cdot \int_0^\infty dm \cdot c =$$

$$= \left[c\right]_0 \cdot \left[c\right]_2 - 2 \cdot \left(\left[c\right]_1\right)^2 + \frac{\left(\left[c\right]_1\right)^2}{\left[c\right]_0} \cdot \left[c\right]_0 = \left[c\right]_0 \cdot \left[c\right]_2 - \left(\left[c\right]_1\right)^2,$$

$$\left[c\right]_2 = \frac{s_c^2 + \left[c\right]_1^2}{\left[c\right]_0} \tag{34}$$

Дисперсия темпа движения базовых продуктов также может быть выражена через начальные моменты

$$\left[c\right]_2 = \frac{s_c^2 + \left[c\right]_1^2}{\left[c\right]_0} = \left| \begin{matrix} \textit{используя} \\ P_c = \left[c\right]_0 \cdot s_c^2 \end{matrix} \right| = \frac{P_c}{\left[c\right]_0^2} + \frac{\left[c\right]_1^2}{\left[c\right]_0} \tag{35}$$

Более употребительным на практике является использование понятия среднеквадратичного отклонения темпа движения базовых продуктов.

Введем дополнительное обозначение для третьего центрального момента

$$\frac{1}{[c]_0}\cdot\int_0^{\infty} dm\cdot\left(m\cdot[c]_0-[c]_1\right)^3\cdot c(t,S,m)=\Theta_c(t,S)\left(\frac{шт}{час}\right)^3, \tag{36}$$

Третий центральный момент связан с центральными и начальными моментами низших порядков следующим соотношением

$$\Theta_c(t,S)=\frac{1}{[c]_0}\cdot\int_0^{\infty} dm\cdot\left(m\cdot[c]_0-[c]_1\right)^3\cdot c(t,S,m)=$$

$$=\frac{1}{[c]_0}\cdot\int_0^{\infty} dm\cdot\begin{pmatrix}\left(m\cdot[c]_0\right)^3-3\cdot\left(m\cdot[c]_0\right)^2\cdot[c]_1+\\ +3\cdot m\cdot[c]_0\cdot\left([c]_1\right)^2-\left([c]_1\right)^3\end{pmatrix}\cdot c=$$

$$=\left([c]_0\right)^2\cdot\int_0^{\infty} dm\cdot m^3\cdot c-3\cdot[c]_0\cdot[c]_1\cdot\int_0^{\infty} dm\cdot m^2\cdot c+$$

$$+3\cdot\left([c]_1\right)^2\cdot\int_0^{\infty} dm\cdot m\cdot c-\frac{\left([c]_1\right)^3}{[c]_0}\cdot\int_0^{\infty} dm\cdot c=$$

$$=\left([c]_0\right)^2\cdot[c]_3-3\cdot[c]_0\cdot[c]_1\cdot[c]_2+3\cdot\left([c]_1\right)^3-\left([c]_1\right)^3=$$

$$=\left([c]_0\right)^2\cdot[c]_3-3\cdot[c]_0\cdot[c]_1\cdot[c]_2+2\cdot\left([c]_1\right)^3=$$

$$=\left([c]_0\right)^2\cdot[c]_3-3\cdot[c]_1\cdot\left(s_c^2+[c]_1^2\right)+2\cdot\left([c]_1\right)^3=$$

$$=\left([c]_0\right)^2\cdot[c]_3-3\cdot[c]_1\cdot s_c^2-\left([c]_1\right)^3,$$

$$[c]_3=\frac{\Theta_c(t,S)+3\cdot[c]_1\cdot s_c^2+\left([c]_1\right)^3}{\left([c]_0\right)^2}. \tag{37}$$

Для описания производственных систем начальные и центральные моменты более высокого порядка, чем третий, не используются. Как правило, редко на практике применяются уже вторые моменты [3, 4, 8].

2.2.2. Уравнение баланса для момента второго порядка через начальные и центральный моменты. Уравнение среднеквадратичного отклонения темпа базовых продуктов от математического ожидания.

Оставим без изменения балансовое уравнение для момента нулевого порядка (31) для макропараметров производственной системы

$$\frac{\partial[c]_0}{\partial t}+\frac{\partial[c]_1}{\partial S}=\int_0^\infty dm\cdot J_{Gen}(t,S,m),$$

а балансовое уравнение для моментов первого и второго порядков выразим через центральные моменты функции распределения базовых продуктов $c\left(t,S,m\right)$ по скоростям изменения затрат m

$$\frac{\partial[c]_1}{\partial t}+\frac{\partial[c]_2}{\partial S}=f(t,S)\cdot[c]_0+\int_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m),$$

$$\frac{\partial[c]_2}{\partial t}+\frac{\partial[c]_3}{\partial S}=2\cdot f\left(t,S\right)\cdot[c]_1+\int_0^\infty dm\cdot m^2\cdot J_{Gen}(t,S,m).$$

Подставив (34) в балансовое уравнение (31) для момента первого порядка, получаем

$$\frac{\partial[c]_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{s_c^{\,2}+[c]_1^2}{[c]_0}\right)=f(t,S)\cdot[c]_0+\int_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m), \qquad (38)$$

Аналогично, подставив (35), (37) в балансовое уравнение для момента второго порядка (31), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s_c^{\,2}+[c]_1^2}{[c]_0}\right)+\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\Theta_c\left(t,S\right)+3\cdot[c]_1\cdot s_c^{\,2}+\left([c]_1\right)^3}{\left([c]_0\right)^2}\right)-$$

$$-2\cdot f\left(t,S\right)\cdot[c]_1-\int_0^\infty dm\cdot m^2\cdot J_{Gen}(t,S,m)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s_c^{\,2}}{[c]_0}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{[c]_1^2}{[c]_0}\right)+\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\Theta_c\left(t,S\right)+3\cdot[c]_1\cdot s_c^{\,2}+\left([c]_1\right)^3}{\left([c]_0\right)^2}\right)-$$

$$-2\cdot f\left(t,S\right)\cdot[c]_1-\int_0^\infty dm\cdot m^2\cdot J_{Gen}(t,S,m)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s_c^2}{[c]_0}\right)+[c]_1\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+\frac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\frac{\partial[c]_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\Theta_c(t,S)+3\cdot[c]_1\cdot s_c^2+\left([c]_1\right)^3}{\left([c]_0\right)^2}\right)-$$

$$-2\cdot f(t,S)\cdot[c]_1-\int_0^\infty dm\cdot m^2\cdot J_{Gen}(t,S,m)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{Используем балансовое уравнение}\\ \dfrac{\partial[c]_1}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial S}\left(\dfrac{s_c^2+[c]_1^2}{[c]_0}\right)=f(t,S)\cdot[c]_0+\displaystyle\int_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m)\\ \textit{откуда}\\ \dfrac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\dfrac{\partial[c]_1}{\partial t}=-\dfrac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\dfrac{\partial}{\partial S}\left(\dfrac{s_c^2+[c]_1^2}{[c]_0}\right)+[c]_1\cdot f(t,S)+\dfrac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\displaystyle\int_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m)\\ \textit{где}\\ -\dfrac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\dfrac{\partial}{\partial S}\left(\dfrac{s_c^2+[c]_1^2}{[c]_0}\right)=-\dfrac{\partial}{\partial S}\left(\dfrac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\dfrac{s_c^2+[c]_1^2}{[c]_0}\right)+\left(\dfrac{s_c^2+[c]_1^2}{[c]_0}\right)\cdot\dfrac{\partial}{\partial S}\left(\dfrac{[c]_1}{[c]_0}\right)\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s_c^2}{[c]_0}\right)+[c]_1\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+\left(\frac{s_c^2+[c]_1^2}{[c]_0}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\Theta_c(t,S)+3\cdot[c]_1\cdot s_c^2+\left([c]_1\right)^3}{\left([c]_0\right)^2}\right)-\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\frac{s_c^2+[c]_1^2}{[c]_0}\right)-$$

$$-f(t,S)\cdot[c]_1+\frac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\int_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m)-\int_0^\infty dm\cdot m^2\cdot J_{Gen}(t,S,m)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s_c^2}{[c]_0}\right)+[c]_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+\frac{s_c^2+[c]_1^2}{[c]_0}\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\Theta_c(t,S)+2\cdot[c]_1\cdot s_c^2}{\left([c]_0\right)^2}\right)-$$

$$-f(t,S)\cdot[c]_1+\frac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\int_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m)-\int_0^\infty dm\cdot m^2\cdot J_{Gen}(t,S,m)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s_c^{\,2}}{[c]_0}\right)+[c]_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+\frac{s_c^{\,2}+[c]_1^2}{[c]_0}\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\Theta_c(t,S)+2\cdot[c]_1\cdot s_c^{\,2}}{\left([c]_0\right)^2}\right)-$$

$$-f(t,S)\cdot[c]_1-\int\limits_0^\infty dm\cdot m\cdot\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}-m\cdot\right)J_{Gen}(t,S,m)=$$

$$=$$

Используем балансовое уравнение

$$\frac{\partial[c]_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{s_c^{\,2}+[c]_1^2}{[c]_0}\right)=f(t,S)\cdot[c]_0+\int\limits_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m)$$

$$\frac{\partial[c]_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{s_c^{\,2}+[c]_1^2}{[c]_0}\right)-f(t,S)\cdot[c]_0-\int\limits_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\cdot[c]_0\right)+\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{s_c^{\,2}}{[c]_0}+\frac{[c]_1}{[c]_0}\cdot[c]_1\right)-f(t,S)\cdot[c]_0-\int\limits_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m)=$$

$$=\frac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\frac{\partial[c]_0}{\partial t}+[c]_0\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{s_c^{\,2}}{[c]_0}\right)+\frac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\frac{\partial[c]_1}{\partial S}+[c]_1\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)-f(t,S)\cdot[c]_0-$$

$$-\int\limits_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m)=\left|\begin{aligned}&\frac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\frac{\partial[c]_0}{\partial t}+\frac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\frac{\partial[c]_1}{\partial S}=\\&=\frac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\left(\frac{\partial[c]_0}{\partial t}+\frac{\partial[c]_1}{\partial S}\right)=\frac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\int\limits_0^\infty dm\cdot J_{Gen}(t,S,m)\end{aligned}\right|=$$

$$=\frac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\int\limits_0^\infty dm\cdot J_{Gen}(t,S,m)+[c]_0\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+[c]_1\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{s_c^{\,2}}{[c]_0}\right)-f(t,S)\cdot[c]_0-$$

$$-\int\limits_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m)=\frac{[c]_0}{[c]_1}\cdot\left(\begin{aligned}&[c]_1\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+\frac{[c]_1^2}{[c]_0}\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+\frac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{s_c^{\,2}}{[c]_0}\right)-f(t,S)\cdot[c]_1+\\&+\frac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\int\limits_0^\infty dm\cdot\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}-m\right)\cdot J_{Gen}(t,S,m)\end{aligned}\right)=0$$

Откуда

$$[c]_1\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+\frac{[c]_1^2}{[c]_0}\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+\frac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{s_c^{\,2}}{[c]_0}\right)=f(t,S)\cdot[c]_1-\frac{[c]_1}{[c]_0}\int\limits_0^\infty dm\cdot\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}-m\right)\cdot J_{Gen}(t,S,m)$$

$$=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s_c^2}{[c]_0}\right)+\frac{s_c^2}{[c]_0}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\Theta_c(t,S)}{\left([c]_0\right)^2}\right)+\frac{2\cdot s_c^2}{[c]_0}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+\frac{[c]_1}{[c]_0}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{s_c^2}{[c]_0}\right)+$$

$$+\frac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\int_0^\infty dm\cdot\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}-m\cdot\right)J_{Gen}(t,S,m)-\int_0^\infty dm\cdot m\cdot\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}-m\cdot\right)J_{Gen}(t,S,m)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s_c^2}{[c]_0}\right)+3\cdot\frac{s_c^2}{[c]_0}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\Theta_c(t,S)}{\left([c]_0\right)^2}\right)+\frac{[c]_1}{[c]_0}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{s_c^2}{[c]_0}\right)+$$

$$+\int_0^\infty dm\cdot\left(m-\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)^2 J_{Gen}(t,S,m)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s_c^2}{[c]_0}\right)+3\cdot\frac{s_c^2}{[c]_0}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\Theta_c(t,S)}{\left([c]_0\right)^2}\right)+\frac{[c]_1}{[c]_0}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{s_c^2}{[c]_0}\right)+$$

$$+\frac{1}{[c]_0^2}\cdot\int_0^\infty dm\cdot\left(m\cdot[c]_0-[c]_1\right)^2\cdot J_{Gen}(t,S,m)=0$$

Окончательно второе балансовое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s_c^2}{[c]_0}\right)+2\cdot\frac{s_c^2}{[c]_0}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\Theta_c(t,S)}{\left([c]_0\right)^2}\right)+\frac{[c]_1}{[c]_0}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{s_c^2}{[c]_0}\right)=$$

$$=-\frac{1}{[c]_0^2}\cdot\int_0^\infty dm\cdot\left(m\cdot[c]_0-[c]_1\right)^2\cdot J_{Gen}(t,S,m)\quad(39)$$

Используя соотношение между среднеквадратичным отклонением и дисперсией темпа базовых продуктов (33), можно записать другой вид балансового уравнения для момента второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P_c}{[c]_0^2}\right)+3\cdot\frac{P_c}{[c]_0^2}\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)+\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\Theta_c(t,S)}{\left([c]_0\right)^2}\right)+\frac{[c]_1}{[c]_0}\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{P_c}{[c]_0^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{[c]_0^2}\cdot\int_0^\infty dm\cdot\left(m\cdot[c]_0-[c]_1\right)^2\cdot J_{Gen}(t,S,m)\quad(40)$$

2.3. Балансовые уравнения для альтернативных макропараметров производственной системы с массовым выпуском продукции

2.3.1. Альтернативные макропараметры производственной системы с массовым выпуском продукции

При исследовании функционирования производственно-сбытовых систем часто более полезными оказываются другие макропараметры, являющиеся комбинациями из начальных и центральных моментов функции распределения случайной величины. Такие комбинации представляют собою макроскопические величины, которые, как правило, не являются наблюдаемыми макроскопическими величинами. Однако они позволяют значительно упростить математические вычисления при выявлении закономерностей функционирования производственного процесса. Получив конечный результат решения конкретно рассматриваемой производственной задачи, делается переход от альтернативных макропараметров производственного процесса к наблюдаемым макропараметрам.

Как и ранее, оставим без изменения выбор характеристик микросостояний базовых продуктов в технологическом пространстве $\left(\mathrm{S_j}, m_j\right)$ S_j (грн) и $m_j = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S_j}{\Delta t}$ (грн/час), представляющих собою соответственно сумму общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенных производственной системой на j-й базовый продукт, $0 < j \le N$ [4].

В качестве макропараметров производственной системы с массовым выпуском продукции примем величины, представляющие собою межоперационные заделы базовых продуктов (нулевой начальный момент)

$$\int\limits_0^\infty dm \cdot c\left(t, S, m\right) = \left[c\right]_0\left(t, S\right) \text{(шт/грн)}, \qquad (41)$$

среднюю скорость изменения затрат $\left\langle m\right\rangle\left(t, S\right)$ базовых продуктов при перемещении от одной технологической операции к другой

$$\frac{1}{\left[c\right]_0\left(t, S\right)}\int\limits_0^\infty dm \cdot m \cdot c\left(t, S, m\right) = \left\langle m\right\rangle\left(t, S\right) = \frac{\left[c\right]_1}{\left[c\right]_0} = \text{(грн/час)}, \qquad (42)$$

среднеквадратичное отклонение $s_m^2(t,S)$

$$\frac{1}{[c]_0}\cdot\int_0^\infty dm\cdot\left(m-\langle m\rangle\right)^2\cdot c(t,S,m)=s_m^2(t,S)\left(\frac{грн}{час}\right)^2 \tag{43}$$

или дисперсию $P_m(t,S)$ скорости изменения затрат при движении базовых продуктов вдоль технологической цепочки

$$P_m(t,S)=\int_0^\infty dm\cdot\left(m-\langle m\rangle\right)^2\cdot c(t,S,m)=[c]_0\cdot s_m^2(t,S)\left(\frac{шт}{грн\cdot час}\right). \tag{44}$$

$$P_m(t,S)+[c]_0\cdot\langle m\rangle^2=[c]_2 \tag{45}$$

или

$$[c]_0\cdot\left(\langle m\rangle^2+s_m^2\right)=[c]_2\,. \tag{46}$$

Введем обозначение для третьего центрального момента

$$\int_0^\infty dm\cdot\left(m-\langle m\rangle\right)^3\cdot c(t,S,m)=\Theta_m(t,S)\left(\frac{грн^2\cdot шт}{час^3}\right), \tag{47}$$

и выразим третий центральный момент через более низкие моменты функции распределения

$$\Theta_m(t,S)=\int_0^\infty dm\cdot\left(m-\langle m\rangle\right)^3\cdot c(t,S,m)=$$

$$=\int_0^\infty dm\cdot\left(m^3-3\cdot m^2\cdot\langle m\rangle+3\cdot m\cdot\langle m\rangle^2-\langle m\rangle^3\right)\cdot c(t,S,m)=$$

$$=\int_0^\infty dm\cdot m^3\cdot c(t,S,m)-3\cdot\langle m\rangle\cdot\int_0^\infty dm\cdot m^2\cdot c(t,S,m)+$$

$$+3\cdot\langle m\rangle^2\cdot\int_0^\infty dm\cdot m\cdot c(t,S,m)-\langle m\rangle^3\cdot\int_0^\infty dm\cdot c(t,S,m)=$$

$$=[c]_3-3\cdot\langle m\rangle\cdot[c]_2+3\cdot\langle m\rangle^2\cdot[c]_1-\langle m\rangle^3\cdot[c]_0=$$

$$=[c]_3-3\cdot\langle m\rangle\cdot[c]_2+2\cdot\langle m\rangle^2\cdot[c]_1=$$

$$=[c]_3-3\cdot\langle m\rangle\cdot\left([c]_0\cdot s_m^2+[c]_0\cdot\langle m\rangle^2\right)+2\cdot\langle m\rangle^2\cdot[c]_1=$$

$$=[c]_3-3\cdot\langle m\rangle\cdot[c]_0\cdot s_m^2-\langle m\rangle^3\cdot[c]_0\,.$$

Откуда

$$[c]_3=\Theta_m+3\cdot\langle m\rangle\cdot[c]_0\cdot s_m^2+\langle m\rangle^3\cdot[c]_0 \tag{48}$$

или

$$\left[c \right]_3 = \Theta_m + 3 \cdot \left\langle m \right\rangle \cdot P_m + \left\langle m \right\rangle^3 \cdot \left[c \right]_0 \qquad (49)$$

Для описания производственных систем начальные и центральные моменты выше, чем второй, как правило, не используются [3, 4, 8].

2.3.2. Уравнение баланса для момента нулевого порядка через альтернативные макропараметры производственной системы. Уравнение заделов базовых продуктов через альтернативные макропараметры производственной системы.

Подставив в балансовое уравнение (31) для момента нулевого порядка

$$\frac{\partial \left[c \right]_0}{\partial t} + \frac{\partial \left[c \right]_1}{\partial S} = \int_0^\infty dm \cdot J_{Gen}(t, S, m) \, , \qquad (31)$$

выражение для альтернативного параметра средней скорости изменения затрат $\left\langle m \right\rangle \left(t, S \right)$ базового продукта (42), получим выражение уравнения баланса через альтернативные макропараметры

$$\frac{\partial \left[c \right]_0}{\partial t} + \frac{\partial \left(\left\langle m \right\rangle \cdot \left[c \right]_0 \right)}{\partial S} = \int_0^\infty dm \cdot J_{Gen}(t, S, m) \, . \qquad (50)$$

2.3.3. Уравнение баланса для момента первого порядка через альтернативные макропараметры производственной системы.

Подставив в балансовое уравнение (31) для момента первого порядка

$$\frac{\partial \left[c \right]_1}{\partial t} + \frac{\partial \left[c \right]_2}{\partial S} = f(t, S) \cdot \left[c \right]_0 + \int_0^\infty dm \cdot m \cdot J_{Gen}(t, S, m) \, , \qquad (31)$$

выражение для альтернативного параметра средней скорости изменения затрат $\left\langle m \right\rangle \left(t, S \right)$ базового продукта (42) и дисперсию $P_m \left(t, S \right)$ скорости изменения затрат (44) при движении базовых продуктов от одной технологической операции к другой , получим выражение уравнения баланса для момента нулевого порядка через альтернативные макропараметры

$$\frac{\partial[c]_1}{\partial t}+\frac{\partial[c]_2}{\partial S}-f(t,S)\cdot[c]_0-\int_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m)=\left|\begin{array}{l}\textit{используя соотношения}\\ [c]_1=\langle m\rangle\cdot[c]_0\\ [c]_2=\langle m\rangle^2\cdot[c]_0+P_m\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\partial\left(\langle m\rangle\cdot[c]_0\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\langle m\rangle^2\cdot[c]_0+P_m\right)}{\partial S}-f(t,S)\cdot[c]_0-\int_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m)=$$

$$=\langle m\rangle\cdot\frac{\partial[c]_0}{\partial t}+\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial t}\cdot[c]_0+\langle m\rangle\cdot\frac{\partial\left(\langle m\rangle\cdot[c]_0\right)}{\partial S}+\langle m\rangle\cdot[c]_0\cdot\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial S}+\frac{\partial P_m}{\partial S}-$$

$$-f(t,S)\cdot[c]_0-\int_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m)=\left|\begin{array}{l}\textit{воспользуемся балансовым уравнением}\\ \dfrac{\partial[c]_0}{\partial t}+\dfrac{\partial\left(\langle m\rangle\cdot[c]_0\right)}{\partial S}=\displaystyle\int_0^\infty dm\cdot J_{Gen}(t,S,m)\end{array}\right|=$$

$$=\langle m\rangle\cdot\int_0^\infty dm\cdot J_{Gen}(t,S,m)+\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial t}\cdot[c]_0+\langle m\rangle\cdot[c]_0\cdot\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial S}+\frac{\partial P_m}{\partial S}-$$

$$-f(t,S)\cdot[c]_0-\int_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m)=$$

$$=\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial t}\cdot[c]_0+\langle m\rangle\cdot[c]_0\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial S}+\frac{\partial P_m}{\partial S}-f(t,S)\cdot[c]_0-\int_0^\infty dm\cdot\left(m-\langle m\rangle\right)J_{Gen}(t,S,m)$$

Сокращая выражение на нулевой начальный момент $[c]_0$, получим вид уравнения темпа через альтернативные макропараметры

$$\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial t}+\langle m\rangle\cdot\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial S}=-\frac{1}{[c]_0}\cdot\frac{\partial P_m}{\partial S}+f(t,S)-\frac{1}{[c]_0}\cdot\int_0^\infty dm\cdot\left(m-\langle m\rangle\right)\cdot J_{Gen}(t,S,m). \tag{51}$$

Подставив

$$P_m=[c]_0\cdot s_m^2,\qquad \frac{1}{[c]_0}\cdot\frac{\partial P_m}{\partial S}=\frac{1}{[c]_0}\cdot\frac{\partial\left([c]_0\cdot s_m^2\right)}{\partial S}=\frac{\partial s_m^2}{\partial S}+\frac{s_m^2}{[c]_0}\cdot\frac{\partial[c]_0}{\partial S},$$

в балансовое уравнение для момента первого порядка

$$\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial t}+\langle m\rangle\cdot\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial S}=-\frac{\partial s_m^2}{\partial S}-\frac{s_m^2}{[c]_0}\cdot\frac{\partial[c]_0}{\partial S}+f(t,S)-$$

$$-\frac{1}{[c]_0}\cdot\int_0^\infty dm\cdot\left(m-\langle m\rangle\right)\cdot J_{Gen}(t,S,m)\,, \qquad (52)$$

получим вид уравнения баланса через среднеквадратичное отклонение $s_m^2(t,S)$

$$\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\langle m\rangle^2}{2}+s_m^2\right)=-\frac{s_m^2}{[c]_0}\cdot\frac{\partial[c]_0}{\partial S}+f(t,S)-$$

$$-\frac{1}{[c]_0}\cdot\int_0^\infty dm\cdot\left(m-\langle m\rangle\right)\cdot J_{Gen}(t,S,m) \qquad (53)$$

2.3.4.Уравнение баланса для момента второго порядка через альтернативные макропараметры производственной системы.

Подставив в балансовое уравнение (31) для момента второго порядка

$$\frac{\partial[c]_2}{\partial t}+\frac{\partial[c]_3}{\partial S}=2\cdot f(t,S)\cdot[c]_1+\int_0^\infty dm\cdot m^2\cdot J_{Gen}(t,S,m)\,, \qquad (31)$$

выражение для альтернативного параметра средней скорости изменения затрат $\langle m\rangle(t,S)$ базового продукта (42) и дисперсию $P_m(t,S)$ скорости изменения затрат (44) при движении базовых продуктов от одной технологической операции к другой, получим уравнения баланса для момента нулевого порядка через альтернативные макропараметры производственной системы

$$\frac{\partial}{\partial t}\left([c]_0\cdot\left(\langle m\rangle^2+s_m^2\right)\right)+\frac{\partial}{\partial S}\left(\Theta_m+3\cdot\langle m\rangle\cdot[c]_0\cdot s_m^2+\langle m\rangle^3\cdot[c]_0\right)-$$

$$-2\cdot f(t,S)\cdot[c]_1-\int_0^\infty dm\cdot m^2\cdot J_{Gen}(t,S,m)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left([c]_0\cdot s_m^2\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left([c]_0\cdot\langle m\rangle^2\right)+\frac{\partial}{\partial S}\left(\Theta_m+3\cdot\langle m\rangle\cdot[c]_0\cdot s_m^2+\langle m\rangle^3\cdot[c]_0\right)-$$

$$-2\cdot f(t,S)\cdot[c]_1-\int_0^\infty dm\cdot m^2\cdot J_{Gen}(t,S,m)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left([c]_0\cdot s_m^2\right)+\langle m\rangle\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left([c]_0\cdot\langle m\rangle\right)+[c]_0\cdot\langle m\rangle\cdot\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial t}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial S}\left(\Theta_m+3\cdot\langle m\rangle\cdot[c]_0\cdot s_m^2+\langle m\rangle^3\cdot[c]_0\right)-2\cdot f(t,S)\cdot[c]_1-$$

$$-\int_0^\infty dm\cdot m^2\cdot J_{Gen}(t,S,m)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{Используем балансовое уравнение } (52)\\ \dfrac{\partial\langle m\rangle}{\partial t}+\langle m\rangle\cdot\dfrac{\partial\langle m\rangle}{\partial S}=f(t,S)-\dfrac{1}{[c]_0}\dfrac{\partial\left([c]_0\cdot s_m^2\right)}{\partial S}+\displaystyle\int_0^\infty dm\cdot\left(m-\langle m\rangle\right)\cdot J_{Gen}(t,S,m)\\ \textit{откуда}\\ [c]_0\cdot\langle m\rangle\cdot\dfrac{\partial\langle m\rangle}{\partial t}=-[c]_0\cdot\langle m\rangle^2\cdot\dfrac{\partial\langle m\rangle}{\partial S}+[c]_0\cdot\langle m\rangle\cdot f(t,S)-\langle m\rangle\cdot\dfrac{\partial\left([c]_0\cdot s_m^2\right)}{\partial S}+\\ +[c]_0\cdot\langle m\rangle\cdot\displaystyle\int_0^\infty dm\cdot\left(m-\langle m\rangle\right)\cdot J_{Gen}(t,S,m)\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left([c]_0\cdot s_m^2\right)+\langle m\rangle\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left([c]_0\cdot\langle m\rangle\right)+\frac{\partial\Theta_m}{\partial S}+2\cdot\langle m\rangle\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left([c]_0\cdot s_m^2\right)+$$

$$+3\cdot[c]_0\cdot s_m^2\,\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial S}+\langle m\rangle\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\langle m\rangle^2\cdot[c]_0\right)-f(t,S)\cdot[c]_1-$$

$$-\int_0^\infty dm\cdot\left(m^2-\langle m\rangle\cdot\left(m-\langle m\rangle\right)\right)J_{Gen}(t,S,m)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{Используем } (31) \textit{ и } (46)\\ \dfrac{\partial[c]_1}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial S}\left([c]_0\cdot s_m^2+[c]_0\cdot\langle m\rangle^2\right)=f(t,S)\cdot[c]_0+\displaystyle\int_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m)\\ \langle m\rangle\cdot\dfrac{\partial[c]_0\cdot\langle m\rangle}{\partial t}+\langle m\rangle\cdot\dfrac{\partial}{\partial S}\left([c]_0\cdot s_m^2+[c]_0\cdot\langle m\rangle^2\right)=\langle m\rangle\cdot f(t,S)\cdot[c]_0+\\ +\langle m\rangle\cdot\displaystyle\int_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m)\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\left[c\right]_0\cdot s_m^2\right)+\frac{\partial\Theta_m}{\partial S}+\left\langle m\right\rangle\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\left[c\right]_0\cdot s_m^2\right)+3\cdot\left[c\right]_0\cdot s_m^2\,\frac{\partial\left\langle m\right\rangle}{\partial S}+$$

$$+\left\langle m\right\rangle\cdot\int_0^\infty dm\cdot m\cdot J_G(t,S,m)-\int_0^\infty dm\cdot\left(m^2-\left\langle m\right\rangle\cdot\left(m-\left\langle m\right\rangle\right)\right)J_{Gen}(t,S,m)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\left[c\right]_0\cdot s_m^2\right)+\frac{\partial\Theta_m}{\partial S}+\left\langle m\right\rangle\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\left[c\right]_0\cdot s_m^2\right)+3\cdot\left[c\right]_0\cdot s_m^2\,\frac{\partial\left\langle m\right\rangle}{\partial S}-$$

$$-\int_0^\infty dm\cdot\left(m-\left\langle m\right\rangle\right)^2\cdot J_{Gen}(t,S,m)=0$$

Откуда уравнение баланса для момента второго порядка относительно моментов функции распределения случайной величины принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left[c\right]_0\cdot s_m^2\right)+\frac{\partial\Theta_m}{\partial S}+\left\langle m\right\rangle\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\left[c\right]_0\cdot s_m^2\right)+3\cdot\left[c\right]_0\cdot s_m^2\,\frac{\partial\left\langle m\right\rangle}{\partial S}=$$

$$=\int_0^\infty dm\cdot\left(m-\left\langle m\right\rangle\right)^2\cdot J_{Gen}(t,S,m)\,. \tag{54}$$

Используя соотношение между среднеквадратичным отклонением и дисперсией темпа базовых продуктов $P_m=\left[c\right]_0\cdot s_m^2$ (44), можно записать другой вид балансового уравнения для момента второго порядка

$$\frac{\partial P_m}{\partial t}+\frac{\partial\Theta_m}{\partial S}+\left\langle m\right\rangle\cdot\frac{\partial P_m}{\partial S}+3\cdot P_m\,\frac{\partial\left\langle m\right\rangle}{\partial S}=\int_0^\infty dm\cdot\left(m-\left\langle m\right\rangle\right)^2\cdot J_{Gen}(t,S,m)\,. \tag{55}$$

2.3.5. Общая система уравнений для альтернативных макропараметров производственной системы

Микроскопическим величинам S_j (грн) и $m_j=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S_j}{\Delta t}$ (грн/час) базовых продуктов в технологическом пространстве $\left(S_j,m_j\right)$, соответствует система балансовых уравнений

$$\frac{\partial\left[c\right]_0}{\partial t}+\frac{\partial\left(\left\langle m\right\rangle\cdot\left[c\right]_0\right)}{\partial S}=\int_0^\infty dm\cdot J_{Gen}(t,S,m)\,,$$

$$\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial t}+\langle m\rangle\cdot\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial S}=-\frac{1}{[c]_0}\cdot\frac{\partial\left([c]_0\cdot s_m^2\right)}{\partial S}+f(t,S)-$$

$$-\frac{1}{[c]_0}\cdot\int_0^\infty dm\cdot\left(m-\langle m\rangle\right)\cdot J_{Gen}(t,S,m),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left([c]_0\cdot s_m^2\right)+\frac{\partial\Theta_m}{\partial S}+\langle m\rangle\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left([c]_0\cdot s_m^2\right)+3\cdot[c]_0\cdot s_m^2\,\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial S}=$$

$$=\int_0^\infty dm\cdot\left(m-\langle m\rangle\right)^2\cdot J_{Gen}(t,S,m) \qquad (55)$$

или

$$\frac{\partial[c]_0}{\partial t}+\frac{\partial\left(\langle m\rangle\cdot[c]_0\right)}{\partial S}=\int_0^\infty dm\cdot J_{Gen}(t,S,m),$$

$$\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial t}+\langle m\rangle\cdot\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial S}=-\frac{1}{[c]_0}\cdot\frac{\partial P_m}{\partial S}+f(t,S)-\frac{1}{[c]_0}\cdot\int_0^\infty dm\cdot\left(m-\langle m\rangle\right)\cdot J_{Gen}(t,S,m),$$

$$\frac{\partial P_m}{\partial t}+\frac{\partial\Theta_m}{\partial S}+\langle m\rangle\cdot\frac{\partial P_m}{\partial S}+3\cdot P_m\,\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial S}=\int_0^\infty dm\cdot\left(m-\langle m\rangle\right)^2\cdot J_{Gen}(t,S,m). \qquad (56)$$

Макроскопические параметры производственной системы являются комбинации начальных и центральных моментов функции распределения базовых продуктов $c\left(t,S,m\right)$ по скоростям изменения затрат m, связаны между собою через балансовые уравнения (55), (56) и с микроскопическими параметрами через уравнения связи (2.2)

$$\int_0^\infty dm\cdot m^k\cdot c\left(t,S,m\right)=[c]_k\left(t,S\right),\quad k=0,1,2,3,...,N_k. \qquad (2.2)$$

Функция распределения базовых продуктов $c\left(t,S,m\right)$ по скоростям изменения затрат m нормирована на количество базовых продуктов, находящихся в производственном процессе в текущий момент времени

$$\int_0^\infty dS\cdot\int_0^\infty dm\cdot c\left(t,S,m\right)=N(t), \qquad (2.1)$$

задается кинетическим уравнением технологического процесса

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial S}\cdot m+\frac{\partial c}{\partial m}\cdot f(t,S)=\mathrm{J}_{Gen}(t,S,m), \qquad (3.1.2)$$

$$\frac{dS}{dt} = m\,, \qquad \frac{\partial J}{\partial S} - \frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial m} = 0$$

с заданной технологическим процессом инженерно-производственной $\frac{dm}{dt} = f(t,S)$ и генераторной $\mathrm{J}_{Gen}(t,S,m)$ функциями производственной системы с массовым выпуском продукции [4].

ВЫВОДЫ

Макропараметры производственной системы связаны между собой через микроскопический уровень

$$\int_0^\infty dm \cdot m^k \cdot c\left(t,S,m\right) = \left[\,c\,\right]_k \left(t,S\right)\,, \quad k = 0,1,2,3......N_k\,. \tag{2}$$

Связь представлена в виде балансовых уравнений, полученных путем агрегирования слагаемых кинетического уравнения функции распределения базовых продуктов

$$\int_0^\infty dm \cdot m^k \cdot \frac{\partial c}{\partial t} + \int_0^\infty dm \cdot m^{k+1} \cdot \frac{\partial c}{\partial S} + \int_0^\infty dm \cdot m^k \cdot f \cdot \frac{\partial c}{\partial m} = \int_0^\infty dm \cdot m^k \cdot \mathrm{J}_{\mathrm{Gen}}\,, \tag{3}$$

или

$$\frac{\partial\left[\,c\,\right]_k}{\partial t} + \frac{\partial\left[\,c\,\right]_{k+1}}{\partial S} = k \cdot f\left(t,S\right) \cdot \left[\,c\,\right]_{k-1} + \int_0^\infty dm \cdot m^k \cdot J_{Gen}\,. \tag{31}$$

Уравнения балансов записаны для начальных и центральных моментов функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$ и их комбинаций. Определено, что уравнения балансов являются незамкнутыми. Для обеспечения замкнутости системы уравнений, описывающих функционирование производственной системы, требуется дополнительное уравнение. Показано, что вид функции распределения $c(t,S,m)$ базовых продуктов определяется ее моментами, изменения которых в технологическом пространстве и времени задаются балансовыми уравнениями (3). Инженерно-производственная функция производственной системы с массовым выпуском продукции используется как для микроскопического, так и для макроскопического описания производственных систем.

1. Прыткин Б.В., Технико-экономический анализ производства. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000г., 399стр.
2. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового произ-водства и продвижения продукции на рынок. Х.: ХНУ, 2003 .-272стр
3. Летенко В.А., Родионов Б.Н. Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием. Часть 2, Внутризаводское планирование. - М.: Высшая школа, 1979. – 232 с.
4. Пигнастый О.М. Об особенностях построения моделей, описывающих функционирование производственных систем авиационно-космической промышленности, Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: Сб. науч. тр. Нац. аэрокосмич. ун-та им.Н.Е. Жуковского «ХАИ». Вып.43(4). Харьков: НАКУ, 2005.–N43(4)–С.120-136
5. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Учеб. Пособие для втузов.- 2-е изд., - М.: Высш. шк., 2000. – 480 с.
6. Юхновский И.Р., Термодинамические аналогии в экономике. Международная конференция НАНУ «Статистическая физика: Общие проблемы и новые применения», Львов, 2005г., стр.51
7. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. Перевод с английского под редакцией и с предисловием А.А.Конюса. – М.: Прогресс, 1975. - 605 с.
8. Форрестер Дж., Основы кибернетики предприятия.- М.:Изд. “Прогресс” 1961г. 341стр,

3.ХАРАКТЕРНЫЕ ЧИСЛА ОПИСАНИЯ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

Производственная система предприятия представлена в виде системы с большим количеством элементов – предметов труда. Посредством аппарата статистической механики введены характерные числа производственной системы. Данный подход дает возможность провести качественную оценку функционирования производственного процесса, обоснованно подобрать для описания реального производственного объекта соответствующую систему уравнений балансов макроскопических параметров. Оценку выбора модели следует воспринимать как качественную. Подход обладает тем преимуществом, что позволяет легко сравнивать результаты, соответствующие различным микромоделям.

Обширные разделы теории организации, планирования и управления производственным предприятием развиты в рамках простых моделей [1-7]. Однако не всегда поведение реальных производственных систем может быть с достаточной точностью описано с помощью этих простейших моделей [8 - 11]. Различные производственные системы при одних и тех же внешних условиях ведут себя по-разному. Следовательно, одних и тех же уравнений, даже с добавлением соответствующих граничных условий, недостаточно для описания функционирования конкретной производственной системы [12]. Этот факт проявляется в том, что число уравнений меньше числа входящих в них неизвестных, система уравнений незамкнута. Построение замкнутой системы уравнений, описывающей функционирование рассматриваемой производственной среды, связано с поисками дополнительных соотношений между параметрами данной производственной среды. Построить замкнутую систему уравнений – это значить построить математическую модель изучаемой производственной среды.

Построение новых моделей производственных систем связано с экспериментальным изучением организации и технологии производства [1, 8] и вызвано требованиями пятого этапа развития экономической теории [8]. Для построения таких моделей необходимо использовать известные общие принципы механики и физики, например, термодинамические соотношения [13]. Полезным оказывается использование вариационных принципов [14,15]. Большая разнообразность и сложность технологии изготовления конечного продукта производственной системы требует строить теорию функционирования производственной системы на базе представления о производственной системе предприятия как совокупности предметов труда, находящихся в разных стадиях технологической обработки [14]. Однако следить за поведением каждого предмета труда (базового продукта производственной системы) из-за их весьма большого количества и вероятностного характера воздействия на базовый продукт технологического оборудования невозможно [12]. Одним из общих методов подхода к исследованию поведения больших систем является довольно развитый аппарат статистической физики. В нем применяется вероятностный подход к изучению больших систем. Данный подход позволяет получить путем агрегирования микропараметров рассматриваемого производства модель функционирования производственной системы с конкретным технологическим процессом в рамках существующего на предприятии производственного оборудования. При этом с практической точки зрения интересно получить характерные числа для функционирования производственных систем, позволяющие обосновать выбор соответствующей модели описания реального производственного объекта.

3.1.Кинетическое уравнение, описывающее функционирование производственной системы

Описание систем функционирования современного массового производства представлено в виде стохастического процесса [6, с. 178]. Состояние системы определено как состояние общего числа N базовых продуктов [7,с.183] производственной системы. Состояние базового продукта описывается микроскопическими величинами $\left(\mathrm{S_j}, m_j\right)$, где $\mathrm{S_j}$ (грн) и $m_j = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S_j}{\Delta t}$ (грн/ч) соответственно сумма общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенных производственной системой на j-й базовый продукт, $0 < j \le N$. Производственную систему характеризует целевая функция $J\left(\mathrm{t}, \mathrm{S_j}, m_j\right)$ (2.1.45):

$$J(t,S_j,m_j) = \sum_{j=1}^{N_p} \frac{m_j^{\,2}}{2} + F_{1y}(S_{yV}) \cdot \sum_{j=1}^{N_p} m_j - W_{0y}(S_{yV}), \qquad (2.1.45)$$

Функция $W_{0y}(S_{yV})$ (2.1.44) представляет собою производственный потенциал предприятия, создает технологическое поле производственного процесса, задаваемое непосредственно технологическим потенциалом $F_{0y\,V}(S_{y\,V})$ (2.1.41), потенциалом накладных затрат $F_{0y\,C}(S_{y\,V})$ (2.1.43) и потенциалом взаимодействия $F_{0y\,VC}(S_{y\,V})$ (2.1.42). Состояние системы в некоторый момент времени определено, если определены микроскопические величины $\left(\mathrm{S}_1, m_1; \ldots\ldots \mathrm{S}_{\mathrm{N}}, m_N\right)$, а в любой другой момент времени найдено из уравнений состояния базовых продуктов:

$$\frac{dS_j}{dt} = m_j, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_П\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}_{\mathrm{j}}, m_j\right)}{\partial m_j}\right) = \frac{\partial J_П\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}_{\mathrm{j}}, m_j\right)}{\partial \mathrm{S}_{\mathrm{j}}} = f_j(t, S), \qquad (2.1.1)$$

где $f_j(t, S)$ - инженерно-производственная функция. Вместо того, чтобы рассматривать состояние производственной системы с микровеличинами $\left(\mathrm{S}_1, m_1; \ldots\ldots \mathrm{S}_{\mathrm{N}}, m_N\right)$, вводится нормированная функция распределения $c(t, S, m)$ числа N базовых продуктов в фазовом пространстве $\left(\mathrm{S}, m\right)$ [16], удовлетворяющая кинетическому уравнению (2.1.2):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial c}{\partial m} \cdot f(t, S) = \mathrm{J}(t, S, m), \qquad (2.1.2)$$

$$\frac{dS}{dt} = m, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_П\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}, m\right)}{\partial m}\right) = \frac{\partial J_П\left(\mathrm{t}, \mathrm{S}, m\right)}{\partial \mathrm{S}} = f(t, S). \qquad (2.1.3)$$

Генераторная функция $\mathrm{J}(t, S, m)$ задается плотностью размещения оборудования $l_{оборуд}$ вдоль технологической цепочки и его техническими характеристиками [12]:

$$\mathrm{J}(t, S, m) = l_{оборуд} \cdot \left\{ \int_0^\infty \left[y\left[\tilde{m} \to m\right] \cdot \tilde{m} \cdot c(t, S, \tilde{m}) \right] \cdot d\tilde{m} - m \cdot c \right\} \qquad (2.1.8)$$

где $y\left[m \to \tilde{m}\right]$ - функция, определяемая паспортными данными работы технологического оборудования. Полная вероятность перехода базового продукта производственной системы в любое состояние равна единице:

$$\int_0^\infty y\left[m \to \tilde{m}\right] \cdot d\tilde{m} = 1$$ (нулевой момент функции $y\left[m \to \tilde{m}\right]$), (2.1.6)

а производительность работы оборудования $\left[c\right]_{1y} = m_y \cdot \left[c\right]_0$ и среднеквадратичное отклонение $s_c^2 = s_y^2 \cdot \left[c\right]_0^2$ могут быть определены через первый и второй моменты функции работы технологического оборудования $y\left[m \to \tilde{m}\right]$:

$$\int_0^\infty y\left[m \to \tilde{m}\right] \cdot \tilde{m} \cdot d\tilde{m} = m_y \quad \text{(первый момент функции } y\left[m \to \tilde{m}\right]\text{)}, \tag{1}$$

$$\int_0^\infty y\left[m \to \tilde{m}\right] \cdot \tilde{m}^2 \cdot d\tilde{m} = m_y^2 + s_y^2 \quad \text{(второй момент функции } y\left[m \to \tilde{m}\right]\text{)}. \tag{2}$$

Первый момент функции работы технологического оборудования $y\left[m \to \tilde{m}\right]$ характеризует зависимость скорости изменения затрат при прохождении базовым продуктом единицы технологического оборудования, второй – среднеквадратичное отклонение скорости изменения затрат при прохождении базовым продуктом единицы технологического оборудования от своего среднего значения m_y, определяемого характеристиками оборудования и особенностями технологического процесса.

3.2.Безразмерные характерные числа производственной системы.

Решение уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$ в фазовом пространстве (S,m) связано со значительными трудностями. Первый шаг анализа интегро-дифференциального уравнения (2.1.9) должен состоять в исследовании порядка величин различных слагаемых.

Обозначим через t, h, x характерные время, скорость изменения затрат и шаг по переменной S. Введем безразмерные переменные $\tilde{t}$, $\tilde{S}$, $\tilde{m}$, связанные с переменными t, h, x следующим образом:

$$t = t \cdot \tilde{t}; \quad S = x \cdot \tilde{S}; \quad m = h \cdot \tilde{m}; \quad J(c,c) = \left\langle l_{оборуд} \right\rangle \cdot h \cdot \tilde{J}(c,c), \tag{3}$$

где $\left\langle l_{оборуд} \right\rangle$ - характерная плотность расположения оборудования вдоль технологической цепочки производственного процесса.

Тогда кинетическое уравнение производственной системы (2.1.9) принимает вид

$$\left[\frac{\partial c}{t\cdot\partial t}+\frac{\partial c}{x\cdot\partial S}\cdot h\cdot m+\frac{\partial c}{h\cdot\partial m}\cdot\frac{h\cdot dm}{t\cdot\partial t}\right]=\left\langle l_{оборуд}\right\rangle\cdot h\cdot J(c,c)\,. \qquad (4)$$

Разделим слагаемые равенства (4) на $h\cdot x^{-1}$:

$$\frac{h}{x\cdot\left\langle l_{оборуд}\right\rangle}\cdot\left[\frac{x\cdot\partial c}{h\cdot t\cdot\partial t}+\frac{\partial c}{\partial S}\cdot m+\frac{x\cdot\partial c}{h\cdot t\cdot\partial m}\cdot\frac{dm}{\cdot\partial t}\right]=h\cdot J(c,c)\,, \qquad (5)$$

и после сокращения на h получим

$$\frac{1}{x\cdot\left\langle l_{оборуд}\right\rangle}\cdot\left[\frac{x\cdot\partial c}{h\cdot t\cdot\partial t}+\frac{\partial c}{\partial S}\cdot m+\frac{x\cdot\partial c}{h\cdot t\cdot\partial m}\cdot\frac{dm}{\partial t}\right]=J(c,c)\,. \qquad (6)$$

Введем обозначения

$$K_v=\frac{\left[\dfrac{1}{\left\langle l_{оборуд}\right\rangle}\right]}{x}\,,\ P_m=\frac{x}{t\cdot h}\,,\ P_0=K_v\cdot P_m=\frac{\left[\dfrac{1}{\left\langle l_{оборуд}\right\rangle}\right]}{x}\cdot\frac{x}{t\cdot h}=\frac{1}{\left\langle l_{оборуд}\right\rangle\cdot t\cdot h}\,. \qquad (7)$$

Кинетическое уравнение производственной системы (2.1.9) с учетом обозначений (7) примет вид

$$K_v\cdot\left[P_m\cdot\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial S}\cdot m+P_m\cdot\frac{\partial c}{\partial m}\cdot\frac{dm}{\partial t}\right]=J(c,c)\,. \qquad (8)$$

В предельных случаях вид кинетического уравнения производственной системы представлен в табл. 1.

Таблица 1. Вид кинетического уравнения производственной системы в нулевом приближении по малому параметру $e(K_v,P_m)\to 0$ относительно равновесного состояния производственной системы

	$P_m\to 0$	$P_m\to 1$	$P_m\to\infty$
$K_v\to 0$, $e\approx K_v$	$\frac{\partial c}{\partial S}\cdot m=0$, $J(c,c)=0$	$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial S}\cdot m+\frac{\partial c}{\partial m}\cdot\frac{dm}{\partial t}=0$, $J(c,c)=0$	$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial m}\cdot\frac{dm}{\partial t}=0$, $J(c,c)=0$
$K_v\to 1$	$\frac{\partial c}{\partial S}\cdot m=J$	$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial S}\cdot m+\frac{\partial c}{\partial m}\cdot\frac{dm}{\partial t}=J$	$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial m}\cdot\frac{dm}{\partial t}=J$
$K_v\to\infty$, $e\approx 1/K_v$	$\frac{\partial c}{\partial S}\cdot m=0$,	$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial S}\cdot m+\frac{\partial c}{\partial m}\cdot\frac{dm}{\partial t}=0$,	$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial m}\cdot\frac{dm}{\partial t}=0$

Умножив кинетические уравнения в табл. 1 соответственно на 1, m, $\frac{m^2}{2}$ и проинтегрировав по всему диапазону m, получим уравнения балансов макропараметров производственной системы [16] в нулевом приближении по малому параметру $e(K_v, P_m) \to 0$ относительно равновесного состояния, которые представлены в табл. 2. Таблица показывает, что вид уравнений макропараметров производственной системы, описывающих функционирование технологического процесса, зависит от порядка величины характерных чисел производственной системы.

В качестве t, x, h (характерные время, шаг по переменной S и скорость изменения затрат) могут быть взяты время производственного цикла T_d, $t = T_d$, средняя себестоимость базового продукта S_d, $x = S_d$, и средняя скорость изменения затрат за период производственного цикла h_d, $h_d = h$. Величина

$$\frac{1}{\left\langle l_{оборуд} \right\rangle} = L_d \tag{9}$$

есть среднее перенесение затрат на базовый продукт между единицами оборудования (или длина свободного перемещения базового продукта между технологическими воздействиями).

Таблица 2. Вид уравнений балансов макропараметров производст-венной системы в нулевом приближении по малому параметру $e(K_v, P_m) \to 0$ относительно равновесного состояния производствен-ной системы

	$P_m \to 0$	$P_m \to 1$	$P_m \to \infty$
1	2	3	4
$K_v \to 0$ $e \approx K_v$	$\frac{\partial [c]_1}{\partial S} = 0$, $\frac{\partial [c]_2}{\partial S} = 0$, $\frac{\partial [c]_3}{\partial S} = 0$	$\frac{\partial [c]_0}{\partial t} + \frac{\partial [c]_1}{\partial S} = 0$, $\frac{\partial [c]_1}{\partial t} + \frac{\partial [c]_2}{\partial S} = f(t,S) \cdot [c]_0$ $\frac{\partial [c]_2}{\partial t} + \frac{\partial [c]_3}{\partial S} = f(t,S) \cdot [c]_1$	$\frac{\partial [c]_0}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial [c]_1}{\partial t} = f(t,S) \cdot [c]_0$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial [c]_2}{\partial t} = f(t,S) \cdot [c]_1$
	$J(c,c) = 0 \Rightarrow \{ y[\tilde{m} \to m] \cdot [c]_1 - m \cdot c \} = 0$		

1	2	3	4
$K_v \to 1$	$\dfrac{\partial\left[c\right]_1}{\partial S} = \int\limits_0^\infty dm \cdot J$, $\dfrac{\partial\left[c\right]_2}{\partial S} = \int\limits_0^\infty dm \cdot m \cdot J$, $\dfrac{\partial\left[c\right]_3}{\partial S} = \int\limits_0^\infty dm \cdot m^2 \cdot J$	$\dfrac{\partial\left[c\right]_0}{\partial t} + \dfrac{\partial\left[c\right]_1}{\partial S} = \int\limits_0^\infty dm \cdot J$, $\dfrac{\partial\left[c\right]_1}{\partial t} + \dfrac{\partial\left[c\right]_2}{\partial S} =$ $= f(t,S) \cdot \left[c\right]_0 + \int\limits_0^\infty dm \cdot m \cdot J$, $\dfrac{\partial\left[c\right]_2}{\partial t} + \dfrac{\partial\left[c\right]_3}{\partial S} =$ $= 2 \cdot f(t,S) \cdot \left[c\right]_1 + \int\limits_0^\infty dm \cdot m^2 \cdot J$	$\dfrac{\partial\left[c\right]_0}{\partial t} + \dfrac{\partial\left[c\right]_1}{\partial S} = \int\limits_0^\infty dm \cdot J$, $\dfrac{\partial\left[c\right]_1}{\partial t} + \dfrac{\partial\left[c\right]_2}{\partial S} = \int\limits_0^\infty dm \cdot m \cdot J$, $\dfrac{\partial\left[c\right]_2}{\partial t} + \dfrac{\partial\left[c\right]_3}{\partial S} = \int\limits_0^\infty dm \cdot m^2 \cdot J$
$K_v \to \infty$ $e \approx {}^1\!/_{K_v}$	$\dfrac{\partial\left[c\right]_1}{\partial S} = 0$, $\dfrac{\partial\left[c\right]_2}{\partial S} = 0$, $\dfrac{\partial\left[c\right]_3}{\partial S} = 0$	$\dfrac{\partial\left[c\right]_0}{\partial t} + \dfrac{\partial\left[c\right]_1}{\partial S} = 0$, $\dfrac{\partial\left[c\right]_1}{\partial t} + \dfrac{\partial\left[c\right]_2}{\partial S} =$ $= f(t,S) \cdot \left[c\right]_0$, $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial\left[c\right]_2}{\partial t} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial\left[c\right]_3}{\partial S} =$ $= f(t,S) \cdot \left[c\right]_1$	$\dfrac{\partial\left[c\right]_0}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial\left[c\right]_1}{\partial t} = f(t,S) \cdot \left[c\right]_0$, $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial\left[c\right]_2}{\partial t} = f(t,S) \cdot \left[c\right]_1$
	Функция распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$ в нулевом приближении по $e(K_v, P_m) \to 0$ не зависит от функции $y\left[m' \to m\right]$, описывающей работу технологического оборудования		

Тогда характерные числа производственной системы примут вид:

$$K_v = \frac{L_d}{S_d}, \quad P_m = \frac{S_d}{T_d \cdot h_d}, \quad P_0 = K_v \cdot P_m = \frac{L_d}{T_d \cdot h_d}. \qquad (10)$$

Подстановка значений времени производственного цикла T_d, средней себестоимости базового продукта S_d, средней скорости изменения затрат за период производственного цикла h_d и средней плотности расположения оборудования вдоль технологической цепочки $\left\langle l_{оборуд} \right\rangle$ в выражения для характерных чисел производственной системы (9) дает возможность обосновать выбор модели описания функционирования производственной системы. Данную оценку следует воспринимать скорее как качественную, чем количественную. Однако такой подход обладает тем преимуществом, что позволяет легко сравнивать результаты, соответствующие различным микромоделям, так как уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$ в фазовом пространстве (S,m), будучи выраженное через макроизмеряемые величины t, h, x, не зависит от вида интеграла

$$l_{оборуд}\cdot\int_0^\infty\Big[y\,[\tilde{m}\to m]\cdot\tilde{m}\cdot c(t,S,\tilde{m})-y\,[m\to\tilde{m}]\cdot m\cdot c(t,S,m)\Big]\cdot d\tilde{m}, \quad (2.1.8)$$

и может быть представлено в виде уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат через макроизмеряемые величины t, h, x:

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial S}\cdot m+\frac{\partial c}{\partial m}\cdot f(t,S)\approx l_{оборуд}\cdot h\cdot\left[c-c_0\right]. \quad (11)$$

При $\left[c-c_0\right]=0$ имеем случай равновесного состояния производственной системы, для которого справедливо тождество

$$J(c_0,c_0)=0. \quad (11)$$

Значение характерного числа K_v изменяется в пределах от нуля до бесконечности, и предусматривают два предельных случая: $K_v\to 0$ и $K_v\to\infty$. Эти два случая описывают ситуации, относящиеся к предельно малым и предельно большим изменениям затрат базового продукта между двумя основными операциями.

Класс производственных систем, для которых качественная оценка состояния дает значения коэффициентов $K_v<<1$, $P_m\approx 1$, соответствует плотному потоку базовых продуктов вдоль технологической цепочки производственного процесса с высокой концентрацией технологического оборудования. Случай $K_v>>1$, $P_m\approx 1$ соответствует производственному процессу, у которого, как правило, малая плотность обрабатывающего оборудования $\left(l_{оборуд}\to 0\right)$ вдоль цепочки технологического процесса изготовления базового продукта. Тем самым, базовый продукт проходит большой путь между основными операциями, находясь в свободном, необрабатывающемся состоянии, свободно перемещается вдоль технологической цепочки. Под свободным перемещением будем понимать такое движение базового продукта вдоль технологической цепочки производственного процесса, при котором перенос затрат на базовый продукт происходит наперед заданным способом, определяемым инженерно-производственной функцией технологического процесса $f(t,S)$ без наличия отклонения скорости изменения затрат от своего среднего значения. Такой перенос характеризуется функцией $y\left[m \to \tilde{m}\right] = y\left[m \to m\right]$, т.е. после технологической обработки скорость изменения затрат, отнесенных на базовый продукт, может принимать только значение, определенное паспортом оборудования, без каких-то отклонений от паспортной величины.

Выводы

Модель функционирования производственных систем может быть оценена характерными числами. Характерные числа дают качественную оценку функционирования производственного процесса, позволяют подобрать для описания реальной производственной системы соответствующую систему уравнений балансов макроскопических параметров производственной системы (см. табл. 2). Конкретный вид генераторной функции функционирующей производственной системы в случае, близком к равновесному состоянию, может быть заменен через значения времени производственного цикла T_d, средней себестоимости базового продукта S_d, средней скорости изменения затрат за период производственного цикла h_d и средней плотности расположения оборудования вдоль технологической цепочки $\left\langle l_{оборуд} \right\rangle$ характерных чисел производственной системы. Такой подход дает возможность обосновать выбор модели описания функционирования производственной системы. Оценку выбора модели следует воспринимать скорее как качественную, чем количественную. Однако такой подход обладает тем преимуществом, что позволяет легко сравнивать результаты, соответствующие различным микромоделям.

1. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия. М.: Прогресс, 1961.- 341с.
2. Балашевич В.А. Математические методы в управлении производством. – Минск: Вышэйш. шк., 1976. – 334 с.
3. Басовский Л.Е., Протасьев В.Б. Управление качеством. – М.: ИНФРА-М, 2004. - 212 с.
4. Курс для высшего управленческого персонала. – М.: Экономика, 1970. – 807 с.

5. Леонтьев В.В. Исследование структуры американской экономики. – М.: Гос. стат. изд-во, 1958. - 640 с.
6. Прыткин Б.В. Технико-экономический анализ производства. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 399 с.
7. Летенко В.А., Родионов Б.Н. Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием:В 2 ч. - М.: Высш. шк., 1979. - Ч. 2: Внутризаводское планирование. – 232 с.
8. Занг В.-Б. Синергетическая экономика. . – М.: Мир, 1999 – 335 с.
9. Рушицький Я.Я., Мілованов Т. С. Модифікована модель Філіпса-Лоренца для економічної системи (корпорації фірм) із стабільним капіталом // Доп. Нац. акад. наук України. – 1996. - N12. - С. 36 - 40.
10. Гончар Н.С. Информационная модель в экономике// Тез.докл. Междунар. конф. НАНУ «Статистическая физика: Общие проблемы и новые применения», Л., 2005. - С.33.
11. Чернавский Д.С., Старков Н.И., Щербаков А.В. О проблемах физической экономики // Успехи физических наук. - 2002. – т. 172. - N12. - С.1045 - 1066.
12. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок. - Х.: ХНУ, 2003 .- 272 с.
13. Юхновский И.Р. Термодинамические аналогии в экономике// Тез.докл. Междунар. конф. НАНУ «Статистическая физика: Общие проблемы и новые применения», Л., 2005. - С.51.
14. Пигнастый О.М. Инженерно-производственная функция предприятия серийным или массовым выпуском продукции// Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – Х.: НАКУ «ХАИ» - 2005. – Вып. 42(3) .– С.111 -117.
15. Пигнастый О.М. Об особенностях построения моделей, описывающих функционирование производственных систем авиационно-космической промышленности // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – Х.: НАКУ «ХАИ» - 2005. – Вып. 43(4) .–С.120 -136.
16. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции // Доп. Нац. акад. наук України. - 2005. – N7. – С. 66 - 71

4.ГЕНЕРАТОРНАЯ ФУНКЦИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ

Рассмотрено воздействие технологического оборудования на базовый продукт. Воздействие технологического оборудования на базовый продукт представлено в виде стохастического процесса переноса затрат. Расход сырья и материалов и время воздействия оборудования на базовый продукт для технологической операции являются случайными величинами. Процесс переноса затрат характеризуется числовыми характеристиками случайной величины, определяемыми из технических условий на поставляемое сырье и материалы для производства базового продукта и паспортных данных технологического оборудования.

При перемещении базового продукта [1,с.183]) вдоль технологической цепочки производственного процесса на заготовку оказывается воздействие со стороны орудий труда. Оборудование, находящееся в технологической цепочке, воздействует на базовый продукт, изменяя его качественно и количественно. Таким образом происходит увеличение затрат, перенесенных на базовый продукт при его движении вдоль технологической цепочки производственного процесса. Рассмотрим процесс воздействия со стороны технологического оборудования на базовый продукт производственной системы. Приращение стоимости $\mathrm{dS_j}$ на $m-$ой технологической операции для j-го базового продукта за время dt является случайной величиной и может быть выражено через мгновенную интенсивность передачи технологическим оборудованием условно-переменных $k_{jV\,m}$ (грн/час) и мгновенной интенсивностью передачи технологической линией условно-постоянных $k_{jC\,m}$ (грн/час) производственных ресурсов (затрат) (рис.2.1.3, 2.1.4):

$$\mathrm{dS_j} \approx a_{jV}(S_{y\,V})\cdot k_{jV}(S_{y\,V})\cdot \Delta t_{jO}(S_{y\,V})\cdot dv_{\,j}(S_{y\,V}) + a_{jC}(S_{y\,V})\cdot k_{jC}(S_{y\,V})\cdot dt \quad (2.1.13)$$

где $dv_{\,j}(S_{y\,V})$ - вероятность того, что j-й базовый продукт прошел технологическую обработку на $m-$ой технологической операции. Как правило, закон изменения мгновенной интенсивности передачи технологическим оборудованием условно-постоянных затрат $k_{jC\,m}$ (грн/час) задается на расчетный период, много больше характерного времени производственного цикла T_d изготовления базового продукта

$$\frac{k_{y\,C\,m}}{T_d} >> \frac{\partial k_{y\,C\,m}}{\partial t}, \qquad (2.1.14)$$

Мгновенная скорость изменения затрат для j-го базового продукта представляет собою величину

$$m_{\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{dS_j}}{dt} \approx a_{jV}(S_{y\,V}) \cdot k_{jV}(S_{y\,V}) \cdot \Delta t_{jO}(S_{y\,V}) \cdot \frac{dv_j(S_{y\,V})}{dt} + a_{jC}(S_{y\,V}) \cdot k_{jC}(S_{y\,V}) \qquad (1)$$

Мгновенная интенсивность передачи затрат от производственного оборудования к базовому продукту может быть записана для переменной составляющей затрат

$$k_{jV}(S_{y\,V}) = \frac{\Delta S_{jV\_CuM}(S_{y\,V}) + \Delta S_{jV\_ФОТ}(S_{y\,V})}{\Delta t_{jO}(S_{y\,V})} \qquad (2)$$

и, принимая во внимание (2.1.14), для постоянной составляющей затрат получим:

$$k_{jC}(S_{y\,V}) \approx k_{y\,C}(S_{y\,V}) + \left.\frac{\partial k_{jC}(S_{y\,V})}{\partial t}\right|_0 \cdot t + ..., \quad 0 < t < T_d. \qquad (3)$$

Расход сырья и материалов $\Delta S_{jV\_CuM}(S_{y\,V})$ и время воздействия оборудования на базовый продукт $\Delta t_{jO}(S_{y\,V})$ для $m-$ой технологической операции являются случайными величинами. Напротив, расценка за выполнение операции $\Delta S_{jV\_ФОТ}(S_{y\,V})$ представляет собою детерминированную величину.

Вероятность того, что j-й базовый продукт прошел технологическую обработку на $m-$ой технологической операции $dv_j(S_{y\,V})$ может быть представлена в виде равномерного распределения случайной величины

$$dv_j(S_{yV}) = \frac{dt}{\left(\Delta t_{yO\,m} + \Delta t_{yC\,m}\right)}, \qquad \int_0^{\left(\Delta t_{yO\,m}+\Delta t_{yC\,m}\right)} \frac{dt}{\left(\Delta t_{yO\,m} + \Delta t_{yC\,m}\right)} = 1. \qquad (2.1.23)$$

Вероятность того, что в текущий момент времени базовый продукт будет подвергнут технологической обработке (2.1.23), пропорциональна времени пребывания базового продукта в межоперационном заделе. Если технологический процесс поставлен по принципу технологической обработки базового продукта: первый пришел на технологическую операцию - последним ушел с технологической операции, то распределение случайной величины может быть представлено, например, функцией

$$dv_j(S_{yV}) \approx A \cdot \exp(B \cdot t) \cdot dt, \qquad \int_0^{\left(\Delta t_{yO\,m} + \Delta t_{yC\,m}\right)} A \cdot \exp(B \cdot t) \cdot dt = 1,$$

$$A = \frac{B}{\exp\left\langle \left(\Delta t_{yO\,m} + \Delta t_{yC\,m}\right) \cdot B \right\rangle - 1}. \qquad (4)$$

Другой распространенный принцип технологической обработки базового продукта: последним пришел на технологическую операцию – первый ушел с технологической операции, дает распределение случайной величины, например функцией

$$dv_j(S_{yV}) \approx \frac{A}{(e+t)} \cdot dt, \quad \int_0^{\left(\Delta t_{yO\,m} + \Delta t_{yC\,m}\right)} \frac{A}{(e+t)} \cdot dt = 1, \quad A = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{\left(\Delta t_{yO\,m} + \Delta t_{yC\,m}\right)}{e}\right)}. \qquad (5)$$

Величины A, B и e представляют собою коэффициенты, определяющие интенсивность протекания технологического процесса. Вид закона распределения случайной величины определяется как особенностями технологической обработки, так и особенностями хранения межоперационного задела и транспортировки базовых продуктов. Для упрощения построения генераторной функции будем полагать равномерный закон распределения случайной величины (2.1.23). Методология построения генераторной функции для равномерного закона распределения случайной величины может быть перенесена на другие виды закона распределения, определяющие вероятность того, что j-й базовый продукт прошел технологическую обработку на $m-$ой технологической операции.

Подставим (2), (2.1.23), (3) в выражение для мгновенной скорости изменения затрат j-го базового продукта

$$m_j \approx a_{jV}(S_{yV}) \cdot \frac{\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV}) + \Delta S_{jV\_ФОТ}(S_{yV})}{\Delta t_{jO}(S_{yV})} \cdot \Delta t_{jO}(S_{yV}) \cdot \frac{1}{\Delta t_{jO}(S_{yV}) + \Delta t_{jC\,m}} +$$

$$+ a_{jC}(S_{yV}) \cdot k_{yC}(S_{yV}) \approx$$

$$\approx a_{jV}(S_{yV})\cdot\left(\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV})+\Delta S_{jV\_ФОТ}(S_{yV})\right)\cdot\frac{1}{\Delta t_{jO}(S_{yV})+\Delta t_{jC\,m}}+$$

$$+a_{jC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV}) \qquad (6)$$

Для величины технологических заделов $\mathrm{N}_{y\ m} >> 1$ справедливо соотношение (2.1.5):

$$\lim_{\mathrm{N}_m\to\infty}\left(\Delta t_{jO\,m}+\Delta t_{jC\,m}\right)=\lim_{\mathrm{N}_m\to\infty}\left(\Delta t_{jO\,m}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\mathrm{N}_m}\Delta t_{kO\,m}\right)=\lim_{\mathrm{N}_m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}_m}\Delta t_{kO\,m}\right)=$$

$$\mathrm{N}_m\cdot\Delta t_{yO\,m} \qquad (7)$$

или

$$\Delta t_{yO\,m}=\lim_{\mathrm{N}_m\to\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{N}_m}\cdot\sum_{k=1}^{\mathrm{N}_m}\Delta t_{kO\,m}\right). \qquad (8)$$

Подставляя (7) в (6)

$$m_{\mathrm{j}}\approx a_{jV}(S_{yV})\cdot\frac{\left(\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV})+\Delta S_{jV\_ФОТ}(S_{yV})\right)}{\mathrm{N}_m\cdot\Delta t_{yO\,m}}+a_{jC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV}) \qquad (9)$$

и используя соотношения величин

$$\frac{1}{\Delta t_{yO\,m}}=[c]_{1y}, \qquad \frac{\left(\Delta S_{yV\_CuM}(S_{yV})+\Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right)}{N_m}=[c]_0, \qquad (10)$$

получаем

$$m_{\mathrm{j}}\approx a_{jV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\cdot\frac{\left(\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV})+\Delta S_{jV\_ФОТ}(S_{yV})\right)}{\left(\Delta S_{yV\_CuM}(S_{yV})+\Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right)}+a_{jC}(S_{yV})\cdot k_{yC}(S_{yV}).$$

(11)Выражение

$$[c]_{0j}=[c]_0\cdot\frac{\left(\Delta S_{yV\_CuM}(S_{yV})+\Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right)}{\left(\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV})+\Delta S_{jV\_ФОТ}(S_{yV})\right)}=$$

$$=\frac{N_m}{\left(\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV})+\Delta S_{jV\_ФОТ}(S_{yV})\right)} \qquad (12)$$

есть не что иное, как мгновенная плотность базовых продуктов в окрестности $m-$ой технологической операции в момент обработки j-го базового продукта, представляющая собою отношение количества базовых продуктов N_m в межоперационном заделе $m-$ой технологической операции в текущий момент времени к мгновенным затратам $\left(\Delta S_{jV\_CuM}(S_{y\,V})+\Delta S_{jV\_ФОТ}(S_{y\,V})\right)$, перенесенным технологическим оборудованием на j-го базовый продукт. Величина затрат $\left(\Delta S_{jV\_CuM}(S_{y\,V})+\Delta S_{jV\_ФОТ}(S_{y\,V})\right)$, перенесенных технологическим оборудованием на j-й базовый продукт, является мгновенным расстоянием между двумя технологическими операциями в момент обработки j-го базового продукта. Принимая во внимание (12), выражение для мгновенной скорости переноса затрат на j-й базовый продукт может быть записано в компактном виде

$$m_{\text{j}} \approx a_{jV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_{0j}}+a_{jC}(S_{y\,V})\cdot k_{y\,C}(S_{y\,V})\,. \qquad (13)$$

Дальнейшее рассмотрение производственной системы будем вести в предположении, что условно-постоянные затраты в ходе производственного процесса малы по сравнению с условно-переменными

$$m_{\text{j}} \approx a_{jV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_{0}}\cdot\frac{\left(\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV})+\Delta S_{jV\_ФОТ}(S_{yV})\right)}{\left(\Delta S_{yV\_CuM}(S_{yV})+\Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right)}, \qquad (14)$$

где $a_{jV}(S_{yV})\cdot\dfrac{[c]_{1y}}{[c]_{0}}\cdot\dfrac{\left(\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV})+\Delta S_{jV\_ФОТ}(S_{yV})\right)}{\left(\Delta S_{yV\_CuM}(S_{yV})+\Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right)} \gg a_{jC}(S_{y\,V})\cdot k_{y\,C}(S_{y\,V})$. (15)

Данному условию (15) удовлетворяют достаточное количество производственных систем с массовым выпуском продукции. Кроме того, для производственных систем, у которых доля условно-постоянных затрат сравнительно велика и неравенство (15) не выполняется, рассмотрение производственного процесса можно вести в разрезе условно-переменных затрат (в котором скорость изменения затрат представлена в виде (15)) и затем на конечный результат накладываются условно-постоянные затраты. Такое разделение решения задачи в срезе затрат на две части (раздельный анализ условно-переменных и условно-постоянных затрат в ходе технологического процесса) соответствует модели управления предприятия по маржинальному доходу, широко используется в практике управления предприятием.

Проведем анализ поведения случайной величины m_j. Из технических условий на поставляемое сырье и материалы и паспортных данных функционирования технологического оборудования нам известен закон распределения и числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсия) случайной величины $\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV})$. Так, например, при холодной обработке листового металла в технических условиях на поставляемый листовой прокат указана средняя толщина и средние габаритные размеры проката и допустимые отклонения указанных величин от своих средних значений. Это дает возможность определить средний расход сырья, используемый на технологической операции, и среднеквадратичное отклонение расхода сырья от своего среднего значения. Аналогично, паспортные параметры технологического оборудования задают среднюю точность обработки материала и допустимые отклонения указанной величины от своего среднего значения. Последнее корректирует норму расхода, определенную из технических условий на сырье и материалы с учетом возможностей технологического оборудования при учете процента брака изделий на заданном технологическом оборудовании. Напомним, что величина затрат ресурсов $\Delta S_{jV\_ФОТ}(S_{yV})$ (расценка за выполнение операции, $\dfrac{грн}{операция}$) является детерминированной при сдельной оплате труда (оплате за изделие)

$$\Delta S_{jV\_ФОТ}(S_{yV}) = \Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV}) \,. \qquad (16)$$

Если известен закон распределения случайной величины переноса на обрабатываемый базовый продукт ресурсов сырья и материалов $\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV})$ для каждой технологической операции (или только его числовые характеристики: средний расход сырья и материалов и среднеквадратичное отклонение сырья и материалов, переносимое на обрабатываемый в ходе технологической операции базовый продукт), то можно найти вид функции распределения случайной величины m_j и ее числовые характеристики [2, стр.258].

Случайная величина m_j (14) является функцией $m_j = m\left(\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV})\right)$ одного случайного аргумента $\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV})$:

$$m_j = c_{yV}(S_{yV})\cdot\left(\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV}) + \Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right) =$$

$$= m\left(\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV})\right) = c(S_{yV})\cdot\left(\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV}) + \Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right), \qquad (17)$$

$$c_{yV}(S_{yV}) = a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\cdot\frac{1}{\left(\Delta S_{yV\_CuM}(S_{yV}) + \Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right)}. \qquad (18)$$

Используя теоремы о числовых характеристиках функций случайных величин [1, стр.267], получим значение для математического ожидания $M\{m_{\mathrm{j}}\}$ случайной величины m_{j}:

$$m_{y\mathrm{V}} = M\{m_{\mathrm{j}}\} = M\left\{c(S_{yV})\cdot\left(\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV}) + \Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right)\right\} =$$

$$= M\left\{c(S_{yV})\cdot\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV})\right\} + M\left\{c(S_{yV})\cdot\Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right\} =$$

$$= c(S_{yV})\cdot M\left\{\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV})\right\} + c(S_{yV})\cdot\Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV}). \qquad (19)$$

Подставляя значение математического ожидания случайной величины $\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV})$

$$M\left\{\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV})\right\} = \Delta S_{yV\_CuM}(S_{yV}) \qquad (20)$$

в равенство (19), получим

$$m_{y\mathrm{V}} = M\{m_{\mathrm{j}}\} = c(S_{yV})\cdot M\left\{\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV})\right\} + c(S_{yV})\cdot\Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV}) =$$

$$= c(S_{yV})\cdot\Delta S_{yV\_CuM}(S_{yV}) + c(S_{yV})\cdot\Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV}) =$$

$$= c(S_{yV})\cdot\left(\Delta S_{yV\_CuM}(S_{yV}) + \Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right) =$$

$$= a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\cdot\frac{1}{\left(\Delta S_{yV\_CuM}(S_{yV}) + \Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right)}\cdot\left(\Delta S_{yV\_CuM}(S_{yV}) + \Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right) =$$

$$= a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}. \qquad (21)$$

Аналогично, используя теоремы о числовых характеристиках функций случайных величин [1, стр.267], получим значение для дисперсии $P_m\{m_{\mathrm{j}}\}$ случайной величины m_{j}:

$$P_m\{m_{\mathrm{j}}\} = P_m\left\{c(S_{yV})\cdot\left(\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV}) + \Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right)\right\} =$$

$$= P_m\left\{c(S_{yV})\cdot\Delta S_{jV\_CuM}(S_{yV})\right\} + P_m\left\{c(S_{yV})\cdot\Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{дисперсия детерменированной} \\ \text{величины } \left\{(S_{yV}) \cdot \Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right\} \\ \text{равна нулю } [1, \text{стр.}267] \\ P_m\left\{c(S_{yV}) \cdot \Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right\} = 0 \end{vmatrix} =$$

$$= P_m\left\{c(S_{yV}) \cdot \Delta S_{jV\_СиМ}(S_{yV})\right\} = \left(c(S_{yV})\right)^2 \cdot P_S\left\{\Delta S_{jV\_СиМ}(S_{yV})\right\} =$$

$$= \left(a_{yV}(S_{yV}) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} \cdot \frac{1}{\left(\Delta S_{yV\_СиМ}(S_{yV}) + \Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right)} \right)^2 \cdot P_S\left\{\Delta S_{jV\_СиМ}(S_{yV})\right\}. \quad (22)$$

Отношение дисперсии $P_S\left\{\Delta S_{jV\_СиМ}(S_{yV})\right\}$ случайной величины $\Delta S_{jV\_СиМ}(S_{yV})$ к квадрату среднего значения потребления базовым продуктом переменных затрат $\left(\Delta S_{yV\_СиМ}(S_{yV}) + \Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right)$ на технологической операции представляет собою квадрат относительного отклонения производственных ресурсов на технологической операции

$$e_S^2(S_{yV}) = \frac{P_S\left\{\Delta S_{jV\_СиМ}(S_{yV})\right\}}{\left(\Delta S_{yV\_СиМ}(S_{yV}) + \Delta S_{yV\_ФОТ}(S_{yV})\right)^2}, \quad (23)$$

и является заданной величиной. Относительное средне-квадратичное отклонение производственных ресурсов на технологической операции $e_S^2(S_{yV})$ определяется из технических условий на поставляемое сырье и материалы, паспортных данных производственного оборудования и расценок на выполнение операции. Обязательным показателем технических условий на поставляемое сырье и материалы являются средние характеристики технологических параметров сырья (например, толщина листового проката) и допуск на предельные отклонения фактических характеристик технологических параметров сырья от своих средних значений. Аналогично обязательным параметром паспортных данных производственного оборудования является среднее значение потребления сырья и материалов и предельные отклонения фактических значений от своих средних значений.

Подставив квадрат относительного отклонения производственных ресурсов на технологической операции (23) в выражение для дисперсии $P_m\left\{m_j\right\}$ случайной величины m_j (22), получим

$$P_m\left\{m_{\mathrm{j}}\right\}=\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2\cdot e_S^2(S_{yV})=\left(m_{yV}(S_{yV})\cdot e_S(S_{yV})\right)^2=s_{yV}^2(S_{yV})\,.$$

(24)

Таким образом мгновенная скорость изменения затрат для j - го базового продукта m_{j} характеризуется числовыми характеристиками случайного процесса: математическим ожиданием

$$\int_0^\infty y\,\left[m\to\tilde{m}\right]\cdot\tilde{m}\cdot d\tilde{m}=m_{yV}(S_{yV})=a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0} \tag{25}$$

и среднеквадратичным отклонением

$$\int_0^\infty y\,\left[m\to\tilde{m}\right]\cdot\tilde{m}^2\cdot d\tilde{m}=\left(m_{yV}(S_{yV})\right)^2+\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2\cdot e_S^2(S_{yV})=$$

$$=\left(m_{yV}(S_{yV})\right)^2+a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}=m_{yV}^2(S_{yV})+s_{yV}^2(S_{yV})=m_{yV}^2(S_{yV})\cdot\left(1+e_S^2(S_{yV})\right) \tag{26}$$

при условии нормирования функции распределения случайной величины m_{j}

$$\int_0^\infty y\,\left[m\to\tilde{m}\right]\cdot d\tilde{m}=1\,. \tag{27}$$

Функцию $y\left[m\to\tilde{m}\right]$ в дальнейшем будем называть функцией параметров технологического процесса, а процесс воздействия со стороны технологического оборудования на базовый продукт, в ходе которого скорость изменения затрат меняется с величины m на величину $\tilde{m}$ будем обозначен $\left[m\to\tilde{m}\right]$, где

$$\tilde{m}=m+\Delta m\,, \tag{28}$$

Δm - отклонение скорости изменения затрат, которые несет базовый продукт из-за воздействия со стороны технологического оборудования, m - скорость изменение затрат, которые несет базовый продукт до воздействия технологического оборудования, $\tilde{m}=m+\Delta m$ - скорость изменение затрат, которые несет базовый продукт после воздействия технологического оборудования.

Если бы координаты базового продукта в фазовом пространстве (S,m) определялись точно, то при воздействии технологического оборудования, работающего с определенной закономерностью, на базовый продукт с целью изменения его стоимости, результат воздействия был бы тоже определенным. Если же речь идет о воздействии со стороны технологического оборудования на базовый продукт, находящийся в некотором малом элементе $d\Omega = d\mathrm{S} \cdot dm$ фазового пространства (S, m), то ввиду неопределенности точного расположения базового продукта результат воздействии со стороны технологического оборудования на базовый продукт тоже будет неопределенным. Мы можем говорить только о вероятности того или иного исхода, а если быть точным, то о вероятности того, что после воздействия со стороны технологического оборудования базовый продукт будет находиться в том или ином состоянии. Полное количество базовых продуктов, находящихся в единице объема фазового пространства, испытавших в единицу времени воздействие со стороны технологического оборудования, можно написать в виде произведения потока базовых продуктов $c(t, S, m) \cdot m$ на вероятность для каждого из них испытать воздействие $[m \to m']$ в некотором малом элементе $d\Omega = d\mathrm{S} \cdot dm$ фазового пространства (S, m). Что касается вероятности испытания воздействия $[m \to m']$, то о ней можно, по крайней мере, утверждать, что вероятность пропорциональна плотности расположения оборудования $l_{оборуд}$ вдоль технологической цепочки. Таким образом, число базовых продуктов, испытавших в единицу времени воздействие со стороны технологического оборудования и принявшие значения m в пределах $(m'; m' + dm')$, можно написать в виде

$$y\,[m \to m'] \cdot l_{оборуд} \cdot m \cdot c(t, S, m) \cdot dm' \cdot d\mathrm{S} \cdot dm\,. \tag{29}$$

Если представить вероятности перехода $y\,[m \to m']$ из одного состояния базового продукта со значением скорости изменения затрат m в другое состояние со значением скорости изменения затрат в пределах $(m'; m' + dm')$ как

$$d\Psi = y\,[m \to m'] \cdot dm', \qquad \text{где } m' \in [0; \infty[\,, \tag{30}$$

то полная вероятность перехода в любое состояние равна единице и представлена условием нормировки (27).

Перейдем теперь к выводу уравнения, описывающего поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial c}{\partial m} \cdot f(t,S) = \mathrm{J}_{\mathrm{Gen}}(t,S,m), \qquad (3.1.2)$$

Количество базовых продуктов, испытавших воздействие со стороны технологического оборудования $[m \to \tilde{m}]$ в элементе объема $d\Omega = d\mathrm{S} \cdot dm$ и принявшие значения m в пределах $(\tilde{m}; \tilde{m} + d\tilde{m})$, можно написать в виде

$$dN_{-} = y\,[m \to \tilde{m}] \cdot l_{оборуд} \cdot m \cdot c(t,S,m) \cdot d\tilde{m} \cdot d\mathrm{S} \cdot dm,$$

что характеризует выбывание базовых продуктов с объема $d\Omega = d\mathrm{S} \cdot dm$ в объем $d\Omega = d\mathrm{S} \cdot d\tilde{m}$. Наряду с этим в элемент объема $d\Omega = d\mathrm{S} \cdot dm$ поступают базовые продукты с объема $d\Omega = d\mathrm{S} \cdot d\tilde{m}$ посредством обратного перехода $y\,[\tilde{m} \to m]$ в количестве:

$$dN_{+} = y\,[m \to \tilde{m}] \cdot l_{оборуд} \cdot \tilde{m} \cdot c(t,S,\tilde{m}) \cdot d\tilde{m} \cdot d\mathrm{S} \cdot dm.$$

Таким образом, в результате воздействия со стороны технологического оборудования рассматриваемое число базовых продуктов увеличивается в единицу времени на величину

$$dN_{\pm} = d\mathrm{S} \cdot dm \cdot l_{оборуд} \cdot \int_0^\infty \Big\{ y\,[\tilde{m} \to m] \cdot \tilde{m} \cdot c(t,S,\tilde{m}) - y\,[m \to \tilde{m}] \cdot m \cdot c(t,S,m) \Big\} \cdot d\tilde{m} =$$

$$= d\Omega \cdot l_{оборуд} \cdot \int_0^\infty \Big\{ y\,[\tilde{m} \to m] \cdot \tilde{m} \cdot c(t,S,\tilde{m}) - y\,[m \to \tilde{m}] \cdot m \cdot c(t,S,m) \Big\} d\tilde{m}. \qquad (31)$$

Отсюда $\mathrm{J}_{\mathrm{Gen}}(t,S,m)$ можно записать в следующем виде

$$\mathrm{J}_{\mathrm{Gen}}(t,S,m) = l_{оборуд} \cdot \int_0^\infty \Big\{ y\,[\tilde{m} \to m] \cdot \tilde{m} \cdot c(t,S,\tilde{m}) - y\,[m \to \tilde{m}] \cdot m \cdot c(t,S,m) \Big\} \cdot d\tilde{m}, \qquad (32)$$

Функция $y\,[m \to \tilde{m}]$ является заданной и определяется параметрами технологического процесса (25), (26), (27). Воспользуемся нормировочным свойством функции $y\,[m \to \tilde{m}]$ (27), вычислим интегралы

$$\int_0^\infty \Big[y\,[\tilde{m} \to m] \cdot \tilde{m} \cdot c(t,S,\tilde{m}) \Big] \cdot d\tilde{m} = y\,[\tilde{m} \to m] \cdot [c]_1; \qquad (33)$$

$$\int_0^\infty \Big[y\,[m \to \tilde{m}] \cdot m \cdot c(t,S,m) \Big] \cdot d\tilde{m} = m \cdot c(t,S,m), \text{ где } \int_0^\infty dm \cdot m \cdot c(t,S,m) = [c]_1. \qquad (34)$$

С учетом последнего получаем интегро-дифференциальное уравнение, описывающее поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial c}{\partial m} \cdot f = l_{оборуд} \cdot \left\{ y \left[m' \to m \right] \cdot \left[c \right]_1 - m \cdot c \right\}. \qquad (35)$$

В состоянии статистического равновесия, когда на каждом этапе технологической цепочки образовался стационарный режим обработки базового продукта, генераторная функция $\mathrm{J}_{\mathrm{Gen}}(t, S, m)$ в силу принципа детального равновесия обращается в ноль

$$l_{оборуд} \cdot \left\{ y \left[m' \to m \right] \cdot \left[c \right]_1 - m \cdot c \right\} = 0. \qquad (35)$$

Выводы

С использованием технологического подхода описания производственного процесса построена генераторная функция производственной системы. Приращение стоимости на технологической операции для базового продукта является случайной величиной и выражено через мгновенную интенсивность передачи технологическим оборудованием условно-переменных и мгновенную интенсивность передачи технологической линией условно-постоянных производственных ресурсов. Из известных законов распределения случайной величины переноса на обрабатываемый базовый продукт ресурсов сырья и материалов для каждой технологической операции найдены числовые характеристики случайной величины скорости изменения затрат: переносимых на базовый продукт. Используя свойства генераторной функции, записано в упрощенном виде интегро-дифференциальное уравнение, описывающее поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат (35). Такой подход позволяет найти решение уравнения, описывающего поведение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат для конкретного производственного процесса и более подробно его исследовать в ряде предельных случаев, представляющих практический интерес.

4. Генераторная функция предприятия.

---

1. Летенко В.А., Родионов Б.Н. Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием. Часть 2, Внутризаводское планирование. - М.: Высшая школа, 1979. – 232 с.
2. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Учеб. Пособие для втузов.- 2-е изд., - М.: Высш. шк., 2000. – 480 с.
3. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. Учеб. Пособие для втузов.- 2-е изд., - М.: Высш. шк., 2000. – 383 с.

5.ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕРАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ

Проведен обзор методов решения основных задач функционирования производственных систем для моделей стохастического типа. Определены варианты выбора малого параметра в модели описания функционирования производственной системы. Приведен вид кинетического уравнения производственной системы для нулевого и первого приближения по малому параметр. Показано, что любое начальное распределение базовых продуктов по скоростям изменения затрат при достаточно больших временах стремится к своему равновесному распределению, определяемому параметрами работы технологического оборудования производственной системы.

Подавляющее большинство производственных процессов, представляющих практический интерес для изучения, функционируют в окрестности своего равновесного состояния. Равновесное состояние определяется параметрами технологического оборудования в рамках сводного сетевого графика (рис.1.1.3). Если производственная система начала функционировать со значительными отклонениями от своего равновесного состояния, то со временем ее параметры вернутся к своему равновесному состоянию или производство остановится. Это делает актуальным использование методов теории возмущений для исследования реальных производственных систем. Приближенные решения дают достаточно полное представление о поведении производственной системы в некоторых интересных с практической точки зрения ситуациях, что в свою очередь укрепляет нашу уверенность в правильности выбранной математической модели, основанной на стохастическом описании производственной системы.

5.1.Использование теории возмущений для решения кинетического уравнения функционирования производственной системы.

Решение и анализ интегро-дифференциального уравнения (3.1.2), (3.4.35) относительно функции распределения $c(t,S,m)$ базовых продуктов по скоростям изменения затрат в фазовом пространстве (S,m):

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial S}\cdot m+\frac{\partial c}{\partial m}\cdot f= \qquad (3.1.2)$$

$$=l_{оборуд}\cdot\int_0^\infty\Big[y\,[\tilde{m}\to m]\cdot\tilde{m}\cdot c(t,S,\tilde{m})-y\,[m\to\tilde{m}]\cdot m\cdot c(t,S,m)\Big]\cdot d\tilde{m}$$

связано со значительными трудностями. Весьма точный класс решений представляется равновесными функциями, которые будем обозначать посредством $c_o(t,S,m)$. Данные функции являются решением уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$ для равновесного случая и определяются параметрами технологического процесса. Смысл этих распределений ясен. Они описывают равновесные состояния производственной системы

$$\lim_{t\to\infty}c(t,S,m)\to c_o(t,S,m)\,. \qquad (5.1)$$

Для того, чтобы рассматривать более реальные неравновесные состояния, приходится полагаться на приближенные методы. Некоторые из наиболее известных методов основаны на теории возмущений. Выбирается малый параметр e, отвечающий исходной постановке задачи, и функция распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$ раскладываются в асимптотически сходящийся ряд по малому параметру e:

$$c(t,S,m)=\sum_{k=0}^{\infty}e^k c_k(t,S,m)\,,\qquad \lim_{e\to 0}\frac{e\cdot c_{k+1}(t,S,m)}{c_k(t,S,m)}\to 0\,. \qquad (5.2)$$

Используем такое же разложение по малому параметру e для функции $\mathrm{J}_{\mathrm{gen}}(t,S,m)=\dfrac{d\,c(t,S,m)}{dt}$:

$$\mathrm{J}_{\mathrm{gen}}(c,c)=\sum_{k=0}^{\infty}e^k\sum_{m=0}^{k}J(c_m,c_{k-m})\,. \qquad (5.3)$$

Разложение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$ в степенной ряд по параметру e влечет за собой разложение интеграла

$$\mathrm{J}_{\mathrm{gen}}(t,S,m)=l_{оборуд}\cdot\int_0^\infty\Big[y\,[\tilde{m}\to m]\cdot\tilde{m}\cdot c(t,S,\tilde{m})-y\,[m\to\tilde{m}]\cdot m\cdot c(t,S,m)\Big]\cdot d\tilde{m} \qquad (5.4)$$

с коэффициентами разложения

$$J_k=\sum_{m=0}^{k}J(c_m,c_{k-m})\,. \qquad (5.5)$$

Значительное число разложений уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$ обладает тем свойством, что членом нулевого порядка в них служит равновесная функция $c_o(t,S,m)$, для которой, как правило, выполняется условие

$$\mathrm{J}_{\mathrm{gen\_0}}(t,S,m) \equiv \frac{d\,c_o(t,S,m)}{dt} \equiv 0. \qquad (5.6)$$

Это следует либо из уравнения нулевого приближения, либо из предположений, лежащих в основе метода возмущений. Итак, в наших предположениях для членов разложения нулевого порядка имеем

$$J(c_0, c_0) = 0\,, \quad \text{т.е.} \qquad J_0 = 0\,. \qquad (5.7)$$

Коэффициенты J_k представимы в виде следующей суммы

$$J_k = 2\cdot J(c_0, c_k) + \sum_{m=1}^{k-1} J(c_m, c_{k-m})\,, \qquad (5.8)$$

$$J(c_0, c_k) = J(c_k, c_0)\,, \quad J(c_m, c_k) = J(c_k, c_m)\,. \qquad (5.9)$$

Первое слагаемое $2\cdot J(c_0, c_k)$ соответствует значениям при $m=0$ и $m=k$, а второй член включает в себя величины $c_m(t,S,m)$ при $m<k$, и, следовательно, его можно считать известным при $k-$ом шаге метода возмущений. Таким образом, задача свелась к исследованию на каждом шаге линейного оператора $2\cdot J(c_0, c_k)$, действующего на неизвестную функцию $c_k(t,S,m)$. Удобно положить $c_k = c_0 \cdot d_k$ и взять в качестве неизвестной величину d_k. Рассмотрим теперь выбор параметра e, который при определенных условиях будем считать малым. Если при исходной постановке параметр e не входит непосредственно в уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$ в фазовом пространстве (S,m) (3.1.2), то следует обратиться к линеаризованному уравнению. Если же искать другие разложения, то первый шаг должен состоять в исследовании порядка величин различных слагаемых, входящих в уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат.

Обозначим через t, h, x характерные время, скорость изменения затрат и шаг по переменной S. Введем безразмерные переменные $\tilde{t}$, $\tilde{S}$, $\tilde{m}$, связанные с переменными t, h, x следующим образом:

$$t = t\cdot\breve{t}\;;\quad S = x\cdot\breve{S}\;;\quad m = h\cdot\breve{m}\;;\quad J(c,c) = \left\langle l_{оборуд}\right\rangle\cdot h\cdot\breve{J}(c,c)\,, \tag{3.3.3}$$

$$J(c,c) = l_{оборуд}\cdot\int_0^{\infty}\Big[y\,[\breve{m}\to m]\cdot\breve{m}\cdot c(t,S,\breve{m}) - y\,[m\to\breve{m}]\cdot m\cdot c(t,S,m)\Big]\cdot d\breve{m}\,,$$

где $\left\langle l_{оборуд}\right\rangle$ – характерная плотность расположения оборудования вдоль технологической цепочки производственного процесса. Кинетическое уравнение производственной системы (2.1.9), (3.1.2) с учетом обозначений для безразмерных характерных чисел описания производственных систем (3.3.7)

$$K_v = \frac{\left[\dfrac{1}{\left\langle l_{оборуд}\right\rangle}\right]}{x}\,,\quad P_m = \frac{x}{t\cdot h}\,,\quad P_0 = K_v\cdot P_m = \frac{\left[\dfrac{1}{\left\langle l_{оборуд}\right\rangle}\right]}{x}\cdot\frac{x}{t\cdot h} = \frac{1}{\left\langle l_{оборуд}\right\rangle\cdot t\cdot h}\,. \tag{3.3.7}$$

примет вид

$$K_v\cdot\left[P_m\cdot\frac{\partial c}{\partial\breve{t}} + \frac{\partial c}{\partial\breve{S}}\cdot\breve{m} + P_m\cdot\frac{\partial c}{\partial\breve{m}}\cdot\frac{d\breve{m}}{\partial\breve{t}}\right] = \breve{J}(c,c)\,. \tag{3.3.8}$$

$$\frac{d\breve{m}}{\partial\breve{t}} = \breve{f} = \frac{h}{t}\cdot f$$

Характерные числа описания производственных систем P_0, K_v, P_m для различных производственных процессов изменяются в пределах от нуля до бесконечности. Предельные случаи для характерных чисел описания производственных систем дают возможность использовать характерные числа описания производственных систем или их комбинации в качестве малого параметра. Исследуем ниже каждый из предельных случаев.

5.2. Решение кинетического уравнения для производственных систем с характерными числами описания производственных систем $K_v << 1$, $P_m \approx 1$

Рассмотрим класс производственных систем, для которых качественная оценка состояния дает значения характерных чисел описания производственных систем (3.3.7) $K_v << 1$, $P_m \approx 1$. Данный случай соответствует плотному потоку базовых продуктов вдоль технологической цепочки для неравновестного производственного процесса с высокой концентрацией технологического оборудования. Тогда отношение любого слагаемого левой части в уравнении относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$ в фазовом пространстве (S,m):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S}\cdot m + \frac{\partial c}{\partial m}\cdot f =$$

$$= l_{оборуд}\cdot\int_0^\infty \left[y\left[\tilde m \to m\right]\cdot \tilde m \cdot c(t,S,\tilde m) - y\left[m \to \tilde m\right]\cdot m \cdot c(t,S,m)\right]\cdot d\tilde m \quad (3.1.2)$$

к его правой части по порядку величины совпадает с числом $Kv << 1$ метод решения можно формализовать, вводя искусственный параметр $e \approx Kv \to 0$ (предположительно малый) в качестве множителя перед левой частью уравнения. Введем безразмерные переменные $\tilde t$, $\tilde S$, $\tilde m$, связанные с переменными t, h, x (характерные время, скорость изменения затрат и шаг по переменной S) следующим образом:

$$t = t\cdot\tilde t\,; \quad S = x\cdot\tilde S\,; \quad m = x\cdot\tilde m\,; \quad J(c,c) = l_{оборуд}\cdot h\cdot\tilde J(c,c)\,. \quad (3.3.3)$$

Тогда уравнение для функции распределения базовых продуктов относительно скорости затрат

$$\left[\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S}\cdot m + \frac{\partial c}{\partial m}\cdot f\right] = J(c,c) \quad (2.1.2)$$

принимает вид

$$Kv\cdot\left[Pm\cdot\frac{\partial c}{\partial\tilde t} + \frac{\partial c}{\partial\tilde S}\cdot\tilde m + Pm\cdot\frac{\partial c}{\partial\tilde m}\cdot\frac{d\tilde m}{\partial\tilde t}\right] = \tilde J(c,c), \quad (3.3.8)$$

где $Kv \to 0$ малый параметр, а $Pm = \dfrac{x}{t \cdot h} \to 1$. Вводя обозначения $e = Kv \to 0$ и используя тождество $Pm = \dfrac{x}{t \cdot h} \equiv 1$, окончательно имеем уравнение в виде

$$e \cdot \left[\frac{\partial c}{\partial \breve{t}} + \frac{\partial c}{\partial \breve{S}} \cdot \breve{m} + \frac{\partial c}{\partial \breve{m}} \cdot \frac{d\breve{m}}{\partial \breve{t}} \right] = \breve{J}(c, c); \tag{5.10}$$

Полагая

$$J(c, c) = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \sum_{m=0}^{k} J(c_m, c_{k-m}) \approx$$

$$\approx l_{оборуд} \cdot \int_0^{\infty} \left[y\,[\tilde{m} \to m] \cdot \tilde{m} \cdot c(t, S, \tilde{m}) - y\,[m \to \tilde{m}] \cdot m \cdot c(t, S, m) \right] \cdot d\tilde{m}. \tag{5.11}$$

ищем решение в виде разложения в асимптотический ряд по малому параметру e :

$$c(t, S, m) = \sum_{k=0}^{\infty} e^k c_k(t, S, m), \qquad \lim_{e \to 0} \frac{e \cdot c_{k+1}(t, S, m)}{c_k(t, S, m)} \to 0, \tag{5.2}$$

где $e = Kv \to 0$.

Подставляя представление (5.2) в уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t, S, m)$, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^k \cdot \left[\frac{\partial c_{(k-1)}}{\partial \breve{t}} + \frac{\partial c_{(k-1)}}{\partial \breve{S}} \cdot m + \frac{\partial c_{(k-1)}}{\partial \breve{m}} \cdot \breve{f} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \cdot \breve{J}_k, \tag{5.12}$$

где

$$J(c, c) = l_{оборуд} \cdot h \cdot \breve{J}(c, c);$$

$$J(c, c) = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \sum_{m=0}^{k} J(c_m, c_{k-m}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \cdot J_k;$$

$$J_k = \sum_{m=0}^{k} J(c_m, c_{k-m}).$$

Откуда получаем уравнения для конкретного приближения

$$0 = \breve{J}_0; \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial c_0}{\partial \breve{t}} + \frac{\partial c_0}{\partial \breve{S}} \cdot m + \frac{\partial c_0}{\partial \breve{m}} \cdot \breve{f} = \breve{J}_1; \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{\partial c_1}{\partial S}\cdot m + \frac{\partial c_1}{\partial m}\cdot f = J_2. \qquad (5.15)$$

Из уравнения (5.13) $0 = J_0$ находится нулевое приближение c_0, которое затем используется для нахождения из уравнения (5.14) первого приближения c_1, и так далее. Обычно несколько приближений более чем достаточно для получения решения уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$ с требуемой точностью для описания производственного процесса. Основной результат данного подхода состоит в том, что если допустить возможность разложения функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$ в ряд по степеням $e \approx Kv \to 0$, то можно построить макроскопическое описание производственного процесса в терминах моментов функции распределения в том или ином приближении.

Рассмотрим условия, при которых правомерно разложение по малому параметру $e \approx Kv \to 0$ При выборе характерных величин t, h, x (характерные время, скорость изменения затрат и шаг по переменной S), мы полагали:

$$\frac{\partial c}{\partial t} \approx t^{-1}\cdot\left[c - c_0\right]; \qquad \frac{\partial c}{\partial m}\cdot f = \Delta h^{-1}\cdot f\cdot\left[c - c_0\right]; \qquad (5.16)$$

$$\frac{\partial c}{\partial S}\cdot m \approx h\cdot x^{-1}\cdot\left[c - c_0\right]; \qquad J \approx l_{оборуд}\cdot h\cdot\left[c - c_0\right].$$

Однако, могут существовать такие пространственно-временные области решения уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$, где профили моментов функции распределения становятся очень крутыми при $e \approx Kv \to 0$. В этих областях решения уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат теряют точность. К таким областям относятся окрестности границ, начальный промежуток времени (начальный производственный поток). В упомянутых выше областях функция $c(t,S,m)$ заметно меняется на расстояниях порядка $\frac{1}{l_{оборуд}}$, так что

$$\frac{\partial c}{\partial t} \approx t^{-1} \cdot \frac{[c - c_0]}{e}; \qquad \frac{\partial c}{\partial S} \cdot m \approx h \cdot x^{-1} \cdot \frac{[c - c_0]}{e}; \qquad (5.17)$$

вместо предполагаемого (5.16)

$$\frac{\partial c}{\partial t} \approx t^{-1} \cdot [c - c_0]; \qquad \frac{\partial c}{\partial S} \cdot m \approx h \cdot x^{-1} \cdot [c - c_0].$$

Таким образом, если упомянутые области исключить, то разложение (5.2) аппроксимирует для достаточно малых $e \approx Kv \to 0$ решения фактически любых задач для уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t, S, m)$.

5.3. Решение кинетического уравнения для производственных систем с характерными числами описания производственных систем $K_v >> 1$, $P_m \approx 1$.

Случай описания производственных систем $Kv = \dfrac{1}{l_{оборуд} \cdot x} >> 1$, $Pm \approx 1$ соответствует производственному процессу, у которого, как правило, малая плотность обрабатывающего оборудования $l_{оборуд} \to 0$ вдоль цепочки технологического процесса изготовления базового продукта. Тем самым, базовый продукт проходит большой путь между основными операциями, находясь в свободном, не обрабатывающемся состоянии. В этом случае уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t, S, m)$:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial c}{\partial m} \cdot f = \qquad (3.1.2)$$

$$= l_{оборуд} \cdot \int_0^{\infty} \left[y\,[\tilde{m} \to m] \cdot \tilde{m} \cdot c(t, S, \tilde{m}) - y\,[m \to \tilde{m}] \cdot m \cdot c(t, S, m) \right] \cdot d\tilde{m}$$

с учетом безразмерных переменных $\tilde{t}$, $\tilde{S}$, $\tilde{m}$, связанных с переменными t , h , x (характерные время, скорость изменения затрат и шаг по переменной S)

$$t = t \cdot \tilde{t}\,; \quad S = x \cdot \tilde{S}\,; \quad m = x \cdot \tilde{m}\,; \quad J(c, c) = l_{оборуд} \cdot h \cdot \tilde{J}(c, c)\,. \qquad (3.3.3)$$

получаем в виде

$$K_v \cdot \left[P_m \cdot \frac{\partial c}{\partial \breve{t}} + \frac{\partial c}{\partial \breve{S}} \cdot \breve{m} + P_m \cdot \frac{\partial c}{\partial \breve{m}} \cdot \frac{d\breve{m}}{d\breve{t}} \right] = \breve{J}(c\,,c) \qquad (3.3.8)$$

с предельными значениями характерных чисел описания производственных систем

$$P_m = \frac{x}{t \cdot h} \to 1 \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{K_v} = \frac{x}{\left[\dfrac{1}{l_{оборуд}} \right]} \to 0 \qquad (5.18)$$

Введем малый параметр $e = \dfrac{1}{K_v} \to 0$ в предположении $P_m = \dfrac{x}{t \cdot h} \equiv 1$, кинетическое уравнение производственной системы (3.3.8) примет вид

$$\left[\frac{\partial c}{\partial \breve{t}} + \frac{\partial c}{\partial \breve{S}} \cdot \breve{m} + \frac{\partial c}{\partial \breve{m}} \cdot \frac{d\breve{m}}{d\breve{t}} \right] = e \cdot \breve{J}(c\,,c)\,. \qquad (5.19)$$

Представляется естественным разложить функцию $c(t,S,m)$ в асимптотический ряд по степеням малого параметра $e = \dfrac{1}{K_v} \to 0$

$$c(t,S,m) = \sum_{k=0}^{\infty} e^k c_k(t,S,m)\,, \qquad \lim_{e \to 0} \frac{e \cdot c_{k+1}(t,S,m)}{c_k(t,S,m)} \to 0\,. \qquad (5.20)$$

где $e = \dfrac{1}{K_v} \to 0$.

Тогда в соответствии с выражениями

$$J(c\,,c) = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \sum_{m=0}^{k} J(c_m, c_{k-m}) \approx \qquad (5.11)$$

$$\approx l_{оборуд} \cdot \int_0^{\infty} \left[y\,[\tilde{m} \to m] \cdot \tilde{m} \cdot c(t,S,\tilde{m}) - y\,[m \to \tilde{m}] \cdot m \cdot c(t,S,m) \right] \cdot d\tilde{m}\,.$$

$$J(c\,,c) = l_{оборуд} \cdot h \cdot \breve{J}(c\,,c);$$

$$J(c\,,c) = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \sum_{m=0}^{k} J(c_m, c_{k-m}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \cdot J_k;$$

$$J_k = \sum_{m=0}^{k} J(c_m, c_{k-m})$$

,

получим уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{k} \cdot \left[\frac{\partial c_{\kappa}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial c_{\kappa}}{\partial \tilde{S}} \cdot \tilde{m} + \frac{\partial c_{\kappa}}{\partial \tilde{m}} \cdot \tilde{f} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{k} \cdot \tilde{J}_{k-1}. \qquad (5.21)$$

Откуда для последовательных приближений имеем:

$$\frac{\partial c_{0}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial c_{0}}{\partial \tilde{S}} \cdot \tilde{m} + \frac{\partial c_{0}}{\partial \tilde{m}} \cdot \tilde{f} = 0; \qquad (5.22)$$

$$\frac{\partial c_{1}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial c_{1}}{\partial \tilde{S}} \cdot \tilde{m} + \frac{\partial c_{1}}{\partial \tilde{m}} \cdot \tilde{f} = \tilde{J}_{0}; \qquad (5.23)$$

$$\frac{\partial c_{2}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial c_{2}}{\partial \tilde{S}} \cdot \tilde{m} + \frac{\partial c_{2}}{\partial \tilde{m}} \cdot \tilde{f} = \tilde{J}_{1}. \qquad (5.24)$$

Первое (5.22) из этих уравнений является уравнением свободного перемещения базового продукта вдоль технологической цепочки. Под свободным перемещением будем понимать такое движение базового продукта вдоль технологической цепочки производственного процесса, при котором перенос затрат на базовый продукт происходит наперед заданным способом, определяемым инженерно-производственной функцией технологического процесса $f(t,S)$ без наличия отклонения скорости изменения затрат от своего среднего значения. Такой перенос характеризуется функцией $y\left[m \to \tilde{m}\right] = y\left[m \to m\right]$, т.е. после технологической обработки скорость изменения затрат, отнесенных на базовый продукт, может принимать только значение, определенное паспортом оборудования без каких-то отклонений от паспортной величины.

В частном случае $\tilde{f} = 0$ решение уравнения свободного перемещения базового продукта вдоль технологической цепочки (5.22) может быть найдено в виде

$$c_{0}(\tilde{t}, \tilde{S}) = \mathrm{T}(z) = \mathrm{T}(\tilde{S} - \tilde{t} \cdot \tilde{m}), \qquad (5.25)$$

где $z = (\tilde{S} - \tilde{t} \cdot \tilde{m})$, $\tilde{m} = const$.

Случай $\tilde{f} = 0$ соответствует производственному процессу, у которого на каждой технологической операции переносятся на базовый продукт примерно одинаковые затраты, т.е. $\tilde{m} = const$. Такими процессами можно описывать транспортировку газа, нефти, электроэнергии и т. д.

Подставляя записанное в таком виде решение (5.25) в уравнение (5.22) для частного случая $\breve f = 0$, получаем тождественное равенство

$$\frac{\partial c}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \breve t} + \breve m\cdot\frac{\partial c}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \breve S} = \frac{\partial c}{\partial z}\cdot(-\breve m) + \breve m\cdot\frac{\partial c}{\partial z} \equiv 0 \;. \qquad (5.26)$$

Вид функции $\mathrm{T}(z) = \mathrm{T}(\breve S - \breve t\cdot\breve m)$ определим из начального условия

$$c\big|_{\breve t=0} = c(0,\breve S,\breve m)\,, \qquad \mathrm{T}(z)\big|_{\breve t=0} = \mathrm{T}(\breve S - \breve t\cdot\breve m)\big|_{\breve t=0} \qquad (5.27)$$

и граничного условия

$$c\big|_{\breve S=\breve S^*} = c(\breve t,0,\breve m)\,, \qquad \mathrm{T}(z)\big|_{\breve S=\breve S^*} = \mathrm{T}(\breve S - \breve t\cdot\breve m)_{\breve S=\breve S^*}\,. \qquad (5.28)$$

В следующих приближениях (5.23), (5.24) присутствуют члены типа источника, которые определяются предыдущими приближениями. Таким образом, решение уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат сводится к решению последовательности дифференциальных уравнений. В качестве начального приближения выбирается функция распределения, соответствующая решению уравнения свободного перемещения базового продукта вдоль технологической цепочки (5.22).

5.4. Решение кинетического уравнения для производственных систем с характерными числами описания производственных систем $K_v \approx 1$, $P_m \approx 1$.

Предельный случай $K_v \approx 1$, $P_m \approx 1$ соответствует производственному процессу, у которого слагаемые уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\frac{\partial c}{\partial t}$, $\frac{\partial c}{\partial S}\cdot m$, $\frac{\partial c}{\partial m}\cdot f$, J_{Gen} приблизительно равны по порядку величины.

Ищем решение уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$ в виде разложения функции $c(t,S,m)$ в асимптотический ряд по степеням малого параметра $e \to 0$

$$c(t,S,m) = \sum_{k=0}^{\infty} e^k c_k(t,S,m)\,, \qquad \lim_{e\to 0}\frac{e\cdot c_{k+1}(t,S,m)}{c_k(t,S,m)} \to 0\,. \qquad (5.2)$$

Результат подстановки такого разложения в уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат не зависит от смысла параметра $e \to 0$. Если параметр $e \to 0$ не входит явно в кинетическое уравнение (3.1.2), то приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $e \to 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^k \cdot \left[\frac{\partial c_\kappa}{\partial t} + \frac{\partial c_\kappa}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial c_\kappa}{\partial m} \cdot f \right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \cdot J_k \tag{5.29}$$

получаем

$$\left[\frac{\partial c_\kappa}{\partial t} + \frac{\partial c_\kappa}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial c_\kappa}{\partial m} \cdot f \right] = J_k, \tag{5.30}$$

где

$$J(c,c) = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \sum_{m=0}^{k} J(c_m, c_{k-m}) \approx \tag{5.11}$$

$$\approx l_{оборуд} \cdot \int_0^{\infty} \Big[y\,[\tilde{m} \to m] \cdot \tilde{m} \cdot c(t,S,\tilde{m}) - y\,[m \to \tilde{m}] \cdot m \cdot c(t,S,m) \Big] \cdot d\tilde{m}.$$

$$J(c,c) = l_{оборуд} \cdot h \cdot \tilde{J}(c,c);$$

$$J(c,c) = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \sum_{m=0}^{k} J(c_m, c_{k-m}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \cdot J_k;$$

$$J_k = \sum_{m=0}^{k} J(c_m, c_{k-m}),$$

Функция $c_0(t,S,m)$ должна удовлетворять уравнению

$$\left[\frac{\partial c_0}{\partial t} + \frac{\partial c_0}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial c_0}{\partial m} \cdot f \right] = J_0. \tag{5.31}$$

Так как из свойств генераторной функции $J_0 \equiv 0$, то в качестве нулевого приближения следует брать равновесную функцию $c_o(t,S,m)$. В противном случае начальный шаг метода возмущений будет столь же трудным, что и решение исходного уравнения. Фактически это означает, что изучается широкий класс производственных процессов, характеризующийся отклонением от состояния полного равновесия.

Положим

$$c_k(t,S,m) = c_o(t,S,m) \cdot d_k \quad \text{при} \quad n \ge 1 \tag{5.32}$$

запишем уравнение (5.30) в виде

$$\frac{\partial d_\kappa}{\partial t} + \frac{\partial d_\kappa}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial d_\kappa}{\partial m} \cdot f = Ld_k + a_k, \tag{5.33}$$

где оператор

$$Ld_k = \frac{2 \cdot J\left(c_0, c_k\right)}{c_0} = \frac{2 \cdot J\left(c_0, c_0 \cdot d_k\right)}{c_0}; \tag{5.34}$$

$$a_k = \frac{\sum_{m=1}^{k-1} J(c_m, c_{k-m})}{c_0} = \frac{\sum_{m=1}^{k-1} J(c_0 \cdot d_k, c_0 \cdot d_{k-m})}{c_0}; \tag{5.35}$$

$$a_1 = 0. \tag{5.36}$$

Указанные выше формулы задают алгоритм последовательных приближений решения уравнения (3.1.2) относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат. Следует подчеркнуть, что на каждом шаге решается одно и то же уравнение (5.33), только с новым свободным членом, который вычисляется по предыдущим приближениям. Эти уравнения содержат сложный интегро-дифференциальный оператор $Ld_k + a_k$ и по виду почти столь же сложны, что и исходное уравнение, за тем исключением, что мы однозначно избавились от нелинейности. Общая структура уравнений во всех приближениях при $n \geq 1$ позволяет ограничиться только случаем $n = 1$ и рассмотреть так называемое линеаризованное уравнение

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial d}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial d}{\partial m} \cdot f = Ld\ . \tag{5.37}$$

Наличие в уравнениях при $n > 1$ свободного члена a_k незначительно усложняет их решение, так как хорошо известно, как это можно сделать с помощью соответствующего линейного однородного уравнения. Для практических приложений описания производственного процесса с достаточной степенью точности можно ограничиваться только случаем $n = 1$.

Изучение линеаризованного уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t, S, m)$ дает возможность моделировать реальный производственный процесс. Линеаризованное уравнение по форме совпадает с общим уравнением относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t, S, m)$. Это позволяет надеяться, что изучая линеаризованное уравнение, можно сделать вывод о свойствах решения общего уравнения для случаев, когда имеются в виду процессы, для которых нелинейный характер в правой части кинетического уравнения производственной системы несущественный.

Уточним теперь условия, при которых можно использовать линеаризованное уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат для получения интересных с точки зрения исследования производственных процессов результатов. Поскольку параметр $e \to 0$ по предположению не входит в само уравнение, то условия использования линеаризованного уравнения должны быть определены начальными условиями при $t = 0$ и граничными условиями. Действительно, так как мы ищем решение в виде

$$c(t,S,m) = c_o(t,S,m)\cdot\left(1+d\right), \tag{5.38}$$

требуя, чтобы функция d в том или ином смысле была мала по сравнению с единицей, необходимо, чтобы d была мала и на границе, и в начальный момент времени. Следовательно, первое условие заключается в малости отклонения начальных данных от равновесной функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c_o(t,S,m)$; это не обязательно означает, что при $t = 0$ функция d принимает близкие к нулю значения, достаточно, в частности, потребовать малости относительного отклонения для моментов функции распределения относительно их начальных значений:

$$\frac{\left\|[c]_0 - [c]_{0_{нач}}\right\|}{[c]_0} \to 0\ , \quad \frac{\left\|[c]_1 - [c]_{1_{нач}}\right\|}{[c]_1} \to 0\ , \quad \frac{\left\|[c]_2 - [c]_{2_{нач}}\right\|}{[c]_2} \to 0\ , \tag{5.37}$$

где $[c]_{0_{нач}}$, $[c]_{1_{нач}}$, $[c]_{2_{нач}}$ - значения моментов функции распределения, заданные начальными условиями. Аналогичная ситуация имеется и при рассмотрении краевых условий. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial d}{\partial S}\cdot m = Ld\ , \tag{5.38}$$

для стационарного случая $\dfrac{\partial d}{\partial t} = 0$, при условии $f \approx 0$.

Отсюда

$$d = m\cdot\int Ld\cdot dS + d_{гран}\ . \tag{5.39}$$

Из последнего следует, что функция d принимает малые значения тогда, когда мал свободный член $d_{гран}$, определяемый граничными условиями. Пусть $c_o(t,S,m)$ - равновесная функция распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат с моментами функции распределения $[c]_0$, $[c]_1$, $[c]_2$ равными значениям моментов функции распределения для границы $[c]_{0_{гран}}$, $[c]_{1_{гран}}$, $[c]_{2_{гран}}$. Из уравнения

$$\frac{\partial c}{\partial S}\cdot m = l_{оборуд}\cdot\left\{y\,[m' \to m]\cdot[c]_1 - m\cdot c\right\}; \tag{5.40}$$

$$\frac{\partial d}{\partial S}\cdot m = Ld\ , \tag{5.41}$$

для стационарного случая $\frac{\partial d}{\partial t} = 0$, при условии $f \approx 0$, следует, что на границе

$$\int l_{оборуд}\cdot\left\{y\,[m' \to m]\cdot[c]_1 - m\cdot c_{оборуд}\cdot(1+d)\right\}\cdot dS \to 0\ , \tag{5.42}$$

то есть на относительные возмущения моментов функции распределения $[c]_0$, $[c]_1$, $[c]_2$, последнее накладывает взамен условия малости $d_{гран} \to 0$ условия (5.37).

Этими рассмотрениями показано, что линеаризация оправдана, если нелинейные неоднородные члены в начальных и краевых условиях малы.

5.5. Решение кинетического уравнения для производственных систем с характерными числами описания производственных систем $K_v \approx 1$, $P_m >> 1$.

«Начальное движение» производственных систем.

Предельный случай $K_v \approx 1$, $P_m >> 1$ соответствует переходному сильно нестационарному процессу в производственной деятельности предприятия, когда требуется осуществить, например, переход с одних производственных показателей на другие, значительно более высокие. В таком случае начальное состояние производственной системы является сильно неравновесным по отношению к конечному. Основной вклад в формирование функции распределения вносит слагаемое $\frac{\partial c}{\partial t}$, отвечающее за нестационарность производственного процесса. Осуществив переход в конечное состояние, производственный процесс превращается, как правило, в стационарный производственный процесс.

Если в начальный момент времени функция распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$ для уравнения (3.1.2) не является равновесной $c_o(t,S,m)$ (близкой к равновесной $c(t,S,m) \to c_{оборуд}(t,S,m)$), то она будет быстро изменяться, пока таковой не станет.

С учетом безразмерных переменных $\tilde{t}$, $\tilde{S}$, $\tilde{m}$, связанных с переменными t, h, x (характерные время, скорость изменения затрат и шаг по переменной S)

$$t = t\cdot\tilde{t}\,;\quad S = x\cdot\tilde{S}\,;\quad m = x\cdot\tilde{m}\,;\quad J(c,c) = l_{оборуд}\cdot h\cdot\tilde{J}(c,c)\,. \qquad (3.3.3)$$

кинетическое уравнение (3.1.2) получаем в виде

$$Kv\cdot\left[Pm\cdot\frac{\partial c}{\partial\tilde{t}}+\frac{\partial c}{\partial\tilde{S}}\cdot\tilde{m}+Pm\cdot\frac{\partial c}{\partial\tilde{m}}\cdot\frac{d\tilde{m}}{\partial\tilde{t}}\right]=\tilde{J}(c,c) \qquad (3.3.8)$$

с предельными значениями характерных чисел описания производственных систем

$$Pm=\frac{x}{t\cdot h}\to\infty \qquad \text{и} \qquad Kv=\frac{\left[\dfrac{1}{l_{оборуд}}\right]}{x}\to 1 \qquad (5.43)$$

Из свойств генераторной функции для случая сильного отклонения начального распределения базовых продуктов $c(t,S,m)$ от равновесной функции $c_o(t,S,m)$

можем записать

$$J(c,c) = l_{оборуд} \cdot \left\{ y\left[\tilde{m} \to m \right] \cdot \left[c \right]_1 - m \cdot c \right\} \approx l_{оборуд} \cdot \left\{ -m \cdot c \right\} \qquad (5.44)$$

для случая

$$\Delta c = c_{нач} - c_{оборуд} \approx c_{нач}, \qquad c_{нач} >> c_{оборуд} \qquad (5.45)$$

и

$$J(c,c) = l_{оборуд} \cdot \left\{ y\left[\tilde{m} \to m \right] \cdot \left[c \right]_1 - m \cdot c \right\} \approx l_{оборуд} \cdot \left\{ y\left[\tilde{m} \to m \right] \cdot \left[c \right]_1 \right\} \qquad (5.46)$$

для случая

$$\Delta c = c_{нач} - c_{оборуд} \approx c_{оборуд}, \qquad c_{нач} << c_{оборуд} \qquad (5.47)$$

(рис.5.1).

Отсюда получаем

$$Pm \cdot \frac{\partial c}{\partial \tilde{t}} \approx -\tilde{m} \cdot c \qquad (5.48)$$

для случая $\Delta c = c_{нач} - c_o \approx c_{нач}$, $\qquad c_{нач} >> c_{оборуд}$

и

$$Pm \cdot \frac{\partial c}{\partial \tilde{t}} \approx \langle \tilde{m} \rangle \cdot \left[c \right]_0 \qquad (5.49)$$

для случая $\Delta c = c_{нач} - c_o \approx c_o, \quad c_{нач} << c_o$.

Решение уравнения для обоих случаев можно представить в виде

$$Pm \cdot \frac{\partial c}{\partial \tilde{t}} \approx -\tilde{m} \cdot c \qquad \Rightarrow \qquad c \approx c\big|_0 \cdot e^{-\frac{\tilde{m}}{Pm} \cdot (\tilde{t} - \tilde{t}|_0)} \qquad (5.50)$$

$$Pm \cdot \frac{\partial c}{\partial \tilde{t}} \approx \langle \tilde{m} \rangle \cdot \left[c \right]_0 \qquad \Rightarrow \qquad c \approx c\big|_0 + \frac{1}{Pm} \cdot \langle \tilde{m} \rangle \cdot \left[c \right]_0 \cdot (\tilde{t} - \tilde{t}\big|_0) \qquad (5.51)$$

В нашем случае

$$\frac{1}{Pm} \cdot \langle \tilde{m} \rangle \cdot (\tilde{t} - \tilde{t}\big|_0) \approx \frac{1}{\left[\dfrac{x}{t \cdot h} \right]} \cdot \langle \tilde{m} \rangle \cdot (\tilde{t} - \tilde{t}\big|_0) \approx \frac{1}{\left[\dfrac{t_{стац}}{t} \right]} \cdot \langle \tilde{m} \rangle \cdot (\tilde{t} - \tilde{t}\big|_0) \approx$$

$$\approx \frac{1}{t_{стац}} \cdot \langle \tilde{m} \rangle \cdot (\tilde{t} - \tilde{t}\big|_0) \cdot t \approx \frac{1}{t_{стац}} \cdot \langle \tilde{m} \rangle \cdot (t - t\big|_0) \approx \langle \tilde{m} \rangle \cdot \frac{(t - t\big|_0)}{t_{стац}}. \qquad (5.52)$$

Видно, что при $t \to \infty$ множитель $\frac{1}{Pm}\cdot\langle \breve{m} \rangle \cdot (\breve{t} - \breve{t}|_0)$ стремится к бесконечности

$$\langle \breve{m} \rangle \cdot \frac{(t - t|_0)}{t_{стац}} \to \infty . \qquad (5.53)$$

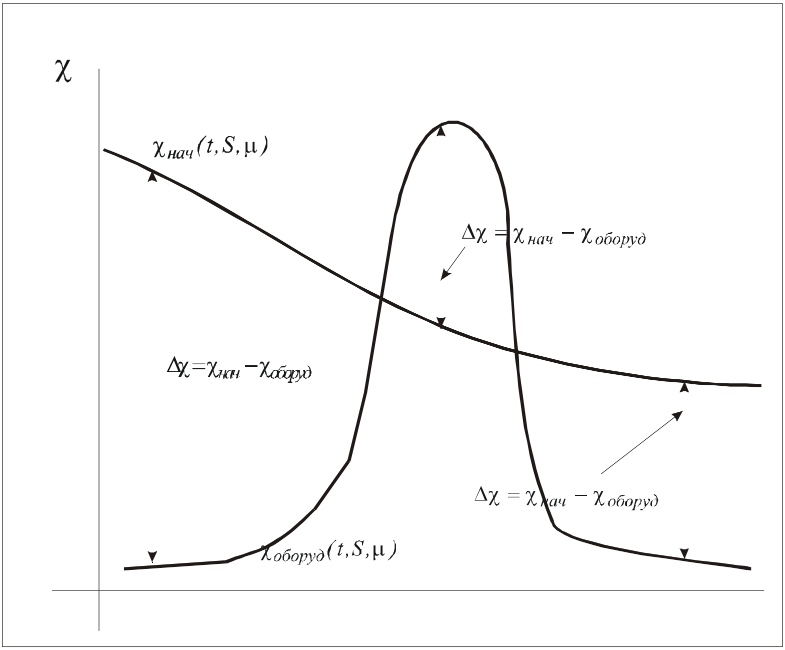

Рис.5.1. «Начальное движение» в уравнении для функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат

Отсюда за промежуток времени $(t - t|_0)$ у нас происходит быстрое изменение функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат в сторону своего равновесного состояния для описанных случаев (5.50) и (5.51).

Это говорит о том, что функция распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат должна меняться в масштабах быстрого времени. Последнее означает, что в течение довольно небольшого времени начальный слой принимает распределение, соответствующее условию $J(c_0, c_0) = 0$, то есть функция распределения принимает значения в окрестности равновесной функции $c_o(t,S,m)$. Получен довольно существенный вывод, что любое начальное распределение базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$ при достаточно больших временах $t \to \infty$ стремится к своему равновесному распределению $c(t,S,m) \to c_o(t,S,m)$), которое определяется параметрами работы оборудования производственной системы.

Выводы

Рассмотрены методы теории возмущений для решения кинетического уравнения функционирования производственной системы. Определен метод выбора малого параметра для построения решения рассматриваемой производственной задачи, отвечающего исходной постановке задачи. Исследована возможность использования характерных чисел описания производственных систем или их комбинации в качестве малого параметра. Определены условия, при которых правомерно разложение по малому параметру. Уточнены условия, при которых можно использовать линеаризованное уравнение относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат для получения интересных с точки зрения исследования производственных процессов результатов. Показано, что линеаризация оправдана, если нелинейные неоднородные члены в начальных и краевых условиях малы. Получен вывод, что любое начальное распределение базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$ при достаточно больших временах $t \to \infty$ стремится к своему равновестному распределению $c(t,S,m) \to c_o(t,S,m)$), которое определяется параметрами работы оборудования производственной системы.

1. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Физматгиз, 1963г. 412стр.

6.ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БАЛАНСОВ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрены нулевые приближения для уравнений балансов макропараметров производственной системы в предельных случаях характеристических чисел Kv и Pm. Замкнутая система уравнений балансов макропараметров производственной системы записана для одно-, двух- и трехмоментного описания производственной системы. Показана зависимость источника стохастичности производственного процесса от количественного значения характеристических чисел Kv и Pm.

В главе 2 показано, что макропараметры производственной системы связаны между собой через микроскопический уровень

$$\int_0^\infty dm \cdot m^k \cdot c\left(t,S,m\right) = \left[c\right]_k \left(t,S\right), \quad k = 0,1,2,3......N_k . \tag{3.4.2}$$

Связь представлена в виде балансовых уравнений, полученных путем агрегирования слагаемых кинетического уравнения функции распределения базовых продуктов

$$\int_0^\infty dm \cdot m^k \cdot \frac{\partial c}{\partial t} + \int_0^\infty dm \cdot m^{k+1} \cdot \frac{\partial c}{\partial S} + \int_0^\infty dm \cdot m^k \cdot f \cdot \frac{\partial c}{\partial m} = \int_0^\infty dm \cdot m^k \cdot \mathrm{J}_{\mathrm{Gen}} , \tag{3.4.3}$$

или используя обозначения начальных моментов (3.4.2)

$$\frac{\partial\left[c\right]_k}{\partial t} + \frac{\partial\left[c\right]_{k+1}}{\partial S} = k \cdot f\left(t,S\right) \cdot \left[c\right]_{k-1} + \int_0^\infty dm \cdot m^k \cdot J_{Gen} , \quad \left[c\right]_{-1} \equiv 0 . \tag{3.4.31}$$

Из уравнения (3.4.31) видно, что уравнения балансов являются незамкнутыми. Для обеспечения замкнутости системы уравнений, описывающих функционирование производственной системы, требуется дополнительное уравнение. Таким условием является

$$\int_0^\infty y\left[m \to \tilde{m}\right] \cdot d\tilde{m} = 1 . \tag{3.4.27}$$

Функция $y\left[m \to \tilde{m}\right]$ параметров технологического процесса определяет числовые характеристики случайного процесса:

$$\int_0^\infty y\left[m \to \tilde{m}\right] \cdot \tilde{m} \cdot d\tilde{m} = m_{yV}(S_V) = a_{yV}(S_V) \cdot \frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0} \tag{3.4.25}$$

$$\int_0^\infty y\left[m \to \tilde{m}\right] \cdot \tilde{m}^2 \cdot d\tilde{m} = \left(m_{yV}(S_V)\right)^2 + \left(a_{yV}(S_V) \cdot \frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)^2 \cdot e_S^2(S_V) =$$

$$= \left(m_{yV}(S_V)\right)^2 + a_{yV}(S_V) \cdot \frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0} = m_{yV}^2(S_V) + s_{yV}^2(S_V) = m_{yV}^2(S_V) \cdot \left(1 + e_S^2(S_V)\right) =$$

$$=\left(a_{yV}(S_V)\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2\cdot\left(1+e_S^2(S_V)\right), \qquad (3.4.26)$$

где $a_{yV}(S_V)$ - коэффициент пропорциональности между заданной интенсивностью переноса затрат производственным оборудованием на элементы производственной системы и интенсивностью потребления затрат отдельным базовым продуктом при его обработке на технологической операции (2.1.2);

$[c]_{1y}$ - производительность работы технологического оборудования (2.1.66);

$e_S^2(S_V)$ - относительное среднеквадратичное отклонение производственных ресурсов на технологической операции (3.4.23).

Процесс воздействия со стороны технологического оборудования на базовый продукт, в ходе которого скорость изменения затрат меняется с величины m на величину $\tilde{m}$, обозначен $[m \to \tilde{m}]$, где

$$\tilde{m} = m + \Delta m\,, \qquad (3.4.28)$$

Δm - отклонение скорости изменения затрат, которые несет базовый продукт из-за воздействия со стороны технологического оборудования, m - скорость изменение затрат, которые несет базовый продукт до воздействия технологического оборудования, $\tilde{m} = m + \Delta m$ - скорость изменения затрат, которые несет базовый продукт после воздействия технологического оборудования. Инженерно-производственная функция производственной системы задает технологию производства базового продукта (2.1.74)

$$\frac{dm_y}{dt}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial S_V}\left(a_{yV}(S_V)\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(a_{yV}(S)\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right). \qquad (1)$$

Для упрощения уравнение (2.1.74) записано в пренебрежении условно-постоянными затратами (4.3.14). переменные затраты при этом являются общими затратами, переносимыми на базовый продукт $a_{yV}(S_V)=a_{yV}(S)$, $\dfrac{\partial}{\partial S_V}=\dfrac{\partial}{\partial S}$.

Наблюдаемыми макропараметрами (2) производственной системы с массовым выпуском продукции являются межоперационные заделы базовых продуктов (нулевой начальный момент)

$$\int_0^\infty dm\cdot c\,(t,S,m)=[c]_0\,(t,S)\ \text{(шт/грн)} \qquad (3.2.12)$$

и темп движения базовых продуктов от одной технологической операции к другой (первый начальный момент)

$$\int_0^\infty dm \cdot m \cdot c\left(t,S,m\right) = \left[c\right]_1 \left(t,S\right) \text{ (шт/час).} \qquad (3.2.13)$$

Как правило, начальные моменты функции распределения случайной величины выше второго для описания производственных процессов не используются [1,2,3]. Это обстоятельство обусловлено тем, что для функции параметров технологического процесса $y\left[m \to \tilde{m}\right]$ заданы технологическим процессом, как правило, три числовые характеристики случайного процесса (первая числовая характеристика – условие нормировки (3.4.27), вторая – средняя скорость потребления затрат базовым продуктом $m_{yV}(S)$ (3.4.25) и третья - относительное среднеквадратичное отклонение производственных ресурсов на технологической операции (3.4.23). В связи с этим для описания производственных систем будем использовать первые три балансовые уравнения общей системы уравнений (3.4.3)

$$\frac{\partial\left[c\right]_0}{\partial t} + \frac{\partial\left[c\right]_1}{\partial S} = \int_0^\infty dm \cdot J_{Gen}(t,S,m)\,,$$

$$\frac{\partial\left[c\right]_1}{\partial t} + \frac{\partial\left[c\right]_2}{\partial S} = f(t,S)\cdot\left[c\right]_0 + \int_0^\infty dm \cdot m \cdot J_{Gen}(t,S,m)\,,$$

$$\frac{\partial\left[c\right]_2}{\partial t} + \frac{\partial\left[c\right]_3}{\partial S} = 2\cdot f\left(t,S\right)\cdot\left[c\right]_1 + \int_0^\infty dm \cdot m^2 \cdot J_{Gen}(t,S,m)\,. \qquad (3.2.31)$$

Кинетическое уравнение производственной системы

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S}\cdot m + \frac{\partial c}{\partial m}\cdot f = J_{Gen}(t,S,m)\,, \qquad (3.1.2)$$

$$J_{Gen}(t,S,m) = l_{оборуд}\cdot\int_0^\infty\left[y\left[\tilde{m} \to m\right]\cdot\tilde{m}\cdot c(t,S,\tilde{m}) - y\left[m \to \tilde{m}\right]\cdot m\cdot c(t,S,m)\right]\cdot d\tilde{m}$$

будем использовать в виде

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S}\cdot m + \frac{\partial c}{\partial m}\cdot f = J_{Gen}(t,S,m)\,, \qquad (3.4.35)$$

$$J_{Gen}(t,S,m) = l_{оборуд}\cdot\left\{y\left[\tilde{m} \to m\right]\cdot\left[c\right]_1 - m\cdot c\right\},$$

который соответствует наличию технологического оборудования, в результате воздействия которого скорость изменения затрат базового продукта после взаимодействия с технологическим оборудованием не зависит от своего значения до взаимодействия. Функция параметров технологического процесса $y\left[m \to \tilde{m}\right]$ не зависит от скорости изменения затрат m базового продукта до взаимодействия с технологическим оборудованием

$$\frac{\partial y\,\left[m \to \tilde{m}\right]}{\partial m} \equiv 0\,. \tag{2}$$

6.1.Уравнения балансов при функционировании производственных систем в нулевом приближении по малому параметру $Kv \ll 1$ при $Pm \approx 1$

Рассмотрим класс производственных систем, для которых качественная оценка состояния дает значения характерных чисел описания производственных систем (3.3.7) $Kv \ll 1$, $Pm \approx 1$. Данный случай соответствует плотному потоку базовых продуктов вдоль технологической цепочки для неравновесного производственного процесса с высокой концентрацией технологического оборудования. Замкнутая система балансовых уравнений

$$\frac{\partial \left[c\right]_0}{\partial t} + \frac{\partial \left[c\right]_1}{\partial S} = \int_0^\infty dm \cdot J_{Gen}(t,S,m)\,,$$

$$\frac{\partial \left[c\right]_1}{\partial t} + \frac{\partial \left[c\right]_2}{\partial S} = f(t,S)\cdot\left[c\right]_0 + \int_0^\infty dm \cdot m \cdot J_{Gen}(t,S,m)\,,$$

$$\frac{\partial \left[c\right]_2}{\partial t} + \frac{\partial \left[c\right]_3}{\partial S} = 2\cdot f\left(t,S\right)\cdot\left[c\right]_1 + \int_0^\infty dm \cdot m^2 \cdot J_{Gen}(t,S,m) \tag{3.2.31}$$

может быть получена в нулевом приближении по малому параметру $Kv \ll 1$ из кинетического уравнения описания производственной системы (3.5.13)

$$J_{Gen}(t,S,m) = l_{оборуд} \cdot \left\{y\,\left[\tilde{m} \to m\right]\cdot\left[c\right]_1 - m\cdot c\right\} = 0. \tag{3}$$

Решение уравнения (3) дает в нулевом приближении по малому параметру $Kv \ll 1$ вид функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат

$$c\,(t,m,S) = \left[c\right]_1(S)\cdot\frac{y\,\left[\tilde{m} \to m\right]}{m} \tag{4}$$

и уравнения балансов

$$\frac{\partial \left[c\right]_0}{\partial t} + \frac{\partial \left[c\right]_1}{\partial S} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial[c]_1}{\partial t}+\frac{\partial[c]_2}{\partial S} - f(t,S)\cdot[c]_0 = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial[c]_2}{\partial t}+\frac{\partial[c]_3}{\partial S} - 2\cdot f(t,S)\cdot[c]_1 = 0. \tag{7}$$

……………………………………………………

$$\frac{\partial[c]_k}{\partial t}+\frac{\partial[c]_{k+1}}{\partial S} - k\cdot f(t,S)\cdot[c]_{k-1} = 0,$$

с технологией производства, определяемой инженерно-производственной функцией (1)

$$\frac{dm_y}{dt}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(a_{yV}(S)\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2 \tag{1}$$

и параметрами технологического процесса, выраженными через числовые характеристики случайного процесса (3.4.25), (3.4.26)

$$\int_0^\infty y\,[m\to\tilde{m}]\cdot\tilde{m}\cdot d\tilde{m} = a_{yV}(S)\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}=m_{yV}(S)\,, \tag{8}$$

$$\int_0^\infty y\,[m\to\tilde{m}]\cdot\tilde{m}^2\cdot d\tilde{m} = \left(a_{yV}(S)\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2\cdot\left(1+e_S^2(S)\right)=m_{yV}^2(S)\cdot\left(1+e_S^2(S)\right), \tag{9}$$

определяемого функцией параметров технологического процесса $y\,[m\to\tilde{m}]$ (3.4.27) с учетом условия (2).

Подставив в равенство (8), (9) значение для функции параметров технологического процесса из равенства (4)

$$\int_0^\infty y\,[m\to\tilde{m}]\cdot\tilde{m}\cdot d\tilde{m} = \int_0^\infty \frac{c(t,\tilde{m},S)}{[c]_1(S)}\cdot\tilde{m}^2\cdot d\tilde{m} =$$

$$= a_{yV}(S)\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}=\frac{1}{[c]_1(S)}\cdot\int_0^\infty c(t,\tilde{m},S)\cdot\tilde{m}^2\cdot d\tilde{m}=\frac{[c]_2}{[c]_1}=m_{yV}(S)\,,$$

$$\int_0^\infty y\,[m\to\tilde{m}]\cdot\tilde{m}^2\cdot d\tilde{m} = \int_0^\infty \frac{c(t,\tilde{m},S)}{[c]_1(S)}\cdot\tilde{m}^3\cdot d\tilde{m} = \left(a_{yV}(S)\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2\cdot\left(1+e_S^2(S)\right)=$$

$$=\frac{1}{[c]_1(S)}\cdot\int_0^\infty c(t,\tilde{m},S)\cdot\tilde{m}^3\cdot d\tilde{m}=\frac{[c]_3}{[c]_1}=m_{yV}^2(S)\cdot\left(1+e_S^2(S)\right),$$

получим соотношения между макроскопическими параметрами производственной системы и макропараметрами функции параметров технологического процесса $y\left[m \to \tilde{m}\right]$ (3.4.27)

$$\left[c\right]_2 = \left[c\right]_1 \cdot m_{yV}(S)\,, \tag{10}$$

$$\left[c\right]_3 = \left[c\right]_1 \cdot m_{yV}^2(S) \cdot \left(1 + e_S^2(S)\right). \tag{11}$$

По определению

$$\left[c\right]_2 = \frac{s_c^2 + \left[c\right]_1^2}{\left[c\right]_0}\,, \tag{3.2.34}$$

откуда

$$\left[c\right]_1 \cdot m_{yV}(S) = \frac{s_c^2 + \left[c\right]_1^2}{\left[c\right]_0} \tag{12}$$

и

$$a_{yV}(S) \cdot \left[c\right]_{1y} = \left[c\right]_1 + \frac{s_c^2}{\left[c\right]_1} = \left[c\right]_1 \cdot \left(1 + e_c^2\right) \tag{13}$$

$$a_{yV}(S) \cdot \left[c\right]_{1y} - \left[c\right]_1 = \left[c\right]_1 \cdot e_c^2$$

Подставим (1) и (10) в уравнение баланса (6)

$$\frac{\partial\left[c\right]_1}{\partial t} + \frac{\partial\left[c\right]_2}{\partial S} - f(t,S)\cdot\left[c\right]_0 =$$

$$= \frac{\partial\left[c\right]_1}{\partial t} + \frac{\partial\left(\left[c\right]_1 \cdot \left(a_{yV} \cdot \frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)\right)}{\partial S} - a_{yV} \cdot \left[c\right]_{1y} \cdot \frac{\partial}{\partial S}\left(a_{yV} \cdot \frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right) =$$

$$= \frac{\partial\left[c\right]_1}{\partial t} + \frac{\partial\left[c\right]_1}{\partial S} \cdot \left(a_{yV} \cdot \frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right) - \left(a_{yV} \cdot \left[c\right]_{1y} - \left[c\right]_1\right) \cdot \frac{\partial}{\partial S}\left(a_{yV} \cdot \frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right) =$$

$$= \frac{\partial\left[c\right]_1}{\partial t} + \frac{\partial\left[c\right]_1}{\partial S} \cdot \left(\frac{\left[c\right]_1}{\left[c\right]_0}\right) + \frac{\partial\left[c\right]_1}{\partial S} \cdot \left(\frac{a_{yV} \cdot \left[c\right]_{1y} - \left[c\right]_1}{\left[c\right]_0}\right) -$$

$$- \left(a_{yV} \cdot \left[c\right]_{1y} - \left[c\right]_1\right) \cdot \frac{\partial}{\partial S}\left(a_{yV} \cdot \frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right) = 0. \tag{14}$$

Откуда

$$\frac{\partial[c]_1}{\partial t}+\frac{\partial[c]_1}{\partial S}\cdot\left(\frac{[c]_1}{[c]_0}\right)\cdot\left(1+e_c^2\right)=[c]_1\cdot e_c^2\cdot\frac{\partial}{\partial S_{yV}}\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right). \qquad (15)$$

Подставим (1), (10) и (11) в уравнение баланса (7)

$$\frac{\partial[c]_2}{\partial t}+\frac{\partial[c]_3}{\partial S}-2\cdot f(t,S)\cdot[c]_1=\left|f(t,S)=a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\right|=$$

....

$$=\frac{\partial[c]_1\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left([c]_1\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2\cdot\left(1+e_S^2\right)\right)}{\partial S}-2\cdot f(t,S)\cdot[c]_1=$$

....

$$=\frac{\partial[c]_1\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left([c]_1\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\cdot\left(1+e_S^2\right)\right)}{\partial S}-$$

$$-2\cdot f(t,S)\cdot[c]_1=\left|\begin{array}{l}\textit{согласно}\quad (10)\\ [c]_1\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)=[c]_1\cdot m_y=[c]_2\end{array}\right|=$$

....

$$=\frac{\partial[c]_1\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left([c]_2\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\cdot\left(1+e_S^2\right)\right)}{\partial S}-$$

$$2\cdot f(t,S)\cdot[c]_1=$$

....

$$=\frac{\partial[c]_1\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left([c]_2\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\right)}{\partial S}+\frac{\partial\left([c]_2\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\cdot e_S^2\right)}{\partial S}-$$

$$-2\cdot f(t,S)\cdot[c]_1=$$

....

$$=\frac{\partial[c]_1\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial t}+\frac{\partial[c]_2}{\partial S}\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)+[c]_2\cdot\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial S}+$$

$$+\frac{\partial\left([c]_2\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\cdot e_S^2\right)}{\partial S}-2\cdot f(t,S)\cdot[c]_1=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{согласно}\quad(1)\\ f(t,S)=a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right),\\ \text{согласно}\quad(10)\\ [c]_1\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)=[c]_1\cdot m_y=[c]_2,\\ \text{тогда}\\ [c]_2\cdot\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial S}=[c]_1\cdot a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\cdot\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial S}=f(t,S)\cdot[c]_1\end{array}\right|=$$

....

$$=\frac{\partial[c]_1\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial t}+\frac{\partial[c]_2}{\partial S}\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)+$$

$$+\frac{\partial\left([c]_2\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\cdot e_S^2\right)}{\partial S}-f(t,S)\cdot[c]_1=$$

....

$$=\frac{\partial[c]_1}{\partial t}\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)+[c]_1\cdot\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial t}+\frac{\partial[c]_2}{\partial S}\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)+$$

$$+\frac{\partial\left([c]_2\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\cdot e_S^2\right)}{\partial S}-f(t,S)\cdot[c]_1=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{из}\quad \text{уравнения баланса для первого начального момента}\quad (6)\\ \text{следует}\\ \frac{\partial[c]_1}{\partial t}\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)+\frac{\partial[c]_2}{\partial S}\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)=f(t,S)\cdot a_{yV}\cdot[c]_{1y}\\ \end{array}\right|=$$

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………
…

$$=[c]_1\cdot\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left([c]_2\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\cdot e_S^2\right)}{\partial S}+$$

$$f(t,S)\cdot\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y}-[c]_1\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{согласно}\quad (13)\\ a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}-[c]_1=[c]_1\cdot e_c^2\\ \end{array}\right|=$$

…………………………………………………………………………………………………

$$=[c]_1\cdot\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left([c]_2\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\cdot e_S^2\right)}{\partial S}+f(t,S)\cdot[c]_1\cdot e_c^2=$$

....

$$
=[c]_1 \cdot \frac{\partial\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left([c]_2\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\cdot e_S^2\right)}{\partial S}+
$$

$$
+a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\cdot\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial S}\cdot[c]_1\cdot e_c^2=0
$$

Откуда

$$
[c]_1\cdot\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left([c]_2\cdot\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\cdot e_S^2\right)}{\partial S}=a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\cdot\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial S}\cdot[c]_1\cdot e_c^2 \quad (16)
$$

Таким образом, при функционировании производственных систем в нулевом приближении по малому параметру $Kv \ll 1$, $Pm \approx 1$ замкнутая система уравнений балансов принимает вид для одномоментного описания

$$
\frac{\partial[c]_0}{\partial t}+\frac{\partial\left(a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}\right)}{\partial S}=0, \quad (17)
$$

$$
J_{Gen}(t,S,m)=l_{оборуд}\cdot\left\{y\left[\tilde{m}\to m\right]\cdot[c]_1-m\cdot c\right\}=0,
$$

или

$$
\int_0^\infty y\left[m\to\tilde{m}\right]\cdot\tilde{m}\cdot d\tilde{m}=a_{yV}(S)\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}, \quad \int_0^\infty y\left[m\to\tilde{m}\right]\cdot d\tilde{m}=1, \quad (18)
$$

для 2-х моментного описания

$$
\frac{\partial[c]_0}{\partial t}+\frac{\partial[c]_1}{\partial S}=0, \quad (19)
$$

$$
\frac{\partial[c]_1}{\partial t}+\frac{\partial\left([c]_1\cdot a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial S}=a_{yV}\cdot[c]_{1y}\cdot\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial S}, \quad (20)
$$

$$J_{Gen}(t,S,m) = l_{оборуд} \cdot \left\{ y\,\left[\tilde{m} \to m\right] \cdot \left[\,c\,\right]_1 - m \cdot c \right\} = 0,$$

или

$$\int_0^\infty y\,\left[m \to \tilde{m}\right] \cdot \tilde{m} \cdot d\tilde{m} = a_{yV}(S) \cdot \frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}, \quad \int_0^\infty y\,\left[m \to \tilde{m}\right] \cdot d\tilde{m} = 1, \tag{21}$$

для 3-х моментного описания

$$\frac{\partial\left[\,c\,\right]_0}{\partial t} + \frac{\partial\left[\,c\,\right]_1}{\partial S} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial\left[\,c\,\right]_1}{\partial t} + \frac{\partial\left(\left[\,c\,\right]_1 \cdot a_{yV} \cdot \dfrac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)}{\partial S} = a_{yV} \cdot \left[\,c\,\right]_{1y} \cdot \frac{\partial\left(a_{yV} \cdot \dfrac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)}{\partial S}, \tag{23}$$

$$\left[\,c\,\right]_1 \cdot \frac{\partial\left(a_{yV} \cdot \dfrac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\left[\,c\,\right]_2 \cdot \left(a_{yV} \cdot \dfrac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right) \cdot e_S^2\right)}{\partial S} = a_{yV} \cdot \frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0} \cdot \frac{\partial\left(a_{yV} \cdot \dfrac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)}{\partial S} \cdot \left[\,c\,\right]_1 \cdot e_c^2 \tag{24}$$

$$J_{Gen}(t,S,m) = l_{оборуд} \cdot \left\{ y\,\left[\tilde{m} \to m\right] \cdot \left[\,c\,\right]_1 - m \cdot c \right\} = 0,$$

или

$$\int_0^\infty y\,\left[m \to \tilde{m}\right] \cdot d\tilde{m} = 1, \quad \int_0^\infty y\,\left[m \to \tilde{m}\right] \cdot \tilde{m} \cdot d\tilde{m} = a_{yV}(S) \cdot \frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}, \tag{25}$$

$$\int_0^\infty y\,\left[m \to \tilde{m}\right] \cdot \tilde{m}^2 \cdot d\tilde{m} = \left(a_{yV}(S_V) \cdot \frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)^2 \cdot \left(1 + e_S^2(S_V)\right). \tag{26}$$

6.2.Уравнения балансов при функционировании производственных систем в нулевом приближении по малому параметру $\dfrac{1}{Kv} << 1$ при $Pm \approx 1$.

Довольно большое число производственных систем относится к таким, у которых процесс переноса затрат на базовый продукт является детерминированным или близким к детерминированному. Детерминированным процессом переноса затрат на базовый продукт характеризуются производственные предприятия (системы), у которых доля фонда оплаты труда в себестоимости продукции велика и она задается расценками на технологические операции. К таким предприятиям относятся сборочные производственные структуры. Как правило, сборочные производственные системы имеют технологический процесс с небольшой плотностью технологического оборудования (конвейерная технологическая линия). При движении вдоль технологической цепочки сборочного подразделения перенос затрат на базовый продукт происходит детерминировано. Технологический процесс определяет порядок сборки изделия, при котором сборочные единицы (комплектующие) имеют заданную стоимость и задана расценка за выполнение сборочной технологической операции (сборочная операция заключается в комплектации узла дополнительной сборочной единицей). Производственные системы, у которых основная доля затрат, переносимых в ходе технологического процесса на базовый продукт в виде наперед заданной стоимости сборочной единицы или заданной расценки за выполнение технологической операции, являются производственными системами с детерминированным или почти детеминированным переносом затрат на базовый продукт. Такие производственные системы характеризуются как малой плотностью технологического оборудования $l_{оборуд} \to 0$, воздействие которого на базовый продукт описывается стохастическим процессом, так и существенным увеличением затрат между соседними единицами технологического оборудования. В предельных случаях этим производственным системам соответствуют характеристические числа $Kv = \dfrac{1}{l_{оборуд} \cdot x} >> 1$, $Pm \approx 1$. Тем самым, базовый продукт проходит большой путь с наперед заданным потреблением затрат между технологическими операциями, использующими технологическое оборудование со стохастическим процессом воздействия на базовый продукт.

Замкнутая система балансовых уравнений

$$\frac{\partial[c]_0}{\partial t} + \frac{\partial[c]_1}{\partial S} = \int_0^\infty dm \cdot J_{Gen}(t,S,m)\ ,$$

$$\frac{\partial[c]_1}{\partial t} + \frac{\partial[c]_2}{\partial S} = f(t,S)\cdot[c]_0 + \int_0^\infty dm \cdot m \cdot J_{Gen}(t,S,m)\ ,$$

$$\frac{\partial[c]_2}{\partial t} + \frac{\partial[c]_3}{\partial S} = 2\cdot f(t,S)\cdot[c]_1 + \int_0^\infty dm \cdot m^2 \cdot J_{Gen}(t,S,m) \qquad (3.2.31)$$

может быть получена с использованием в нулевом приближении по малому параметру $l_{оборуд} \cdot x = \dfrac{1}{Kv} << 1$ кинетического уравнения описания производственной системы (3.5.21)

$$\frac{\partial c_0}{\partial t} + \frac{\partial c_0}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial c_0}{\partial m} \cdot f = 0 . \tag{27}$$

Кинетическое уравнение (27) позволяет в нулевом приближении по малому параметру $l_{оборуд} \cdot x = \dfrac{1}{Kv} << 1$ записать уравнения балансов макропараметров производственной системы

$$\frac{\partial [c]_0}{\partial t} + \frac{\partial [c]_1}{\partial S} = 0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial [c]_1}{\partial t} + \frac{\partial [c]_2}{\partial S} - f(t,S) \cdot [c]_0 = 0, \tag{29}$$

$$\frac{\partial [c]_2}{\partial t} + \frac{\partial [c]_3}{\partial S} - 2 \cdot f(t,S) \cdot [c]_1 = 0, \tag{30}$$

....

$$\frac{\partial [c]_k}{\partial t} + \frac{\partial [c]_{k+1}}{\partial S} - k \cdot f(t,S) \cdot [c]_{k-1} = 0,$$

(31) с технологией производственного процесса, определяемой инженерно-производственной функцией (1)

$$\frac{dm_y}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial S} \left(a_{yV}(S) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} \right)^2 . \tag{1}$$

Система балансовых уравнений (28)-(31) замыкается в нулевом приближении по малому параметру $l_{оборуд} \cdot x = \dfrac{1}{Kv} << 1$ через момент (k+1)-го порядка

$$[c]_{k+1}(t,S) = \int_0^\infty dm \cdot m^{k+1} \cdot c_0(t,S,m) . \tag{32}$$

Функция распределения $c_0(t,S,m)$ случайной величины m при вычислении момента (k+1)-го порядка $[c]_{k+1}(t,S)$ является известной, находится из решения кинетического уравнения описания производственной системы (27).

Решение кинетического уравнения описания производственной системы (27) для случая медленно меняющейся вдоль технологической цепочки производственной функции $\frac{\partial f}{\partial S} \to 0$ будем искать в виде

$$c_0(t,S,m) = c_0(h,x) = c_0(S - m_0 \cdot t - \Phi(t), m - F(t)) \qquad (33)$$

$$h = S - m_0 \cdot t - \Phi(t) = S_0\,, \qquad x = m - F(t) = m_0 \qquad (34)$$

где $m = \int_0^t f(t) \cdot dt = F(t) + m_0$,

$$S = \int_0^t (F(t) + m_0) \cdot dt = \Phi(t) + m_0 \cdot t + S_0 \qquad (35)$$

удовлетворяющему начальному условию при $t = t_0$

$$c_0(t_0,S,m) = c_t(S_0,m_0)\,, \quad c_0\left(h_{t=t_0}, x_{t=t_0}\right) = c_t(S_0,m_0)\,, \qquad (36)$$

и граничным при $S = S_t$,

$$c_0(t,S_t,m) = c_S(t_S,m_S)\,, \qquad c_0\left(h_{S=S_t}, x_{S=S_t}\right) = c_S(t_S,m_S)\,, \qquad (37)$$

при $m = 0$

$$c_0(t,S_t,0) = 0\,, \qquad c_0\left(h_{m=0}, x_{m=0_t}\right) = 0\,, \qquad (38)$$

и при $m = \infty$

$$c_0(t,S_t,\infty) = 0\,, \qquad c_0\left(h_{m=\infty}, x_{m=\infty_t}\right) = 0\,. \qquad (39)$$

Подставим решение (33) в кинетическое уравнение (27)

$$\frac{\partial c_0}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial c_0}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial S}\cdot m + \frac{\partial c_0}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial m}\cdot f + \frac{\partial c_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial c_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial S}\cdot m + \frac{\partial c_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial m}\cdot f =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial h}{\partial t} = -m_0 - \frac{d\Phi(t)}{dt} = -m_0 - F(t), & \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{dF(t)}{dt} = -f(t), \\ \frac{\partial h}{\partial S} = 1, & \frac{\partial x}{\partial S} = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial m} = 0, & \frac{\partial x}{\partial m} = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\partial c_0}{\partial h}\cdot(-m_0 - F(t)) + \frac{\partial c_0}{\partial h}\cdot m + \frac{\partial c_0}{\partial x}\cdot(-f) + \frac{\partial c_0}{\partial x}\cdot f =$$

$$= \frac{\partial c_0}{\partial h} \cdot \left(-m_0 - F(t)\right) + \frac{\partial c_0}{\partial h} \cdot m =$$

$$= \frac{\partial c_0}{\partial h} \cdot \left(-m_0 - F(t) + m\right) = 0 \qquad (40)$$

Таким образом, стохастичность производственного процесса для $Kv >> 1$, $Pm \approx 1$ определяется начальными и граничными условиями производственной системы, или другими словами, поставками сырья, материалов и комплектующих, а не условиями работы технологического оборудования, как в случае производственных систем с характеристическими числами $Kv << 1$, $Pm \approx 1$.

В общем случае кинетическое уравнение описания производственной системы (27) может быть решено численными методами.

Для функционирования производственных систем в нулевом приближении по малому параметру $\frac{1}{K_v} << 1$, $Pm \approx 1$ замкнутая система уравнений балансов принимает вид

для одномоментного описания

$$\frac{\partial [c]_0}{\partial t} + \frac{\partial \left([c]_1\right)}{\partial S} = 0, \qquad (41)$$

$$[c]_1 (t, S) = \int_0^\infty dm \cdot m \cdot c_0 (t, S, m). \qquad (42)$$

для 2-х моментного описания

$$\frac{\partial [c]_0}{\partial t} + \frac{\partial [c]_1}{\partial S} = 0, \qquad (43)$$

$$\frac{\partial [c]_1}{\partial t} + \frac{\partial [c]_2}{\partial S} - f(t,S) \cdot [c]_0 = 0,$$

$$[c]_2 (t, S) = \int_0^\infty dm \cdot m^2 \cdot c_0 (t, S, m). \qquad (44)$$

для 3-х моментного описания

$$\frac{\partial [c]_0}{\partial t} + \frac{\partial [c]_1}{\partial S} = 0, \qquad (45)$$

$$\frac{\partial [c]_1}{\partial t} + \frac{\partial [c]_2}{\partial S} - f(t,S) \cdot [c]_0 = 0,$$

$$\frac{\partial[c]_2}{\partial t}+\frac{\partial[c]_3}{\partial S}-2\cdot f(t,S)\cdot[c]_1$$

$$[c]_3(t,S)=\int_0^\infty dm\cdot m^3\cdot c_0(t,S,m)\,. \qquad (46)$$

где функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c_0(t,S,m)$ определяется из кинетического уравнения (27)

$$\frac{\partial c_0}{\partial t}+\frac{\partial c_0}{\partial S}\cdot m+\frac{\partial c_0}{\partial m}\cdot f=0 \qquad (27)$$

с заданной инженерно-производственной функцией (1) технологического процесса

$$\frac{dm_y}{dt}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(a_{yV}(S)\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2. \qquad (1)$$

6.3.Уравнения балансов при функционировании производственных систем в нулевом приближении по малому параметру $\frac{1}{Pm}\ll 1$, $Kv\approx 1$.

Случай быстроразвивающихся производственных систем.

Предельный случай $Kv\approx 1$, $Pm\gg 1$ соответствует переходному сильно нестационарному процессу в производственной деятельности предприятии, когда требуется осуществить, например, переход с одних производственных показателей на другие, значительно более высокие, или резко сокращается сбыт и, соответственно, выпуск продукции.

Замкнутая система балансовых уравнений

$$\frac{\partial[c]_0}{\partial t}+\frac{\partial[c]_1}{\partial S}=\int_0^\infty dm\cdot J_{Gen}(t,S,m)\,,$$

$$\frac{\partial[c]_1}{\partial t}+\frac{\partial[c]_2}{\partial S}=f(t,S)\cdot[c]_0+\int_0^\infty dm\cdot m\cdot J_{Gen}(t,S,m)\,,$$

$$\frac{\partial[c]_2}{\partial t}+\frac{\partial[c]_3}{\partial S}=2\cdot f(t,S)\cdot[c]_1+\int_0^{\infty} dm\cdot m^2\cdot J_{Gen}(t,S,m) \qquad (3.2.31)$$

может быть записана в нулевом приближении по малому параметру $\frac{1}{Pm}<<1$ с использованием кинетического уравнения описания производственной системы (3.3.8)

$$Kv\cdot\left[Pm\cdot\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial S}\cdot m+Pm\cdot\frac{\partial c}{\partial m}\cdot\frac{dm}{\partial t}\right]=J(c,c) \qquad (3.3.8)$$

Откуда для последовательных приближений имеем:

$$\frac{\partial c_0}{\partial t}+\frac{\partial c_0}{\partial m}\cdot f=0; \qquad (47)$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial t}+\frac{\partial c_1}{\partial m}\cdot f=J_0-\frac{\partial c_0}{\partial S}\cdot m; \qquad (48)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t}+\frac{\partial c_2}{\partial m}\cdot f=J_1-\frac{\partial c_1}{\partial S}\cdot m \qquad (49)$$

……………………………………………………

$$\frac{\partial c_m}{\partial t}+\frac{\partial c_m}{\partial m}\cdot f=J_{m-1}-\frac{\partial c_{m-1}}{\partial S}\cdot m \qquad (50)$$

Кинетическое уравнение (47) позволяет в нулевом приближении по малому параметру $\frac{1}{Pm}<<1$ записать замкнутую систему уравнений балансов макропараметров производственной системы

$$\frac{\partial[c]_0}{\partial t}=0, \qquad (51)$$

$$\frac{\partial[c]_1}{\partial t}+f(t,S)\cdot[c]_0=0, \qquad (52)$$

$$\frac{\partial[c]_2}{\partial t}+2\cdot f(t,S)\cdot[c]_1=0, \qquad (53)$$

……………………………………………………

$$\frac{\partial[c]_k}{\partial t}+k\cdot f(t,S)\cdot[c]_{k-1}=0, \qquad (54)$$

с технологией производственного процесса, определяемой инженерно-производственной функцией (1).

Таким образом, при функционировании производственных систем в нулевом приближении по малому параметру $\frac{1}{Pm} \ll 1$, $Kv \approx 1$ замкнутая система уравнений балансов принимает вид

- для одномоментного описания

$$\frac{\partial [c]_0}{\partial t}=0, \tag{55}$$

- для 2-х моментного описания

$$\frac{\partial [c]_0}{\partial t}=0, \tag{56}$$

$\frac{d[c]_1}{dt} - f(t,S)\cdot[c]_0 =0$, т.к. из (55) $\frac{\partial [c]_1}{\partial S}=0$ и, следовательно $\frac{d[c]_1}{dt}=\frac{\partial [c]_1}{\partial t}$, а координата S рассматривается как параметр.

- для 3-х моментного описания

$$\frac{\partial [c]_0}{\partial t}=0, \tag{57}$$

$$\frac{d[c]_1}{dt} - f(t,S)\cdot[c]_0 =0,$$

$$\frac{\partial [c]_2}{\partial t} - 2\cdot f(t,S)\cdot[c]_1 =0,$$

при заданной инженерно-производственной функции (1) технологического процесса

$$\frac{dm_y}{dt}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(a_{yV}(S)\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2. \tag{1}$$

Воспользуемся уравнениями (55), (56). Тогда уравнение для темпа базовых продуктов можно записать в виде

$$\frac{\partial [c]_1}{\partial t}=[c]_0\cdot\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial t}= f(t,S)\cdot[c]_0, \tag{58}$$

откуда

$$\frac{\partial \langle m \rangle}{\partial t} = f(t,S) \,. \tag{59}$$

Правые части балансового уравнения (59) и инженерно-производственной функции (1) технологического процесса совпадают. Отсюда следует

$$\frac{\partial \langle m \rangle}{\partial t} = \frac{dm_y}{dt} \,. \tag{60}$$

Для построения замкнутой системы уравнений макропараметров производственной системы (55)-(57) нет необходимости в дополнительных условиях. Однако построим решение кинетического уравнения (47) производственной системы для определения стохастичности производственного процесса. Решение кинетического уравнения описания производственной системы (47) будем искать в виде

$$c_0\left(t,S,m\right) = c_0\left(S,x\right) = c_0\left(S,m-F(t)\right) , \tag{61}$$

удовлетворяющем начальному условию для $t = t_0$

$$c_0\left(t_0,S,m\right) = c_t\left(S_0,m_0\right) , \qquad c_0\left(h_{t=t_0},x_{t=t_0}\right) = c_t\left(S_0,m_0\right) , \tag{62}$$

и граничным при $S = S_t$,

$$c_0\left(t,S_t,m\right) = c_S\left(t_S,m_S\right) , \qquad c_0\left(S_t,x_{S=S_t}\right) = c_S\left(t_S,m_S\right) , \tag{63}$$

при $m = 0$

$$c_0\left(t,S_t,0\right) = 0 , \qquad c_0\left(S_t,x_{m=0_t}\right) = 0 , \tag{64}$$

и при $m = \infty$

$$c_0\left(t,S_t,\infty\right) = 0 , \qquad c_0\left(S_t,x_{m=\infty_t}\right) = 0 , \tag{65}$$

где $m = \int_0^t f(t)\cdot dt = F(t) + m_0$, $\quad x = m - F(t)$, $\qquad F(0) = 0$.

Подставим решение (58) в кинетическое уравнение (47)

$$\frac{\partial c_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial c_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial m}\cdot f = \left| \begin{array}{c} \dfrac{\partial x}{\partial t} = -\dfrac{dF(t)}{dt} = -f(t), \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial m} = 1 \end{array} \right|$$

$$= \frac{\partial c_0}{\partial x}\cdot(-f) + \frac{\partial c_0}{\partial x}\cdot f = 0 \tag{66}$$

Таким образом, стохастичность производственного процесса для случая $Pm >> 1$, $Kv \approx 1$, как и для случая $Kv >> 1$, $Pm \approx 1$ определяется начальными и граничными условиями производственной системы, или другими словами, поставками сырья, материалов и комплектующих, а не условиями работы технологического оборудования, как в случае производственных систем с характеристическими числами $Kv << 1$, $Pm \approx 1$.

В общем случае кинетическое уравнение описания производственной системы (47) может быть решено численными методами.

Выводы

Макропараметры производственной системы связаны между собой через микроскопический уровень. Связь представлена в виде балансовых уравнений, полученных путем агрегирования слагаемых кинетического уравнения функции распределения базовых продуктов. Уравнения балансов макропараметров производственной системы являются незамкнутыми. Замкнутость системы уравнений балансов макропараметров производственной системы обеспечивается через малый параметр. Показано, что стохастичность производственного процесса для случая $Pm >> 1$, $Kv \approx 1$, как и для случая $Kv >> 1$, $Pm \approx 1$ определяется начальными и граничными условиями производственной системы, или другими словами, поставками сырья, материалов и комплектующих, а не условиями работы технологического оборудования, как в случае производственных систем с характеристическими числами $Kv << 1$, $Pm \approx 1$.

1. Летенко В.А., Родионов Б.Н. Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием. Часть 2, Внутризаводское планирование. - М.: Высшая школа, 1979. – 232 с.
2. Пигнастый О.М. Об особенностях построения моделей, описыва-ющих функционирование производственных систем авиационно-космической промышленности, Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: Сб. науч. тр. Нац. аэрокосмич. ун-та им.Н.Е. Жуковского «ХАИ». Вып.43(4). Харьков: НАКУ, 2005.–N43(4)–С.120-136
3. Форрестер Дж., Основы кибернетики предприятия.- М.:Изд. “Прогресс” 1961г. 341стр,

7.УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ

Для замкнутой системы уравнений состояния макропараметров производственной системы получены уравнения возмущенного состояния. Записаны условия устойчивости функционирования производственной системы. Показана взаимосвязь между заделом и темпом перемещения базовых продуктов вдоль технологической цепочки, обеспечивающая устойчивое функционирование технологического процесса.

В последнее время все чаще в физических журналах появляются научные статьи, посвященные построению экономических моделей с применением законов естественных наук [1,2]. Данное направление получило название «физическая экономика». Одним из основных вопросов при построении экономических моделей является вопрос устойчивости макропараметров моделируемого процесса. Настоящая глава посвящена исследованию устойчивости функционирования процессов массового производства в стохастической модели производственных систем [3]. Хорошо известно, что влияние малых возмущающих факторов на поведение производственно-сбытовой системы будет не одинаковым для различных процессов. На одни технологические процессы это влияние незначительно, так как возмущенное состояние мало отличается от невозмущенного. Напротив, на других технологических процессах влияние возмущений сказывается весьма значительно, как бы ни были малы возмущающие воздействия. Так как возмущающие факторы всегда существуют неизбежно, то становится понятным, почему задача устойчивости производственного процесса приобретает очень важное теоретическое и практическое значение.

Исследование устойчивости производственного процесса будем рассматривать через макропараметры производственной системы. Макропараметры производственной системы связаны между собой через микроскопический уровень

$$\int_0^\infty dm\cdot m^n\cdot c\left(t,S,m\right)=\left[c\right]_n\left(t,S\right),\quad n=0,1,2,3..... \qquad (3.2.2)$$

и являются моментами функции распределения $c(t,S,m)$ базовых продуктов по скоростям изменения затрат m в фазовом пространстве $\left(S,m\right)$. Первым моментам функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат соответствуют макропараметры производственной системы, представляющие собою заделы базовых продуктов $\left[c\right]_0$ между технологическими операциями производственного процесса и темп перемещения базовых продуктов $[c]_1$ от одной технологической операции к другой.

Под возмущающими факторами будем понимать воздействия, не учитываемые при описании производственного процесса вследствие их малости по сравнению с основными факторами, влияющими на производство и выпуск продукции. Они могут действовать как мгновенно, что сведется к малому изменению начального состояния производственной системы, так и непрерывно, что будет означать - составленные уравнения производственного процесса отличаются от истинных на некоторые малые поправочные члены, не учтенные в уравнениях производственного процесса.

Связь макропараметров производственной системы представлена в виде балансовых уравнений, полученных путем агрегирования слагаемых кинетического уравнения производственной системы для функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат m

$$\frac{\partial [c]_0}{\partial t} + \frac{\partial [c]_1}{\partial S} = \int_0^\infty dm \cdot J_{Gen}\,, \qquad n = 1,2,3,\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial [c]_n}{\partial t} + \frac{\partial [c]_{n+1}}{\partial S} = n \cdot f(t,S) \cdot [c]_{n-1} + \int_0^\infty dm \cdot m^n \cdot J_{Gen}\,. \qquad (3.2.31)$$

Система из $(n+1)$-балансовых уравнений производственной системы включает $(n+2)$-неизвестных макропараметров производственной системы, не содержит замкнутого аппарата для решения задачи. Для получения замкнутой системы уравнений балансов необходимо к балансовым уравнениям производственной системы добавить еще информацию, обусловленную учетом взаимодействия базовых продуктов с технологическим оборудованием.

Пусть системе балансовых уравнений (3.2.31) соответствует невозмущенное решение:

$$[c]_n^* = [c]_n^*(t,S)\,, \quad n = 0,1,2,3,\ldots\ldots N_n\,. \qquad (1)$$

которое отвечает плановым показателям производственного процесса.

Пусть наблюдаемые технологической или диспетчерской службой макровеличины производственного процесса получат случайные малые возмущения $[y]_n$:

$$[y]_n = [c]_n - [c]_n^*\,. \qquad (2)$$

Линеаризуем систему уравнений макропараметров производственной системы (3.2.31) относительно малых возмущений (2) в окрестности невозмущенного состояния (1):

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}=\sum_{m=0}^{N_n}\frac{\partial}{\partial[c]_m}\left(\int_0^\infty dm\cdot J_{Gen}\right)\Bigg|_0\cdot[y]_m\ ,\quad n=1,2,3,\ldots\ldots N_n\ , \tag{3}$$

$$\frac{\partial[y]_n}{\partial t}+\frac{\partial[y]_{n+1}}{\partial S}=n\cdot f(t,S)\Big|_0\cdot[y]_{n-1}+\sum_{m=0}^{N_n}\left(n\cdot[c]_{n-1}\cdot\frac{\partial}{\partial[c]_m}f(t,S)\right)\Bigg|_0\cdot[y]_m+$$
$$+\sum_{m=0}^{N_n}\frac{\partial}{\partial[c]_m}\left(\int_0^\infty dm\cdot m^n\cdot J_{Gen}\right)\Bigg|_0\cdot[y]_m\ .$$

Символ $\Big|_0$ обозначает, что разложение слагаемого осуществлено в окрестности невозмущенного состояния (1).

Период существования возмущения $T_{возм}$ производственных макроскопических показателей на практике составляет от нескольких дней до нескольких недель, в то время как период изменения коэффициентов

$$n\cdot f(t,S)\Big|_0\ ,\qquad \left(n\cdot[c]_{n-1}\cdot\frac{\partial}{\partial[c]_m}f(t,S)\right)\Bigg|_0\ ,\qquad \frac{\partial}{\partial[c]_m}\left(\int_0^\infty dm\cdot m^n\cdot J_{Gen}\right)\Bigg|_0 \tag{4}$$

при малых возмущениях (2) определяется стратегическим управлением предприятия и составляет от нескольких месяцев до нескольких лет. Это дает возможность предполагать, что коэффициенты (4), фиксируемые диспетчерской службой предприятия, на протяжении периода $T_{возм}$ существования возмущения не зависят явно от времени, а их изменения во времени много меньше значений самих коэффициентов:

$$\frac{n\cdot f(t,S)\Big|_0}{T_{возм}}\gg\frac{\partial\left(n\cdot f(t,S)\Big|_0\right)}{\partial t}\ ,$$

$$\frac{\left(n\cdot[c]_{n-1}\cdot\frac{\partial}{\partial[c]_m}f(t,S)\right)\Bigg|_0}{T_{возм}}\gg\frac{\partial\left(n\cdot[c]_{n-1}\cdot\frac{\partial}{\partial[c]_m}f(t,S)\right)\Bigg|_0}{\partial t}\ ,$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial[c]_m}\left(\int_0^\infty dm\cdot m^n\cdot J_{Gen}\right)\Bigg|_0}{T_{возм}}\gg\frac{\partial\left(\frac{\partial}{\partial[c]_m}\left(\int_0^\infty dm\cdot m^n\cdot J_{Gen}\right)\Bigg|_0\right)}{\partial t}\ . \tag{5}$$

Таким образом, будем считать, что коэффициенты при малых возмущениях $\left[y\right]_n$ в уравнениях в частных производных (3) зависят только от S. Разложим малые возмущения $\left[y\right]_n$ макропараметров $\left[c\right]_n$ в ряд Фурье:

$$\left[y\right]_n = \left\{y_n\right\}_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\left\{y_n\right\}_j \cdot \sin\left[k_j \cdot S\right] + \sum_{j=1}^{\infty}\left[y_n\right]_j \cdot \cos\left[k_j \cdot S\right];\ k_j = \frac{2\cdot p\cdot j}{S_d} \quad (6)$$

где $\left\{y_n\right\}_0$, $\left\{y_n\right\}_j$, $\left[y_n\right]_j$ - коэффициенты разложения малых возмущений $\left[y\right]_n$ макропараметров производственной системы $\left[c\right]_n$ вдоль технологической цепочки производственного процесса. Подставляя в систему уравнений (3) вместо $\left[y\right]_n$ их разложение в ряд Фурье (6), получим системы уравнений для коэффициентов разложения малых возмущений $\left[y\right]_n$ макропараметров производственной системы $\left[c\right]_n$

для первого слагаемого разложения (6):

$$\frac{d\left\{y_0\right\}_0}{dt} = \sum_{m=0}^{N_n}\frac{\partial}{\partial\left[c\right]_m}\left(\int_0^{\infty} dm\cdot J_{Gen}\right)\Bigg|_0 \cdot\left\{y_m\right\}_0, \qquad n = 1,2,3,.......N_n, \quad (7)$$

$$\frac{d\left\{y_n\right\}_0}{dt} = n\cdot f\left(t,S\right)\Big|_0 \cdot\left\{y_{n-1}\right\}_0 + \sum_{m=0}^{N_n}\left(n\cdot\left[c\right]_{n-1}\cdot\frac{\partial}{\partial\left[c\right]_m} f\left(t,S\right)\right)\Bigg|_0 \cdot\left\{y_m\right\}_0 +$$

$$+\sum_{m=0}^{N_n}\frac{\partial}{\partial\left[c\right]_m}\left(\int_0^{\infty} dm\cdot m^n\cdot J_{Gen}\right)\Bigg|_0 \cdot\left\{y_m\right\}_0 \quad (8)$$

и для последующих слагаемых разложения

$$\frac{d\left\{y_0\right\}_j}{dt} - \left[y_1\right]_j\cdot k_j = \sum_{m=0}^{N_n}\frac{\partial}{\partial\left[c\right]_m}\left(\int_0^{\infty} dm\cdot J_{Gen}\right)\Bigg|_0 \cdot\left\{y_m\right\}_j, \qquad n = 1,2,3,.......N_n, \quad (9)$$

$$\frac{d\left[y_0\right]_j}{dt} + \left\{y_1\right\}_j\cdot k_j = \sum_{m=0}^{N_n}\frac{\partial}{\partial\left[c\right]_m}\left(\int_0^{\infty} dm\cdot J_{Gen}\right)\Bigg|_0 \cdot\left[y_m\right]_j, \quad (10)$$

$$\frac{d\left\{y_n\right\}_j}{dt} - \left[y_{n+1}\right]_j\cdot k_j = n\cdot f\left(t,S\right)\Big|_0 \cdot\left\{y_{n-1}\right\}_j + \sum_{m=0}^{N_n}\left(n\cdot\left[c\right]_{n-1}\cdot\frac{\partial}{\partial\left[c\right]_m} f\left(t,S\right)\right)\Bigg|_0 \cdot\left\{y_m\right\}_j +$$

$$+\sum_{m=0}^{N_n}\frac{\partial}{\partial[c]_m}\left(\int_0^\infty dm\cdot m^n\cdot J_{Gen}\right)\Bigg|_0\cdot\{y_m\}_j\ , \qquad (11)$$

$$\frac{d[y_n]_j}{dt}+\{y_{n+1}\}_j\cdot k_j=n\cdot f(t,S)\big|_0\cdot[y_{n-1}]_j+\sum_{m=0}^{N_n}\left(n\cdot[c]_{n-1}\cdot\frac{\partial}{\partial[c]_m}f(t,S)\right)\Bigg|_0[y_m]_j+$$

$$+\sum_{m=0}^{N_n}\frac{\partial}{\partial[c]_m}\left(\int_0^\infty dm\cdot m^n\cdot J_{Gen}\right)\Bigg|_0\cdot[y_m]_j \qquad (12)$$

с соответствующими характеристическими уравнениями для j=0:

$$\begin{vmatrix}
(a_{00}-J_0) & a_{10} & \dots\dots\dots & a_{m0} & \dots\dots\dots & a_{N_m0}\\
(f_{01}+b_{01}+a_{01}) & (b_{01}+a_{01}-J_0) & \dots\dots\dots & (b_{m1}+a_{m1}) & \dots\dots\dots & (b_{N_m1}+a_{N_m1})\\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\
(b_{0n}+a_{0n}) & (b_{1n}+a_{1n}) & \dots\dots\dots & (b_{mn}+a_{mn}-J_0) & \dots\dots\dots & (b_{N_mm}+a_{N_mm})\\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\
(b_{0N_m}+a_{0N_m}) & (b_{0N_m}+a_{0N_m}) & \dots\dots\dots & (b_{mN_m}+a_{mN_m}) & \dots\dots\dots & (b_{N_mN_m}+a_{N_mN_m}-J_0)
\end{vmatrix}=0, \quad (13)$$

при $a_{mn}=\frac{\partial}{\partial[c]_m}\left(\int_0^\infty dm\cdot m^n\cdot J_{Gen}\right)\Bigg|_0$, $b_{mn}=\left(n\cdot[c]_{n-1}\cdot\frac{\partial}{\partial[c]_m}f(t,S)\right)\Bigg|_0$,

$$f_{n-1,n}=f(t,S)\big|_0 \qquad (14)$$

и для j>0

$$\begin{vmatrix}|A_{mnj}| & |K_{mnj}|\\ |-K_{mnj}| & |A_{mnj}|\end{vmatrix}=0 \qquad (15)$$

при

$$|A_{mnj}|=\begin{vmatrix}
(a_{00}-J_j) & a_{10} & \dots\dots\dots & a_{m0} & \dots\dots\dots & a_{N_m0}\\
(f_{01}+b_{01}+a_{01}) & (b_{01}+a_{01}-J_j) & \dots\dots\dots & (b_{m1}+a_{m1}) & \dots\dots\dots & (b_{N_m1}+a_{N_m1})\\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\
(b_{0n}+a_{0n}) & (b_{1n}+a_{1n}) & \dots\dots\dots & (b_{mn}+a_{mn}-J_j) & \dots\dots\dots & (b_{N_mm}+a_{N_mm})\\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\
(b_{0N_m}+a_{0N_m}) & (b_{0N_m}+a_{0N_m}) & \dots\dots\dots & (b_{mN_m}+a_{mN_m}) & \dots\dots\dots & (b_{N_mN_m}+a_{N_mN_m}-J_j)
\end{vmatrix}, \quad (16)$$

$$\left|K_{mnj}\right| = \begin{vmatrix} 0 & k_j & 0 & \ldots\ldots & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & k_j & \ldots\ldots & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & k_j & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & \ldots\ldots & k_j \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Характеристические уравнения (15) дают связь между собственным числом J_j и волновым числом k_j. Если корни J_j уравнений (13) имеют отрицательную реальную часть, то производственный процесс устойчив. Случай положительной реальной части J_j свидетельствует об экспоненциальном нарастании амплитуды возмущений $[y]_0$, $[y]_1$ со временем, т.е. о неустойчивости.

7.1.Условия устойчивого функционирования производственных систем в нулевом приближении по малому параметру $Kv \ll 1$ (при $Pm \approx 1$) для модели производственных процессов в 2-х моментном описании

При исследовании функционирования производственных систем с характеристическими числами $Kv \ll 1$, $Pm \approx 1$ замкнутая система уравнений балансов в нулевом приближении по малому параметру $Kv \ll 1$ для 2-х моментного описания производственных процессов (6.19), (6,20) принимает вид

$$\frac{\partial [c]_0}{\partial t} + \frac{\partial [c]_1}{\partial S} = 0, \qquad (6.19)$$

$$\frac{\partial [c]_1}{\partial t} + \frac{\partial \left([c]_1 \cdot a_{yV} \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} \right)}{\partial S} = a_{yV} \cdot [c]_{1y} \cdot \frac{\partial \left(a_{yV} \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} \right)}{\partial S}, \qquad (6.20)$$

где производительность работы технологического оборудования $[c]_{1y}$ определяется соотношением (6.25), является заданной детерминированной величиной:

$$\int_0^\infty y\left[m \to \tilde{m}\right]\cdot d\tilde{m} = 1\,, \qquad \int_0^\infty y\left[m \to \tilde{m}\right]\cdot \tilde{m}\cdot d\tilde{m} = a_{yV}(S)\cdot\frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}. \qquad (6.25)$$

Если продифференцировать второе слагаемое в левой части (6.20),

$$\frac{\partial\left(\left[c\right]_1\cdot a_{yV}\cdot\dfrac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)}{\partial S} = \left[c\right]_1\cdot\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot\dfrac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)}{\partial S} + \left(a_{yV}\cdot\frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)\frac{\partial\left(\left[c\right]_1\right)}{\partial S} \qquad (18)$$

то система балансовых уравнений в 2-х моментном описании примет вид

$$\frac{\partial\left[c\right]_0}{\partial t} + \frac{\partial\left[c\right]_1}{\partial S} = 0,$$

$$\frac{\partial\left[c\right]_1}{\partial t} + \left(a_{yV}\cdot\frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)\cdot\frac{\partial\left(\left[c\right]_1\right)}{\partial S} = \left(a_{yV}\cdot\left[c\right]_{1y} - \left[c\right]_1\right)\cdot\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot\dfrac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)}{\partial S}, \qquad (19)$$

множитель $\left(a_{yV}(S)\cdot\left[c\right]_{1y} - \left[c\right]_1\right)$ определяется относительным среднеквадратичным отклонением (6.13) микроскопических параметров базовых продуктов

$$a_{yV}(S)\cdot\left[c\right]_{1y} - \left[c\right]_1 = \left[c\right]_1\cdot e_c^2\,. \qquad (6.13)$$

Если относительное среднеквадратичное отклонение мало $e_c^2 \to 0$:

$$a_{yV}(S)\cdot\left[c\right]_{1y} - \left[c\right]_1 = \left[c\right]_1\cdot e_c^2 \to 0 \qquad (20)$$

то средняя скорость изменения затрат базового продукта $\left\langle m\right\rangle = \dfrac{\left[c\right]_1}{\left[c\right]_0}$ стремится к значению, заданному технологией производственного процесса $m_y = \dfrac{a_{yV}(S)\cdot\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}$:

$$\frac{a_{yV}(S)\cdot\left[c\right]_{1y} - \left[c\right]_1}{\left[c\right]_0} = m_y - \left\langle m\right\rangle = \frac{\left[c\right]_1\cdot e_c^2}{\left[c\right]_0} \to 0\,. \qquad (21)$$

Принимая во внимание (20), (21), система балансовых уравнений (19) может быть записана с точностью до слагаемого порядка малости $0\left(\frac{[c]_1 \cdot e_c^2}{[c]_0}\right) \to 0$

$$\frac{\partial [c]_0}{\partial t} + \frac{\partial [c]_1}{\partial S} = 0, \qquad \frac{\partial [c]_1}{\partial t} + \frac{[c]_1}{[c]_0} \cdot \frac{\partial [c]_1}{\partial S} = 0\left(\frac{[c]_1 \cdot e_c^2}{[c]_0}\right) \to 0\,. \tag{22}$$

По определению

$$\frac{[c]_1}{[c]_0} = \langle m \rangle = \frac{dS}{dt}\,. \tag{23}$$

С использованием (23) система балансовых уравнений (22) приводится к виду

$$\frac{\partial [c]_0}{\partial t} + \frac{\partial [c]_1}{\partial S} = 0, \qquad \frac{\partial [c]_1}{\partial t} + \frac{dS}{dt} \cdot \frac{\partial [c]_1}{\partial S} = \frac{d[c]_1}{dt} = 0. \tag{24}$$

Из системы балансовых уравнений (23) следует, что средняя скорость изменения затрат базового продукта $\langle m \rangle$ не зависит явно от времени, а определяется координатой S технологического пространства (S, m)

$$\frac{\partial [c]_1}{\partial t} + \frac{[c]_1}{[c]_0} \cdot \frac{\partial [c]_1}{\partial S} = \frac{\partial [c]_1}{\partial t} + \langle m \rangle \cdot \frac{\partial [c]_1}{\partial S} = \frac{\partial [c]_1}{\partial t} - \langle m \rangle \cdot \frac{\partial [c]_0}{\partial t} = [c]_0 \cdot \frac{\partial \langle m \rangle}{\partial t} = 0.$$

Будем полагать, что системе балансовых уравнений (6.19), (6.20) соответствует невозмущенное решение

$$[c]_n^* = [c]_n^*(t, S)\,, \quad n = 0,1\,, \tag{25}$$

которое отвечает заданным детерминированным плановым показателям производственного процесса.

Пусть наблюдаемые технологической или диспетчерской службой макровеличины производственного процесса: технологические заделы $[c]_0$ и темп движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки $[c]_1$, получат случайные малые возмущения $[y]_n$:

$$[y]_n = [c]_n - [c]_n^*\,. \tag{26}$$

Запишем линеаризованную систему уравнений для малых возмущений (3), (26) в окрестности невозмущенного состояния (25) для наиболее распространенного в производственной практике случая синхронизации производительности технологического оборудования. Условием синхронизации производительности технологического оборудования вдоль технологической цепочки производственного процесса является равенство (2.2.30)

$$\left.\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y}\right)}{\partial S}\right|_0 \cong 0\,. \tag{2.2.30}$$

Системе уравнений макропараметров производственной системы (6.19), (6.20) соответствует линеаризованная система уравнений в малых возмущениях (3), (26) в окрестности невозмущенного состояния (25), которая для случая синхронизации производительности технологического оборудования принимает вид:

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}=0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial[y]_1}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}\cdot\left.\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\right|_0+[y]_1\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left.\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\right|_0-$$

$$-\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot\left.\left([c]_1\cdot a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0^2}\right)\right|_0-[y]_0\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left.\left([c]_1\cdot a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0^2}\right)\right|_0=$$

$$-\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot\left.\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2\right|_0-[y]_0\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left.\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2\right|_0. \tag{28}$$

Символ $\big|_0$ обозначает, что разложение слагаемого осуществлено в окрестности невозмущенного состояния (25).

Если ввести обозначения

$$A=\left.\left(\frac{a_{yV}\cdot[c]_{1y}-[c]_1}{[c]_0}\right)\right|_0, \qquad B=\left.\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\right|_0, \tag{29}$$

то линеаризованная система уравнений для малых возмущений (27), (28) примет вид

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}=0,$$

$$\frac{\partial[y]_1}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}\cdot B+[y]_1\cdot\frac{\partial B}{\partial S}+\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot A\cdot B+[y]_0\cdot\frac{\partial(A\cdot B)}{\partial S}=0. \qquad (30)$$

Период существования возмущения $T_{возм}$ производственных макроскопических показателей на практике составляет от нескольких дней до нескольких недель, в то время как период изменения коэффициентов (29) при малых возмущениях (26) определяется стратегическим управлением предприятия и составляет от нескольких месяцев до нескольких лет. Это дает возможность предполагать, что коэффициенты (29), фиксируемые диспетчерской службой предприятия, на протяжении периода $T_{возм}$ существования возмущения не зависят явно от времени, а их изменения во времени много меньше значений самих коэффициентов:

$$\frac{A}{T_{возм}}>>\frac{\partial A}{\partial t},\quad \frac{B}{T_{возм}}>>\frac{\partial B}{\partial t}. \qquad (31)$$

Таким образом, будем считать, что коэффициенты при малых возмущениях $[y]_n$ в уравнениях в частных производных (30) зависят только от S.

Синхронизацию работы производственного оборудования удается обеспечить далеко не всегда. На практике для функционирования производственного процесса обеспечивается периодическая работа технологического оборудования, в ходе которой рабочего переставляют с одной технологической операции на другую с целью пополнения соответствующих межоперационных заделов. При этом условие синхронизации технологического оборудования принимают вид

$$\left.\frac{\partial\left\langle\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y}\right)\right\rangle}{\partial S}\right|_0\cong 0\ ,$$

где

$$\left\langle\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y}\right)\right\rangle=\frac{1}{Tc}\cdot\int_0^{Tc}\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y}\right)\cdot t$$

представляет собою среднюю производительность технологического оборудования за период синхронизации Tc. Последнее приводит к тому, что линеаризованная система уравнений для малых возмущений (30) примет вид системы уравнений с периодическими коэффициентами A, B (29), средние значения которых удовлетворяют условиям

$$\left\langle A\right\rangle = \frac{1}{Tc}\cdot\int_0^{Tc} A\cdot t\ , \quad \frac{\left\langle A\right\rangle}{T_{возм}} >> \frac{\partial\left\langle A\right\rangle}{\partial t}, \quad \left\langle B\right\rangle = \frac{1}{Tc}\cdot\int_0^{Tc} B\cdot t\ ,$$

$$\frac{\left\langle B\right\rangle}{T_{возм}} >> \frac{\partial\left\langle B\right\rangle}{\partial t}$$

Периодичность коэффициентов обусловлена периодом синхронизации Tc .

Разложим малые возмущения $\left[y\right]_n$ макропараметров $\left[c\right]_n$ в ряд Фурье (6). Подставляя в систему уравнений (30) вместо $\left[y\right]_n$ их разложение в ряд Фурье (6), получим системы уравнений для коэффициентов разложения малых возмущений $\left[y\right]_n$ макропараметров производственной системы $\left[c\right]_n$ для нулевого слагаемого разложения в ряд Фурье (6) малых возмущений $\left[y\right]_n$

$$\frac{d\{y_0\}_0}{dt}=0, \qquad \frac{\partial\{y_1\}_0}{\partial t}+\{y_1\}_0\cdot\frac{\partial B}{\partial S}+\{y_0\}_0\cdot\frac{\partial(A\cdot B)}{\partial S}=0 \qquad (32)$$

и для последующих слагаемых

$$\frac{d\{y_0\}_j}{dt}-[y_1]_j\cdot k_j=0, \qquad \frac{d[y_0]_j}{dt}+\{y_1\}_j\cdot k_j=0,$$

$$\frac{\partial\{y_1\}_j}{\partial t}-[y_1]_j\cdot k_j\cdot B+\{y_1\}_j\cdot\frac{\partial B}{\partial S}-[y_0]_j\cdot k_j\cdot(A\cdot B)+\{y_0\}_j\cdot\frac{\partial(A\cdot B)}{\partial S}=0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial[y_1]_j}{\partial t}+\{y_1\}_j\cdot k_j\cdot B+[y_1]_j\cdot\frac{\partial B}{\partial S}+\{y_0\}_j\cdot k_j\cdot(A\cdot B)+[y_0]_j\cdot\frac{\partial(A\cdot B)}{\partial S}=0.$$

с соответствующими характеристическими уравнениями для j=0

$$\begin{vmatrix} (J_0) & 0 \\ \left(\frac{\partial(A\cdot B)}{\partial S}\right) & \left(\frac{\partial B}{\partial S}+J_0\right) \end{vmatrix} = 0, \qquad (34)$$

и для j>0:

$$\begin{vmatrix} \left(J_j\right) & 0 & 0 & \left(-k_j\right) \\ 0 & \left(J_j\right) & \left(k_j\right) & 0 \\ \left(\frac{\partial\left(A\cdot B\right)}{\partial S}\right) & \left(-k_j\cdot\left(A\cdot B\right)\right) & \left(J_j+\frac{\partial B}{\partial S}\right) & \left(-k_j\cdot B\right) \\ \left(k_j\cdot\left(A\cdot B\right)\right) & \left(\frac{\partial\left(A\cdot B\right)}{\partial S}\right) & \left(k_j\cdot B\right) & \left(J_j+\frac{\partial B}{\partial S}\right) \end{vmatrix} = 0. \qquad (35)$$

Характеристические уравнения (34), (35) дают связь между собственным числом J_j и волновым числом k_j:

$$J_0\cdot\left(\frac{\partial B}{\partial S}+J_0\right)=0,$$

$$J_j^2+J_j\cdot\left(\frac{\partial B}{\partial S}\pm i\cdot B\cdot k_j\right)+\left(k_j^{\,2}\cdot\left(A\cdot B\right)\mp i\cdot k_j\cdot\frac{\partial\left(A\cdot B\right)}{\partial S}\right)=0, \quad i=\sqrt{-1}. \qquad (36)$$

$$J_{12j}=-\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial S}\pm i\cdot B\cdot k_j\right)}{2}+\sqrt{\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial S}\pm i\cdot B\cdot k_j\right)^2}{4}-\left(k_j^{\,2}\cdot\left(A\cdot B\right)\mp i\cdot k_j\cdot\frac{\partial\left(A\cdot B\right)}{\partial S}\right)}$$

$$J_{34j}=-\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial S}\pm i\cdot B\cdot k_j\right)}{2}-\sqrt{\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial S}\pm i\cdot B\cdot k_j\right)^2}{4}-\left(k_j^{\,2}\cdot\left(A\cdot B\right)\mp i\cdot k_j\cdot\frac{\partial\left(A\cdot B\right)}{\partial S}\right)} \qquad (37)$$

Введем обозначения

$$a_j=\left(\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial S}\right)^2}{4}-\frac{B^2\cdot k_j^{\,2}}{4}-k_j^{\,2}\cdot\left(A\cdot B\right)\right),\quad b_j=\pm k_j\cdot\left(\frac{\frac{\partial B}{\partial S}\cdot B}{2}+\frac{\partial\left(A\cdot B\right)}{\partial S}\right), \qquad (38)$$

откуда

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial S}\pm i\cdot B\cdot k_j\right)^2}{4}-\left(k_j^{\,2}\cdot\left(A\cdot B\right)\mp i\cdot k_j\cdot\frac{\partial\left(A\cdot B\right)}{\partial S}\right)}=\sqrt{a_j+i\cdot b_j}=$$

$$=\sqrt{z_j}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi_j+2\cdot\pi\cdot n}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\varphi_j+2\cdot\pi\cdot n}{2}\right)\right),\quad n=0,1$$

$$z_j = \sqrt{a_j^{\,2} + b_j^{\,2}}\ , \qquad tg\left(j_{\ j}\right) = \pm k_j \cdot \frac{\left(\dfrac{\dfrac{\partial B}{\partial S}\cdot B}{2} + \dfrac{\partial\left(A\cdot B\right)}{\partial S}\right)}{\left(\dfrac{\left(\dfrac{\partial B}{\partial S}\right)^2}{4} - \dfrac{B^2\cdot k_j^{\,2}}{4} - k_j^{\,2}\cdot\left(A\cdot B\right)\right)} \qquad (39)$$

Если корни J_0, J_j уравнений (36) имеют отрицательную реальную часть, то производственный процесс устойчив. Случай положительной реальной части свидетельствует об экспоненциальном нарастании амплитуды возмущений $\left[y\right]_0$, $\left[y\right]_1$ о временем, т.е. о неустойчивости.

Для реальной части корней (37) может быть записано выражение

$$\operatorname{Re}\left(J_{12j}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial B}{\partial S} + \sqrt{z_j}\cdot\cos\left(\frac{j_{\ j}}{2}\right) < 0\ , \qquad (40)$$

$$\operatorname{Re}\left(J_{34j}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial B}{\partial S} - \sqrt{z_j}\cdot\cos\left(\frac{j_{\ j}}{2}\right) < 0 \qquad (41)$$

Неравенства (40), (41) можно переписать в виде

$$\operatorname{Re}\left(J_{12j}\right) + \operatorname{Re}\left(J_{34j}\right) = -\frac{\partial B}{\partial S} < 0\ ,$$

$$\operatorname{Re}\left(J_{12j}\right)\cdot\operatorname{Re}\left(J_{34j}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\partial B}{\partial S}\right)^2 - z_j\cdot\cos^2\left(\frac{j_{\ j}}{2}\right) > 0\ . \qquad (42)$$

Неравенства (42) являются условиями устойчивости производственной системы относительно малых возмущений $\left[y\right]_n$ макропараметров $\left[c\right]_0$ и $\left[c\right]_1$.

Кроме того, система уравнений состояния производственной системы (28) имеет характеристическое уравнение (36) с одним нулевым корнем $J_{0_1} \equiv 0$. Такие системы в теории устойчивости относятся к критическим случаям исследования устойчивости и требуют дополнительного внимания. Система уравнений (28) относительно малых возмущений $\left[y\right]_0$, $\left[y\right]_1$ имеет решение:

$$\left\{y_0\right\}_0 = c_{\left\{y_0\right\}_0} = const\ , \quad \left\{y_1\right\}_0 = exp\left(-\frac{\partial B}{\partial S}\cdot t\right) + \left\{y_1\right\}_0\ . \qquad (43)$$

Постоянная интегрирования $\{\dot{y}_1\}_0 = const$ определяется из равенства

$$\frac{\partial B}{\partial S} \cdot \{\dot{y}_1\}_0 + \frac{\partial (A \cdot B)}{\partial S} \cdot c_{\{y_0\}_0} = 0 \ . \qquad (44)$$

Тривиальное решение $\{y_0\}_0 = c_{\{y_0\}_0} = 0$, $\{y_1\}_0 = 0$ содержится в семействе решений рассмотренной системы уравнений и соответствует нулевому значению постоянной $c_{\{y_0\}_0} = 0$. В этом случае система уравнений состояния производственной системы относительно малых возмущений $[y]_0$, $[y]_1$ допускает интеграл – семейство инвариантных поверхностей, на каждой из которых имеется особая точка $\{y_0\}_0 = c_{\{y_0\}_0}$, $\{y_1\}_0 = exp\left(-\frac{\partial B}{\partial S} \cdot t\right) + \{\dot{y}_1\}_0$ [4]. Тривиальному решению соответствует исследуемое невозмущенное установившееся состояние рассматриваемой производственной системы (43). Точно также решению (43) соответствуют другие установившиеся состояния рассматриваемой производственной системы. Таким образом, в особом случае одного нулевого корня исследуемое невозмущенное состояние принадлежит к семейству установившихся состояний, которое определяется системой уравнений (32). В особом случае невозмущенное состояние всегда устойчиво. Устойчивость при этом не будет асимптотической. Однако всякое возмущенное состояние, достаточно близкое к невозмущенному, не стремясь при $t \to \infty$ к невозмущенному состоянию, стремится все же к одному из установившихся состояний вышеуказанного семейства. Другими словами, для всякого решения уравнений возмущенного состояния, для которого начальные значения $\{y_0\}_0\big|_{t=0} = c_{\{y_0\}_0}$, $\{y_1\}_0\big|_{t=0} = \{\dot{y}_1\}_0$ достаточно малы, справедливы равенства

$$\lim_{t\to\infty}\{y_0\}_0 = c_{\{y_0\}_0}, \qquad \lim_{t\to\infty}\left(exp\left(-\frac{\partial B}{\partial S} \cdot t\right)\right) = 0 \ . \qquad (45)$$

Исследуем более подробно условия устойчивого функционирования производственной системы для наиболее распространенного в производственной практике случая синхронизации производительности технологического оборудования.

Условием синхронизации производительности технологического оборудования вдоль технологической цепочки производственного процесса является равенство (2.2.30)

$$\left.\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y}\right)}{\partial S}\right|_0 \cong 0\,. \tag{46}$$

Тогда

$$\frac{\partial B}{\partial S}\cong\frac{\partial}{\partial S}\left.\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\right|_0\cong-\left.\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0^2}\cdot\frac{\partial[c]_0}{\partial S}\right)\right|_0\cong-\left.\left(\frac{B}{[c]_0}\cdot\frac{\partial[c]_0}{\partial S}\right)\right|_0 \tag{47}$$

Рассмотрим два предельных случая

$$A=\left.\left(\frac{a_{yV}\cdot[c]_{1y}-[c]_1}{[c]_0}\right)\right|_0\cong\left.\left(\frac{a_{yV}\cdot[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\right|_0=B\,,\qquad a_{yV}\cdot[c]_{1y}\gg[c]_1 \tag{48}$$

и

$$A=\left.\left(\frac{a_{yV}\cdot[c]_{1y}-[c]_1}{[c]_0}\right)\right|_0\cong 0\,,\qquad [c]_1\to a_{yV}\cdot[c]_{1y}\,. \tag{49}$$

соответствующие большому и малому среднеквадратичному отклонению темпа движения базового продукта от заданного производственной технологией значения.

7.1.1.Условия устойчивого функционирования производственных систем для предельного случая $a_{yV}\cdot[c]_{1y}\gg[c]_1$ при условии синхронизации производительности технологического оборудования.

Для макропараметров технологического процесса существует зависимость (6.13)

$$a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}=[c]_1\cdot\left(1+e_c^2\right) \tag{50}$$

В предельном случае соотношения макропараметров производственного процесса $a_{yV}\cdot[c]_{1y}\gg[c]_1$

$$a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}=[c]_1\cdot e_c^2 \tag{51}$$

Продифференцируем обе части (51) по S и используя равенство (46)

$$\left.\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y}\right)}{\partial S}\right|_0 = \left.\left(\frac{\partial[c]_1}{\partial S}\cdot e_c^2\right)\right|_0 + \left.\left([c]_1\cdot\frac{\partial e_c^2}{\partial S}\right)\right|_0 \cong 0\,. \qquad (52)$$

Откуда получаем

$$\left.\frac{1}{a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}}\cdot\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y}\right)}{\partial S}\right|_0 \approx \left.\left(\frac{\partial[c]_1}{\partial S}\cdot\frac{1}{[c]_1}\right)\right|_0 + \frac{1}{e_c^2}\cdot\left.\left(\frac{\partial e_c^2}{\partial S}\right)\right|_0 \cong 0 \qquad (53)$$

Как правило, при условии синхронизации производительности технологического оборудования

$$\left.\left(\frac{\partial[c]_1}{\partial S}\cdot\frac{1}{[c]_1}\right)\right|_0 \to 0\,, \qquad (54)$$

откуда

$$\left.\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y}\right)}{\partial S}\right|_0 \approx \left.\left(\frac{\partial[c]_1}{\partial S}\cdot e_c^2\right)\right|_0 \approx 0\,. \qquad (55)$$

Используя равенства (46)-(48) и (55), получим

$$\frac{\partial A}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}\left.\left(\frac{a_{yV}\cdot[c]_{1y}-[c]_1}{[c]_0}\right)\right|_0 = \left.\left(\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y}-[c]_1\right)}{\partial S}\cdot\frac{1}{[c]_0}\right)\right|_0 +$$

$$+\left.\left(\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y}-[c]_1\right)\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1}{[c]_0}\right)\right)\right|_0 \approx -\left.\left(\frac{B}{[c]_0}\cdot\frac{\partial[c]_0}{\partial S}\right)\right|_0 \quad . \qquad (56)$$

Подставляя вместо $\frac{\partial B}{\partial S}$, $\frac{\partial A}{\partial S}$ их выражения (47), (56) в характеристическое уравнение (36), получим коэффициенты (38) в виде

$$a_j = \left(\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial S}\right)^2}{4} - \frac{B^2\cdot k_j^{\,2}}{4} - k_j^{\,2}\cdot(A\cdot B)\right) \approx \left(\frac{\left.\left(\frac{B}{[c]_0}\cdot\frac{\partial[c]_0}{\partial S}\right)^2\right|_0}{4} - \frac{B^2\cdot k_j^{\,2}}{4} - k_j^{\,2}\cdot B^2\right) \approx$$

$$\approx B^2 \cdot \left(\frac{\left. \left(\frac{1}{[c]_0} \cdot \frac{\partial [c]_0}{\partial S} \right)^2 \right|_0 - 5 \cdot k_j^{\,2}}{4} \right) \tag{57}$$

$$b_j = \pm k_j \cdot \left(\frac{\frac{\partial B}{\partial S} \cdot B}{2} + \frac{\partial (A \cdot B)}{\partial S} \right) \approx \text{я} \; \pm k_j \cdot \left(\frac{\frac{\partial B}{\partial S} \cdot B}{2} + \frac{\partial \left(B^2 \right)}{\partial S} \right) \approx \pm k_j \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{\partial B}{\partial S} \cdot B \right) \approx$$

$$\mathbf{m} k_j \cdot B^2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left. \left(\frac{1}{[c]_0} \cdot \frac{\partial [c]_0}{\partial S} \right) \right|_0 \tag{58}$$

откуда для $j >> 1$

$$\lim_{k \to \infty} z_j = \lim_{k \to \infty} \sqrt{a_j^{\,2} + b_j^{\,2}} \approx \lim_{k \to \infty} \sqrt{a_j^{\,2}} \approx \lim_{k \to \infty} \sqrt{a_j^{\,2}} \approx \lim_{k \to \infty} \left(\frac{5}{4} \cdot B^2 \cdot k_j^{\,2} \right) \to \infty \, . \tag{59}$$

$$\lim_{k \to \infty} \left(tg \left(j_{\,j} \right) \right) = \pm \lim_{k \to \infty} \left(k_j \cdot \frac{B^2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left. \left(\frac{1}{[c]_0} \cdot \frac{\partial [c]_0}{\partial S} \right) \right|_0}{\frac{B^2}{4} \cdot \left(\left. \left(\frac{1}{[c]_0} \cdot \frac{\partial [c]_0}{\partial S} \right)^2 \right|_0 - 5 \cdot k_j^{\,2} \right)} \right) \approx$$

$$\approx \mathbf{m} \lim_{k \to \infty} \left(\frac{2 \cdot \left. \left(\frac{1}{[c]_0} \cdot \frac{\partial [c]_0}{\partial S} \right) \right|_0}{k_j} \right) \approx \mathbf{m} \frac{\left. \left(\frac{1}{[c]_0} \cdot \frac{\partial [c]_0}{\partial S} \right) \right|_0}{k_j} \to \mathbf{m} 0 \, , \tag{60}$$

Подставляя (59), (60) в условие устойчивости макропараметров производственного процесса (42), получаем

$$\mathrm{Re}\left(J_{12j} \right) \cdot \mathrm{Re}\left(J_{34j} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\partial B}{\partial S} \right)^2 - z_j \cdot \cos^2 \left(\frac{j_{\,j}}{2} \right) \approx$$

$$\approx \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\partial B}{\partial S} \right)^2 - \frac{5}{4} \cdot B^2 \cdot k_j^{\,2} \cdot \cos^2 \left(\mathbf{m} \frac{1}{k_j} \cdot \left. \left(\frac{1}{[c]_0} \cdot \frac{\partial [c]_0}{\partial S} \right) \right|_0 \right) \right) \approx$$

$$\approx \lim_{k \to \infty} \left(-\frac{5}{4} \cdot B^2 \cdot k_j^{\,2} \right) < 0 \, . \tag{62}$$

Неравенство (62) противоречит условию устойчивости (42). Производственный процесс для предельного случая $a_{yV}\cdot[c]_{1y} >> [c]_1$ при условии синхронизации производительности технологического оборудования является неустойчивым и требует постоянного внешнего воздействия.

7.1.2.Условия устойчивого функционирования производственных систем для предельного случая $\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y} - [c]_1\right)\to 0$ при условии синхронизации производительности технологического оборудования.

Для макропараметров технологического процесса (6.13) в предельном случае соотношения макропараметров производственного процесса $\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y} - [c]_1\right)\to 0$

$$a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y} \approx [c]_1 . \tag{63}$$

Как правило, при условии синхронизации производительности технологического оборудования

$$\left.\left(\frac{\partial[c]_1}{\partial S}\cdot\frac{1}{[c]_1}\right)\right|_0 \to 0 , \tag{64}$$

откуда

$$\left.\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y}\right)}{\partial S}\right|_0 \approx \left.\frac{\partial[c]_1}{\partial S}\right|_0 \approx 0 . \tag{65}$$

Используя равенства (46)-(49) и (65), получим

$$\frac{\partial A}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}\left.\left(\frac{a_{yV}\cdot[c]_{1y} - [c]_1}{[c]_0}\right)\right|_0 = \left.\left(\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y} - [c]_1\right)}{\partial S}\cdot\frac{1}{[c]_0}\right)\right|_0 +$$

$$+\left.\left(\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y} - [c]_1\right)\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1}{[c]_0}\right)\right)\right|_0 \approx 0 \quad . \tag{66}$$

Подставив вместо $\frac{\partial B}{\partial S}$, $\frac{\partial A}{\partial S}$ их выражения (47), (49), (66) в характеристическое уравнение (36), получим характеристические уравнения для j=0:

$$\begin{vmatrix} (J_0) & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial B}{\partial S}+J_0\right) \end{vmatrix} = 0, \qquad J_0 \cdot \left(-\left(\frac{B}{[c]_0} \cdot \frac{\partial [c]_0}{\partial S} \right)\Bigg|_0 + J_0 \right) = 0 \tag{67}$$

и для j>0:

$$\begin{vmatrix} (J_j) & 0 & 0 & (-k_j) \\ 0 & (J_j) & (k_j) & 0 \\ 0 & 0 & \left(J_j+\frac{\partial B}{\partial S}\right) & (-k_j \cdot B) \\ 0 & 0 & (k_j \cdot B) & \left(J_j+\frac{\partial B}{\partial S}\right) \end{vmatrix} = 0, \quad J_j^2 + J_j \cdot \left(-\left(\frac{B}{[c]_0} \cdot \frac{\partial [c]_0}{\partial S} \right)\Bigg|_0 \pm i \cdot B \cdot k_j \right) = 0. \tag{68}$$

Откуда следует условие устойчивости макропараметров производственного процесса

$$\left.\frac{\partial [c]_0}{\partial S}\right|_0 > 0 \tag{69}$$

Характеристические уравнения (67), (68) для уравнений в малых возмущениях макропараметров, описывающих состояния производственной системы для нулевого слагаемого разложения в ряд Фурье (6) малых возмущений $[y]_n$

$$\frac{d\{y_0\}_0}{dt} = 0, \qquad \frac{\partial \{y_1\}_0}{\partial t} + \{y_1\}_0 \cdot \frac{\partial B}{\partial S} = 0 \tag{70}$$

имеет один нулевой корень $J_{0_1} \equiv 0$,

и для последующих слагаемых

$$\frac{d\{y_0\}_j}{dt} - [y_1]_j \cdot k_j = 0, \qquad \frac{d[y_0]_j}{dt} + \{y_1\}_j \cdot k_j = 0, \tag{71}$$

$$\frac{\partial\{y_1\}_j}{\partial t} - [y_1]_j \cdot k_j \cdot B + \{y_1\}_j \cdot \frac{\partial B}{\partial S} = 0,$$

$$\frac{\partial[y_1]_j}{\partial t} + \{y_1\}_j \cdot k_j \cdot B + [y_1]_j \cdot \frac{\partial B}{\partial S} = 0$$

два нулевых корня $J_{j_{2,4}} \equiv 0$. Такие системы в теории устойчивости относятся к критическим случаям исследования устойчивости. Случай уравнений в малых возмущениях (70) с одним критическим корнем рассмотрен выше. Случай уравнений в малых возмущениях (71) с двумя критическими корнями требует дополнительного внимания.

Таким образом, производственная система, описываемая макропараметрами $[c]_0$ и $[c]_1$ для предельного случая $\left(a_{yV} \cdot [c]_{1y} - [c]_1\right) \to 0$ при условии синхронизации производительности технологического оборудования находится на грани устойчивости. Наличие двух критических корней не позволяет решить вопрос об устойчивости производственной системы для случая уравнений в малых возмущениях в первом приближении и требует учета в уравнениях более высоких слагаемых разложения в ряд Тейлора по малым возмущениям.

7.2.Условия устойчивого функционирования производственных систем в нулевом приближении по малому параметру $\frac{1}{K_v} << 1$ (при $P_m \approx 1$) для модели производственных процессов в 2-х моментном описании

При исследовании функционирования производственных систем с характеристическими числами $\frac{1}{K_v} << 1$, $P_m \approx 1$ замкнутая система уравнений балансов в нулевом приближении по малому параметру $\frac{1}{K_v} << 1$ для 2-х моментного описания производственных процессов (6.43), (6.44) принимает вид

$$\frac{\partial[c]_0}{\partial t}+\frac{\partial[c]_1}{\partial S}=0, \qquad (6.43)$$

$$\frac{\partial[c]_1}{\partial t}+\frac{\partial[c]_2}{\partial S}-f(t,S)\cdot[c]_0=0, \qquad (6.44)$$

где макропараметр работы технологического процесса $[c]_2(t,S)$ и инженерно-производственная функция являются заданными детерминированными величинами:

$$[c]_2(t,S)=\int_0^{\infty}dm\cdot m^2\cdot c_0(t,S,m)\,, \qquad (72)$$

$$f(t,S)=a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\cdot\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot\dfrac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial S}. \qquad (73)$$

Будем полагать, что системе балансовых уравнений (6.43), (6.44) соответствует невозмущенное решение (25)

$$[c]_n^*=[c]_n^*(t,S)\quad,\quad n=0,1\,, \qquad (74)$$

которое отвечает заданным детерминированным плановым показателям производственного процесса.

Пусть наблюдаемые технологической или диспетчерской службой макровеличины производственного процесса: технологические заделы $[c]_0$ и темп движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки $[c]_1$, получат случайные малые возмущения $[y]_n$:

$$[y]_n=[c]_n-[c]_n^*. \qquad (75)$$

Исследуем более подробно условия устойчивого функционирования производственной системы для наиболее распространенного в производственной практике случая синхронизации производительности технологического оборудования. Условием синхронизации производительности технологического оборудования вдоль технологической цепочки производственного процесса является равенство (2.2.30)

$$\left.\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y}\right)}{\partial S}\right|_0\cong 0\,. \qquad (46)$$

Системе уравнений (6.43), (6.44) для макропараметров, описывающих производственный процесс, соответствует линеаризованная система уравнений в малых возмущениях (75) в окрестности невозмущенного состояния (74):

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}=0,$$

$$\frac{\partial[y]_1}{\partial t}+\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot\left.\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2\right|_0+[y]_0\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left.\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2\right|_0=0. \quad (76)$$

Символ $\Big|_0$ обозначает, что разложение слагаемого осуществлено в окрестности невозмущенного состояния (25).

Если использовать введенное ранее обозначение (29) для B

$$B=\left.\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\right|_0, \quad (29)$$

то линеаризованная система уравнений для малых возмущений (75), (76) примет вид

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}=0,$$

$$\frac{\partial[y]_1}{\partial t}+\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot B^2+[y]_0\cdot\frac{\partial B^2}{\partial S}=0. \quad (77)$$

Как и ранее, будем предполагать, что коэффициент B (29), фиксируемый диспетчерской службой предприятия, на протяжении периода $T_{возм}$ существования возмущения не зависит явно от времени, а его изменение во времени много меньше значения самого коэффициента:

$$\frac{B}{T_{возм}}>>\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (31)$$

Таким образом, будем считать, что коэффициенты при малых возмущениях $[y]_n$ в уравнениях в частных производных (30) зависят только от S:

Разложим малые возмущения $[y]_n$ макропараметров $[c]_n$ в ряд Фурье (6). Подставляя в систему уравнений (30) вместо $[y]_n$ их разложение в ряд Фурье (6), получим системы уравнений для коэффициентов разложения малых возмущений $\left[y\right]_n$ макропараметров производственной системы $\left[c\right]_n$ для нулевого слагаемого разложения в ряд Фурье (6) малых возмущений $\left[y\right]_n$

$$\frac{d\left\{y_0\right\}_0}{dt}=0, \qquad \frac{\partial\left\{y_1\right\}_0}{\partial t}+\left\{y_0\right\}_0\cdot\frac{\partial B^2}{\partial S}=0, \tag{78}$$

и для последующихслагаемых

$$\frac{d\left\{y_0\right\}_j}{dt}-\left[y_1\right]_j\cdot k_j=0, \qquad \frac{d\left[y_0\right]_j}{dt}+\left\{y_1\right\}_j\cdot k_j=0,$$

$$\frac{\partial\left\{y_1\right\}_j}{\partial t}-\left[y_0\right]_j\cdot k_j\cdot B^2+\left\{y_0\right\}_j\cdot\frac{\partial B^2}{\partial S}=0, \tag{79}$$

$$\frac{\partial\left[y_1\right]_j}{\partial t}+\left\{y_0\right\}_j\cdot k_j\cdot B^2+\left[y_0\right]_j\cdot\frac{\partial B^2}{\partial S}=0.$$

с соответствующими характеристическими уравнениями для j=0

$$\begin{vmatrix} J_0 & 0 \\ \dfrac{\partial B^2}{\partial S} & J_0 \end{vmatrix}=0, \tag{80}$$

и для j>0:

$$\begin{vmatrix} \left(J_j\right) & 0 & 0 & \left(-k_j\right) \\ 0 & \left(J_j\right) & \left(k_j\right) & 0 \\ \left(\dfrac{\partial B^2}{\partial S}\right) & \left(-k_j\cdot B^2\right) & \left(J_j\right) & 0 \\ \left(k_j\cdot B^2\right) & \left(\dfrac{\partial B^2}{\partial S}\right) & 0 & \left(J_j\right) \end{vmatrix}=0. \tag{81}$$

Характеристические уравнения (80), (81) дают связь между собственным числом J_j и волновым числом k_j:

$$J_0^2=0,$$

$$J_j^2+\left(k_j^{\,2}\cdot B^2\mp i\cdot k_j\cdot\frac{\partial B^2}{\partial S}\right)=0, \qquad i=\sqrt{-1}. \tag{82}$$

$$J_{12j} = \sqrt{-\left(k_j^{\,2} \cdot B^2 \,\mathrm{m}\, i \cdot k_j \cdot \frac{\partial B^2}{\partial S}\right)}, \qquad J_{34j} = -\sqrt{-\left(k_j^{\,2} \cdot B^2 \,\mathrm{m}\, i \cdot k_j \cdot \frac{\partial B^2}{\partial S}\right)}. \tag{83}$$

Система уравнений состояния производственной системы (78)-(79) имеет характеристическое уравнение (80), (81) с двойным нулевым корнем $J_{0_1} \equiv 0$. Как ранее подчеркивалось, такие системы в теории устойчивости относятся к критическим случаям исследования устойчивости и требуют дополнительного внимания. Системы второго порядка с двойным нулевым корнем подробно исследованы в работах [4],[5], [6].

7.3.Условия устойчивого функционирования производственных систем в нулевом приближении по малому параметру $\frac{1}{Pm} \ll 1$ (при $Kv \approx 1$) для модели производственных процессов в 2-х моментном описании. Условия устойчивости быстроразвивающихся производственных систем.

При исследовании функционирования производственных систем с характеристическими числами $\frac{1}{Pm} \ll 1$, $Kv \approx 1$ замкнутая система уравнений балансов в нулевом приближении по малому параметру $\frac{1}{Pm} \ll 1$ для 2-х моментного описания производственных процессов (6.56) принимает вид

$$\frac{\partial [c]_0}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial [c]_1}{\partial t} - f(t,S) \cdot [c]_0 = 0, \tag{6.56}$$

при заданной производственной функции:

$$f(t,S) = a_{yV} \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} \cdot \frac{\partial \left(a_{yV} \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} \right)}{\partial S}. \tag{6.59}$$

Будем полагать, что системе балансовых уравнений (6.43), (6.44) соответствует невозмущенное решение (25)

$$[c]_n^{\,*} = [c]_n^{\,*}(t,S), \quad n = 0,1, \tag{25}$$

которое отвечает заданным детерминированным плановым показателям производственного процесса.

Пусть наблюдаемые технологической или диспетчерской службой макровеличины производственного процесса: технологические заделы $\left[c\right]_0$ и темп движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки $\left[c\right]_1$, получат случайные малые возмущения $\left[y\right]_n$ (2):

$$\left[y\right]_n = \left[c\right]_n - \left[c\right]_n^* . \tag{2}$$

Исследуем более подробно условия устойчивого функционирования производственной системы для наиболее распространенного в производственной практике случая синхронизации производительности технологического оборудования. Условием синхронизации производительности технологического оборудования вдоль технологической цепочки производственного процесса является равенство (2.2.30)

$$\left.\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot\left[c\right]_{1y}\right)}{\partial S}\right|_0 \cong 0 . \tag{46}$$

Системе уравнений макропараметров производственной системы (6.56) соответствует линеаризованная система уравнений для малых возмущений (2) в окрестности невозмущенного состояния (25):

$$\frac{\partial\left[y\right]_0}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial\left[y\right]_1}{\partial t}+\frac{\partial\left[y\right]_0}{\partial S}\cdot\left.\left(a_{yV}\cdot\frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)^2\right|_0+\left[y\right]_0\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left.\left(a_{yV}\cdot\frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)^2\right|_0=0, \tag{84}$$

Символ $\left.\right|_0$ обозначает, что разложение слагаемого осуществлено в окрестности невозмущенного состояния (25).

Если использовать введенные ранее обозначения (29)

$$B=\left.\left(a_{yV}\cdot\frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)\right|_0 , \tag{29}$$

то линеаризованная система уравнений для малых возмущений (84) примет вид

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}=0,\ \frac{\partial[y]_1}{\partial t}+\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot B^2+[y]_0\cdot\frac{\partial B^2}{\partial S}=0. \tag{85}$$

Как и ранее, будем предполагать, что коэффициент (29), фиксируемый диспетчерской службой предприятия, на протяжении периода $T_{возм}$ существования возмущения не зависит явно от времени, а его изменение во времени много меньше значения самого коэффициента (31):

$$\frac{B}{T_{возм}}>>\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{31}$$

Таким образом, будем считать, что коэффициенты при малых возмущениях $[y]_n$ в уравнениях в частных производных (85) зависят только от S.

Разложим малые возмущения $[y]_n$ макропараметров $[c]_n$ в ряд Фурье (6). Подставляя в систему уравнений (85) вместо $[y]_n$ их разложение в ряд Фурье (6), получим системы уравнений для коэффициентов разложения малых возмущений $[y]_n$ макропараметров производственной системы $[c]_n$ для нулевого слагаемого разложения в ряд Фурье (6) малых возмущений $[y]_n$

$$\frac{d\{y_0\}_0}{dt}=0,\qquad \frac{\partial\{y_1\}_0}{\partial t}+\{y_0\}_0\cdot\frac{\partial B^2}{\partial S}=0, \tag{86}$$

и для последующих слагаемых

$$\frac{d\{y_0\}_j}{dt}-[y_1]_j\cdot k_j=0,\qquad \frac{d[y_0]_j}{dt}+\{y_1\}_j\cdot k_j=0,$$

$$\frac{\partial\{y_1\}_j}{\partial t}-[y_0]_j\cdot k_j\cdot B^2+\{y_0\}_j\cdot\frac{\partial B^2}{\partial S}=0, \tag{87}$$

$$\frac{\partial[y_1]_j}{\partial t}+\{y_0\}_j\cdot k_j\cdot B^2+[y_0]_j\cdot\frac{\partial B^2}{\partial S}=0.$$

с соответствующими характеристическими уравнениями для j=0

$$\begin{vmatrix} J_0 & 0 \\ \frac{\partial B^2}{\partial S} & J_0 \end{vmatrix}=0, \tag{88}$$

и для j>0:

$$\begin{vmatrix} (J_j) & 0 & 0 & (-k_j) \\ 0 & (J_j) & (k_j) & 0 \\ \left(\frac{\partial B^2}{\partial S}\right) & (-k_j \cdot B^2) & (J_j) & 0 \\ (k_j \cdot B^2) & \left(\frac{\partial B^2}{\partial S}\right) & 0 & (J_j) \end{vmatrix} = 0. \qquad (89)$$

Характеристические уравнения (88), (89) дают связь между собственным числом J_j и волновым числом k_j:

$$J_0^2 = 0 ,$$

$$J_j^2 + \left(k_j^{\ 2} \cdot B^2 \mp i \cdot k_j \cdot \frac{\partial B^2}{\partial S} \right) = 0, \qquad i = \sqrt{-1} . \qquad (90)$$

$$J_{12\,j} = \sqrt{-\left(k_j^{\ 2} \cdot B^2 \mp i \cdot k_j \cdot \frac{\partial B^2}{\partial S} \right)}, \quad J_{34\,j} = -\sqrt{-\left(k_j^{\ 2} \cdot B^2 \mp i \cdot k_j \cdot \frac{\partial B^2}{\partial S} \right)}. \qquad (91)$$

Система уравнений состояния производственной системы (86)-(87) имеет характеристическое уравнение (90), (91) с двойным нулевым корнем $J_{0_1} \equiv 0$. Такие системы в теории устойчивости относятся к критическим случаям исследования устойчивости и требуют дополнительного внимания. Системы второго порядка с двойным нулевым корнем подробно исследованы в работах (4), (5), (6).

Если плотность базовых продуктов $[c]_0$ медленно меняется вдоль технологической цепочки

$$[c]_0(t,S) = [c]_0(t,0) + \frac{\partial [c]_0(t,0)}{\partial S} \cdot S + ... , \qquad (92)$$

$$\left| \frac{[c]_0(t,S)}{S} \right| >> \left| \frac{\partial [c]_0(t,0)}{\partial S} \right|, \qquad \left| \frac{\partial^m [c]_0(t,0)}{\partial S^m} \right| >> \left| \frac{\partial^{m+1} [c]_0(t,0)}{\partial S^{m+1}} \right|,$$

то

$$\frac{B^2(S)}{S} \approx \frac{B^2(S)}{S_d} \approx k_j \cdot B^2 >> \frac{\partial B^2}{\partial S} \qquad (93)$$

и система уравнений (86), (87) для нулевого слагаемого разложения в ряд Фурье (6) малых возмущений $[y]_n$ принимает вид

$$\frac{d\{y_0\}_0}{dt}=0, \qquad \frac{\partial\{y_1\}_0}{\partial t}=0, \tag{94}$$

и для последующих слагаемых

$$\frac{d\{y_0\}_j}{dt}-[y_1]_j\cdot k_j=0, \qquad \frac{d[y_0]_j}{dt}+\{y_1\}_j\cdot k_j=0,$$

$$\frac{\partial\{y_1\}_j}{\partial t}-[y_0]_j\cdot k_j\cdot B^2=0, \qquad \frac{\partial[y_1]_j}{\partial t}+\{y_0\}_j\cdot k_j\cdot B^2=0, \tag{95}$$

с соответствующими характеристическими уравнениями для j=0

$$\begin{vmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_0 \end{vmatrix}=0, \tag{96}$$

и для j>0:

$$\begin{vmatrix} (J_j) & 0 & 0 & (-k_j) \\ 0 & (J_j) & (k_j) & 0 \\ 0 & (-k_j\cdot B^2) & (J_j) & 0 \\ (k_j\cdot B^2) & 0 & 0 & (J_j) \end{vmatrix}=0. \tag{97}$$

откуда приходим к критическому случаю

$$J_0^2=0\,, \qquad \left(J_j^2+k_j^{\,2}\cdot B^2\right)^2=0. \tag{98}$$

7.4.Условия устойчивого функционирования производственных систем в нулевом приближении по малому параметру $Kv \ll 1$ (при $Pm \approx 1$) для модели производственных процессов в 2-х моментном описании. Метод функций Ляпунова.

Рассмотрим производственную систему, в которой базовые продукты движутся вдоль заданных технологических траекторий с целевой функцией (2.1.45)

$$J(t,S_j,m_j)=\sum_{j=1}^{N_p}\frac{m_j^{\,2}}{2}+F_{1y}(S_{yV})\cdot\sum_{j=1}^{N_p}m_j-W_{0y}(S_{yV})\,, \tag{2.1.45}$$

в которой суммируются все базовые продукты, находящиеся в производственном процессе. Если целевая функция (2.1.45) не зависит явно от времени, то производственная система допускает интеграл движения

$$H=\sum_{1}^{N_p} m_j \cdot \frac{\partial J(,S_j,m_j)}{\partial m_j} - J(,S_j,m_j) = \sum_{j=1}^{N_p} \frac{m_j^{\,2}}{2} + W_{0y}(S_{yV}) = const\ ,$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \qquad (2.1.52)$$

Пренебрегая условно-постоянными накладными расходами, функцию технологического поля $W_{0y}(S_{yV})$ можно записать в виде

$$W_{0y}(S_{yV}) = -\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2 \qquad (2.1.69)$$

Перейдем от суммирования всех базовых продуктов, находящиеся в производственном процессе, к интегрированию

$$H=\sum_{j=1}^{N_p}\frac{m_j^{\,2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2=\sum_{j=1}^{N_p}\left(\frac{m_j^{\,2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2\right)=$$

$$=\int_0^{S_d}\int_0^{\infty} c(t,S,m)\cdot\left(\frac{m^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(a_{yV}(S)\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2\right)dm\,dS=\int_0^{S_d}\int_0^{\infty} c(t,S,m)\cdot\frac{m^2}{2}dm\,dS-$$

$$-\int_0^{S_d}\int_0^{\infty} c(t,S,m)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(a_{yV}(S)\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2 dm\,dS=\left|\begin{array}{l}\textit{по определению}\\ \int_0^{\infty} c(t,S,m)\cdot m^m dm=[c]_m\end{array}\right|=$$

$$=\int_0^{S_d}\frac{[c]_2}{2}dS-\int_0^{S_d}[c]_0\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(a_{yV}(S)\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2 dS=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{S_d}\left([c]_2-\frac{\left(a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}\right)^2}{[c]_0}\right)dS\ . \qquad (99)$$

Выражение (99) определяет суммарный потенциал производства.

Если использовать связь между начальными и центральными моментами (3.2.45)

$$P_m(t,S)+[c]_0\cdot\langle m\rangle^2=[c]_2\ , \qquad (3.2.45)$$

то подынтегральное выражение (99) приобретет вид

$$[c]_2-\frac{\left(a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}\right)^2}{[c]_0}=[c]_0\cdot\frac{\langle m\rangle^2}{2}+\frac{P_m(t,S)}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}\right)^2}{[c]_0}\ , \qquad (100)$$

напоминающий выражение для энергии единичного объема газа плотностью $\left[c\right]_0$, движущегося со скоростью $\langle m\rangle$ в потенциальном поле с энергией $U=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(a_{yV}(S)\cdot\left[c\right]_{1y}\right)^2}{\left[c\right]_0}$. Таким образом, Гамильтониан производственной системы может быть представлен в компактном виде

$$H=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{S_d}\left(\left[c\right]_2-\frac{\left(a_{yV}(S)\cdot\left[c\right]_{1y}\right)^2}{\left[c\right]_0}\right)dS=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{S_d}\left(\left[c\right]_0\cdot\frac{\langle m\rangle^2}{2}+\frac{P_m\left(t,S\right)}{2}-\frac{\left(a_{yV}(S)\cdot\left[c\right]_{1y}\right)^2}{\left[c\right]_0}\right)dS. \quad (101)$$

Для производственных систем с характерными числами $Kv<<1$ и $Pm\approx 1$ в нулевом приближении по малому параметру $Kv<<1$ справедливо равенство

$$\int_0^{\infty}y\left[m\to\tilde{m}\right]\cdot d\tilde{m}=1\,,\qquad \int_0^{\infty}y\left[m\to\tilde{m}\right]\cdot\tilde{m}\cdot d\tilde{m}=a_{yV}(S)\cdot\frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}=\frac{\left[c\right]_2}{\left[c\right]_1}\,, \quad (6.25)$$

что позволяет записать Гамильтониан производственной системы в следующем виде

$$H=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{S_d}\left(a_{yV}(S)\cdot\left[c\right]_{1y}\cdot\frac{\left[c\right]_1-a_{yV}(S)\cdot\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0}\right)dS. \quad (102)$$

Будем полагать, что вдоль технологической цепочки производственного процесса выполняется условие синхронизации производительности технологического оборудования (2.2.30)

$$\left.\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot\left[c\right]_{1y}\right)}{\partial S}\right|_0\cong 0\,. \quad (46)$$

Для того, чтобы функционирование производственной системы было устойчивым в точке технологической цепочки с координатой $S=S_0$, необходимо, чтобы Гамильтониан рассматриваемой производственной системы (102) имел минимум в окрестности S_0

$$H(S)>H(S_0)\,,\qquad S>S_0\,. \quad (103)$$

Таким образом, при появлении в окрестности S_0 малых отклонений макропараметров производственного процесса

$$[y]_n = [c]_n - [c]_n^* . \tag{26}$$

от установившегося режима работы

$$[c]_n^* = [c]_n^* (t,S) , \quad n = 0,1 , \tag{25}$$

производственного процесса, описывающегося системой уравнений

$$\frac{\partial [c]_0}{\partial t} + \frac{\partial [c]_1}{\partial S} = 0, \tag{6.19}$$

$$\frac{\partial [c]_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial S}\left(a_{yV} \cdot [c]_{1y} \cdot \frac{[c]_1 - a_{yV} \cdot [c]_{1y}}{[c]_0} \right) \tag{6.20}$$

должна возникать сила, направленная против развития малых возмущений.

Однако следует заметить, что минимум выражения (102) достигается для тривиального состояния

$$H(S) = 0 \tag{104}$$

при

$$[c]_1 - a_{yV}(S) \cdot [c]_{1y} = 0 \qquad \text{или} \qquad [c]_0 \to \infty , \tag{105}$$

когда производственный процесс осуществляется без отклонений от заданной технологии или межоперационные заделы бесконечны. Оба случая являются идеальными. Парадоксальный результат получается потому, что найден абсолютный минимум протекания производственного процесса. В то время как для нахождения условий устойчивого функционирования производственного процесса по минимуму функционала $H(S)$ необходимо учитывать связи (6.19), (6.20), накладываемые уравнениями, описывающими функционирование производственного процесса.

В качестве функции Ляпунова примем квадратичную форму

$$V = H - H_0 , \tag{106}$$

где через H_0 введено обозначение Гамильтониана производственной системы при отсутствии возмущений макропараметров $[c]_0$, $[c]_1$, $[c]_2$. Функция V обращается в ноль при отсутствии возмущений макропараметров $[c]_0$, $[c]_1$, $[c]_2$ и ее полная производная по времени равна нулю. Равенство нулю полной производной по времени означает, что функция Ляпунова выражена через первый интеграл движения (101)

$$V = H - H_0 , \quad V\big|_0 = \left(H - H_0\right)\big|_0 = 0 , \quad \frac{dV}{dt} = \frac{d\left(H - H_0\right)}{dt} = \frac{dH}{dt} = 0 . \qquad (107)$$

Таким образом, исследование устойчивости производственной системы сводится к исследованию на определенно-положительность формы V с Гамильтонианом производственной системы в виде (102):

$$H = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{S_d} \left(a_{yV}(S) \cdot [c]_{1y} \cdot \frac{[c]_1 - a_{yV}(S) \cdot [c]_{1y}}{[c]_0} \right) dS . \qquad (102)$$

Для устойчивости производственной системы необходимо, чтобы любое возмущение макропараметров производственной системы приводило к увеличению значения функции Ляпунова (107). Так как возмущение макропараметров производственной системы вдоль технологической цепочки произвольно (произвольно вдоль координаты S), то отсюда следует, что подынтегральное выражение должно быть определенно положительное в любой точке технологической цепочки производственного процесса.

Введем обозначения

$$h = \frac{1}{2} \cdot \left(a_{yV}(S) \cdot [c]_{1y} \cdot \frac{[c]_1 - a_{yV}(S) \cdot [c]_{1y}}{[c]_0} \right), \qquad H = \int_0^{S_d} h \cdot dS \qquad (108)$$

$$h_0 = h\big|_0 = \frac{1}{2} \cdot \left(a_{yV}(S) \cdot [c]_{1y} \cdot \frac{[c]_1 - a_{yV}(S) \cdot [c]_{1y}}{[c]_0} \right)\Bigg|_0 , \qquad H\big|_0 = \int_0^{S_d} h\big|_0 \cdot dS \qquad (109)$$

$$v = h - h_0 . \qquad (110)$$

Разложим (110) в ряд в окрестности установившегося невозмущенного состояния (25) по малым возмущениям

$$v = h - h_0 = \frac{\partial h}{\partial [c]_0}\bigg|_0 \cdot [y]_0 + \frac{\partial h}{\partial [c]_1}\bigg|_0 \cdot [y]_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial [c]_0^{\,2}}\bigg|_0 \cdot [y]_0^{\,2} + \frac{\partial^2 h}{\partial [c]_0 \partial [c]_1}\bigg|_0 \cdot [y]_0 \cdot [y]_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial [c]_1^{\,2}}\bigg|_0 \cdot [y]_1^{\,2} + ... \qquad (111)$$

Пусть базовые продукты производственной системы и технологическое поле получат малые возмущения

$$m_j = m_{j0} + h_j , \quad m_{j0} \gg h_j , \quad S_{yV} = S_{yV0} + z , \quad S_{yV0} \gg z . \qquad (112)$$

Гамильтониан производственной системы (99) с учетом наличия возмущений (108) примет вид с точностью до членов второго порядка малости

$$H=\sum_{j=1}^{N_p}\frac{\left(m_{j0}+h_j\right)^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\left(a_{yV}(S_{yV0}+z)\cdot\frac{[c]_{1y}(S_{yV0}+z)}{[c]_0(S_{yV0}+z)}\right)^2=$$

$$=\sum_{j=1}^{N_p}\left(\frac{m_{j0}^{\;2}}{2}+m_{j0}\cdot h_j+\frac{h_j^{\;2}}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\Bigg|_0-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\frac{\partial}{\partial S}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\Bigg|_0\cdot z-\frac{1}{4}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\frac{\partial^2}{\partial S^2}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2\Bigg|_0\cdot z^2=$$

$$=H\big|_0+\sum_{j=1}^{N_p}\left(m_{j0}\cdot h_j+\frac{h_j^{\;2}}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\frac{\partial}{\partial S}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\Bigg|_0\cdot z-\frac{1}{4}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\frac{\partial^2}{\partial S^2}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2\Bigg|_0\cdot z^2,\quad(113)$$

Гамильтониан производственной системы при отсутствии возмущений записан в виде

$$H\big|_0=\sum_{j=1}^{N_p}\frac{m_{j0}^{\;2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\Bigg|_0.\qquad(114)$$

Для слагаемых первого порядка $m_{j0}\cdot h_j$ справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^{N_p}m_{j0}\cdot h_j=\sum_{j=1}^{N_p}m_{j0}\cdot\frac{d\left(z_j\right)}{dt}=\sum_{j=1}^{N_p}\frac{d\left(m_{j0}\cdot z_j\right)}{dt}-\sum_{j=1}^{N_p}\frac{dm_{j0}}{dt}\cdot z_j\qquad(115)$$

Из свойств целевой функции известно (1.2.29), что целевая функция производственной системы определяется только с точностью до полной производной от любой функции координат $S_j\left(t\right)$ по времени t. Таким образом, добавление к целевой функции слагаемого

$$\sum_{j=1}^{N_p}\frac{d\left(m_{j0}\cdot z_j\right)}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N_p}\left(m_{j0}\cdot z_j\right)\qquad(116)$$

не сказывается на уравнениях движения системы и слагаемое (116) при построении целевой функции можно опустить.

В силу уравнений Эйлера (2.2.8)

$$\frac{dm_{j0}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial m_{j0}}, \qquad -\left.\frac{\partial W}{\partial S_{jyV}}\right|_0 = \left.\frac{\partial J}{\partial S_{jyV}}\right|_0 \tag{117}$$

$$\frac{dm_{j0}}{dt} = -\left.\frac{\partial W}{\partial S_{jyV}}\right|_0, \qquad \text{при} \quad \left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_0 = 0. \tag{118}$$

Так как справедливо равенство (2.2.27)

$$\sum_{j=1}^{N_p}\left.\frac{\partial W}{\partial S_{jyV}}\right|_0 \cdot z_j = \sum_{j=1}^{N_p}\left.\frac{\partial W}{\partial S_{yV}}\right|_0 \cdot z\ , \tag{119}$$

то следует

$$\sum_{j=1}^{N_p}\frac{dm_{j0}}{dt}\cdot z_j + \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\frac{\partial}{\partial S}\left.\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\right|_0 \cdot z = 0 \tag{120}$$

и слагаемые первого порядка уничтожаются, а функция Гамильтона (109) может быть представлена с точностью до членов второго порядка малости

$$H = H|_0 + \sum_{j=1}^{N_p}\frac{h_j^2}{2} - \frac{1}{4}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\frac{\partial^2}{\partial S^2}\left.\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2\right|_0 \cdot z^2. \tag{121}$$

Таким образом, слагаемые первого порядка в силу уравнений Эйлера (120) обращаются в ноль и функция $v = h - h_0$ может быть представлена в виде квадратичной формы

$$v = h - h_0 = \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{1}{[c]_0^2}\right|_0 \cdot h_0\cdot[y]_0^2 + \left.\frac{\partial^2 h}{\partial[c]_0\,\partial[c]_1}\right|_0 \cdot[y]_0\cdot[y]_1 + \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{\partial^2 h}{\partial[c]_1^2}\right|_0 \cdot[y]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{1}{[c]_0^2}\right|_0 \cdot h_0\cdot[y]_0^2 - \frac{1}{2}\cdot a_{yV}(S_{yV})\cdot\left.\frac{[c]_{1y}}{[c]_0^2}\right|_0 \cdot[y]_0\cdot[y]_1 \tag{122}$$

В силу равенства (120) в выражении (111) линейные члены обращаются в ноль

$$\left.\frac{\partial h}{\partial[c]_0}\right|_0 \cdot[y]_0 + \left.\frac{\partial h}{\partial[c]_1}\right|_0 \cdot[y]_1 = 0, \tag{123}$$

откуда

$$-\frac{1}{2}\cdot\left(a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}\cdot\frac{[c]_1-a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}}{[c]_0^2}\right)_0\cdot[y]_0+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}}{[c]_0}\right)_0\cdot[y]_1=0$$

или

$$-\left(\frac{[c]_1-a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}}{[c]_0}\right)_0\cdot[y]_0+[y]_1=0\,,$$

$$[y]_1=\left(\frac{[c]_1-a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}}{[c]_0}\right)_0\cdot[y]_0\,. \qquad (124)$$

Подставим (123) в квадратичную форму (122)

$v=h-h_0=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{[c]_0^2}\bigg|_0\cdot h_0\cdot[y]_0^{\,2}-\frac{1}{2}\cdot a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0^2}\bigg|_0\cdot[y]_0\cdot\left(\frac{[c]_1-a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}}{[c]_0}\right)_0\cdot[y]_0=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{[c]_0^2}\bigg|_0\cdot h_0\cdot[y]_0^{\,2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{[c]_0^2}\bigg|_0\cdot[y]_0\cdot\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot[c]_{1y}\cdot\frac{[c]_1-a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}}{[c]_0}\right)_0\cdot[y]_0=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{[c]_0^2}\bigg|_0\cdot h_0\cdot[y]_0^{\,2}-\frac{1}{[c]_0^2}\bigg|_0\cdot[y]_0\cdot h_0\cdot[y]_0=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{[c]_0^2}\bigg|_0\cdot h_0\cdot[y]_0^{\,2}. \qquad (125)$$

Производственный процесс, описываемый Гамильтонианом (2.1.52)

$$H=\sum_1^{N_p}m_j\cdot\frac{\partial J(,S_j,m_j)}{\partial m_j}-J(,S_j,m_j)=\sum_{j=1}^{N_p}\frac{m_j^{\,2}}{2}+W_{0y}(S_{yV})=const\,, \qquad (2.1.52)$$

с видом функции технологического поля $W_{0y}(S_{yV})$ (2.1.69)

$$W_{0y}(S_{yV})=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N_p}\left(a_{yV}(S_{yV})\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)^2 \qquad (2.1.69)$$

требует в силу (2.1.52) и (2.1.69) выполнения соотношения

$$[c]_1-a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}=0. \qquad (126)$$

Соотношение (126) дает равенство нулю квадратичного слагаемого в (125)

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{[c]_0^2}\bigg|_0 \cdot h_0\cdot[y]_0^{\ 2} = \left|\begin{array}{l} \textit{принимая}\quad \text{во}\qquad \text{внимание} \\ h_0 = \frac{1}{2}\cdot\left(a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}\ \cdot\frac{[c]_1 - a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\bigg|_0, \\ \textit{в силу требования}\qquad (126) \\ [c]_1 - a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}\ = 0 \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{[c]_0^2}\bigg|_0 \cdot\ \left(a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}\ \cdot\frac{[c]_1 - a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}}{[c]_0}\cdot\right)[y]_0^{\ 2} = 0 \qquad (127)$$

и для анализа условия устойчивого функционирования производственных систем в нулевом приближении по малому параметру $Kv \ll 1$ (при $Pm \approx 1$) для модели производственных процессов в 2-х моментном описании требуются в разложении (122) слагаемые более высокого порядка малости.

Выводы

Таким образом, условия устойчивости макропараметров $[c]_0$ и $[c]_1$ технологического процесса производственной системы относительно малых возмущений $[y]_0$, $[y]_1$ можно записать в виде отрицательности реальной части корней характеристического уравнения. Полученные условия устойчивости макропараметров функционирования производства через коэффициенты системы уравнений дают соотношения между величиной операционных заделов и темпом движения заготовок от операции к операции вдоль технологического процесса. Условиями устойчивости макропараметров $[c]_0$ и $[c]_1$ функционирования производственного процесса определяются условия синхронизации поставок сырья, материалов, комплектующих смежными организациями и структурными участками предприятия. При этом мы предполагали, что система уравнений, описывающая состояние производственной системы относительно малых возмущений $[y]_0$, $[y]_1$ макропараметров $[c]_0$ и $[c]_1$ аналитична в рассматриваемой области и исследуемое невозмущенное состояние лежит в указанной области. Проведен анализ наиболее распространенных случаев функционирования производственных систем. Анализ условий устойчивого функционирования производственных систем в нулевом приближении по малому параметру $Kv << 1$ (при $Pm \approx 1$) для модели производственных процессов в 2-х моментном описании показал, что производственная система, описываемая макропараметрами $[c]_0$ и $[c]_1$ для предельного случая $\left(a_{yV} \cdot [c]_{1y} - [c]_1\right) \to 0$ при условии синхронизации производительности технологического оборудования находится на грани устойчивости. Условием неасимптотической устойчивости производственного процесса является условие возрастания плотности базовых продуктов (69) вдоль технологической цепочки по ходу движения базовых продуктов от одной технологической операции к другой:

$$\left.\frac{\partial [c]_0}{\partial S}\right|_0 > 0$$

Условие, подобное условию (69), имеет место для физической системы с большим количеством элементов [7, стр.92].

Однако, наличие двух критических корней не позволяет решить вопрос об устойчивости производственной системы для случая уравнений в малых возмущениях в первом приближении и требует учета в уравнениях более высоких слагаемых разложения в ряд Тейлора по малым возмущениям. При отклонении темпа движения базовых продуктов от значений, заданных технологическим процессом, производственная система теряет устойчивость и в предельном случае $a_{yV} \cdot [c]_{1y} >> [c]_1$ производственный процесс при условии синхронизации производительности технологического оборудования является неустойчивым и требует постоянного внешнего воздействия. Для производственных систем, функционирование которых в нулевом приближении по малому параметру $\frac{1}{K_v} << 1$ (при $P_m \approx 1$) и $\frac{1}{P_m} << 1$ (при $K_v \approx 1$) описывается системой уравнений (78), (79) и (86), (87), получены характеристические уравнения с корнями, соответствующими критическим случаям теории устойчивости. Такие системы в теории устойчивости требуют дополнительного внимания и исследованы в работах [4],[5],

[6]. В отдельном параграфе показан механизм анализа условий устойчивого функционирования производственных систем в нулевом приближении по малому параметру $Kv << 1$ (при $Pm \approx 1$) модели производственных процессов с использованием энергетического принципа. Энергетический принцип широко используется при исследовании устойчивости равновесного состояния жидкости, газа, плазмы [7]. Отказ от нахождения частоты собственных колебаний и инкремента неустойчивости макропараметров производственной системы лежит в основе энергетического принципа исследования устойчивости производственных систем и позволяет решить более общую задачу устойчивости функционирования производства.

1. Чернавский Д.С., Старков Н.И., Щербаков А.В. О проблемах физической экономики // Успехи физических наук. -2002. –т.172, N12. -С.1045-1066.
2. Рушицький Я.Я., Мілованов Т.С., Модифікована модель Філіпса-Лоренца для єкономічної системи (корпорації фірм) із стабільним капіталом// Доповіді Національної академії наук України. -1997. -N12. -С.36-40.
3. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок. -Х.: ХНУ, 2003. -272с.
4. Ляпунов А.М.. Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950, -395с.
5. Каменков Г.В., Об устойчивости движения. Сб. Трудов Казанского авиац. ин-та, №9, 1939.
6. Малкин И.Г., Некоторые вопросы теории устойчивости движения в смысле Ляпунова. Сб. Трудов Казанского авиац. ин-та, №7, 1937.
7. Половин Р.В., Демуцкий В.П. Основы магнитной гидродинамики М.: Энергоатомиздат, 1987, - 208с.
8. Демуцкий В.П., Пигнастый О.М., Мелешенко С.Ю., Пищик Е.Н. Об устойчивости функционирования процессов массового производства, Интегрированные компьютерные технологии в машиностроении ИКТМ-2005, 2005 г., стр.206-215
9. Демуцкий В.П., Пигнастый О.М., Ходусов В.Д., Азаренкова М.Н. Использование методов статистической физики для исследования экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции – Вестник ХНУ (физическая серия), 2005. –N710– С.128-134
10. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции – Доповіді Національної академії наук України, 2005. –N7– С.66-71
11. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Макроскопические уравнения для описания экономико-производственной системы с массовым выпуском продукции – Вестник ХНУ, 2005. –N664– С.107-112

12. Демуцкий В.П., Пигнастый О.М. Вопросы устойчивости макроскопических параметров технологических процессов массового производства – Доповіді Національної академії наук України, 2006. –N3– С.63-67
13. Pignastiy O.M., Statistical Physics methods in economic theory: abo-ut the use of characteristic numbers of technological process in production systems classification. Тезисы докладов 2-й между-народной конференции НАНУ «Квантовая электродинамика и статистическая физика», Харьков, 2006г., стр.155
14. Пигнастый О.М. Задача оптимального оперативного управления макропараметрами производственной системы с массовым выпуском продукции – Доповіді Національної академії наук України, 2006. –N5– С.79-85

8. ОПТИМАЛЬНОЕ ОПЕРАТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МАКРОПАРАМАТРАМИ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ.

Рассмотрена задача оптимального оперативного управления производственной системой с массовым выпуском продукции. Получены оптимальные функции оперативного управления межоперационными заделами и темпом движения заготовки вдоль технологической цепочки, обеспечивающие асимптотическую устойчивость макропараметров производственного процесса.

Служба главного диспетчера является на предприятии органической частью оперативного планирования производства, включает в себя непрерывный учет и текущую информацию о фактическом ходе работ по выполнению установленного производственного графика и графика сменно-суточных заданий, обеспечивает принятие производственной системой оперативных мер по предупреждению и устранению отклонений от плана и перебоев в ходе производства. Служба главного диспетчера выявляет и анализирует причины отклонений от установленных плановых заданий и календарных графиков производства и принимает оперативные меры по ликвидации этих причин. Таким образом, Служба главного диспетчера не только координирует текущую работу взаимосвязанных звеньев производства в целях обеспечения ритмичной работы производства по установленному графику, но и обеспечивает организационное руководство оперативной подготовкой всего необходимого для выполнения сменно-суточных заданий и календарных графиков производства (табл.8.1). Таким образом, служба главного диспетчера представляет собой централизованный оперативный контроль и оперативное управление производства с целью обеспечения равномерного и комплексного выполнения плана выпуска продукции. Система диспетчерского руководства является действенным средством обеспечения ритмичной работы. Диспетчирование опирается на четкую организацию оперативного планирования производства. Служба главного диспетчера обеспечивает непрерывность контроля и наблюдения за ходом производства, для чего необходима своевременная и точная информация о фактическом выполнении планов-графиков изготовления и выпуска продукции и обо всех неполадках, возникающих в текущей работе. Создание специальной системы оперативной информации основывается на применении современных технических средств, обеспечивающих автоматизацию получения, переработки и передачи информации. Диспетчирование предполагает обязательное быстрое и четкое выполнение распоряжений руководства, что позволяет успешно ликвидировать возникающие неполадки и координировать работу всех звеньев производства. Для этого Служба главного диспетчера наделяется достаточными полномочиями, позволяющими осуществлять оперативное руководство и маневрирование имеющимися на производстве резервами (страховыми запасами материалов, заделами заготовок и деталей, резервным оборудованием и т.д.). Для этого устанавливается строгий регламент дежурства диспетчерского персонала и ответственная сдача-приемка сменных дежурств. В разных типах производства конкретное содержание Службы главного диспетчера имеет ряд существенных особенностей. Непрерывный, системный контроль за состоянием элементов производства и за фактическим ходом работ по выполнению производственного плана имеет в разных типах производства неодинаковый состав объектов наблюдения и диспетчерского контроля.

В процессе дежурства диспетчер завода получает оперативную информацию о ходе производства и его обеспечении. Для этого используется система оповещений и сигнализации. Довольно широко используется производственная сигнализация, представляющая собой различного рода счетные и регистрирующие приборы, которые автоматически передают фактические показания с рабочих мест. С помощью автоматической сигнализации диспетчер получает сведения о начале и конце работы конвейера, простоях оборудования, выработке на отдельных производственных участках, часовом выпуске изделий и т.п.

Табл.8.1. Основные объекты диспетчерского контроля и наблюдения за ходом производства

Тип	Объекты диспетчерского контроля	Примечание
Единичное производство	Сроки выполнения отдельных работ по заказам	1)системная проверка своевременности запуска и выпуска заготовок по отдельным этапам их изготовления, своевременности комплектования деталей и узлов для окончательного монтажа и выпуска готовой продукции в установленные сроки 2)важнейшее условие бесперебойной работы: наличие своевременной и комплексной подготовки всего необходимого для выполнения заказа. 3)осуществление текущей увязки органов технической подготовки, участвующих в последовательных стадиях разработки заказов.
Серийное производство	Установленные по плану сроки запуска и выпуска партии заготовок и деталей на участках производственной цепочки, состояние складских заделов	1)в зависимости от характера серийного производства и от степени его устойчивости диспетчерский контроль осуществляется либо применительно к стандартным графикам межцеховых подач по отдельным цехам и план-графикам работ производственных участков, либо применительно к установленным на очередной месяц срокам комплектации узлов. 2)при использовании системы планирования по заделам объектом диспетчерского контроля является степень укомплектованности изделий, которая устанавливается на основании данных картотеки пропорциональности 3)задача оперативной подготовки производства обеспечивается ритмичным чередованием запуска партии деталей в обработку и их выпуска по установленному календарному графику, требует четкую организацию переналадки оборудования. Работа наладчиков оборудования производится под строгим контролем диспетчеров при строгом соблюдении установленных графиков переналадок
Массовое производство	Такт работы и нормы заделов на стадиях производственного процесса	1)контроль осуществляется с помощью суточных и часовых графиков работы 2)контроль за наличием сырья и материалов, бесперебойностью работы оборудования и выполнением внеплановых срочных заданий и заказов. Диспетчер обеспечивает системную проверку наличия в производственных цехах требуемых материалов и заготовок. Подача необходимого на производственные участки осуществляется под наблюдением диспетчера и в ряде случаев по его прямому распоряжению

В условиях применения ЭВМ функции оперативного планирования и управления тесно переплетаются. Информация в течение суток накапливается, обрабатывается и сравнивается с плановой информацией. Затем, в начале следующих суток информация о ходе производства и задание на следующие сутки передается производственным подразделениям в виде цепочки рекомендаций, распоряжений и приказов, суть которых – ликвидировать наличие отклонения от планового результата. Эти действия по ликвидации отклонений от плановых показателей носят заранее продуманный характер и представлены в виде инструкций у диспетчера. Данные инструкции будем называть управляющей функцией, а конкретные распоряжения диспетчера по ликвидации отклонения от планового результата - управляющими воздействиями. Под задачей оперативного управления производственной системой будем понимать задачу оперативного управления отклонениями макропараметров производственной системы от своих невозмущенных плановых значений. Макропараметры производственной системы связаны между собой через микроскопический уровень

$$\int_0^\infty dm \cdot m^n \cdot c\left(t,S,m\right) = \left[c\right]_n \left(t,S\right), \quad n = 0,1,2,3....., \tag{3.2.2}$$

являются моментами функции распределения $c(t,S,m)$ базовых продуктов по скоростям изменения затрат m в фазовом пространстве $\left(\mathrm{S},m\right)$. Первым моментам функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат соответствуют макропараметры производственной системы, представляющие собою заделы базовых продуктов $\left[c\right]_0$ между технологическими операциями производственного процесса и темп перемещения базовых продуктов $\left[c\right]_1$ от одной технологической операции к другой. Как правило, моменты функции распределения $c(t,S,m)$ базовых продуктов по скоростям изменения затрат $\left[c\right]_n$ более высокого порядка $n = 2,3.....$ в работе Службы главного диспетчера не используются. Под возмущающими факторами будем понимать воздействия, не учитываемые при описании производственного процесса вследствие их малости по сравнению с основными факторами, влияющими на производство и выпуск продукции. Они могут действовать как мгновенно, что сведется к малому изменению начального состояния производственной системы, так и непрерывно, что будет означать - составленные уравнения производственного процесса отличаются от истинных на некоторые малые поправочные члены, не учтенные в уравнениях производственного процесса. Связь макропараметров производственной системы представлена в виде балансовых уравнений, полученных путем агрегирования слагаемых кинетического уравнения производственной системы для функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат m

$$\frac{\partial[c]_0}{\partial t}+\frac{\partial[c]_1}{\partial S}=\int_0^\infty dm\cdot J_{Gen}\,,\qquad n=1,2,3,\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial[c]_n}{\partial t}+\frac{\partial[c]_{n+1}}{\partial S}=n\cdot f(t,S)\cdot[c]_{n-1}+\int_0^\infty dm\cdot m^n\cdot J_{Gen}\,. \qquad (3.2.31)$$

Система из $(n+1)$-балансовых уравнений производственной системы включает $(n+2)$-неизвестных макропараметров производственной системы, не содержит замкнутого аппарата для решения задачи. Для получения замкнутой системы уравнений балансов необходимо к балансовым уравнениям производственной системы добавить еще информацию, обусловленную учетом взаимодействия базовых продуктов с технологическим оборудованием, т.е. задать вид функций $f(t,S)$ и J_{Gen}. Управление производственным процессом представлено функциями управления $\Upsilon_n(t,S)$. Дополним балансовые уравнения производственной системы (3.2.31) функциями управления $\Upsilon_n(t,S)$

$$\frac{\partial[c]_0}{\partial t}+\frac{\partial[c]_1}{\partial S}=\int_0^\infty dm\cdot J_{Gen}+\Upsilon_0(t,S)\,,\quad n=1,2,3,\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial[c]_n}{\partial t}+\frac{\partial[c]_{n+1}}{\partial S}=n\cdot f(t,S)\cdot[c]_{n-1}+\int_0^\infty dm\cdot m^n\cdot J_{Gen}+\Upsilon_n(t,S)\,. \quad (1)$$

Пусть системе балансовых уравнений (1) соответствует невозмущенное решение:

$$[c]_n=[c]_n^*(t,S)\,,\ \Upsilon_n(t,S)=\Upsilon_n^*(t,S)\,,\qquad n=0,1,2,3,\ldots\ldots N_n\,. \qquad (2)$$

которое отвечает плановым показателям производственного процесса и определяется стратегическим планированием и управлением производственного процесса (1.6.1), (1.6.2).

Пусть наблюдаемые технологической или диспетчерской службой макровеличины производственного процесса получат неизвестные заранее случайные малые возмущения $[y]_n$:

$$[y]_n = [c]_n - [c]_n^*, \tag{3}$$

для ликвидации которых от диспетчерской службы предприятия требуются дополнительные управляющие воздействия u_m:

$$\sum_{m=0}^{N_k} q_{nm} \cdot u_m = Y_n(t,S) - Y_n^*(t,S), \quad \frac{\sum_{m=0}^{N_k} q_{nm} \cdot u_m}{Y_n^*(t,S)} << 1. \tag{1.6.4}$$

Линеаризуем систему уравнений макропараметров производственной системы (1) относительно малых возмущений (3) в окрестности невозмущенного состояния (2):

$$\frac{\partial [y]_0}{\partial t} + \frac{\partial [y]_1}{\partial S} = \sum_{m=0}^{N_n} \frac{\partial}{\partial [c]_m} \left(\int_0^\infty dm \cdot J_{Gen} \right) \Bigg|_0 \cdot [y]_m + \sum_{m=0}^{N_k} q_{0m} \cdot u_m, \quad n = 1,2,3,.......N_n,$$

$$\frac{\partial [y]_n}{\partial t} + \frac{\partial [y]_{n+1}}{\partial S} = n \cdot f(t,S)\big|_0 \cdot [y]_{n-1} + \sum_{m=0}^{N_n} \left(n \cdot [c]_{n-1} \cdot \frac{\partial}{\partial [c]_m} f(t,S) \right) \Bigg|_0 \cdot [y]_m +$$

$$+ \sum_{m=0}^{N_n} \frac{\partial}{\partial [c]_m} \left(\int_0^\infty dm \cdot m^n \cdot J_{Gen} \right) \Bigg|_0 \cdot [y]_m + \sum_{m=0}^{N_k} q_{nm} \cdot u_m. \tag{4}$$

Символ $\Big|_0$ обозначает, что разложение слагаемого осуществлено в окрестности невозмущенного состояния (3).

Сформулируем задачу об оперативном управлении макропараметрами производственной системы предприятия с массовым выпуском продукции. Требуется найти такие управляющие воздействия $u_m(t,[y]_n)$, которые обеспечат асимптотическую устойчивость планового (невозмущенного) состояния макропараметров производственной системы (2), заданных стратегическим планированием и управлением производственного процесса (1.6.1), (1.6.2). Предполагается, что в ходе управления можно измерять текущие значения макропараметров $[c]_n$ производственной системы, данные о которых поступают в диспетчерский пункт посредством производственной сигнализации. На основе этого измерения управляющее устройство вырабатывает воздействия $u_m(t,[y]_n)$ на производственный объект. Эти воздействия должны обеспечить асимптотическую устойчивость заданного планового состояния (4).

Предполагается, что функции $u_m(t,[y]_n)$ должны удовлетворять равенствам:

$$u_m(t,0)=0 \tag{5}$$

определены и непрерывны в рассматриваемой области и не стеснены никакими дополнительными неравенствами.

Прикладные задачи оперативного управления макропараметрами производственной системы с массовым выпуском продукции наряду с требованиями асимптотической устойчивости заданного планового состояния (4) содержат обычно пожелания о возможно наилучшем качестве переходного процесса в ходе его приближения к невозмущенному состоянию при $t \to \infty$. При этом обычно высказывается пожелания о возможно наименьшей затрате производственных ресурсов (энергии, сырья и материалов, трудовых ресурсов и т.д.), расходуемых на формирование управляющих воздействий $u_m(t,[y]_n)$. Такие пожелания можно выразить в виде условия минимальности некоторого интеграла:

$$I=\int_{t_0}^{\infty} w(t,[y]_n,u_m)\cdot dt\ . \tag{6}$$

Здесь $w(t,[y]_n,u_m)$ - неотрицательная функция, при выборе которой следует учитывать три основных мотива:

- условие минимума интеграла качества должно обеспечивать достаточно быстрое затухание возникшего возмущения $[y]_n$ макропараметров производственной системы;
- величина интеграла качества (6) должна удовлетворительно оценивать ресурсы, затрачиваемые на формирование управляющих воздействий $u_m(t,[y]_n)$
- функция $w(t,[y]_n,u_m)$ должна быть такой, чтобы решение задачи не оказалось чрезмерно сложным и чтобы, по возможности, можно было получить это решение в замкнутой форме.

Этим требованиям во многих практических случаях отвечает функция $w(t,[y]_n,u_m)$, выбранная в виде определенно положительной квадратичной формы

$$w=\sum_{n,m=0}^{N_n} a_{n,m}\cdot[y]_n\cdot[y]_m+\sum_{n,m=0}^{N_n} b_{n,m}\cdot u_n\cdot u_m\ ; \tag{7}$$

Задачу об управлении макропараметрами производственной системы с массовым выпуском продукции при условии минимума критерия качества (7) будем называть задачей об оптимальном оперативном управлении производственной системой с массовым выпуском продукции. Данную задачу сформулируем так: Пусть выбран критерий качества производственного процесса в виде интеграла (6). Требуется найти такие управляющие воздействия $u_m(t,[y]_n)$, которые обеспечат асимптотическую устойчивость заданного планового состояния производственной системы (1) в силу уравнений в малых возмущениях (4). При этом, какие бы то ни были другие управляющие воздействия, $u_m^*(t,[y]_n)$, решающие задачу, должно выполняться неравенство

$$I = \int_{t_0}^{\infty} w(t,[y]_n^0, u_m^0) \cdot dt \le \int_{t_0}^{\infty} w(t,[y]_n^*, u_m^*) \cdot dt \tag{8}$$

для всех начальных условий в области существования решений системы уравнения (1). Функции $u_m^0(t,[y]_n)$, разрешающие задачу (4), будем называть оптимальным оперативным управлением отклонениями макропараметров производственной системы с массовым выпуском продукции от заданного планового состояния. Исследование и решение задачи (3.2.31) облегчается тем обстоятельством, что эта проблема, как правило, имеет единственное решение [1]. Напротив, набор функций $u_m^*(t,[y]_n)$, разрешающих задачу (4), обычно содержит большой произвол.

Для задач об оперативном управлении процессами массового производства, как и для общей задачи устойчивости, может быть развита теория исследования этих задач по первому приближению [2]. Можно указать случаи, когда решение проблемы определяется первым приближением, а также критические случаи, когда возможность разрешения проблемы и сами искомые воздействия $u_m(t,[y]_n)$ определяются членами высшего порядка малости в уравнении балансов производственной системы (1).

Исследуем задачу об оптимальном оперативном управлении отклонениями макропараметров производственного процесса для линеаризованной системы уравнений макропараметров производственной системы (4). В качестве критерия качества выберем интеграл:

$$I = \int_{t_0}^{\infty}\left[\frac{1}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}\left(\sum_{n,m=0}^{N_n} a_{nm}\cdot[y]_n\cdot[y]_m + \sum_{n,m=0}^{N_n} b_{nm}\cdot u_m\cdot u_n\right)\cdot dS\right]\cdot dt\,, \qquad (9)$$

где S_d – средняя себестоимость изготовления базового продукта.

Выбор обусловлен пожеланиями о наименьшей затрате ресурсов предприятия на управляющие воздействия при условии протекания производственного процесса с наименьшими отклонениями от плановых показателей. Используем разложение малых возмущений $[y]_n$ макропараметров $[c]_n$ и управляющих воздействий u_m в ряд Фурье с коэффициентами $\{y_n\}_0$, $\{y_n\}_j$, $[y_n]_j$, $\{u_n\}_0$, $\{u_n\}_j$, $[u_n]_j$:

$$[y]_n = \{y_n\}_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\{y_n\}_j\cdot\sin\left[k_j\cdot S\right] + \sum_{j=1}^{\infty}[y_n]_j\cdot\cos\left[k_j\cdot S\right], \qquad k_j = \frac{2\cdot p\cdot j}{S_d}$$

$$[u]_n = \{u_n\}_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\{u_n\}_j\cdot\sin\left[k_j\cdot S\right] + \sum_{j=1}^{\infty}[u_n]_j\cdot\cos\left[k_j\cdot S\right], \qquad (10)$$

Подынтегральная функция (7) для интеграла качества (9) примет вид

$$w = \sum_{n,m=0}^{N_n} a_{n,m}\left(\{y_n\}_0\cdot\{y_m\}_0 + \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\{y_n\}_j\cdot\{y_m\}_j + \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}[y_n]_j\cdot[y_m]_j\right) +$$

(11)

$$+\sum_{n,m=0}^{N_n} b_{n,m}\left(\{u_n\}_0\cdot\{u_m\}_0 + \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\{u_n\}_j\cdot\{u_m\}_j + \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}[u_n]_j\cdot[u_m]_j\right), \qquad b_{mn} = b_{nm}$$

Оптимальную функцию Ляпунова $V^0(t,[y]_n)$, будем искать в виде квадратичной формы:

$$V^0(t,[y]_n) = \frac{1}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}\sum_{m,n=0}^{N_n} c_{nm}\cdot[y]_n\cdot[y]_m\cdot dS =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{N_n} c_{n,m}\cdot\left(\{y_n\}_0\cdot\{y_m\}_0 + \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\{y_n\}_j\cdot\{y_m\}_j + \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}[y_n]_j\cdot[y_m]_j\right) \qquad (12)$$

Составим выражение $B[V^0,t]$ для рассматриваемой производственной системы:

$$B[V^0] = \frac{\partial V^0}{\partial t} + \sum_{n=0}^{N_n}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_0}\cdot\frac{\partial\{y_n\}_0}{dt} + \sum_{n=0}^{N_n}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_j}\cdot\frac{d\{y_n\}_j}{dt} +$$

$$+\sum_{n=0}^{N_n}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial V^0}{\partial\left[y_n\right]_j}\cdot\frac{d\left[y_n\right]_j}{dt}+w \tag{13}$$

При $u_m = u_m^0(t,\left[y\right]_n)$ величина $B[V^0,t]$ должна иметь минимум и обращаться при этом в ноль. Отсюда первое уравнение для нахождения оптимальной функции Ляпунова $V^0(t,\left\{y_n\right\}_0,\left\{y_n\right\}_j,\left[y_n\right]_j)$ и оптимальных управляющих воздействий $u_m = u_m^0(t,\left[y\right]_n)$:

$$B[V^0,t]=0. \tag{14}$$

Подставляя вместо малых возмущений и соответствующих управляющих воздействий их разложение (10), можно получить новый вид уравнений (4):

$$\frac{d\left\{y_0\right\}_0}{dt}=\sum_{m=0}^{N_n}\frac{\partial}{\partial\left[c\right]_m}\left.\left(\int_0^{\infty}dm\cdot J_{Gen}\right)\right|_0\cdot\left\{y_m\right\}_0+\sum_{m=0}^{N_n}q_{0m}\cdot\left\{u_m\right\}_0 ,$$

$n=1,2,3,.......N_n$,

$$\frac{d\left\{y_n\right\}_0}{dt}=n\cdot\left.f\left(t,S\right)\right|_0\cdot\left\{y_{n-1}\right\}_0+\sum_{m=0}^{N_n}\left.\left(n\cdot\left[c\right]_{n-1}\cdot\frac{\partial}{\partial\left[c\right]_m}f\left(t,S\right)\right)\right|_0\cdot\left\{y_m\right\}_0+$$

$$+\sum_{m=0}^{N_n}\frac{\partial}{\partial\left[c\right]_m}\left.\left(\int_0^{\infty}dm\cdot m^n\cdot J_{Gen}\right)\right|_0\cdot\left\{y_m\right\}_0+\sum_{m=0}^{N_n}q_{nm}\cdot\left\{u_m\right\}_0 , \tag{15}$$

$$\frac{d\left\{y_0\right\}_j}{dt}-\left[y_1\right]_j\cdot k_j=\sum_{m=0}^{N_n}\frac{\partial}{\partial\left[c\right]_m}\left.\left(\int_0^{\infty}dm\cdot J_{Gen}\right)\right|_0\cdot\left\{y_m\right\}_j+\sum_{m=0}^{N_n}q_{0m}\cdot\left\{u_m\right\}_j , \tag{16}$$

$$\frac{d\left[y_0\right]_j}{dt}+\left\{y_1\right\}_j\cdot k_j=\sum_{m=0}^{N_n}\frac{\partial}{\partial\left[c\right]_m}\left.\left(\int_0^{\infty}dm\cdot J_{Gen}\right)\right|_0\cdot\left[y_m\right]_j+\sum_{m=0}^{N_n}q_{0m}\cdot\left[u_m\right]_j , \tag{17}$$

$$\frac{d\left\{y_n\right\}_j}{dt}-\left[y_{n+1}\right]_j\cdot k_j=n\cdot\left.f\left(t,S\right)\right|_0\cdot\left\{y_{n-1}\right\}_j+\sum_{m=0}^{N_n}\left.\left(n\cdot\left[c\right]_{n-1}\cdot\frac{\partial}{\partial\left[c\right]_m}f\left(t,S\right)\right)\right|_0\cdot\left\{y_m\right\}_j+$$

$$+\sum_{m=0}^{N_n}\frac{\partial}{\partial\left[c\right]_m}\left.\left(\int_0^{\infty}dm\cdot m^n\cdot J_{Gen}\right)\right|_0\cdot\left\{y_m\right\}_j+\sum_{m=0}^{N_n}q_{nm}\cdot\left\{u_m\right\}_j , \tag{18}$$

$$\frac{d\left[y_n\right]_j}{dt}+\left\{y_{n+1}\right\}_j\cdot k_j=n\cdot\left.f\left(t,S\right)\right|_0\cdot\left[y_{n-1}\right]_j+\sum_{m=0}^{N_n}\left.\left(n\cdot\left[c\right]_{n-1}\cdot\frac{\partial}{\partial\left[c\right]_m}f\left(t,S\right)\right)\right|_0\left[y_m\right]_j+$$

$$+\sum_{m=0}^{N_n}\frac{\partial}{\partial[c]_m}\left(\int_0^{\infty}dm\cdot m^n\cdot J_{Gen}\right)\Bigg|_0\cdot[y_m]_j+\sum_{m=0}^{N_n}q_{nm}\cdot[u_m]_j \quad (19)$$

Дифференцируя $B[V^0,t]$ по $\{u_m\}_0$, $\{u_m\}_j$, $[u_m]_j$ и приравнивая результаты нулю, получим недостающие уравнения для определения оптимальной функции Ляпунова $V^0(t,\{y_n\}_0,\{y_n\}_j,[y_n]_j)$ и оптимальных управляющих воздействий $u_m=u_m^0(t,[y]_n)$:

$$\frac{B[V^0,t]}{\partial\{u_n\}_0}=\sum_{m=0}^{N_n}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_0}\cdot\frac{\partial\left[\dfrac{d\{y_m\}_0}{dt}\right]}{\partial\{u_n\}_0}+2\cdot\sum_{m=0}^{N_n}b_{mn}\cdot\{u_m\}_0=0;$$

$$\frac{B[V^0,t]}{\partial\{u_n\}_j}=\sum_{m=0}^{N_n}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_j}\cdot\frac{\partial\left[\dfrac{d\{y_m\}_j}{dt}\right]}{\partial\{u_n\}_0}+\sum_{m=0}^{N_n}b_{mn}\cdot\{u_m\}_j=0; \qquad j=1;\infty$$

$$\frac{B[V^0,t]}{\partial[u_n]_j}=\sum_{m=0}^{N_n}\frac{\partial V^0}{\partial[y_m]_j}\cdot\frac{\partial\left[\dfrac{d[y_m]_j}{dt}\right]}{\partial[u_n]_0}+\sum_{m=0}^{N_n}b_{mn}\cdot[u_m]_j=0. \quad (20)$$

Последние уравнения можно разрешить относительно $\{u_m\}_0$, $\{u_m\}_j$, $[u_m]_j$:

$$\{u_m\}_0=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{N_n}\frac{\Delta_{km}}{\Delta}\cdot\sum_{n=0}^{N_n}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_0}\cdot\frac{\partial\left[\dfrac{d\{y_n\}_0}{dt}\right]}{\partial\{u_k\}_0},$$

$$\{u_m\}_j=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{N_n}\frac{\Delta_{km}}{\Delta}\cdot\sum_{n=0}^{N_n}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_j}\cdot\frac{\partial\left[\dfrac{d\{y_n\}_j}{dt}\right]}{\partial\{u_k\}_j},$$

$$[u_m]_j=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{N_n}\frac{\Delta_{km}}{\Delta}\cdot\sum_{n=0}^{N_n}\frac{\partial V^0}{\partial[y_n]_j}\cdot\frac{\partial\left[\dfrac{d[y_n]_j}{dt}\right]}{\partial[u_k]_j}. \quad (21)$$

Здесь Δ_{km} - алгебраическое дополнение элемента k-ой строки и m-ой колонки, а Δ - определитель системы уравнений (20).

Подставим полученные значения $\{u_m\}_0$, $\{u_m\}_j$, $[u_m]_j$ в уравнения (15)-(19), получим уравнение для определения оптимальной функции Ляпунова $V^0(t,\{y_n\}_0,\{y_n\}_j,[y_n]_j)$:

$$B[V^0] = \sum_{n,m=0}^{N_n} \frac{dc_{nm}}{dt} \cdot \left(\{y_n\}_0 \cdot \{y_m\}_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \{y_n\}_j \cdot \{y_m\}_j + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} [y_n]_j \cdot [y_m]_j \right) +$$
$$+ \sum_{n,m=0}^{N_n} c_{nm} \cdot \left(2 \cdot \{y_n\}_0 \cdot \frac{d\{y_m\}_0}{dt} + \sum_{j=1}^{\infty} \{y_n\}_j \cdot \frac{d\{y_m\}_j}{dt} + \sum_{j=1}^{\infty} [y_n]_j \cdot \frac{d[y_m]_j}{dt} \right) +$$
$$+ \sum_{n,m=0}^{N_n} a_{n,m} \cdot \left(\{y_n\}_0 \cdot \{y_m\}_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \{y_n\}_j \cdot \{y_m\}_j + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} [y_n]_j \cdot [y_m]_j \right) +$$
$$+ \sum_{n,m=0}^{N_n} b_{n,m} \left(\{u_n\}_0 \cdot \{u_m\}_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \{u_n\}_j \cdot \{u_m\}_j + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} [u_n]_j \cdot [u_m]_j \right) = 0 \qquad (22)$$

Приравнивая коэффициенты при произведениях $\{y_n\}_0 \cdot \{y_m\}_0$, $\{y_n\}_j \cdot \{y_m\}_j$, $[y_n]_j \cdot [y_m]_j$ линейно независимых величин $\{y_n\}_0$, $\{y_n\}_j$, $[y_n]_j$ я к нулю, получим уравнения для определения величин $c_{nm}(t)$. Если удастся найти ограниченное частное решение уравнения для определения $c_{nm}(t)$, такое, что форма (12) окажется определенно-положительной, то задача об оптимальном управлении будет решена. В случае установившегося движения оптимальная функция Ляпунова $V^0(\{y_n\}_0,\{y_n\}_j,[y_n]_j)$ может быть представлена в виде квадратичной формы с постоянными коэффициентами $c_{n,m} = const$:

$$V^0 = \sum_{n,m=0}^{N_n} c_{n,m} \cdot \left(\{y_n\}_0 \cdot \{y_m\}_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \{y_n\}_j \cdot \{y_m\}_j + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} [y_n]_j \cdot [y_m]_j \right). \qquad (23)$$

Рассмотрим матрицу $W = \{Q, Q \cdot B_j\}$, где Q - матрица $\{q_{nm}\}$, B_j - матрица для коэффициентов при $\{y_n\}_0$, $\{y_n\}_j$, $[y_n]_j$ в уравнения (15)-(19). Достаточные условия разрешимости задачи об определенно-положительности формы (19) определяются рангом матрицы

$W = \{Q, Q \cdot B_j\}$. Если матрица $W = \{Q, Q \cdot B_j\}$ имеет ранг, равный порядку систем (15)-(19) то задача об оптимальном управлении производственным процессом имеет единственное решение.

8.1.Оперативное управление макропараметрами производственного процесса. Нулевое приближение по малому параметру $K_v << 1$ (при $P_m \approx 1$) для модели производственных процессов в 2-х моментном описании.

Современные машиностроительные предприятия и выпускаемая ими продукция характеризуются значительной сложностью конструкций и технологических процессов. Движение предметов труда по операциям организуется на основе предварительных плановых расчетов поточно-массовых линий. Оперативное планирование процессов массового производства требует выполнения необходимых расчетов в кратчайший срок. Освоение большого объема первичной информации, быстрый пересчет производственных показателей подчас оказывается не под силу работникам плановых органов, лишает их возможности надежно увязывать во времени и пространстве производственные процессы. Решающее значение при поиске оптимального варианта в задаче планирования и управления процессами массового производства приобретает фактор времени. При этом основное требование, которое предъявляется к оперативному планированию и управлению массовым производством – обеспечить непрерывность и ритмичность движения элементов технологического процесса [3]. В связи с этим исключительное значение приобретают математические методы в планировании и управлении массовым производством, огромные масштабы которого в сочетании с качественными изменениями в производительных силах ставят перед обществом новые задачи и требуют новых методов их решения [4-10]. Наиболее важными и наименее изученными среди них являются динамические задачи оптимального использования ресурсов предприятия в рамках устойчивого функционирования производственного процесса.

Макропараметрами производственной системы с массовым выпуском продукции являются заделы базовых продуктов $[c]_0$ между технологическими операциями технологической цепочки производственного процесса и темп перемещения базовых продуктов $\left[c\right]_1$ от одной технологической операции к другой [11].

Под базовым продуктом (или предметом труда) понимается элемент производственной системы, на который происходит перенос стоимости живого труда, сырья, материалов и орудий труда при его движении по операционной цепочке технологических карт [12]. В ходе такого движения происходит превращение исходного сырья в готовый продукт путем целенаправленного воздействия на предмет труда технологического оборудования. Условием синхронизации производительности работы технологического оборудования вдоль технологической цепочки производственного процесса является равенство (2.2.30)

$$\left.\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot\left[c\right]_{1y}\right)}{\partial S}\right|_0 \cong 0\,. \tag{2.2.30}$$

Условие синхронизации производительности работы технологического оборудования вдоль технологической цепочки производственного процесса представляет собою основное условие ритмичной работы технологических линий с массовым выпуском продукции. На практике для подавляющего числа производственных предприятий условие синхронизации производительности работы технологического оборудования вдоль технологической цепочки является основным законом производственной деятельности, используется в стратегическом и оперативном планировании и управлении производством [13]. В связи с этим задачу оперативного управления макропараметрами производственного процесса будем рассматривать с учетом выполнения условия синхронизации производительности работы технологического оборудования (2.2.30).

Замкнутая система уравнений для макропараметров производственной системы $\left[c\right]_0$, $\left[c\right]_1$ в нулевом приближении по малому параметру $Kv=\left(\mathrm{l}_{\text{св}}/x\right)<<1$, представляющего собой отношение длины $\mathrm{l}_{\text{св}}$ свободного перемещения базовых продуктов между единицами оборудования к характерному размеру технологической цепочки x, с учетом условия синхронизации производительности технологического оборудования вдоль технологической цепочки производственного процесса (2.2.30) имеет вид [11]:

$$\frac{\partial [c]_0}{\partial t} = -\frac{\partial [c]_1}{\partial S}, \qquad \left.\frac{\partial \left(a_{yV} \cdot [c]_{1y}\right)}{\partial S}\right|_0 \cong 0 , \tag{6.19}$$

$$\frac{\partial [c]_1}{\partial t} = a_{yV} \cdot [c]_{1y} \cdot \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{a_{yV} \cdot [c]_{1y} - [c]_1}{[c]_0}\right). \tag{6.20}$$

Производительность работы технологического оборудования $[c]_{1y}$ определяется соотношением (6.25), является заданной детерминированной величиной:

$$\int_0^{\infty} y\,[m \to \tilde{m}] \cdot d\tilde{m} = 1 , \quad \int_0^{\infty} y\,[m \to \tilde{m}] \cdot \tilde{m} \cdot d\tilde{m} = a_{yV}(S) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} . \tag{6.25}$$

Дополним балансовые уравнения производственной системы (6.19), (6.20) функциями управления $\Upsilon_0(t,S)$, $\Upsilon_1(t,S)$

$$\frac{\partial [c]_0}{\partial t} = -\frac{\partial [c]_1}{\partial S} + \Upsilon_0(t,S) ,$$

$$\frac{\partial [c]_1}{\partial t} = a_{yV} \cdot [c]_{1y} \cdot \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{a_{yV} \cdot [c]_{1y} - [c]_1}{[c]_0}\right) + \Upsilon_1(t,S) . \tag{24}$$

Пусть системе балансовых уравнений (24) соответствует невозмущенное решение:

$$[c]_n = [c]_n^*(t,S) , \ \Upsilon_n(t,S) = \Upsilon_n^*(t,S) , \quad n = 0,1 . \tag{25}$$

которое определяется плановыми показателями стратегического планирования и управления производственным процессом (1.6.1), (1.6.2).

Пусть наблюдаемые технологической или диспетчерской службой макровеличины производственного процесса получат неизвестные заранее случайные малые возмущения $[y]_n$:

$$[y]_n = [c]_n - [c]_n^* , \tag{26}$$

для ликвидации которых от диспетчерской службы предприятия требуются дополнительные управляющие воздействия u_m:

$$\sum_{m=0}^{N_k} q_{nm} \cdot u_m = Y_n(t,S) - Y_n^*(t,S) , \quad \frac{\sum_{m=0}^{N_k} q_{nm} \cdot u_m}{Y_n^*(t,S)} << 1 . \tag{1.6.4}$$

Системе уравнений макропараметров производственной системы (6.19), (6.20) соответствует линеаризованная система уравнений в малых возмущениях

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}=0, \qquad (7.27)$$

$$\frac{\partial[y]_1}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}\cdot B+[y]_1\cdot\frac{\partial B}{\partial S}+\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot A\cdot B+[y]_0\cdot\frac{\partial(A\cdot B)}{\partial S}=0, \qquad (7.30)$$

а системе уравнений макропараметров производственной системы (24) соответственно

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}=q_{00}\cdot u_0+q_{01}\cdot u_1\,, \qquad u_m(t,0)=0\,, \qquad (27)$$

$$\frac{\partial[y]_1}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}\cdot B+[y]_1\cdot\frac{\partial B}{\partial S}+\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot A\cdot B+[y]_0\cdot\frac{\partial(A\cdot B)}{\partial S}=q_{10}\cdot u_0+q_{11}\cdot u_1\,,$$

где введены обозначения

$$A=\left(\frac{a_{yV}\cdot[c]_{1y}-[c]_1}{[c]_0}\right)\Bigg|_0, \qquad B=\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\Bigg|_0. \qquad (7.29)$$

Функции q_{nm} представляют собою ограниченные и непрерывные функции времени. Период существования возмущения $T_{возм}$ производственных макроскопических показателей на практике составляет от нескольких дней до нескольких недель, в то время, как период изменения коэффициентов (7.29), определяемый стратегическим управлением предприятия, составляет от нескольких месяцев до нескольких лет. Это дает возможность предполагать, что введенные коэффициенты (7.29), фиксируемые диспетчерской службой предприятия, на протяжении периода существования возмущения $T_{возм}$ не зависят явно от времени, а их изменения во времени много меньше значений самих коэффициентов [14]:

$$\frac{A}{T_{возм}}>>\frac{\partial A}{\partial t}, \qquad \frac{B}{T_{возм}}>>\frac{\partial B}{\partial t}. \qquad (28)$$

Таким образом, будем считать, что коэффициенты в уравнениях в частных производных (27) зависят только от S.

Предполагается, что в ходе управления можно измерять текущие значения макропараметров $[c]_0$ (уровень межоперационных заделов) и $[c]_1$ (темп производственной системы). На основе этого измерения управляющее устройство вырабатывает воздействия $u_m(t,[y]_n)$ на производственный объект. Эти воздействия должны обеспечить асимптотическую устойчивость заданного планового состояния производственной системы в силу уравнений возмущенного движения (оперативного управления) (27).

На практике задача управления макропараметрами производственной системы (27) сводится либо к управлению заделами, либо к управлению темпом движения базовых продуктов (или точнее, к управлению производительностью технологического оборудования вдоль технологической цепочки производственного процесса). Комбинированное управление одновременно заделами и темпом движения базовых продуктов применяется значительно реже, требует наличия подготовленного аппарата управления производственной системой.

8.1.1.Оперативное управление заделами производственного процесса. Задача оперативного управления заделами «точно в срок».

Система уравнений оперативного управления макропараметрами производственной системы (27) для случая управления заделами имеет вид

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}=q_{00}\cdot u_0\,, \qquad u_0(t,0)=0\,, \tag{29}$$

$$\frac{\partial[y]_1}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}\cdot B+[y]_1\cdot\frac{\partial B}{\partial S}+\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot A\cdot B+[y]_0\cdot\frac{\partial(A\cdot B)}{\partial S}=0.$$

Полагается, что при отклонении межоперационных заделов $[c]_0$ от своей плановой величины $[c]_n=[c]_n^*(t,S)$ имеется возможность компенсировать это отклонение внешними источниками с интенсивностью $q_{00}\cdot u_0$.

Отрицательное значение интенсивности $q_{00}\cdot u_0$ свидетельствует о том, что образовался избыточный межоперационный задел, хранение которого на межоперационном участке связано с трудностями (например, нехваткой производственных площадей, загромождением проходов), приводящими, как правило, к снижению темпа сменного выпуска на данной технологической операции или повреждению и, соответственно, к непригодности межоперационной заготовки для дальнейших операций.

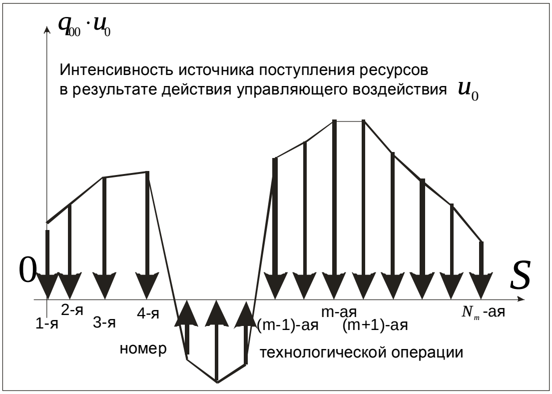

Рис.1. Мгновенная интенсивность поступления внешних ресурсов $q_{00} \cdot u_0(t,S)$ в фиксированный момент времени t_f

При наличии отклонения межоперационных заделов $[y]_0 < 0$ требуются дополнительные средства для их пополнения. Величина этих средств определяется стоимостью требуемых для пополнения ресурсов (стоимостью базового продукта, находящегося на данной технологической операции, равной S)

$$S_Y = S \cdot [y]_0 . \tag{30}$$

Будем определять стоимость средств, требуемых для пополнения ресурсов, депозитной банковской ставкой $h_b(t)\left[\frac{1}{час}\right]$ или доходностью предприятия на единицу дополнительно вложенных оборотных средств $h_g(t)\left[\frac{1}{час}\right]$. В течение долгосрочного периода средние значения

$$\langle h_g \rangle(t) > \langle h_b \rangle(t) . \tag{31}$$

Такое неравенство объясняется тем, что при нормальном функционировании предприятия доходность от средств, вложенных в производство, выше, чем доходность от вложения эквивалентной денежной величины на депозитный счет в банк.

При наличии отклонения межоперационных заделов $\left[y\right]_0 > 0$ мы сталкиваемся с ситуацией, когда величина денежных средств S_Y (30) оказывается замороженной и возникает потребность в пополнении этих средств. Стоимость пополнения средств, также может быть определена депозитной банковской ставкой $h_b(t)$ или доходностью предприятия на единицу дополнительно вложенных оборотных средств $h_g(t)$. Таким образом, отклонения межоперационных заделов $\left[y\right]_0$ для предприятия можно оценить следующей величиной финансовых затрат в единицу времени

$$S_\Delta = \int_0^{Sd} h_b(t,S)\cdot S\cdot\left[y\right]_0 dS\ . \tag{32}$$

Если недостающие базовые продукты для технологической операции с координатой S требуется покупать на стороне для восполнения заделов по цене $Z\left(t,S\right)$, то величина финансовых затрат в единицу времени (32) получит добавку и станет равной

$$S_\Delta = \int_0^{Sd} h_b(t,S)\cdot S\cdot\left[y\right]_0 dS + \int_0^{Sd}\left(Z\left(t,S\right)-S\right)\cdot\frac{\partial\left[y\right]_0}{\partial t}dS\ . \tag{33}$$

Оценим теперь затраты, требуемые для осуществления управляющих воздействий $u_0 = u_0\left(t,\left[y\right]_0\right)$.

Под такими затратами будем понимать прямые затраты, отнесенные к ликвидации единичного отклонения межоперационных заделов $h_u(t,S)$: затраты на погрузку, транспортировку, хранение и т.д.. Если управляющее воздействие $u_0 = u_0\left(t,\left[y\right]_0\right)$ представляет собою возможность компенсировать отклонения межоперационных заделов $\left[y\right]_0$ внешними источниками с интенсивностью $q_{00}\cdot u_0$, то затраты в единицу времени на управление отклонениями межоперационных заделов можно записать как

$$S_u = \int_0^{Sd} h_u(t,S)\cdot q_{00}\cdot u_0 dS\ . \tag{34}$$

Общие затраты финансовых ресурсов в единицу времени для компенсации отклонения межоперационных заделов $\left[y\right]_0$ внешними источниками можно представить в виде суммы

$$S_\Sigma = \left|S_\Delta\right| + \left|S_u\right|\ , \tag{35}$$

$$S_{\Sigma}=\left|\int_{0}^{Sd}h_{b}(t)\cdot S\cdot[y]_{0}\,dS\right|+\left|\int_{0}^{Sd}\left(Z(t,S)-S\right)\cdot\frac{\partial[y]_{0}}{\partial t}dS\right|+\left|\int_{0}^{Sd}h_{u}(t,S)\cdot q_{00}\cdot u_{0}dS\right|.$$

Под внешними источниками будем понимать не только услуги сторонних организаций и подразделений для компенсации отклонения межоперационных заделов $[y]_0$, но и источники, обусловленные работой подразделения сверхурочно и соответственно затраты на данное компенсирование.

Критерием, оценивающим качество оперативного управления производственного процесса, могут быть выбраны условия, определяющие минимум интеграла:

$$I=\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{S_d}\cdot\int_{0}^{S_d}\left(h_{b}(t)\cdot S\cdot\left|[y]_{0}\right|+\left(Z(t,S)-S\right)\cdot\left|\frac{\partial[y]_{0}}{\partial t}\right|+h_{u}(t,S)\cdot q_{00}\cdot\left|u_{0}\right|\right)\cdot dS\cdot dt\,. \tag{36}$$

Однако три обстоятельства вынуждают отказаться от критерия (36), несмотря на всю его целесообразность. Во-первых, неаналитичность подынтегральной функции приводит к трудоемким вычислениям при определении оптимального управляющего воздействия. Во-вторых, в замкнутой форме найти решение вряд ли возможно. В-третьих, структура алгоритма управления получается весьма сложной, а поэтому технически трудно осуществимой.

Учитывая указанные обстоятельства, вместо критерия, оценивающего качество оперативного управления производственного процесса (36), выберем интеграл

$$I=\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{S_d}\cdot\int_{0}^{S_d}\left(a\cdot\left([y]_{0}\right)^{2}+b\cdot\left(u_{0}\right)^{2}\right)\cdot dS\cdot dt\,, \tag{37}$$

$$a=\left(h_{b}(t)\cdot S\right)^{2},\qquad\qquad b=\left(h_{u}(t,S)\cdot q_{00}\right)^{2}.$$

Полагаем при записи критерия (37)

$$\left(Z(t,S)-S\right)\cdot\left|\frac{\partial[y]_{0}}{\partial t}\right|<<h_{b}(t,S)\cdot S\cdot\left|[y]_{0}\right|, \tag{38}$$

$$\left(Z(t,S)-S\right)\cdot\left|\frac{\partial[y]_{0}}{\partial t}\right|<<h_{u}(t,S)\cdot q_{00}\cdot\left|u_{0}\right|. \tag{39}$$

При разложении малых возмущений $[y]_n$ макропараметров $[c]_n$ и управляющего воздействия u_0 в ряд Фурье ограничимся первыми двумя членами разложения (10) с коэффициентами $\{y_n\}_0$, $\{y_n\}_1$, $[y_n]_1$, $\{u_0\}_0$, $\{u_0\}_1$, $[u_0]_1$:

$$[y]_n = \{y_n\}_0 + \{y_n\}_1 \cdot \sin[k \cdot S] + [y_n]_1 \cdot \cos[k \cdot S], \qquad k = \frac{2 \cdot p}{S_d},$$

$$[u]_0 = \{u_0\}_0 + \{u_0\}_1 \cdot \sin[k \cdot S] + [u_0]_1 \cdot \cos[k \cdot S]. \tag{40}$$

$$\{y_n\}_0 = \frac{1}{S_d} \cdot \int_0^{S_d} [y]_n \cdot dS,$$

$$\{y_n\}_1 = \frac{2}{S_d} \cdot \int_0^{S_d} [y]_n \cdot \sin[k \cdot S] \cdot dS, \quad [y_n]_1 = \frac{2}{S_d} \cdot \int_0^{S_d} [y]_n \cdot \cos[k \cdot S] \cdot dS, \tag{41}$$

$$\{u_0\}_0 = \frac{1}{S_d} \cdot \int_0^{S_d} [u]_0 \cdot dS,$$

$$\{u_0\}_1 = \frac{2}{S_d} \cdot \int_0^{S_d} [u]_0 \cdot \sin[k \cdot S] \cdot dS, \quad [u_0]_1 = \frac{2}{S_d} \cdot \int_0^{S_d} [u]_0 \cdot \cos[k \cdot S] \cdot dS. \tag{42}$$

Точность разложения малых возмущений $[y]_n$ макропараметров $[c]_n$ и управляющего воздействия u_0 в ряд Фурье (40) является достаточной для управления большинством из существующих на практике производственных процессов.

Произведем оценку коэффициентов отброшенных членов ряда Фурье (10):

$$\left|\{y_n\}_2\right| = \frac{2}{S_d} \cdot \left| \int_0^{S_d} [y]_n(S) \cdot \sin[2 \cdot k \cdot S] \cdot dS \right| =$$

$$= \frac{2}{S_d} \cdot \left| -[y]_n(S) \cdot \frac{\cos[2 \cdot k \cdot S]}{2 \cdot k} \Bigg|_0^{S_d} - \int_0^{S_d} \frac{\partial [y]_n}{\partial S} \cdot \frac{\cos[2 \cdot k \cdot S]}{2 \cdot k} \cdot dS \right| = \tag{43}$$

$$= \left| -\frac{2}{S_d \cdot 2 \cdot k} \cdot \int_0^{S_d} \frac{\partial [y]_n}{\partial S} \cdot \cos[2 \cdot k \cdot S] \cdot dS \right| \le \frac{1}{S_d \cdot k} \cdot \int_0^{S_d} \left| \frac{\partial [y]_n}{\partial S} \cdot \cos[2 \cdot k \cdot S] \right| \cdot dS \le$$

$$\le \frac{1}{S_d \cdot k} \cdot \int_0^{S_d} \left| \frac{\partial [y]_n}{\partial S} \right| \cdot dS \le \frac{1}{S_d \cdot k} \cdot \int_0^{S_d} M_n \cdot dS = \frac{1}{S_d \cdot \dfrac{2 \cdot p}{S_d}} \cdot \int_0^{S_d} M_n \cdot dS$$

$$= \frac{1}{2 \cdot p} \cdot \int_0^{S_d} M_n \cdot dS,$$

где $$M_n = \max\left\{\frac{\partial[y]_n}{\partial S}\right\}.$$

При
$$\frac{[y]_n}{S_d} >> \frac{\partial[y]_n}{\partial S}, \quad \frac{[u]_0}{S_d} >> \frac{\partial[u]_0}{\partial S} \tag{44}$$
приближение (40) является достаточно точным.

Произведем оценку отброшенных членов ряда Фурье (10) еще одним способом:
$$\{y_n\}_2 = \frac{2}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}[y]_n(S)\cdot\sin[2\cdot k\cdot S]\cdot dS = \left|S = v + \frac{p}{2\cdot k}\right| =$$

$$= \frac{2}{S_d}\cdot\int_{\frac{p}{k}}^{S_d+\frac{p}{k}}[y]_n\left(v+\frac{p}{k}\right)\cdot\sin[2\cdot k\cdot v + p]\cdot dv = -\frac{2}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}[y]_n\left(v+\frac{p}{k}\right)\cdot\sin[2\cdot k\cdot v]\cdot dv =$$

$$= \left|\begin{matrix}\textit{складываем}\ \text{половинные значения от} \\ \frac{2}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}[y]_n(S)\cdot\sin[2\cdot k\cdot S]\cdot dS \quad \text{и} \quad -\frac{2}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}[y]_n\left(v+\frac{p}{k}\right)\cdot\sin[2\cdot k\cdot v]\cdot dv\end{matrix}\right| =$$

$$= -\frac{1}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}\left([y]_n\left(v+\frac{p}{k}\right)-[y]_n(v)\right)\cdot\sin[2\cdot k\cdot v]\cdot dv.$$

Отсюда
$$\left|\{y_n\}_2\right| = \left|-\frac{1}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}\left([y]_n\left(v+\frac{p}{k}\right)-[y]_n(v)\right)\cdot\sin[2\cdot k\cdot v]\cdot dv\right| \le$$

$$\le \left|\frac{1}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}\left([y]_n\left(v+\frac{p}{k}\right)-[y]_n(v)\right)\cdot dv\right| \le \frac{1}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}\left|[y]_n\left(v+\frac{p}{k}\right)-[y]_n(v)\right|\cdot dv =$$

$$\le \frac{1}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}\left|[y]_n\left(v+\frac{S_d}{2}\right)-[y]_n(v)\right|\cdot dv. \tag{45}$$

Производим разложение слагаемого $[y]_n\left(v+\frac{S_d}{2}\right)$ в ряд Тейлора в окрестности v

$$[y]_n\left(v+\frac{S_d}{2}\right) = [y]_n(v) + \frac{\partial[y]_n(v)}{\partial S}\cdot\frac{S_d}{2} + \ldots\ldots, \tag{46}$$

получаем для подынтегрального выражения (45)

$$[y]_n\left(v+\frac{S_d}{2}\right)-[y]_n(v)=[y]_n(v)+\frac{\partial[y]_n(v)}{\partial S}\cdot\frac{S_d}{2}+\ldots\ldots-$$

$$[y]_n(v)=\frac{\partial[y]_n(v)}{\partial S}\cdot\frac{S_d}{2}+\ldots\ldots \tag{47}$$

Требование малости отброшенных членов ряда Фурье (10)

$$[y]_n\left(v+\frac{S_d}{2}\right)-[y]_n(v)\to 0 \tag{48}$$

приводит к условию применимости приближения (44).

Подынтегральная функция для интеграла качества (37) примет вид

$$\begin{gathered}w=\left(\{a\}_0+\{a\}_1\cdot\sin[k\cdot S]+[a]_1\cdot\cos[k\cdot S]\right)\times\\ \times\left(\{y_0\}_0+\{y_0\}_1\cdot\sin[k\cdot S]+[y_0]_1\cdot\cos[k\cdot S]\right)^2+\\ +\left(\{b\}_0+\{b\}_1\cdot\sin[k\cdot S]+[b]_1\cdot\cos[k\cdot S]\right)\times\\ \times\left(\{u_0\}_0+\{u_0\}_1\cdot\sin[k\cdot S]+[u_0]_1\cdot\cos[k\cdot S]\right)^2\end{gathered} \tag{49}$$

Коэффициенты a и b (37) представлены в виде разложения в ряд Фурье с учетом первых двух членов разложения:

$$a=\{a\}_0+\{a\}_1\cdot\sin[k\cdot S]+[a]_1\cdot\cos[k\cdot S],\qquad k=\frac{2\cdot p}{S_d}, \tag{50}$$

$$b=\{b\}_0+\{b\}_1\cdot\sin[k\cdot S]+[b]_1\cdot\cos[k\cdot S],$$

$$\{a\}_0=\frac{1}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}a\cdot dS,\qquad \{b\}_0=\frac{1}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}b\cdot dS,$$

$$\{a\}_1=\frac{2}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}a\cdot\sin[k\cdot S]\cdot dS,\quad [a]_1=\frac{2}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}a\cdot\cos[k\cdot S]\cdot dS, \tag{51}$$

$$\{b\}_1=\frac{2}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}b\cdot\sin[k\cdot S]\cdot dS,\quad [b]_1=\frac{2}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}b\cdot\cos[k\cdot S]\cdot dS.$$

В силу тождеств

$$\int_0^{S_d} \{a\}_1 \cdot \sin[k\cdot S]\cdot\left(\{y_0\}_0 + \{y_0\}_1 \cdot \sin[k\cdot S] + [y_0]_1 \cdot \cos[k\cdot S]\right)^2 \cdot dS = 0\,,$$

$$\int_0^{S_d} [a]_1 \cdot \cos[k\cdot S]\cdot\left(\{y_0\}_0 + \{y_0\}_1 \cdot \sin[k\cdot S] + [y_0]_1 \cdot \cos[k\cdot S]\right)^2 \cdot dS = 0\,,$$

$$\int_0^{S_d} \{b\}_1 \cdot \sin[k\cdot S]\cdot\left(\{u_0\}_0 + \{u_0\}_1 \cdot \sin[k\cdot S] + [u_0]_1 \cdot \cos[k\cdot S]\right)^2 \cdot dS = 0\,,$$

$$\int_0^{S_d} [b]_1 \cdot \cos[k\cdot S]\cdot\left(\{u_0\}_0 + \{u_0\}_1 \cdot \sin[k\cdot S] + [u_0]_1 \cdot \cos[k\cdot S]\right)^2 \cdot dS = 0\,, \qquad (52)$$

интеграл качества (37) можно представить в виде

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{S_d} \cdot \int_0^{S_d} \left(a \cdot \left([y]_0\right)^2 + b \cdot (u_0)^2\right) \cdot dS \cdot dt = \qquad (53)$$

$$= \int_{t_0}^{\infty} \left(\{a\}_0 \cdot \left(\{y_0\}_0^{\,2} + \frac{1}{2}\cdot\{y_0\}_1^{\,2} + \frac{1}{2}\cdot[y_0]_1^{\,2} \right) + \{b\}_0 \cdot \left(\{u_0\}_0^{\,2} + \frac{1}{2}\cdot\{u_0\}_1^{\,2} + \frac{1}{2}\cdot[u_0]_1^{\,2} \right) \right) \cdot dt$$

Будем рассматривать оперативное управление стационарным производственным процессом

$$[c]_0 = [c]_0^*(S)\,, \qquad [c]_1 = a_{yV} \cdot [c]_{1y}\,(S)\,. \qquad (54)$$

$$[y]_0 = [c]_0 - [c]_0^*(S)\,, \qquad [y]_1 = [c]_1 - a_{yV} \cdot [c]_{1y}\,(S)\,. \qquad (55)$$

Тогда система уравнений оперативного управления макропараметрами производственной системы (27) для случая управления заделами имеет вид

$$\frac{\partial [y]_0}{\partial t} + \frac{\partial [y]_1}{\partial S} = q_{00} \cdot u_0\,, \quad u_0(t,0) = 0\,, \quad B = \left. \left(a_{yV} \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} \right) \right|_0 \qquad (56)$$

$$\frac{\partial [y]_1}{\partial t} + \frac{\partial [y]_1}{\partial S} \cdot B + [y]_1 \cdot \frac{\partial B}{\partial S} = 0.$$

Как и ранее, предполагаем

$$\frac{B}{T_{возм}} >> \frac{\partial B}{\partial t}\,. \qquad (28)$$

Подставим в систему уравнений оперативного управления макропараметрами производственной системы (56) разложения малых возмущений $[y]_n$ макропараметров $[c]_n$ и управляющего воздействия u_0 в ряд Фурье (40), получим систему уравнений в малых возмущениях для нулевой гармоники

$$\frac{\partial\{y_0\}_0}{\partial t}=\{q_{00}\}_0\cdot\{u_0\}_0\,,\qquad \frac{\partial\{y_1\}_0}{\partial t}+\{y_1\}_0\cdot\left\{\frac{\partial B}{\partial S}\right\}_0=0, \tag{57}$$

и соответственно для первой гармоники

$$\frac{\partial\{y_0\}_1}{\partial t}-k\cdot[y_1]_1=\{q_{00}\}_0\cdot\{u_0\}_1+\{q_{00}\}_1\cdot\{u_0\}_0\,,$$

$$\frac{\partial[y_0]_1}{\partial t}+k\cdot\{y_0\}_1=\{q_{00}\}_0\cdot[u_0]_1+[q_{00}]_1\cdot\{u_0\}_0\,,$$

$$\frac{\partial\{y_1\}_1}{\partial t}-k\cdot[y_1]_1\cdot\{B\}_0+\{y_1\}_1\cdot\left\{\frac{\partial B}{\partial S}\right\}_0+\{y_1\}_0\cdot\left\{\frac{\partial B}{\partial S}\right\}_1=0,$$

$$\frac{\partial[y_1]_1}{\partial t}+k\cdot\{y_1\}_1\cdot\{B\}_0+[y_1]_1\cdot\left\{\frac{\partial B}{\partial S}\right\}_0+\{y_1\}_0\cdot\left[\frac{\partial B}{\partial S}\right]_1=0, \tag{58}$$

при

$$q_{00}=\{q_{00}\}_0+\{q_{00}\}_1\cdot\sin[k\cdot S]+[q_{00}]_1\cdot\cos[k\cdot S]\,,$$

$$B=\{B\}_0+\{B\}_1\cdot\sin[k\cdot S]+[B]_1\cdot\cos[k\cdot S]\,,$$

$$\frac{\partial B}{\partial S}=\left\{\frac{\partial B}{\partial S}\right\}_0+\left\{\frac{\partial B}{\partial S}\right\}_1\cdot\sin[k\cdot S]+\left[\frac{\partial B}{\partial S}\right]_1\cdot\cos[k\cdot S]\,.$$

Оптимальную функцию Ляпунова $V^0(t,[y]_n)$, будем искать в виде квадратичной формы:

$$V^0(t,[y]_n)=\frac{1}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}\left(c_0\cdot\left([y]_0\right)^2+c_0\cdot\left([y]_1\right)^2\right)\cdot dS \tag{59}$$

с коэфициентами

$$c_0=\{c_0\}_0+\{c_0\}_1\cdot\sin[k\cdot S]+[c_0]_1\cdot\cos[k\cdot S]\,,$$

$$c_1=\{c_1\}_0+\{c_1\}_1\cdot\sin[k\cdot S]+[c_1]_1\cdot\cos[k\cdot S]\,, \tag{60}$$

представленными двумя первыми членами ряда Фурье. Коэффициенты разложения (58) не зависят от времени, что определяется неравенством (28).

В силу тождеств

$$\int_0^{S_d}\{c_j\}_1\cdot\sin[k\cdot S]\cdot\left(\{y_i\}_0+\{y_i\}_1\cdot\sin[k\cdot S]+[y_i]_1\cdot\cos[k\cdot S]\right)^2\cdot dS=0\qquad \mathrm{i,j}=0,1\,, \tag{61}$$

оптимальная функция Ляпунова $V^0(t,[y]_n)$ (59) может быть представлена в виде

$$V^0(t,[y]_n)=\frac{1}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}\left(c_0\cdot\left([y]_0\right)^2+c_0\cdot\left([y]_1\right)^2\right)\cdot dS=$$

$$=\left\{c_0\right\}_0\cdot\left(\left\{y_0\right\}_0^{\ 2}+\frac{1}{2}\cdot\left\{y_0\right\}_1^{\ 2}+\frac{1}{2}\cdot\left[y_0\right]_1^{\ 2}\right)+\left\{c_1\right\}_0\cdot\left(\left\{y_1\right\}_0^{\ 2}+\frac{1}{2}\cdot\left\{y_1\right\}_1^{\ 2}+\frac{1}{2}\cdot\left[y_1\right]_1^{\ 2}\right)$$

. (62)

Составим выражение $B[V^0,t]$ для рассматриваемой производственной системы:

$$B[V^0]=\frac{\partial V^0}{\partial t}+\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\left\{y_n\right\}_0}\cdot\frac{d\left\{y_n\right\}_0}{dt}+\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\left\{y_n\right\}_1}\cdot\frac{d\left\{y_n\right\}_1}{dt}+\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\left[y_n\right]_1}\cdot\frac{d\left[y_n\right]_1}{dt}+w\ ,$$

$$\frac{\partial V^0}{\partial t}=0. \qquad (63)$$

При $u_0=u_0^0(t,[y]_0)$ величина $B[V^0,t]$ должна иметь минимум и обращаться при этом в ноль. Отсюда первое уравнение для нахождения оптимальной функции Ляпунова $V^0(t,[y]_n)$ и оптимального управляющего воздействия $u_0=u_0^0(t,[y]_0)$:

$$B[V^0,t]=0. \qquad (64)$$

Дифференцируя $B[V^0,t]$ по $\left\{u_0\right\}_0$, $\left\{u_0\right\}_1$, $\left[u_1\right]$ и приравнивая результаты нулю, получим недостающие уравнения для определения оптимальной функции Ляпунова $V^0(t,[y]_n)$ и оптимального управляющего воздействия $u_0=u_0^0(t,[y]_0)$:

$$\frac{\partial B[V^0,t]}{\partial\left\{u_0\right\}_0}=\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\left\{y_n\right\}_0}\cdot\frac{\partial}{\partial\left\{u_0\right\}_0}\left(\frac{d\left\{y_n\right\}_0}{dt}\right)+\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\left\{y_n\right\}_1}\cdot\frac{\partial}{\partial\left\{u_0\right\}_0}\left(\frac{d\left\{y_n\right\}_1}{dt}\right)+$$

$$+\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\left[y_n\right]_1}\cdot\frac{\partial}{\partial\left\{u_0\right\}_0}\left(\frac{d\left[y_n\right]_1}{dt}\right)+2\cdot\left\{b\right\}_0\cdot\left\{u_0\right\}_0=0,$$

$$\frac{\partial B[V^0,t]}{\partial\left\{u_0\right\}_1}=\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\left\{y_n\right\}_0}\cdot\frac{\partial}{\partial\left\{u_0\right\}_1}\left(\frac{d\left\{y_n\right\}_0}{dt}\right)+\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\left\{y_n\right\}_1}\cdot\frac{\partial}{\partial\left\{u_0\right\}_1}\left(\frac{d\left\{y_n\right\}_1}{dt}\right)+$$

$$+\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\left[y_n\right]_1}\cdot\frac{\partial}{\partial\left\{u_0\right\}_1}\left(\frac{d\left[y_n\right]_1}{dt}\right)+\left\{b\right\}_0\cdot\left\{u_0\right\}_1=0;$$

$$\frac{\partial B[V^0,t]}{\partial[u_0]_1}=\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_0}\cdot\frac{\partial}{\partial[u_0]_1}\left(\frac{d\{y_n\}_0}{dt}\right)+\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_1}\cdot\frac{\partial}{\partial[u_0]_1}\left(\frac{d\{y_n\}_1}{dt}\right)+$$

$$+\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial[y_n]_1}\cdot\frac{\partial}{\partial[u_0]_1}\left(\frac{d[y_n]_1}{dt}\right)+[b]_0\cdot[u_0]_1=0. \qquad (65)$$

Подставим (57), (58) в (65), получим

$$\frac{\partial B[V^0,t]}{\partial\{u_0\}_0}=2\cdot\{c_0\}_0\cdot\{y_0\}_0\cdot\{q_{00}\}_0+\{c_0\}_0\cdot\{y_0\}_1\cdot\{q_{00}\}_1+\{c_0\}_0\cdot[y_0]_1\cdot[q_{00}]_1+$$

$$+2\cdot\{b\}_0\cdot\{u_0\}_0=0$$

$$\frac{\partial B[V^0,t]}{\partial\{u_0\}_1}=\{c_0\}_0\cdot\{y_0\}_1\cdot\{q_{00}\}_0+\{b\}_0\cdot\{u_0\}_1=0;$$

$$\frac{\partial B[V^0,t]}{\partial[u_0]_1}=\{c_0\}_0\cdot[y_0]_1\cdot\{q_{00}\}_0+[b]_0\cdot[u_0]_1=0. \qquad (66)$$

В задаче оперативного управления макропараметрами производственной системы (27) для случая управления только межоперационными заделами (для случая когда управляющее воздействие содержится только в одном уравнении оперативного управления отклонениями макропараметров производственного процесса) можно положить q_{00} в качестве коэффициента пропорциональности и принять постоянной вдоль технологической цепочки

$$q_{00}=\text{const}. \qquad (67)$$

Уравнения (66) разрешим относительно $\{u_0\}_0$, $\{u_0\}_1$, $[u_0]_1$ принимая во внимание условие (67)

$$\{u_0\}_0=-\frac{\{c_0\}_0\cdot q_{00}}{\{b\}_0}\cdot\{y_0\}_0;$$

$$\{u_0\}_1=-\frac{\{c_0\}_0\cdot q_{00}}{\{b\}_0}\cdot\{y_0\}_1;$$

$$[u_0]_1=-\frac{\{c_0\}_0\cdot q_{00}}{[b]_0}\cdot[y_0]_1. \qquad (68)$$

Определим коэффициент $\{c_0\}_0$ из уравнения (64)

$$B[V^0]=\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_0}\cdot\frac{d\{y_n\}_0}{dt}+\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_1}\cdot\frac{d\{y_n\}_1}{dt}+\sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial[y_n]_1}\cdot\frac{d[y_n]_1}{dt}+,$$

$$+\left\{a\right\}_0\cdot\left(\left\{y_0\right\}_0^{\,2}+\frac{1}{2}\cdot\left\{y_0\right\}_1^{\,2}+\frac{1}{2}\cdot\left[y_0\right]_1^{\,2}\right)+\left\{b\right\}_0\cdot\left(\left\{u_0\right\}_0^{\,2}+\frac{1}{2}\cdot\left\{u_0\right\}_1^{\,2}+\frac{1}{2}\cdot\left[u_0\right]_1^{\,2}\right)=0.$$

Отсюда следует

$$2\cdot\left\{c_0\right\}_0\cdot\left\{y_0\right\}_0\cdot q_{00}\cdot\left(-\frac{\left\{c_0\right\}_0\cdot q_{00}}{\left\{b\right\}_0}\cdot\left\{y_0\right\}_0\right)-2\cdot\left\{c_1\right\}_0\cdot\left\{y_1\right\}_0\cdot\left\{y_1\right\}_0\cdot\left\{\frac{\partial B}{\partial S}\right\}_0+$$

$$+\left\{c_0\right\}_0\cdot\left\{y_0\right\}_1\cdot\left(-q_{00}\cdot\frac{\left\{c_0\right\}_0\cdot q_{00}}{\left\{b\right\}_0}\cdot\left\{y_0\right\}_1+k\cdot\left[y_1\right]_1\right)+$$

$$+\left\{c_0\right\}_0\cdot\left\{y_1\right\}_1\cdot\left(-\left\{y_1\right\}_1\cdot\left\{\frac{\partial B}{\partial S}\right\}_0-\left\{y_1\right\}_0\cdot\left\{\frac{\partial B}{\partial S}\right\}_1+k\cdot\left[y_1\right]_1\cdot\left\{B\right\}_0\right)+$$

$$+\left\{c_0\right\}_0\cdot\left[y_0\right]_1\cdot\left(-q_{00}\cdot\frac{\left\{c_0\right\}_0\cdot q_{00}}{\left[b\right]_0}\cdot\left[y_0\right]_1-k\cdot\left\{y_0\right\}_1\right)+$$

$$+\left\{c_0\right\}_0\cdot\left[y_1\right]_1\cdot\left(-\left[y_1\right]_1\cdot\left\{\frac{\partial B}{\partial S}\right\}_0-\left\{y_1\right\}_0\cdot\left[\frac{\partial B}{\partial S}\right]_1-k\cdot\left\{y_1\right\}_1\cdot\left\{B\right\}_0\right)+$$

$$+\left\{a\right\}_0\cdot\left(\left\{y_0\right\}_0^{\,2}+\frac{1}{2}\cdot\left\{y_0\right\}_1^{\,2}+\frac{1}{2}\cdot\left[y_0\right]_1^{\,2}\right)+$$

$$+\left\{b\right\}_0\cdot\left(\left(\frac{\left\{c_0\right\}_0\cdot q_{00}}{\left\{b\right\}_0}\cdot\left\{y_0\right\}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\left\{c_0\right\}_0\cdot q_{00}}{\left\{b\right\}_0}\cdot\left\{y_0\right\}_1\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\left\{c_0\right\}_0\cdot q_{00}}{\left[b\right]_0}\cdot\left[y_0\right]_1\right)^2\right)=0 \tag{69}$$

Приравнивая коэффициенты при произведениях $\left\{y_n\right\}_0\cdot\left\{y_m\right\}_0$, $\left\{y_n\right\}_j\cdot\left\{y_m\right\}_j$, $\left[y_n\right]_j\cdot\left[y_m\right]_j$ линейно независимых величин $\left\{y_n\right\}_0$, $\left\{y_n\right\}_j$, $\left[y_n\right]_j$, к нулю, получим уравнения для определения величин c_{nn}. Если удастся найти ограниченное частное решение уравнения для определения c_{nn}, такое, что форма (59) окажется определенно-положительной, то задача об оптимальном управлении будет решена.

8.1.2.Оперативное управление темпом производственного процесса.

Система уравнений оперативного управления макропараметрами производственной системы (27) для случая управления темпом имеет вид

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}=q_{01}\cdot u_1\,, \qquad q_{01}=const_1\,,\ \ q_{11}=const_2\ \ \ u_1(t,0)=0\,, \qquad (70)$$

$$\frac{\partial[y]_1}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}\cdot B+[y]_1\cdot\frac{\partial B}{\partial S}=q_{11}\cdot u_1\,.$$

Будем рассматривать оперативное управление стационарным производственным процессом. Как и ранее, используем обозначения

$$[c]_0=[c]_0^*(S)\,, \qquad [c]_1=a_{yV}\cdot[c]_{1y}\ (S)\,, \qquad (54)$$

$$[y]_0=[c]_0-[c]_0^*(S)\,, \qquad [y]_1=[c]_1-a_{yV}\cdot[c]_{1y}\ (S)\,, \qquad (55)$$

$$B=\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\Bigg|_0\,, \qquad \frac{B}{T_{возм}}>>\frac{\partial B}{\partial t}\,. \qquad (28)$$

Полагается, что при отклонении темпа движения межоперационной заготовки $[c]_1$ от своей плановой величины $[c]_1=a_{yV}\cdot[c]_{1y}\ (S)$ имеется возможность компенсировать это отклонение внутренними источниками с интенсивностью $q_{01}\cdot u_1$, $q_{11}\cdot u_1$. Интенсивность $q_{01}\cdot u_1$ компенсирует отклонение заделов, представляет собою градиент дополнительного темпа движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки. Интенсивность $q_{11}\cdot u_1$ компенсирует отклонение темпа движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки. Внутренние источники определяются следующими факторами: а)увеличение коэффициента параллельности технологических операций, по которым имеется отставание; б) использование более производительных работников на технологических операциях, по которым имеется отставание; в) использование сверхурочных работ на технологических операциях, по которым имеется отставание.

Отрицательное значение интенсивности $q_{11}\cdot u_1(t,S)$ свидетельствует о том, что на предыдущей технологической операции образовался избыточный межоперационный задел, хранение которого на межоперационном участке связано с трудностями. При положительном значении интенсивности $q_{11}\cdot u_1(t,S)$ образуется избыточный межоперационный задел на последующей технологической операции с наличием тех же проблем.

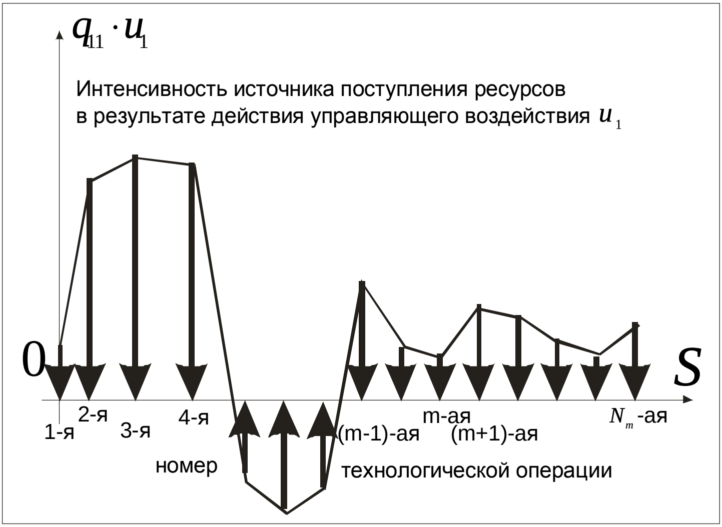

Рис.2. Мгновенная интенсивность поступления внешних ресурсов $q_{11} \cdot u_1(t,S)$ в фиксированный момент времени t_f

При наличии отклонения темпа $[y]_1$ требуются дополнительные средства для их пополнения. Величина этих средств определяется стоимостью требуемых для пополнения ресурсов, стоимость которых дается оплатой сверхурочных или работников более высокого разряда. Будем полагать, что предприятие несет затраты на ликвидации отклонения темпа $[y]_1$ за счет сверхурочных:

$$S_Y = S_c \cdot [y]_1 \, . \tag{71}$$

Будем полагать, что затраты на управление представляют собою выплаты сверхурочных. Общие затраты на ликвидацию отклонения вдоль технологической цепочки составляет

$$S_\Delta = \int_0^{Sd} S_c \cdot [y]_1 dS \, . \tag{72}$$

Критерием, оценивающим качество оперативного управления производственным процессом, могут быть выбраны условия, определяющие минимум интеграла:

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{S_d} \cdot \int_0^{S_d} \left| S_c \cdot [y]_1 \right| \cdot dS \cdot dt \, . \tag{73}$$

Учитывая обстоятельства, изложенные при построении интеграла качества (36), вместо критерия, оценивающего качество оперативного управления производственного процесса (73), выберем интеграл

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{S_d} \cdot \int_{0}^{S_d} \left(a \cdot u_1^2 \right) \cdot dS \cdot dt \ . \tag{74}$$

Параметр a представляет коэффициент, определяющий размерность критерия качества оперативного управления производственным процессом, выбирается из удобства ведения отчетности предприятием. Управляющее воздействия $u_1(t,S)$ будем искать в виде ряда, слагаемые которого являются малые возмущения $\left[y\right]_n$ макропараметров $\left[c\right]_n$

$$u_1(t,S) = q_0 \cdot \left[y\right]_0 + q_1 \cdot \left[y\right]_1 \text{ я} \ , \tag{75}$$

где q_0, q_1 - коэффициенты, подлежащие определению.

Если выражение (75) разделить на множитель q_1 и умножить на S_c

$$\frac{S_c}{q_1} \cdot u_1(t,S) = S_c \cdot \frac{q_0}{q_1} \cdot \left[y\right]_0 + S_c \cdot \left[y\right]_1 , \tag{76}$$

то получим вид управляющего воздействия

$$u_s(t,S) = \frac{S_c}{q_1} \cdot u_1(t,S) \tag{77}$$

с размерностью в денежном выражении. Слагаемые $S_c \cdot \frac{q_0}{q_1} \cdot \left[y\right]_0$ и $S_c \cdot \left[y\right]_1$ представляют собою затраты на управление ликвидацией отклонения заделов и отклонения темпа соответственно.

При построении управляющего воздействия $u_1(t,S)$ ликвидации отклонения темпа $\left[y\right]_1$ будем рассматривать уравнения оперативного управления макропараметрами производственной системы для нулевой гармоники разложения малых возмущений $\left[y\right]_n$ макропараметров $\left[c\right]_n$ и управляющего воздействия u_1 в ряд Фурье (40)

$$\frac{\partial \left\{y_0\right\}_0}{\partial t} = q_{01} \cdot \left\{u_1\right\}_0 , \qquad u_1(t,0) = 0 \ , \tag{78}$$

$$\frac{\partial\left\{y_1\right\}_0}{\partial t}+\left\{y_1\right\}_0\cdot\left\{\frac{\partial B}{\partial S}\right\}_0=q_{11}\cdot\left\{u_1\right\}_0 .$$

Оптимальную функцию Ляпунова $V^0(t,\left[y\right]_n)$, будем искать в виде квадратичной формы для нулевой гармоники:

$$V^0(t,\left[y\right]_n)=\frac{1}{S_d}\cdot\int\limits_0^{S_d}\left(c_0\cdot\left(\left[y\right]_0\right)^2+c_1\cdot\left(\left[y\right]_1\right)^2\right)\cdot dS=$$

$$=\frac{1}{S_d}\cdot\int\limits_0^{S_d}\left(c_0\cdot\left\{y_0\right\}_0^{\ 2}+c_1\cdot\left\{y_1\right\}_0^{\ 2}\right)\cdot dS=c_0\cdot\left\{y_0\right\}_0^{\ 2}+c_1\cdot\left\{y_1\right\}_0^{\ 2},\quad \frac{\partial V^0}{\partial t}=0. \qquad (79)$$

Проверим достаточные условия разрешимости задачи об оптимальном управлении темпом производственной системы. В нашем случае

$$Q=\begin{vmatrix}q_{01}\\ q_{11}\end{vmatrix},\qquad P=\begin{vmatrix}p_{00} & p_{10}\\ p_{01} & p_{11}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & -\left\{\dfrac{\partial B}{\partial S}\right\}_0\end{vmatrix}\qquad Q=\begin{vmatrix}q_{01}\\ q_{11}\end{vmatrix} \qquad (80)$$

и вычислим матрицу $W=\left\{Q,P\cdot Q\right\}$

$$W=\begin{vmatrix}q_{01} & 0\\ q_{11} & -\left\{\dfrac{\partial B}{\partial S}\right\}_0\cdot q_{11}\end{vmatrix}=q_{11}\cdot\begin{vmatrix}q_{01} & 0\\ 1 & -\left\{\dfrac{\partial B}{\partial S}\right\}_0\end{vmatrix}. \qquad (81)$$

Ранг матрицы $W=\left\{Q,P\cdot Q\right\}$ (81) равен рангу системы (78). Следовательно, система (78) разрешима относительно функции оптимального управления производственным процессом.

Составим выражение $B[V^0,t]$ для рассматриваемой производственной системы:

$$B[V^0]=\frac{\partial V^0}{\partial\left\{y_0\right\}_0}\cdot\frac{d\left\{y_0\right\}_0}{dt}+\frac{\partial V^0}{\partial\left\{y_1\right\}_0}\cdot\frac{d\left\{y_1\right\}_0}{dt}+w=$$

$$=2\cdot c_0\cdot\left\{y_0\right\}_0\cdot q_{01}\cdot\left\{u_1\right\}_0+2\cdot c_1\cdot\left\{y_1\right\}_0\cdot\left(q_{11}\cdot\left\{u_1\right\}_0-\left\{y_1\right\}_0\cdot\left\{\frac{\partial B}{\partial S}\right\}_0\right)+a\cdot\left\{u_1\right\}_0^{\ 2}=0. \qquad (82)$$

Дифференцируя $B[V^0,t]$ по $\left\{u_1\right\}_0$, и приравнивая результаты нулю, получим недостающее уравнение для определения оптимальной функции Ляпунова $V^0(t,\left[y\right]_n)$ и оптимального управляющего воздействия $\left\{u_1\right\}_0$:

$$\frac{\partial B[V^0,t]}{\partial\{u_1\}_0} = 2\cdot c_0\cdot\{y_0\}_0\cdot q_{01} + 2\cdot c_1\cdot\{y_1\}_0\cdot q_{11} + 2\cdot a\cdot\{u_1\}_0 = 0. \qquad (83)$$

Разрешаем (83) относительно управляющего воздействия $\{u_1\}_0$:

$$\{u_1\}_0 = -\left(\frac{c_0\cdot q_{01}}{a}\cdot\{y_0\}_0 + \frac{c_1\cdot q_{11}}{a}\cdot\{y_1\}_0\right). \qquad (84)$$

С учетом равенства (84) выражение (82) принимает вид

$$B[V^0] = 2\cdot c_1\cdot\{y_1\}_0\cdot\left(-\{y_1\}_0\cdot\left\{\frac{\partial B}{\partial S}\right\}_0\right)$$

$$-a\cdot\left(\frac{c_0\cdot q_{01}}{a}\cdot\{y_0\}_0 + \frac{c_1\cdot q_{11}}{a}\cdot\{y_1\}_0\right)^2 = 0. \qquad (85)$$

Приравниваем множители при произведениях $\{y_1\}_0\cdot\{y_1\}_0$, $\{y_0\}_0\cdot\{y_0\}_0$, $\{y_0\}_0\cdot\{y_1\}_0$ к нулю

$$\{y_1\}_0\cdot\{y_1\}_0: \qquad -2\cdot c_1\cdot\left\{\frac{\partial B}{\partial S}\right\}_0 - \frac{c_1^{\,2}\cdot q_{11}^{\,2}}{a} = 0; \qquad (86)$$

$$\{y_0\}_0\cdot\{y_0\}_0: \qquad -\frac{c_0^{\,2}\cdot q_{01}^{\,2}}{a} = 0;$$

$$\{y_0\}_0\cdot\{y_1\}_0: \qquad -a\cdot 2\cdot\frac{c_0\cdot q_{01}}{a}\cdot\frac{c_1\cdot q_{11}}{a} = 0,$$

определим коэффициенты c_0, c_1:

$$c_0 = 0, \qquad c_1 = -\frac{a}{2\cdot q_{11}^{\,2}}\cdot\left\{\frac{\partial B}{\partial S}\right\}_0. \qquad (87)$$

Квадратичная форма для нулевой гармоники (79) будет определенно положительной, если коэффициенты c_0 и c_1 будут не отрицательны:

$$c_1 = -\frac{a}{2\cdot q_{11}^{\,2}}\cdot\left\{\frac{\partial B}{\partial S}\right\}_0 > 0, \qquad (88)$$

что дает условия существования оптимального управления малыми возмущениями $[y]_n$ макропараметров $[c]_n$

$$\left\{\frac{\partial B}{\partial S}\right\}_0 < 0, \qquad B = \left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\Bigg|_0 \qquad (89)$$

при качестве оперативного управления производственным процессом, выраженным интегралом (74).

Принимая во внимание условие синхронизации

$$\left.\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y}\right)}{\partial S}\right|_0 \cong 0\,, \tag{6.19}$$

из неравенства (89) следует

$$\left\{\frac{\partial B}{\partial S}\right\}_0 = \left.\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y}\right)\right|_0 \cdot \left.\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1}{[c]_0}\right)\right|_0 < 0\,, \qquad \left.\frac{\partial[c]_0}{\partial S}\right|_0 > 0\,. \tag{90}$$

Условия существования оптимального управления малыми возмущениями $[y]_n$ макропараметров $[c]_n$ при качестве оперативного управления производственным процессом, выраженным интегралом (74), возможны при возрастании заделов вдоль технологической цепочки, при этом управляющее воздействие определяется как

$$\{u_1\}_0 = \frac{1}{2\cdot q_{11}}\cdot\left\{\frac{\partial B}{\partial S}\right\}_0\cdot\{y_1\}_0\,. \tag{91}$$

8.2.Оперативное управление макропараметрами производственного процесса. Нулевое приближение по малому параметру $\frac{1}{K_v} << 1$ (при $P_m \approx 1$) для модели производственных процессов в 2-х моментном описании.

При исследовании функционирования производственных систем с характеристическими числами $\frac{1}{K_v} << 1$, $P_m \approx 1$ замкнутая система уравнений балансов в нулевом приближении по малому параметру $\frac{1}{K_v} << 1$ для 2-х моментного описания производственных процессов (6.43), (6.44) принимает вид

$$\frac{\partial[c]_0}{\partial t} + \frac{\partial[c]_1}{\partial S} = 0, \tag{6.43}$$

$$\frac{\partial[c]_1}{\partial t}+\frac{\partial[c]_2}{\partial S} - f(t,S)\cdot[c]_0 = 0, \tag{6.44}$$

где макропараметр работы технологического процесса $[c]_2(t,S)$ и инженерно-производственная функция являются заданными детерминированными величинами:

$$[c]_2(t,S)=\int_0^\infty dm\cdot m^2\cdot c_0(t,S,m)\,,\quad \left.\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y}\right)}{\partial S}\right|_0 \cong 0\,, \tag{7.72}$$

$$f(t,S)=a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\cdot\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)}{\partial S}. \tag{7.73}$$

Дополним балансовые уравнения производственной системы (6.43), (6.44) функциями управления $\Upsilon_0(t,S)$, $\Upsilon_1(t,S)$

$$\frac{\partial[c]_0}{\partial t}=-\frac{\partial[c]_1}{\partial S}+\Upsilon_0(t,S)\,,\quad \left.\frac{\partial\left(a_{yV}\cdot[c]_{1y}\right)}{\partial S}\right|_0 \cong 0$$

$$\frac{\partial[c]_1}{\partial t}=a_{yV}\cdot[c]_{1y}\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{a_{yV}\cdot[c]_{1y}}{[c]_0}\right)-\frac{\partial[c]_2}{\partial S}+\Upsilon_1(t,S)\,. \tag{92}$$

Будем полагать, что системе балансовых уравнений (6.43), (6.44) соответствует невозмущенное решение

$$[c]_n^*=[c]_n^*(t,S)\,,\quad n=0,1\,, \tag{7.74}$$

которое отвечает заданным детерминированным плановым показателям производственного процесса.

Пусть наблюдаемые технологической или диспетчерской службой макровеличины производственного процесса: технологические заделы $[c]_0$ и темп движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки $[c]_1$, получат случайные малые возмущения $[y]_n$:

$$[y]_n=[c]_n-[c]_n^*\,, \tag{26}$$

для ликвидации которых от диспетчерской службы предприятия требуются дополнительные управляющие воздействия u_m:

$$\sum_{m=0}^{N_k} q_{nm} \cdot u_m = Y_n(t,S) - Y_n^*(t,S) , \quad \frac{\sum_{m=0}^{N_k} q_{nm} \cdot u_m}{Y_n^*(t,S)} << 1 . \qquad (1.6.4)$$

Уравнениям для описания поведения макропараметров производственного процесса (6.19), (6.20) соответствует линеаризованная система уравнений в малых возмущениях

$$\frac{\partial [y]_0}{\partial t} + \frac{\partial [y]_1}{\partial S} = 0, \qquad (7.75)$$

$$\frac{\partial [y]_1}{\partial t} + \frac{\partial [y]_0}{\partial S} \cdot B^2 + [y]_0 \cdot \frac{\partial B^2}{\partial S} = 0. \qquad (7.77)$$

а системе уравнений управления макропараметрами производственной системы (24) соответственно

$$\frac{\partial [y]_0}{\partial t} + \frac{\partial [y]_1}{\partial S} = q_{00} \cdot u_0 + q_{01} \cdot u_1 , \qquad u_m(t,0) = 0 , \qquad (93)$$

$$\frac{\partial [y]_1}{\partial t} + \frac{\partial [y]_0}{\partial S} \cdot B^2 + [y]_0 \cdot \frac{\partial B^2}{\partial S} = q_{10} \cdot u_0 + q_{11} \cdot u_1 ,$$

где введены обозначения, используемые ранее

$$B = \left(a_{yV} \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0} \right) \Bigg|_0 , \qquad \frac{B}{T_{возм}} >> \frac{\partial B}{\partial t} . \qquad (7.29)$$

Функции q_{nm} представляют собою ограниченные и непрерывные функции времени.

8.2.1.Оперативное управление заделами производственного процесса. Задача оперативного управления заделами «точно в срок».

Система уравнений оперативного управления макропараметрами производственной системы (27) для случая управления заделами имеет вид

$$\frac{\partial [y]_0}{\partial t} + \frac{\partial [y]_1}{\partial S} = q_{00} \cdot u_0 , \quad q_{00} = const_1 , \quad q_{10} = const_2 , \quad u_0(t,0) = 0 , \qquad (94)$$

$$\frac{\partial [y]_1}{\partial t} + \frac{\partial [y]_0}{\partial S} \cdot B^2 + [y]_0 \cdot \frac{\partial B^2}{\partial S} = q_{10} \cdot u_0 .$$

Будем рассматривать оперативное управление стационарным производственным процессом. Как и ранее, используем обозначения

$$\left[c\right]_0 = \left[c\right]_0^* (S), \qquad \left[c\right]_1 = a_{yV} \cdot \left[c\right]_{1y} (S), \tag{54}$$

$$\left[y\right]_0 = \left[c\right]_0 - \left[c\right]_0^* (S), \qquad \left[y\right]_1 = \left[c\right]_1 - a_{yV} \cdot \left[c\right]_{1y} (S), \tag{55}$$

$$B = \left. \left(a_{yV} \cdot \frac{\left[c\right]_{1y}}{\left[c\right]_0} \right) \right|_0, \qquad \frac{B}{T_{возм}} >> \frac{\partial B}{\partial t}. \tag{28}$$

Полагается, что при отклонении заделов при движении межоперационной заготовки $\left[c\right]_1$ от своей плановой величины $\left[c\right]_1 = a_{yV} \cdot \left[c\right]_{1y} (S)$ имеется возможность компенсировать это отклонение внутренними источниками с интенсивностью $q_{00} \cdot u_0$, $q_{10} \cdot u_0$. Критерием, оценивающим качество оперативного управления производственного процесса (94), выберем интеграл, использовавшийся ранее (37):

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{S_d} \cdot \int_0^{S_d} \left(a \cdot \left([y]_0 \right)^2 + b \cdot \left(u_0 \right)^2 \right) \cdot dS \cdot dt, \tag{37}$$

$$a = \left(h_b(t) \cdot S \right)^2, \qquad b = \left(h_u(t,S) \cdot q_{00} \right)^2.$$

При построении управляющего воздействия $u_1(t,S)$ ликвидации отклонения заделов $\left[y\right]_0$ будем рассматривать уравнения оперативного управления макропараметрами производственной системы для нулевой гармоники разложения малых возмущений $\left[y\right]_n$ макропараметров $\left[c\right]_n$ и управляющего воздействия u_1 в ряд Фурье (40)

$$\frac{d\{y_0\}_0}{dt} = q_{00} \cdot \{u_0\}_0, \quad q_{00} = const_1, \quad q_{10} = const_2, \quad u_0(t,0) = 0, \tag{95}$$

$$\frac{d\{y_1\}_0}{dt} + \left[y\right]_0 \cdot \frac{\partial B^2}{\partial S} = q_{10} \cdot \{u_0\}_0.$$

Оптимальную функцию Ляпунова $V^0(t,\left[y\right]_n)$, будем искать в виде квадратичной формы для нулевой гармоники:

$$V^0(t,[y]_n) = \frac{1}{S_d} \cdot \int_0^{S_d} \left(c_0 \cdot \left([y]_0 \right)^2 + c_1 \cdot \left([y]_1 \right)^2 \right) \cdot dS =$$

$$= \frac{1}{S_d} \cdot \int_0^{S_d} \left(c_0 \cdot \{y_0\}_0^{\ 2} + c_1 \cdot \{y_1\}_0^{\ 2} \right) \cdot dS = c_0 \cdot \{y_0\}_0^{\ 2} + c_1 \cdot \{y_1\}_0^{\ 2}, \quad \frac{\partial V^0}{\partial t} = 0. \tag{79}$$

Проверим достаточные условия разрешимости задачи об оптимальном управлении темпом производственной системы. В нашем случае

$$Q = \begin{vmatrix} q_{00} \\ q_{10} \end{vmatrix}, \qquad P = \begin{vmatrix} p_{00} & p_{10} \\ p_{01} & p_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\left\{ \dfrac{\partial B^2}{\partial S} \right\}_0 \end{vmatrix} \tag{96}$$

и вычислим матрицу $W = \{Q, P \cdot Q\}$

$$W = \begin{vmatrix} q_{00} & 0 \\ q_{01} & -\left\{ \dfrac{\partial B^2}{\partial S} \right\}_0 \cdot q_{01} \end{vmatrix} = q_{01} \cdot \begin{vmatrix} q_{00} & 0 \\ 1 & -\left\{ \dfrac{\partial B^2}{\partial S} \right\}_0 \end{vmatrix}. \tag{97}$$

Ранг матрицы $W = \{Q, P \cdot Q\}$ (97) равен рангу системы (95). Следовательно, система (95) разрешима относительно оптимального управления производственным процессом.

Составим выражение $B[V^0, t]$ для рассматриваемой производственной системы:

$$B[V^0] = \frac{\partial V^0}{\partial \{y_0\}_0} \cdot \frac{d\{y_0\}_0}{dt} + \frac{\partial V^0}{\partial \{y_1\}_0} \cdot \frac{d\{y_1\}_0}{dt} + w =$$

$$= 2 \cdot c_0 \cdot \{y_0\}_0 \cdot q_{00} \cdot \{u_0\}_0 + 2 \cdot c_1 \cdot \{y_1\}_0 \cdot \left(q_{10} \cdot \{u_0\}_0 - \{y_0\}_0 \cdot \frac{\partial B^2}{\partial S} \right) + \tag{98}$$

$$+ a \cdot \left(\{y_0\}_0\right)^2 + b \cdot \left(\{u_0\}_0\right)^2 = 0.$$

Дифференцируя $B[V^0, t]$ по $\{u_0\}_0$, и приравнивая результаты нулю, получим недостающее уравнение для определения оптимальной функции Ляпунова $V^0(t, [y]_n)$ и оптимального управляющего воздействия $\{u_0\}_0$:

$$\frac{\partial B[V^0, t]}{\partial \{u_0\}_0} = 2 \cdot c_0 \cdot \{y_0\}_0 \cdot q_{00} + 2 \cdot c_1 \cdot \{y_1\}_0 \cdot q_{10} + 2 \cdot b \cdot \{u_0\}_0 = 0. \tag{99}$$

Разрешаем (99) относительно управляющего воздействия $\{u_0\}_0$:

$$\{u_0\}_0 = -\left(\frac{c_0 \cdot q_{00}}{b} \cdot \{y_0\}_0 + \frac{c_1 \cdot q_{10}}{b} \cdot \{y_1\}_0 \right). \tag{100}$$

С учетом равенства (100) выражение (98) принимает вид

$$B[V^0] = -2 \cdot c_1 \cdot \{y_0\}_0 \cdot \{y_1\}_0 \cdot \frac{\partial B^2}{\partial S} +$$

$$+ a \cdot \left(\{y_0\}_0\right)^2 - b \cdot \left(\frac{c_0 \cdot q_{00}}{b} \cdot \{y_0\}_0 + \frac{c_1 \cdot q_{10}}{b} \cdot \{y_1\}_0 \right)^2 = 0. \tag{101}$$

Приравниваем множители при произведениях $\{y_1\}_0 \cdot \{y_1\}_0$, $\{y_0\}_0 \cdot \{y_0\}_0$, $\{y_0\}_0 \cdot \{y_1\}_0$ нулю

$$\{y_1\}_0 \cdot \{y_1\}_0 : \qquad -b \cdot \left(\frac{c_1 \cdot q_{10}}{b} \right)^2 = 0; \tag{102}$$

$$\{y_0\}_0 \cdot \{y_0\}_0 : \qquad a - b \cdot \left(\frac{c_0 \cdot q_{00}}{b} \right)^2 = 0;$$

$$\{y_0\}_0 \cdot \{y_1\}_0 : \qquad -2 \cdot b \cdot \left(\frac{c_0 \cdot q_{00}}{b} \cdot \frac{c_1 \cdot q_{10}}{b} \right) - 2 \cdot c_1 \cdot \frac{\partial B^2}{\partial S} = 0,$$

определим коэффициенты c_0, c_1:

$$c_0 = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{q_{00}}, \qquad c_1 = 0. \tag{103}$$

Квадратичная форма для нулевой гармоники (79) будет определенно положительной, если коэффициенты c_0 и c_1 будут не отрицательны:

$$c_0 = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{q_{00}} > 0, \tag{104}$$

что дает условия существования оптимального управления малыми возмущениями $[y]_n$ макропараметров $[c]_n$

$$q_{00} > 0, \tag{105}$$

при качестве оперативного управления производственным процессом, выраженным интегралом (74), определяющем оптимальное управляющее воздействие в форме

$$\{u_0\}_0 = -\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \{y_0\}_0 . \tag{106}$$

8.2.2.Оперативное управление темпом производственного процесса.

Система уравнений оперативного управления макропараметрами производственной системы (27) для случая управления темпом производственного процесса имеет вид

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}=q_{01}\cdot u_1\,,\quad q_{01}=const_1\,,\quad q_{11}=const_2\,,\quad u_1(t,0)=0\,,\tag{107}$$

$$\frac{\partial[y]_1}{\partial t}+\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot B^2+[y]_0\cdot\frac{\partial B^2}{\partial S}=q_{11}\cdot u_1\,.$$

Будем рассматривать оперативное управление стационарным производственным процессом. Как и ранее, используем обозначения

$$[c]_0=[c]_0^*(S)\,,\qquad [c]_1=a_{yV}\cdot[c]_{1y}\,(S)\,,\tag{54}$$

$$[y]_0=[c]_0-[c]_0^*(S)\,,\qquad [y]_1=[c]_1-a_{yV}\cdot[c]_{1y}\,(S)\,,\tag{55}$$

$$B=\left.\left(a_{yV}\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}\right)\right|_0\,,\qquad \frac{B}{T_{возм}}\gg\frac{\partial B}{\partial t}\,.\tag{28}$$

Критерием, оценивающим качество оперативного управления производственного процесса (107), выберем интеграл, использовавшийся ранее (74):

$$I=\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}\left(a\cdot u_1^2\right)\cdot dS\cdot dt\,.\tag{74}$$

При построении управляющего воздействия $u_1(t,S)$ ликвидации отклонения темпа $[y]_1$ будем рассматривать уравнения оперативного управления макропараметрами производственной системы для нулевой гармоники разложения малых возмущений $[y]_n$ макропараметров $[c]_n$ и управляющего воздействия u_1 в ряд Фурье (40)

$$\frac{d\{y_0\}_0}{dt}=q_{01}\cdot\{u_1\}_0\,,\quad q_{00}=const_1\,,\quad q_{10}=const_2\,,\quad u_0(t,0)=0\,,\tag{108}$$

$$\frac{d\{y_1\}_0}{dt}+[y]_0\cdot\frac{\partial B^2}{\partial S}=q_{11}\cdot\{u_1\}_0\,,\qquad I=\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}\left(a\cdot\{u_1\}_0^{\,2}\right)\cdot dS\cdot dt\,.$$

Оптимальную функцию Ляпунова $V^0(t,[y]_n)$, будем искать в виде квадратичной формы для нулевой гармоники:

$$V^0(t,[y]_n)=\frac{1}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}\left(c_0\cdot\left([y]_0\right)^2+c_1\cdot\left([y]_1\right)^2\right)\cdot dS=$$

$$=\frac{1}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}\left(c_0\cdot\{y_0\}_0^{\ 2}+c_1\cdot\{y_1\}_0^{\ 2}\right)\cdot dS=c_0\cdot\{y_0\}_0^{\ 2}+c_1\cdot\{y_1\}_0^{\ 2},\quad \frac{\partial V^0}{\partial t}=0. \qquad (79)$$

Проверим достаточные условия разрешимости задачи об оптимальном управлении темпом производственной системы. В нашем случае

$$Q=\begin{vmatrix} q_{01}\\ q_{11}\end{vmatrix},\qquad P=\begin{vmatrix} p_{00} & p_{10}\\ p_{01} & p_{11}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0\\ 0 & -\left\{\dfrac{\partial B^2}{\partial S}\right\}_0\end{vmatrix} \qquad (109)$$

и вычислим матрицу $W=\{Q,P\cdot Q\}$

$$W=\begin{vmatrix} q_{01} & 0\\ q_{11} & -\left\{\dfrac{\partial B^2}{\partial S}\right\}_0\cdot q_{11}\end{vmatrix}=q_{11}\cdot\begin{vmatrix} q_{00} & 0\\ 1 & -\left\{\dfrac{\partial B^2}{\partial S}\right\}_0\end{vmatrix}. \qquad (110)$$

Ранг матрицы $W=\{Q,P\cdot Q\}$ (110) равен рангу системы (108). Следовательно, система (108) разрешима относительно оптимального управления производственным процессом.

Составим выражение $B[V^0,t]$ для рассматриваемой производственной системы:

$$B[V^0]=\frac{\partial V^0}{\partial\{y_0\}_0}\cdot\frac{d\{y_0\}_0}{dt}+\frac{\partial V^0}{\partial\{y_1\}_0}\cdot\frac{d\{y_1\}_0}{dt}+w=$$

$$=2\cdot c_0\cdot\{y_0\}_0\cdot q_{01}\cdot\{u_1\}_0+2\cdot c_1\cdot\{y_1\}_0\cdot\left(q_{11}\cdot\{u_1\}_0-\{y_0\}_0\cdot\frac{\partial B^2}{\partial S}\right)+a\cdot\left(\{u_0\}_0\right)^2=0. \qquad (111)$$

Дифференцируя $B[V^0,t]$ по $\{u_1\}_0$, и приравнивая результаты нулю, получим недостающее уравнение для определения оптимальной функции Ляпунова $V^0(t,[y]_n)$ и оптимального управляющего воздействия $\{u_1\}_0$:

$$\frac{\partial B[V^0,t]}{\partial\{u_1\}_0}=2\cdot c_0\cdot\{y_0\}_0\cdot q_{01}+2\cdot c_1\cdot\{y_1\}_0\cdot q_{11}+2\cdot a\cdot\{u_1\}_0=0. \qquad (112)$$

Разрешаем (112) относительно управляющего воздействия $\{u_1\}_0$:

$$\{u_1\}_0 = -\left(\frac{c_0 \cdot q_{01}}{a} \cdot \{y_0\}_0 + \frac{c_1 \cdot q_{11}}{a} \cdot \{y_1\}_0 \right). \tag{113}$$

С учетом равенства (100) выражение (98) принимает вид

$$B[V^0] = -2 \cdot c_1 \cdot \{y_0\}_0 \cdot \{y_1\}_0 \cdot \frac{\partial B^2}{\partial S} + a \cdot \left(\frac{c_0 \cdot q_{01}}{a} \cdot \{y_0\}_0 + \frac{c_1 \cdot q_{11}}{a} \cdot \{y_1\}_0 \right)^2 = 0. \tag{114}$$

Приравниваем множители при произведениях $\{y_1\}_0 \cdot \{y_1\}_0$, $\{y_0\}_0 \cdot \{y_0\}_0$, $\{y_0\}_0 \cdot \{y_1\}_0$ к нулю: получим

$$\{y_1\}_0 \cdot \{y_1\}_0: \qquad \frac{c_1 \cdot q_{11}}{a} = 0; \tag{115}$$

$$\{y_0\}_0 \cdot \{y_0\}_0: \qquad \frac{c_0 \cdot q_{01}}{a} = 0.$$

Откуда коэффициенты c_0, c_1:

$$c_0 = 0, \qquad c_1 = 0. \tag{116}$$

Равенство нулю коэффициентов c_0, c_1 не дает возможности определить управляющее воздействие $\{u_1\}_0$ для оптимального оперативного управления отклонениями $[y]_n$ макропараметрами $[c]_n$. Требуется выбрать новый критерий качества оперативного управления отклонениями $[y]_n$ или дополнить уравнения оперативного управления отклонениями $[y]_n$ (108) дополнительными слагаемыми для управления заделами.

Выводы

Рассмотрены основные функции диспетчерской службы предприятия. Проанализированы основные объекты диспетчерского контроля и наблюдения за ходом единичного, серийного и массового производства. Используя связь макропараметров производственной системы, представленную в виде балансовых уравнений, записаны балансовые уравнения стратегического управления макропараметрами производственной системой с функциями управления $\Upsilon_n(t,S)$. Сформулирована задача об оперативном управлении производственной системой с массовым выпуском продукции, обеспечивающем асимптотическую устойчивость технологического процесса. Предполагается, что управляющие функции определены и непрерывны в рассматриваемой области, не стеснены никакими дополнительными ограничениями.

Используя метод функций Ляпунова, получен вид оптимальной функции управления производственным процессом предприятия с массовым выпуском продукции.

Рассмотрены прикладные задачи оперативного управления макропараметрами производственной системы, которые наряду с требованиями асимптотической устойчивости заданного планового состояния содержат пожелания о возможно наилучшем качестве переходного процесса в ходе его приближения к невозмущенному состоянию при $t \to \infty$. При этом обеспечено выполнение пожеланий о возможно наименьшей затрате производственных ресурсов (энергии, сырья и материалов, трудовых ресурсов и т.д.), расходуемых на формирование управляющих воздействий $u_m(t,[y]_n)$. Пожелания выражены в виде условия минимальности интеграла качества:

$$I = \int_{t_0}^{\infty} w(t,[y]_n, u_m) \cdot dt .$$

Записаны достаточные условия разрешимости задачи об оперативном управлении макропараметрами производственной системы. Получены условия, при которых задача об оптимальном управлении производственным процессом имеет единственное решение. Детально проанализированы задачи оперативного управления отклонениями заделов и отклонениями темпа производственного процесса в 2-х моментном описании для характерных чисел производственной системы $K_v << 1$ и $\frac{1}{K_v} << 1$ при $P_m \approx 1$. Определены оптимальные управляющие воздействия производственным процессом и условия их существования. Оптимальная функция управления макропараметрами производственной системы для различных вариантов производственных систем представлена в таблице №1.

Таблица №1. Оптимальная функция управления макропараметрами производственной системы

	Характерное число производственного процесса	Макропараметры управления	Вид интеграла качества для оперативного управления производственного процесса	Вид оптимальной функции управления
1	$K_v << 1$ $P_m \approx 1$	управление заделами	$I = \int\limits_{t_0}^{\infty} \frac{1}{S_d} \cdot \int\limits_{0}^{S_d} \left(a \cdot \left([y]_0 \right)^2 + b \cdot \left(u_0 \right)^2 \right) \cdot dS \cdot dt$ (37)	Не определена
2	$K_v << 1$ $P_m \approx 1$	управление темпом	$I = \int\limits_{t_0}^{\infty} \frac{1}{S_d} \cdot \int\limits_{0}^{S_d} \left(a \cdot u_1^2 \right) \cdot dS \cdot dt$ (74)	$\{u_1\}_0 = \frac{1}{2 \cdot q_{11}} \cdot \left\{ \frac{\partial B}{\partial S} \right\}_0 \cdot \{y_1\}_0$ (91)
3	$\frac{1}{K_v} << 1$ $P_m \approx 1$	управление заделами	$I = \int\limits_{t_0}^{\infty} \frac{1}{S_d} \cdot \int\limits_{0}^{S_d} \left(a \cdot \left([y]_0 \right)^2 + b \cdot \left(u_0 \right)^2 \right) \cdot dS \cdot dt$ (37)	$\{u_0\}_0 = -\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \{y_0\}_0$ (106)
4	$\frac{1}{K_v} << 1$ $P_m \approx 1$	управление темпом	$I = \int\limits_{t_0}^{\infty} \frac{1}{S_d} \cdot \int\limits_{0}^{S_d} \left(a \cdot u_1^2 \right) \cdot dS \cdot dt$ (74)	Не определена

1. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Перевод с английского Мышкиса А.Д. – М.: Изда-тельство иностранной литературы, 1954. - 215 с.
2. Гальперин Е.А., Красовский Н.Н., О стабилизации установив-шихся движений нелинейных управляемых систем, ПММ, т.27, вып.6 1963г.
3. Леонтьев В.В. Исследования структуры американской экономики. – М.: Государственное статистическое издательство, 1958. - 640 с.
4. Синергетика: Сб. статей. Пер. с англ./ Сост. А. И. Рязанов, А.Д Суханов. Под ред. Б.Б. Кадомцева. – М.: Мир, 1984 с.
5. В.-Б. Занг, Синергетическая экономика. . –М.: Мир, 1999г., 335стр
6. Юхновский И.Р., Термодинамические аналогии в экономике. Международная конференция НАНУ «Статистическая физика: Общие проблемы и новые применения», Львов, 2005г., стр.51
7. Гончар Н.С., Информационная модель в экономике. Между-народная конференция НАНУ «Статистическая физика: Общие проблемы и новые применения», Львов, 2005г., стр.33
8. Чернавский Д.С., Старков Н.И., Щербаков А.В. О проблемах физической экономики // Успехи физических наук. -2002. –т.172, N12. -С.1045-1066.
9. Канторович Л.В. Математические методы организации и планирования производства. Изд.ЛГУ 1939г.
10. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия.- М.: Прогресс, 1961. - 341с.
11. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым вы-пуском продукции – Доповіді Національноїакадемії наук України, 2005. –N7– С.66-71
12. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Теория предпри-ятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок. – Харьков, 2003. – 272 с.
13. Летенко В.А., Родионов Б.Н. Организация, планирование и уп-равление машиностроительным предприятием. Часть 2, Внут-ризаводское планирование. - М.: Высшая школа, 1979. – 232 с.
14. Демуцкий В.П., Пигнастый О.М. Вопросы устойчивости макроско-пических параметров технологических процессов массового производства – Доповіді Національної академії наук України, 2006. –N3– С.63-67
15. Пигнастый О.М. Задача оптимального оперативного управления макропараметрами производственной системы с массовым выпуском продукции – Доповіді Національної академії наук України, 2006. –N5– С.79-85.

ЧАСТЬ 4.
ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

1.АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРОЦЕССА ПРЕДПРИЯТИЯ С МАССОВЫМ ВЫПУСКОМ ПРОДУКЦИИ

Для замкнутой системы уравнений состояния макропараметров производственной системы функционирующего предприятия получены уравнения возмущенного состояния. Записаны условия устойчивости функционирования производственной системы. Показана взаимосвязь между заделом и темпом перемещения базовых продуктов вдоль технологической цепочки, обеспечивающая устойчивое функционирование технологического процесса.

1.1.Постановка задачи

Хорошо известно, что влияние малых возмущающих факторов на поведение производственно-сбытовой системы будет не одинаковым для различных процессов. На одни процессы это влияние незначительно, так как возмущенное состояние мало отличается от невозмущенного. Напротив, на других процессах влияние возмущений сказывается весьма значительно, как бы ни были малы возмущающие силы. Так как возмущающие факторы всегда существуют неизбежно, то становится понятным, что задача устойчивости производственного процесса приобретает очень важное теоретическое и практическое значение. Исследование устойчивости производственного процесса будем осуществлять через макропараметры производственной системы с массовым выпуском продукции. Под возмущающими факторами будем понимать силы, не учитываемые при описании производственного процесса вследствие их малости по сравнению с основными силами, влияющими на производство и выпуск продукции. Они могут действовать как мгновенно, что сведется к малому изменению начального состояния производственной системы, так и непрерывно, что будет означать - составленные уравнения производственного процесса отличаются от истинных на некоторые малые поправочные члены, не учтенные в уравнениях производственного процесса. Рассмотрим предприятие, производящее массово «Изделие 05». Изготовление «Изделия 05» происходит на основании утвержденных на предприятии операционных расценок (Таблица 1) и норм расхода сырья, комплектующих и материалов (Таблица 2). Технология изготовления обусловлена наличием производственного оборудования (Таблица 3) и схемой его расстановки. Производительность работы оборудования $\left[c\right]_{1y}$, точность выполнения операции задаются паспортными данными оборудования, характеризуются средним значением рассматриваемого параметра и среднеквадратичным отклонением этого параметра $s_y^{\,2}$ от среднего значения $\left[c\right]_{1y}$. Работа технологической линии каждую смену отслеживается службой Главного диспетчера, которая следит за основными макропараметрами производственного процесса - заделами базовых продуктов $\left[c\right]_0$ между технологическими операциями вдоль технологической цепочки производственного процесса и темпом перемещения базовых продуктов $\left[c\right]_1$ от одной технологической операции к другой и фиксирует их отклонения

$$\left[y\right]_0=\left[c\right]_0-\left[c\right]_0^*; \qquad \left[y\right]_1=\left[c\right]_1-\left[c\right]_1^* \tag{1}$$

от планового значения $\left[c\right]_0^*$, $\left[c\right]_1^*$. Отклонения обусловлены случайными факторами, связанными с поломкой оборудования, отсутствием работника на рабочем месте по уважительной или неуважительной причине (в связи с болезнью, прогулом…), наличием брака на предыдущей или текущей операции, сбой в поставке сырья и материалов на участок и т.д., являются случайными отклонениями [1]. Возникшие случайные отклонения (1) являются малыми. Пока данные отклонения не переросли в крупномасштабные, служба Главного диспетчера, наделенная полномочиями в рамках установленных на предприятии должностных инструкций, должна устранить данные отклонения. При этом расход ресурсов предприятия для устранения отклонений $\left[y\right]_0$, $\left[y\right]_1$ должен быть минимален. Используя информацию службы Главного диспетчера и нормативную документацию предприятия (Таблица 1, Таблица 2,Таблица 3), требуется определить условия бесперебойного функционирования производственного процесса и получить оптимальную функцию управления для службы Главного диспетчера макропараметрами производственного процесса $\left[c\right]_0$ и $\left[c\right]_1$.

Таблица 1. Операционные расценки изготовления изделия

Вид операции	Наименование операции	Сменная норма, шт	Фонд оплаты труда, грн/мес	Кол. дней в месяце	Расценка за операцию, грн/шт
Гильотинная порезка	Рубка листа на пластину	4000	561,2	21,5	0,00816
Гильотинная порезка	Рубка листа на конус	28000	561,2	21,5	0,00093
Штамповка	Пробивка, отрезка	3500	561,2	21,5	0,00746
Штамповка	Гибка заготовки	2800	561,2	21,5	0,00932
Штамповка	Пробивка отверстий	3000	561,2	21,5	0,00870
Штамповка	Надрезка усика	2800	561,2	21,5	0,00932
Сборка	Зачистка заусениц	1000	488	21,5	0,02270
Штамповка	Резка заготовки	8000	561,2	21,5	0,00326
Штамповка	Гибка ручки	5000	561,2	21,5	0,00522
Штамповка	Плющение	3700	561,2	21,5	0,00705
Штамповка	Подгибка	3700	561,2	21,5	0,00705
Штамповка	Вырубка - вытяжка	3800	561,2	21,5	0,00687
Штамповка	Вытяжка 2/1	3200	561,2	21,5	0,00816
Штамповка	Вытяжка 2/2	3200	561,2	21,5	0,00816
Штамповка	Вытяжка 2/3	3200	561,2	21,5	0,00816
Токарная	Подрезка конуса	640	760	21,5	0,05523
Штамповка	Осадка радиуса	3200	561,2	21,5	0,00816
Штамповка	Калибровка	3000	561,2	21,5	0,00870
Сварка	Пластина на конус	680	732	21,5	0,05007
Сборка	Сборка	1200	600	21,5	0,02326
Покраска	Покраска	680	650	21,5	0,04446
Упаковка	Упаковка	480	561,2	21,5	0,05438

Таблица 2. Нормы расхода сырья и материалов на изделие

Материал	Расход материала	Ед.изм	Примечание	Цена единицы ресурса, грн/шт	Сумма, грн
Лист г/к 2 мм	0,794	кг		1,250	0,993
Лист г/к 3 мм	0,18115	кг		1,250	0,226
Проволока ф8мм	0,0986	кг	длина 250 мм	1,292	0,127
Сварочная проволока ф1мм	0,016	кг		2,325	0,037
Краска ПФ-115	0,00323	кг		4,000	0,013
Сольвент	0,00321	кг		2,667	0,009
Масло	0,0005	кг	0,0005556 л	1,292	0,001
Углекислота	0,0006	бал	0,012 кг	17,500	0,011
Гофротара	0,05	шт	1 шт на 20 изделий	1,917	0,096
Ручка ф8 пластиковая	1	шт		0,064	0,064
Фасовка № 9 (18*35*4)	1	шт		0,006	0,006
Скотч	0,0025	шт	1 шт на 20 ящиков	1,817	0,005

Таблица 3. Технологическое оборудование

№	Наименование оборудования на программе	Количество штук на программе
1	Гильотина	Две
2	Пресс 100 тонн К116Е	Три
3	Пресс 67 тонн	Один
4	Пресс 40 тонн	Один
5	Пресс 16 тонн	Один
6	Пресс 6 тонн	Один
7	Токарный станок 16К20	Один
8	Сварочный полуавтомат	Три
9	Заточной станок	Один
10	Сборочное приспособление	Одно
11	Покрасочный участок	Один
12	Упаковочный участок	Один
13	Участок склада хранения готовой продукции	Один

1.2.Исходные данные производственной системы

Состояние производственной системы будет определяться состоянием множества базовых продуктов системы. За базовый продукт возьмем «Изделие 05», представленное в виде полуфабриката, перемещающегося от одной технологической операции к другой. Количество базовых продуктов, находящихся в заделах на различных технологических операциях составляет 30тыс штук:

$$\int_0^\infty dS \cdot [\, c \,]_0 = N = 30000 \,.$$

Технологический процесс имеет порядка 30 основных операций (Таблица 1) и несколько десятков неосновных (вспомогательных) операций. Наличие в заделах вдоль технологической цепочки большого количества базовых продуктов и наличие в технологическом процессе большого количества отделяемых друг от друга основных и неосновных операций позволяет разбить фазовое пространство производственной системы на такое число ячеек, чтобы размеры ячейки были много меньше характерных размеров производственной системы и в то же время содержали внутри себя большое число базовых продуктов. Таким образом, мы можем для производственной системы наряду с основным пределом при $N \to \infty$, рассматривать и предельный случай при стремящихся к нулю размерах ячейки фазового пространства. Производственные системы, удовлетворяющие вышеуказанным пределам, могут быть описаны с помощью уравнения относительно функции распределения базовых продуктов по скоростям изменения затрат $c(t,S,m)$ [2]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial c}{\partial m} \cdot f(t,S) = l_{оборуд} \cdot \left\{ \int_0^\infty \left[y \left[\tilde{m} \to m \right] \cdot \tilde{m} \cdot c(t,S,\tilde{m}) \right] \cdot d\tilde{m} - m \cdot c \right\}.$$

(2)

Производственная система предприятия для линии массового производства «Изделия 05» имеет характерные параметры, присущие производственному процессу:

$t = 0,0125 \quad час$ - характерные время выполнения

технологической операции;

$h = m_0 = {(2,38 \quad грн)} \big/ {(0,102 \quad часа)} = 23,33 \, грн/час$ характерная скорость изменения затрат на технологической операции; $x = 0,23 {}^{грн}\!/_{операция}$ шаг по переменной S (среднее увеличение стоимости базового продукта на технологической операции).

Значения характерных параметров дают нам значения безразмерных характерных чисел производственного процесса [2]:

$$Pm = \frac{x}{t \cdot h} \approx \frac{0,23}{0,0125 \cdot 23,33} \approx 0,8 \quad Kv = \frac{\left[\dfrac{1}{l_{оборуд}}\right]}{x} \approx \frac{\left[\dfrac{1}{16}\right]}{0,23} \approx 0,27 \quad \langle\langle \quad 1 \tag{3}$$

Данным безразмерным числам соответствуют производственные системы, для которых уравнение (2) допускает замкнутые балансовые уравнения [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial [c]_0}{\partial t} + \dfrac{\partial [c]_1}{\partial S} = 0; \\ \\ \dfrac{\partial [c]_1}{\partial t} + \dfrac{\partial [c]_2}{\partial S} = f(t,S) \cdot [c]_0 ; \end{cases} \tag{4}$$

$$[c]_2 = [c]_1 \cdot \left({[c]_{1y}}\Big/{[c]_0} \right); \qquad [c]_2 = [c]_0 \cdot \left(\left(\frac{[c]_1}{[c]_0} \right)^2 + s^2 \right)$$

для макропараметров производственного процесса $[c]_0$ и $[c]_1$ предприятия, s^2 - среднеквадратичное отклонение скорости изменения затрат на технологической операции, $f(t,S)$ - инженерно-производственная функция технологического процесса [2].

1.3.Условия устойчивого функционирования производственной системы

Система уравнений (4) дает уравнения возмущенного состояния производственной системы :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial[y]_0}{\partial t}+\dfrac{\partial[y]_1}{\partial S}=0, \\ \dfrac{\partial[y]_1}{\partial t}+\dfrac{\partial[y]_1}{\partial S}\cdot \mathrm{B}_{\left(\partial[y]_1/\partial S\right)}+[y]_1\cdot \mathrm{B}_{([y]_1)}+\dfrac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot \mathrm{B}_{\left(\partial[y]_0/\partial S\right)}+[y]_0\cdot \mathrm{B}_{([y]_0)}=0, \end{cases} \tag{5}$$

с условиями устойчивого функционирования технологического процесса производственной системы предприятия:

$$\begin{vmatrix} (J_0) & 0 \\ \left(\mathrm{B}_{([y]_0)}\right) & \left(\mathrm{B}_{([y]_1)}+J_0\right) \end{vmatrix} = 0, \qquad (j=0) \tag{6}$$

$$\begin{vmatrix} (J_j) & 0 & 0 & (-k_j) \\ 0 & (J_j) & (k_j) & 0 \\ \left(\mathrm{B}_{([y]_0)}\right) & \left(-\mathrm{B}_{\left(\partial[y]_0/\partial S\right)}\cdot k_j\right) & \left(J_j+\mathrm{B}_{([y]_1)}\right) & \left(-\mathrm{B}_{\left(\partial[y]_1/\partial S\right)}\cdot k_j\right) \\ \left(\mathrm{B}_{\left(\partial[y]_0/\partial S\right)}\cdot k_j\right) & \left(\mathrm{B}_{([y]_0)}\right) & \left(\mathrm{B}_{\left(\partial[y]_1/\partial S\right)}\cdot k_j\right) & \left(J_j+\mathrm{B}_{([y]_1)}\right) \end{vmatrix} = 0, \ (j>1). \tag{7}$$

В целях упрощения изложения методики исследования остановимся на рассмотрении условий устойчивости технологического процесса относительно нулевой гармоники (6) случайных возмущений $[y]_0$, $[y]_1$ макропараметров производственной системы :

$$\mathrm{B}_{([y]_1)}=\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[c]_{1y}}{[c]_0^*}\right)-\left.\frac{\partial\left(f(t,S)\cdot[c]_0\right)}{\partial[c]_1}\right|_{[c]_0=[c]_0^*,[c]_1=[c]_1^*} <0. \tag{8}$$

Инженерно-производственная функция предприятия не зависит от темпа выпуска продукции, что упрощает выражение (8) и дает нам условие устойчивости технологического процесса в виде

$$\mathrm{B}_{([y]_1)}=\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[c]_{1y}}{[c]_0^*}\right)<0 \tag{9}$$

Таблица 4. Критерии устойчивости макропараметров технологич. процесса

Вид операции	Наименование операции	Операционное время для выполнения операции, час	Итого затрат за операцию, грн	Межоперационный задел (шт/операция)	$\frac{[c]_{1y}}{[c]_0^*}$	$B_{([y]_1)} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[c]_{1y}}{[c]_0^*}\right)$
Гильотин. порезка	Рубка листа на пластину	0,002	1,0067	12690	0,04	0,04
Штамповка	Пробивка, отрезка	0,0022	0,0163	205,6	2,12	127,78
Штамповка	Гибка заготовки	0,0028	0,0203	257,0	1,36	-37,43
Штамповка	Пробивка отверстий	0,0026	0,0190	239,9	1,56	10,56
Штамповка	Надрезка усика	0,0028	0,021	265,1	1,32	-11,53
Сборка	Зачистка заусениц	0,008	0,0495	625,8	0,20	-22,53
Гильотин. порезка	Рубка листа на конус	0,0002	0,2287	2879	1,20	4,37
Штамповка	Вырубка - вытяжка	0,0021	0,0150	189,4	2,50	86,82
Штамповка	Вытяжка 2/1	0,0025	0,0178	224,9	1,78	-40,57
Штамповка	Вытяжка 2/2	0,0025	0,0178	224,9	1,78	0,00
Штамповка	Вытяжка 2/3	0,0025	0,0178	224,9	1,78	0,00
Токарная	Подрезка конуса	0,0125	0,1208	1522	0,05	-14,28
Штамповка	Осадка радиуса	0,0025	0,0178	224,9	1,78	96,74
Штамповка	Калибровка	0,0026	0,0190	239,9	1,56	-11,42
Сварка	Пластина на конус	0,0117	0,1572	1981	0,04	-9,66
Штамповка	Резка заготовки	0,001	0,1345	1695	0,59	4,07
Штамповка	Плющение	0,0021	0,0154	194,5	2,38	-127,15
Штамповка	Подгибка	0,0021	0,0154	194,5	2,38	0,00
Сборка	Сборка	0,0066	0,0508	641,2	0,23	-42,19
Покраска	Покраска	0,0117	0,1187	1496	0,06	-1,49
Упаковка	Упаковка	0,0166	0,2893	3647	0,02	-0,14

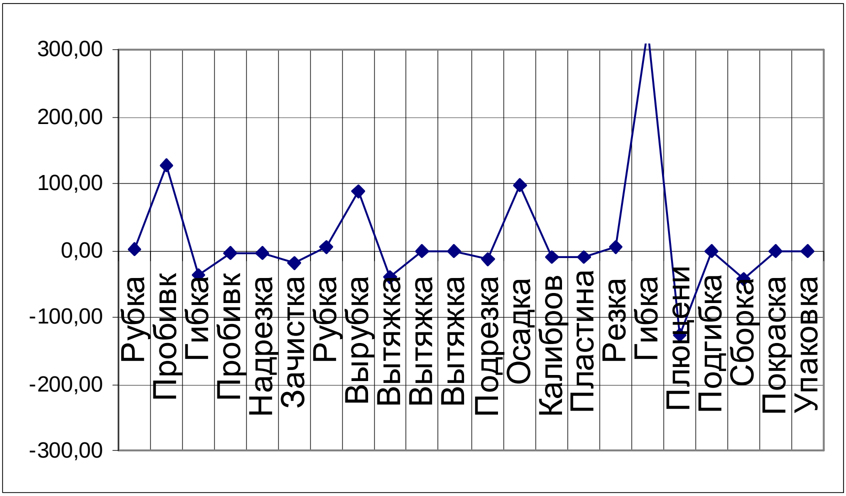

Рис.1. Условия устойчивости функционирования макропараметров производственного процесса предприятия.

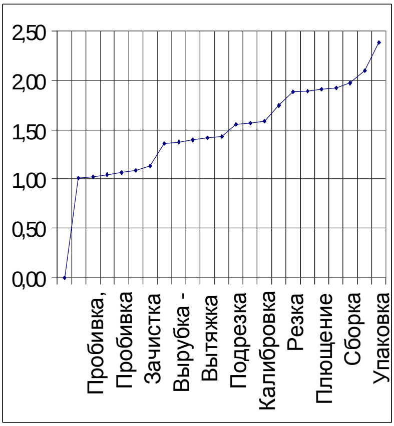

Рис.2. Затраты, перенесенные на базовый продукт в зависимости от техн. операции

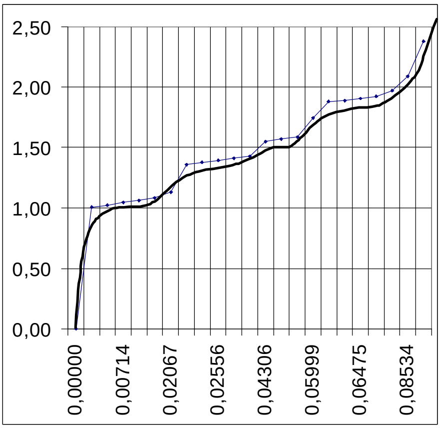

Рис.3. Затраты, перенесенные на базовый продукт в зависимости от его места в техн. процессе

Таблица 5. Сводная ведомость производственного процесса

Вид операции	Наименование Операции	Время выполнения операции, час	Затраты сырья для выполнения техн. операции, грн/шт	Расценка за операцию, грн/шт	Итого затраты за операцию, грн	Итого перенесенные затраты, грн	Итого время, час	Кол-во оборудования на операцию, шт/грн	Плотность расположения оборуд., шт/грн
Гильотин. порезка	Рубка листа	0,0020	0,9925	0,0142	1,0067	1,006	0,0020	1	0,993
Штамповка	Пробивка	0,0022	0,0000	0,0163	0,0161	1,023	0,0049	0,5	30,61
Штамповка	Гибка заготовки	0,0026	0,0000	0,0203	0,0209	1,043	0,0074	0,5	24,51
Штамповка	Пробивка отверстий	0,0027	0,0000	0,0190	0,0193	1,062	0,0091	0,5	26,27
Штамповка	Надрезка усика	0,0026	0,0006	0,0203	0,0214	1,083	0,0127	0,5	23,76
Сборка	Зачистка заусениц	0,0080	0,0000	0,0496	0,049	1,133	0,0207	1,5	30,21
Гильотин. порезка	Рубка листа на конус	0,0002	0,2264	0,0024	0,2287	1,361	0,0205	1	4,376
Штамповка	Вырубка - вытяжка	0,0021	0,0000	0,0153	0,0153	1,376	0,0236	0,5	33,27
Штамповка	Вытяжка 2/1	0,0020	0,0000	0,0174	0,0174	1,394	0,0256	0,5	28,02
Штамповка	Вытяжка 2/2	0,0020	0,0000	0,0174	0,0174	1,412	0,0286	0,5	28,02
Штамповка	Вытяжка 2/3	0,0020	0,0000	0,0174	0,0174	1,430	0,0306	0,5	28,02
Токарная	Подрезка конуса	0,0120	0,0000	0,1202	0,1202	1,551	0,0436	1	8,276
Штамповка	Осадка радиуса	0,0020	0,0000	0,0174	0,0174	1,568	0,0456	0,5	28,02
Штамповка	Калибровка	0,0027	0,0000	0,0193	0,0193	1,587	0,0482	0,5	26,27
Сварка	Пластина на конус	0,0116	0,0477	0,1092	0,1572	1,745	0,0599	3	19,08
Штамповка	Резка заготовки	0,0010	0,1273	0,0074	0,1340	1,879	0,0609	0,5	3,717
Штамповка	Гибка ручки	0,0010	0,0000	0,0112	0,0112	1,891	0,0629	0,5	43,78
Штамповка	Плющение	0,0026	0,0000	0,0153	0,0153	1,906	0,0645	0,5	32,39
Штамповка	Подгибка	0,0026	0,0000	0,0153	0,0153	1,921	0,0661	0,5	32,39
Сборка	Сборка	0,0067	0,0000	0,0507	0,0507	1,972	0,0738	1,5	29,48
Покраска	Покраска	0,0116	0,0214	0,0976	0,1184	2,091	0,0854	1	8,83
Упаковка	Упаковка	0,0167	0,1704	0,1186	0,2896	2,380	0,1021	2	6,911

По данным службы Главного диспетчера (Таблица 4), на текущую дату была построена зависимость (9) и представлена на рис.1. Зависимость (9) показывает, что макропараметры производственного процесса изготовления «Изделия 05» неустойчивы относительно возникновения случайных малых возмущений. Такой процесс длительное время не может существовать без управления, влечет за собою остановку производства. Причем, при управлении технологическим процессом особое внимание следует уделить операциям, для которых критерий устойчивости (9) $\text{B}_{([y]_1)} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[c]_{1y}}{[c]_0^*}\right)$ имеет максимальное значение.

1.4. Диспетчерские функции оптимального управления производственной системой

Дополним систему уравнений (5) управляющей функцией U_0, U_1:

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t} + \frac{\partial[y]_1}{\partial S} = U_0; \tag{10}$$

$$\frac{\partial[y]_1}{\partial t} + \frac{\partial[y]_1}{\partial S}\cdot \text{B}_{\left(\frac{\partial[y]_1}{\partial S}\right)} + [y]_1\cdot \text{B}_{([y]_1)} + \frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot \text{B}_{\left(\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\right)} + [y]_0\cdot \text{B}_{([y]_0)} = U_1,$$

Предприятие обеспечивает цикл производства, превращающий листовой прокат в готовую продукцию, не имеет возможности пополнить межоперационные заделы за счет сторонних организаций. Последнее накладывает ограничение на управляющие функции: предприятие должно управлять темпом производства и посредством него оказывает воздействие на межоперационные заделы. Такой вид управления будем характеризовать следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t} + \frac{\partial[y]_1}{\partial S} = q_{01}\cdot u_1; \tag{11}$$

$$\frac{\partial[y]_1}{\partial t} + \frac{\partial[y]_1}{\partial S}\cdot \text{B}_{\left(\frac{\partial[y]_1}{\partial S}\right)} + [y]_1\cdot \text{B}_{([y]_1)} + \frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot \text{B}_{\left(\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\right)} + [y]_0\cdot \text{B}_{([y]_0)} = q_{11}\cdot u_1,$$

для которой управляющая функция диспетчерской службы на отклонения производственной системы от планового (невозмущенного) состояния $u_0 \equiv 0$.

Управление производственной системой строится на показаниях текущих значений макропараметров производственной системы службы Главного диспетчера. На основе этого измерения управляющее устройство должно вырабатывать воздействие $u_1(t,[y]_0,\langle y\rangle)$ на объект. Эти воздействия должны обеспечить асимптотическую устойчивость заданного планового (невозмущенного) состояния: $[c]_0^*$, $[c]_1^*$. В качестве критерия качества управляющего процесса выберем интеграл:

$$I = \int_{t_0}^{\infty}\left[\frac{1}{S_d}\cdot\int_0^{S_d}\left[\left([y]_0\right)^2 + q_u\cdot\left(\{u_1\}_0\right)^2\right]\cdot dS\right]\cdot dt\,. \qquad (12)$$

Данным критерием качества мы требуем, чтобы управляющий процесс проходил с минимальным отклонением величины заделов от своего планового состояния при минимальном расходе ресурсов для управления отклонениями. Для отклонений относительно нулевой гармоники (6) случайных возмущений $[y]_0$, $[y]_1$ макропараметров производственной системы, устойчивость которой определяется выражением (9), интеграл качества (12) примет вид:

$$I = \int_{t_0}^{\infty}\left[\left([y]_0\right)^2 + q_u\cdot\left(\{u_1\}_0\right)^2\right]\cdot dt \qquad (13)$$

Оптимальную функцию Ляпунова $V^0(t,[y]_n)$, $n = 0{,}1$, будем искать в виде квадратичной формы для нулевой гармоники случайного возмущения:

$$V^0(t,[y]_n) = c_{00}\cdot\left(\{y_0\}_0\right)^2 \qquad (14)$$

с постоянными коэффициентами c_{00}, c_{11}.

Составим выражение $B[V^0,t]$ для рассматриваемой производственной системы с учетом уравнений (10):

$$B[V^0,t] = \frac{\partial V^0}{\partial t} + \sum_{n=0}^{1}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_0}\cdot\frac{\partial\{y_n\}_0}{dt} + \sum_{n=0}^{1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial V^0}{\partial\{y_n\}_j}\cdot\frac{d\{y_n\}_j}{dt} + \sum_{n=0}^{1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial V^0}{\partial[y_n]_j}\cdot\frac{d[y_n]_j}{dt} + w$$

$$\frac{d\{y_0\}_0}{dt} - q_{01}\cdot\{u_1\}_0 = 0\ ; \qquad \frac{d\{y_1\}_0}{dt} + \mathrm{B}_{([y]_1)}\cdot\{y_1\}_0 + \mathrm{B}_{([y]_0)}\cdot\{y_0\}_0 - q_{11}\cdot\{u_1\}_0 = 0. \quad (15)$$

При, $u_1 = u_1^0(t,[y]_0,[y]_1)$ величина $B[V^0,t]$ должна иметь минимум и обращаться при этом в ноль. Отсюда первое уравнение для нахождения оптимальной функции Ляпунова $V^0(t,[y]_n)$ и оптимального управляющего воздействия $u_1 = u_1^0(t,[y]_n,[y]_1)$:

$$B[V^0,t] = 2\cdot c_{00}\cdot\{y_0\}_0\cdot q_{01}\cdot\{u_1\}_0 + \left[\left(\{y_0\}_0\right)^2 + q_u\left(\{u_1\}_0\right)^2\right] = 0. \quad (16)$$

Дифференцируя $B[V^0,t]$ по $\{u_1\}_0$, и приравнивая результаты нулю, получим недостающие уравнения для определения оптимальной функции Ляпунова $V^0(t,[y]_n)$ и оптимального управляющего воздействия $\{u_1\}_0$:

$$\frac{B[V^0,t]}{\partial\{u_1\}_0} = 2\cdot c_{00}\cdot\{y_0\}_0\cdot q_{01} + 2\cdot q_u\cdot\{u_1\}_0 = 0. \quad (17)$$

Последнее равенство можно разрешить относительно управляющего воздействия $\{u_1\}_0$:

$$\{u_1\}_0 = -\frac{c_{00}\cdot q_{01}}{q_u}\cdot\{y_0\}_0 \quad (18)$$

Определим значения постоянного коэффициента c_{00}.

Подставим значение управляющего воздействия (18) $\{u_1\}_0$ в (16) и приравняем сумму из коэффициентов при разных произведениях малых возмущений к нулю:

$$B[V^0,t] = 2\cdot c_{00}\cdot\{y_0\}_0\cdot q_{01}\cdot\left(-\frac{c_{00}\cdot q_{01}}{q_u}\cdot\{y_0\}_0\right) + \left[\left(\{y_0\}_0\right)^2 + q_u\cdot\left(\frac{c_{00}\cdot q_{01}}{q_u}\cdot\{y_0\}_0\right)^2\right] = 0$$

Откуда
$$c_{00} = \frac{\sqrt{q_u}}{q_{01}} > 0 \quad (19)$$

Принимая во внимание (19), оптимальная функция Ляпунова (14) для оптимального управления производственного процесса при заданных условиях изготовления «Изделия 05» является определенно положительной. Последнее говорит, что при заданных исходных данных процесс управления, определенный управляющим воздействием $\{u_1\}_0 = -\frac{c_{00} \cdot q_{01}}{q_u} \cdot \{y_0\}_0$, является оптимальным, обеспечивает асимптотическую устойчивость планового (невозмущенного) состояния производственной системы предприятия «Т» в силу уравнений в малых возмущениях (15).

Подставим (19) в (18), получим вид управляющего воздействия

$$\{u_1\}_0 = -\frac{\{y_0\}_0}{\sqrt{q_u}} . \tag{20}$$

Управляющее воздействие, как и следовало ожидать, пропорционально по величине и по знаку противоположно возникшему отклонению межоперационного задела $[c]_0$. Коэффициент пропорциональности определяется критерием качества управляющего переходного процесса. Диспетчер предприятия, получив сведения о состоянии межоперационных заделов, сравнивает их с плановым состоянием заделов. Результат сравнения представляется в виде отклонений $[y]_0$ межоперационного задела $[c]_0$. По результату сравнения диспетчер предприятия дает распоряжение на соответствующий участок об устранении отклонения межоперационного задела посредством увеличения темпа выпуска. Интересен тот факт, что через управляющее воздействие на возникшее отклонение межоперационного задела $[c]_0$ диспетчер предприятия обеспечивает асимптотическую устойчивость производственного процесса относительно возмущений макропараметра межоперационного задела $[c]_0$ при критерии качества управляющего переходного процесса (13). Подставив в (15) вместо управляющего воздействия его значение (20), получим уравнения для малых возмущений макропараметров производственного процесса

$$\frac{d\{y_0\}_0}{dt} + \frac{q_{01}}{\sqrt{q_u}} \cdot \{y_0\}_0 = 0 ;$$

$$\frac{d\{y_1\}_0}{dt} + \mathrm{B}_{([y]_1)} \cdot \{y_1\}_0 + \mathrm{B}_{([y]_0)} \cdot \{y_0\}_0 + \frac{q_{11}}{\sqrt{q_u}} \cdot \{y_0\}_0 = 0 . \tag{21}$$

Вывод

Проведен анализ устойчивого функционирования макропараметров технологического процесса массового выпуска «Изделия 05 ». Определены «узкие» места в технологической цепочке производственного процесса на текущий момент времени, представленные в виде невыполнения условий устойчивого функционирования макропараметров технологического процесса (9). При заданном критерии качества предложена оптимальная функция управления отклонениями макропараметров производственного процесса (20), обеспечивающая асимптотическую устойчивость планового (невозмущенного) состояния производственной системы предприятия в силу уравнений в малых возмущениях (15).

1. Прыткин Б.В., Технико-экономический анализ производства. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000г., 399стр.
2. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции – Доповіді Національноїакадемії наук України, 2005. –N7– С.66-71
3. Демуцкий В.П., Ходусов В.Д., Пигнастый О.М , Управление рисками в экономико-производственных системах с массовым выпуском продукции. Международная научно-техническая конференция «Интегрированные компьютерные технологии в машиностроении ИКТМ-2004», 2004 г., стр.424
4. Форрестер Дж., Основы кибернетики предприятия.- М.:Изд. “Прогресс” 1961г. 341с.
5. Демуцкий В.П., Пигнастый О.М., Синергетическая экономика производственного предприятия с массовых выпуском продукции. Международная конференция НАНУ «Статис-тическая физика: Общие проблемы и новые применения», Львов, 2005г., стр.59
6. Юхновский И.Р., Термодинамические аналогии в экономике. Международная конференция НАНУ «Статистическая физика: Общие проблемы и новые применения», Львов, 2005г., стр.51
7. Гончар Н.С., Информационная модель в экономике. Между-народная конференция НАНУ «Статистическая физика: Общие проблемы и новые применения», Львов, 2005г., стр.33
8. Демуцкий В.П., Пигнастый О.М. Вопросы устойчивости макро-скопических параметров технологических процессов массового производства – Доповіді Національної академії наук України, 2006. –N3– С.63-67
9. Пигнастый О.М. Задача оптимального оперативного управления макропараметрами производственной системы с массовым выпуском продукции – Доповіді Національної академії наук України, 2006. –N5– С.79-85.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ УРОВНЕЙ ДЖ.ФОРРЕСТЕРА. ПРИМЕР ОПИСАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ В ОДНОМОМЕНТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ.

Используя одномоментное приближение системы уравнений для макропараметров производственной системы, выведено уравнение уровней Дж.Форрестера. Уравнение уровней Дж.Форрестера представлено конечно-разностным балансовым уравнением. При записи уравнения уровней использованы обозначения, введенные Дж.Форрестером.

Функционирование производственных систем в нулевом приближении по малому параметру $Kv << 1$, $Pm \approx 1$ может быть представлено замкнутой системой уравнений балансов, которая для одномоментного описания принимает вид

$$\frac{\partial [c]_0}{\partial t} + \frac{\partial \left(a_{yV}(S) \cdot [c]_{1y} \right)}{\partial S} = 0, \quad [c]_1 = a_{yV}(S) \cdot [c]_{1y}\ , \tag{3.6.17}$$

$$J_{Gen}(t,S,m) = l_{оборуд} \cdot \left\{ y\,[\tilde{m} \to m] \cdot [c]_{1y} - m \cdot c \right\} = 0,$$

$$\int_0^\infty y\,[m \to \tilde{m}] \cdot \tilde{m} \cdot d\tilde{m} = a_{yV}(S) \cdot \frac{[c]_{1y}}{[c]_0}, \quad \int_0^\infty y\,[m \to \tilde{m}] \cdot d\tilde{m} = 1\,. \tag{3.6.18}$$

Заменим балансовое уравнение (3.6.17) конечно-разностным с шагом по времени Δt_k и шагом по координате в технологической цепочке ΔS_L:

$$\frac{\Delta [c]_0}{\Delta t_k} + \frac{\Delta [c]_1}{\Delta S_k} = 0(\Delta t_k, \Delta S_L)\ ,\ t_k = \sum_{j=0}^{k-1} \Delta t_j\ , \quad S_L = \sum_{j=0}^{L-1} \Delta S_j \tag{1}$$

где $0(\Delta t_k, \Delta S_L)$ - погрешность линейной аппроксимации балансового уравнения (3.6.17), определяется из разложения:

$$[c]_0 (t_k + \Delta t_k, S_L) = [c]_0 (t_k, S_L) + \left. \frac{\partial [c]_0}{\partial t} \right|_{\substack{t=t_k \\ S=S_L}} \cdot \Delta t_k + \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 [c]_0}{\partial t^2} \right|_{\substack{t=t_k \\ S=S_L}} \cdot \left(\Delta t_k \right)^2 + 0(\Delta t_k{}^3)$$

$$[c]_1 (t_k, S_L + \Delta S_L) \equiv [c]_1 (t_k, S_L) + \left. \frac{\partial [c]_1}{\partial S} \right|_{\substack{t=t_k \\ S=S_L}} \cdot \Delta S_L + \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 [c]_1}{\partial S^2} \right|_{\substack{t=t_k \\ S=S_k}} \cdot \left(\Delta S_L \right)^2 + 0(\Delta S_L{}^3), \tag{2}$$

$$\frac{\Delta t_k}{t_k} << 1\,, \quad \frac{[c]_0 (t_k, S_L)}{\Delta t_k} >> \left. \frac{\partial [c]_0}{\partial t} \right|_{\substack{t=t_k \\ S=S_L}}\ ,$$

$$\frac{\Delta S_L}{S_L} << 1, \quad \frac{\left[c\right]_1 (t_k, S_L)}{\Delta S_L} >> \left.\frac{\partial \left[c\right]_1}{\partial S}\right|_{\substack{t=t_k \\ S=S_L}} . \qquad (3)$$

Частные производные $\frac{\partial \left[c\right]_0}{\partial t}$, $\frac{\partial \left[c\right]_1}{\partial S}$ определены из разложения в ряд Тейлора (2)

$$\left.\frac{\partial \left[c\right]_0}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_k \\ S=S_L}} = \frac{\left[c\right]_0 (t_k + \Delta t_k, S_L) - \left[c\right]_0 (t_k, S_L)}{\Delta t_k} + 0(\Delta t_k) = \frac{\Delta \left[c\right]_0}{\Delta t_k} + 0(\Delta t_k) ,$$

$$\left.\frac{\partial \left[c\right]_1}{\partial S}\right|_{\substack{t=t_k \\ S=S_L}} = \frac{\left[c\right]_1 (t_k, S_L + \Delta S_L) - \left[c\right]_1 (t_k, S_L)}{\Delta S_L} + 0(\Delta S_l) = \frac{\Delta \left[c\right]_1}{\Delta S_L} + 0(\Delta S_L) . \qquad (4)$$

Шаг интегрирования $\Delta t_k, \Delta S_L$ взят переменным по координатам (t, S). Если информация предоставляется диспетчеру ежедневно или через равные промежутки времени, то можно положить $\Delta t_k = \Delta t$. Как правило, это основная схема работы диспетчерской службы. Иная ситуация обстоит с промежутком ΔS_L. Промежуток ΔS_L определяет возрастание стоимости базового продукта при его движении от операции к операции и является переменной величиной $\Delta S_L = f_s(S_L)$.

Умножим конечно-разностное уравнение заделов базовых продуктов вдоль технологической цепочки (1) на $\Delta t \cdot \Delta S_L$, получим

$$\left[c\right]_0 (t_k + \Delta t, S_L) \cdot \Delta S_L =$$

$$= \left[c\right]_0 (t_k, S_L) \cdot \Delta S_L + \left(\left[c\right]_1 (t_k, S_L + \Delta S_L) - \left[c\right]_1 (t_k, S_L) \right) \cdot \Delta t . \qquad (5)$$

Слагаемое $\left[c\right]_0 (t_k + \Delta t, S_L) \cdot \Delta S_L$ есть не что иное, как межоперационный задел в момент времени $(t_k + \Delta t)$ на технологической операции в интервале координат $\left(S_L; S_L + \Delta S_L\right)$:

$$Z_{задел\_S_L} = \int_{S_L}^{S_L + \Delta S_L} d\mathrm{S} \cdot \left[c\right]_0 . \qquad (6)$$

В ходе данной технологической операции на базовый продукт с нормативной суммой затрат S_L в ходе технологической операции происходит перенос затрат ΔS_L. Выражение для межоперационного задела может быть представлено с точностью до слагаемых $0(\Delta S_L{}^2)$

$$Z_{задел\_S_L}\left(t_k, S_L\right) = \int\limits_{S_L}^{S_L+\Delta S_L} dS \cdot \left[c\right]_0 \left(t_k, S\right) = \left[c\right]_0 \left(t_k, S_L\right) \cdot \Delta S_L + 0(\Delta S_L{}^2) \,. \qquad (7)$$

Конечно-разностное уравнение заделов базовых продуктов вдоль технологической цепочки (5) с учетом обозначений (7) можно записать

$$Z_{задел\_S_L}\left(t_k + \Delta t\,, S_L\right) =$$

$$= Z_{задел\_S_L}\left(t_k, S_L\right) + \left(\left[c\right]_1 (t_k, S_L + \Delta S_L) - \left[c\right]_1 (t_k, S_L)\right) \cdot \Delta t \,. \qquad (8)$$

Для удобства описания производственного процесса введем обозначения, используемые Дж.Форрестером в своей известной работе «Основы кибернетики предприятия» [1, стр.65]:

$IAR.K_L = Z_{задел\_S_L}\left(t_k + \Delta t\,, S_L\right)$: фактический межоперационный задел в момент времени $\left(t_k + \Delta t\right)$ для уровня L;

$IAR.J_L = Z_{задел\_S_L}\left(t_k, S_L\right)$: фактический межоперационный задел в момент времени $\left(t_k\right)$ для уровня L;

$SRR.JK_L = \left[c\right]_1 (t_k, S_L + \Delta S_L)$: темп поступления базовых продуктов с предыдущего (L-1)-уровня;

$SSR.JK_L = \left[c\right]_1 (t_k, S_L)$: темп убытия базовых продуктов с уровня L;

$DT = \Delta t$: интервал времени между двумя событиями производственного процесса.

С использованием обозначения [1, стр.65] конечно-разностное уравнение заделов базовых продуктов вдоль технологической цепочки (5) принимает вид

$$IAR.K_L = IAR.J_L + DT \cdot (SRR.JK_L - SSR.JK_L) \,. \qquad (9)$$

Это пример типичного уравнения уровня [1, стр.65,67], в котором за уровень с номером L взята обработка базового продукта на L-ой технологической операции. «Уравнение описывает прямую количественную зависимость, согласно которой» задел базовых продуктов « IAR в момент времени **K** равен предыдущему значению $IAR.J$ плюс произведение разности между темпами входящего потока $SRR.JK$ и исходящего потока $SSR.JK$ на продолжительность интервала DT, в течение которого существуют эти темпы [1, стр.65]». «Уравнения уровней не зависят одно от другого; решение каждого из них зависит только от информации, касающейся предшествующего момента времени. Поэтому порядок решения не имеет значения. При решении какого-либо уравнения уровня в момент времени **K** не используется никакой информации из других уравнений уровней, решаемых для того же момента времени. Уровень в момент **K** зависит от его предыдущего значения в момент **J** и от темпов» потока базовых продуктов вдоль технологической цепочки в интервале **JK**.

Вывод

Осуществлен предельный переход от уравнений балансов для макропараметров производственного процесса к уравнениям уровней Дж.Форрестера. Показано, что уравнения уровней Дж.Форрестера представляет собою пример описания производственной системы в одномоментном приближении. Одномоментное описание является наиболее простым способом исследования поведения макропараметров производственных систем [2]. Предельный переход в одномоментном описании производственного процесса от уравнения балансов для макропараметров производственного процесса к уравнениям уровней Дж.Форрестера и использовании уравнений уровней для описания производственного процесса значительно усложняет исследование производственной системы на устойчивость относительно отклонений макропараметров системы от своего невозмущенного состояния и делает затруднительным поиск функций оптимального управления макропараметрами производственного процесса.

1. Форрестер Дж., Основы кибернетики предприятия.- М.:Изд. “Прогресс” 1961г. 341с.
2. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции – Доповіді Національної академії наук України, 2005. –N7– С.66-71
3. Демуцкий В.П., Пигнастый О.М. Вопросы устойчивости макроскопических параметров технологических процессов массового производства – Доповіді Національної академії наук України, 2006. –N3– С.63-67
4. Пигнастый О.М. Задача оптимального оперативного управления макропараметрами производственной системы с массовым выпуском продукции – Доповіді Національної академії наук України, 2006. –N5– С.79-85

3. МЕТОДИКА УЧЕТА ТОВАРНО-МАТЕРИАЛЬНЫХ ЦЕННОСТЕЙ И НАЧИСЛЕНИЯ ФОНДА ОПЛАТЫ ТРУДА.

Используя одномоментное приближение системы уравнений для макропараметров производственной системы, разработана методика учета товарно-материальных ценностей и начисления фонда оплаты труда для производственного подразделения предприятия. Уравнение уровней Дж.Форрестера представлено конечно-разностным балансовым уравнением.

Одним из основных вопросов в управлении предприятием с массовым выпуском продукции является задача учета товарно-материальных ценностей и задача соответствия начисления фонда заработной платы по основным операциям фактически выполненному объему работы. Как, правило, при массовом выпуске продукции в цехе находится большое количество изделий, находящихся в незавершенном производстве. Общее количество «незавершенных изделий» может измеряться в десятках тысяч единиц. Процесс пересчета изделий, находящихся в незавершенном производстве, например для прессово-штамповочного цеха, представляется невыполнимой задачей. В связи с особенностями технологического процесса, обусловленными значительным временем и затратами на переналадку и подготовку оснастки, перестройку оборудования, а также высокой производительностью операций, создаются большие межоперационные заделы. Информация о количестве межоперационных заделов поступает на основании данных счетных устройств, установленных на оборудовании, или на основании нарядов основных рабочих, в которых отражено выполнение ими сменных норм и т.д. В том и другом случае данные имеют отклонения, вызванные наличием брака на операции, необходимостью повторных действий (ходов) оборудования для выполнения одной и той же операции, ошибок в предоставлении основными рабочими данных о количестве выпущенной продукции за смену, несоответствием между утвержденными и фактическими нормами расходов. Количество причин для отклонений макропараметров производственной системы от заданного технологией производства значения может быть достаточно большим. Если вовремя эти причины и отклонения не выявлять, то постепенно происходит накапливание ошибок, приводящих к несоответствию между фактическим состоянием и учетными данными сырья в цехе, дополнительным выплатам заработной платы за фактически не выполненные операции (объем работ), скоплению бракованной продукции среди межоперационных заделов. Отклонения могут доходить в год до 20-50% от месячного количества изделий, находящихся в заделах незавершенного производства. Последнее приводит к повышению себестоимости продукции и недополучению прибыли для предприятия, риску не выполнить заказ из-за отсутствия сырья в межоперационном заделе (которое должно находится в наличии исходя из учетных данных, но фактически отсутствует), злоупотреблениям на рабочем месте. В связи с этим актуальными являются постановка систем учета и усовершенствования подходов учетной политики предприятия, опорными точками которой являются:

- усовершенствование учета сырья в незавершенном производстве;
- усовершенствование методики начисления фонда заработной платы и ликвидации источника ошибок при заполнении нарядов;
- выявления брака между операциями и ликвидацию причин, его порождающих;
- усовершенствования методики определения норм расхода сырья и материалов, требуемых для выполнения конкретной технологической операции.

Для построения методики учета товарно-материальных ценностей и соответствия начисления фонда заработной платы воспользуемся замкнутой системой уравнений для макропараметров производственного процесса в одномоментном описании:

$$\frac{\partial[c]_0}{\partial t}+\frac{\partial\left(a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}\right)}{\partial S}=0, \quad [c]_1=a_{yV}(S)\cdot[c]_{1y}\ , \tag{3.6.17}$$

$$J_{Gen}(t,S,m)=l_{оборуд}\cdot\left\{y\left[\tilde{m}\to m\right]\cdot[c]_{1y}-m\cdot c\right\}=0,$$

$$\int_0^\infty y\left[m\to\tilde{m}\right]\cdot\tilde{m}\cdot d\tilde{m}=a_{yV}(S)\cdot\frac{[c]_{1y}}{[c]_0}, \quad \int_0^\infty y\left[m\to\tilde{m}\right]\cdot d\tilde{m}=1\,. \tag{3.6.18}$$

для определения макроскопических величин $[c]_0$ и $[c]_1$, представляющих собой плотность распределения базовых продуктов и темп базовых продуктов вдоль технологической цепочки. Ежедневно диспетчер получает информацию о выполнении сменных заданий в установленной на предприятии форме. Одной из принятых форм является сводная за отчетный период матрица «рабочий*операция» (Таблица №1):

Таблица №1. Сводная матрица «рабочий*операция»

	Операция №1	Операция №2	Операция №3		Операция №L		Операция №M	Итого по рабочему
ФИО_1 основного рабочего	x_{11_k}	x_{12_k}	x_{13k}		x_{1L_k}		x_{1M_k}	$y_{1_k} = \sum_{L=1}^{M} x_{1L_k}$
ФИО_2 основного рабочего	x_{21_k}	x_{22_k}	x_{23_k}		x_{2L_k}		x_{2M_k}	$y_{2_k} = \sum_{L=1}^{M} x_{2L_k}$
ФИО_I основного рабочего	x_{i1_k}	x_{i2_k}	x_{i3k}		x_{iL_k}		x_{iM_k}	$y_{i_k} = \sum_{L=1}^{M} x_{iL_k}$
ФИО_N основного рабочего	x_{N1k}	x_{N2k}	x_{N3_k}		x_{NL_k}		x_{NM_k}	$y_{M_k} = \sum_{L=1}^{M} x_{NL_k}$
Итого по операции	$z_{1_k} = \sum_{i=1}^{N} x_{i1_k}$	$z_{2_k} = \sum_{i=1}^{N} x_{i2}$	$z_{3_k} = \sum_{i=1}^{N} x_{i3_k}$		$z_{L_k} = \sum_{i=1}^{N} x_{iL_k}$		$z_{M_k} = \sum_{i=1}^{N} x_{iM_k}$	$\sum_{L=1}^{M} z_{L_k} = \sum_{i=1}^{N} y_{i_k} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{L=1}^{M} x_{ij_k}$

Таблица №1 служит основанием для начисления месячного фонда заработной платы по рабочим, занятым на основных операциях. Для столбцов и строк справедливо равенство:

$$\sum_{L=1}^{M} z_{L_k} = \sum_{i=1}^{N} y_{i_k} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{L=1}^{M} x_{ij_k} , \qquad (1)$$

Равенство представляет собой общую сумму операций, выполненных учетной единицей (участком) за рассматриваемый отрезок времени. Символ «k» говорит о том, что матрица составлена для «k»-го момента времени. В производственной практике довольно часто принимают за единичный временной отрезок Δt «рабочий день», предоставляя ежедневно данные диспетчеру.

Перерабатывая в диспетчерском пункте информацию, представленную в сводной матрице «рабочий*операция», а именно пооперационный темп движения базовых продуктов (межоперационных заготовок) z_{L_k} от операции к операции, мы имеем возможность определить значение макроскопической величины $\left[c\right]_1$.

Конечно-разностное уравнение заделов базовых продуктов вдоль технологической цепочки (3.6.17) с учетом обозначений (2.7) можно записать

$$Z_{задел\_S_L}\left(t_k+\Delta t, S_L\right)=$$

$$=Z_{задел\_S_L}\left(t_k, S_L\right)+\left(\left[c\right]_1(t_k, S_L+\Delta S_L)-\left[c\right]_1(t_k, S_L)\right)\cdot\Delta t\ , \qquad (2.8)$$

где для удобства описания производственного процесса введем обозначения, используемые Дж.Форрестером в своей известной работе «Основы кибернетики предприятия» [1, стр.65]:

$IAR.K_L=Z_{задел\_S_L}\left(t_k+\Delta t, S_L\right)$: фактический межоперационный задел в момент времени $\left(t_k+\Delta t\right)$ для уровня L;

$IAR.J_L=Z_{задел\_S_L}\left(t_k, S_L\right)$: фактический межоперационный задел в момент времени $\left(t_k\right)$ для уровня L;

$SRR.JK_L=\left[c\right]_1(t_k, S_L+\Delta S_L)$: темп поступления базовых продуктов с предыдущего (L-1)-уровня;

$SSR.JK_L=\left[c\right]_1(t_k, S_L)$: темп убытия базовых продуктов с уровня L;

$DT=\Delta t$: интервал времени между двумя событиями производственного процесса.

С использованием обозначения [1, стр.65] конечно-разностное уравнение заделов базовых продуктов вдоль технологической цепочки (5) принимает вид

$$IAR.K_L = IAR.J_L + DT\cdot\left(SRR.JK_L - SSR.JK_L\right). \qquad (2.9)$$

Уравнение L-уровня (2.9) является исходным для составления программ при решении задач учетной политики. Рассмотрим, какие данные можно получить при его решении. Исходными данными для диспетчера являются:

§ состояние уровней в начальный момент времени: $IAR.J_L = IAR.0_L$. Состояние уровней в начальный момент времени определяется инвентаризацией или другим удобным способом;

§ информация о выполнении сменных заданий в установленной на предприятии форме матрицы «рабочий*операция», ежедневно подаваемая на обработку диспетчеру;

§ установленные на предприятии расценки за операцию и пооперационные нормы расхода сырья и материалов.

В текущем порядке по расходным накладным в цех поступает сырье и материалы и по расходным накладным продукция сдается с цеха на склад готовой продукции. Зная состояние уровней в начальный момент времени, вводя информацию о выполнении сменных заданий в форме «рабочий*операция» и информацию о поступлении сырья и материалов в цех и сдачи готовой продукции с цеха на основании приходно-расходных накладных, на основании уравнения уровня

(2.9) получаем однозначную информацию о состоянии уровней.

Последнее дает нам состояние сырья $CiM\_факт^m$ в незавершенном производстве:

$$CiM\_факт^m = \sum_{L=1}^{M} IAR.J_L \cdot H\_CiM\_факт_L^m \qquad (2)$$

где символ «m» означает сырье и материалы «m-го» типа, $H\_CiM\_факт_L^m$ - количество сырья, которое на основании норм расхода содержится в базовом продукте, находящемся на L-уровне (L-операции). Если обозначить посредством символа $CiM\_бух^m$ - количество находящегося в цеху сырья и материалов «m-го» типа, полученного посредством данных бухгалтерского учета, то величина

$$\Delta CiM\_бух^m = CiM\_бух^m - CiM\_факт^m \qquad (3)$$

есть отклонение фактического состояния сырья и материалов «m-го» типа между данными учетного сектора и фактическим его состоянием. Величина отклонения $\Delta CiM\_бух^m$ есть основание для предписания на проведение инвентаризации по состоянию сырья и материалов «m-го» типа, т.е. отклонение $\Delta CiM\_бух^m$ есть параметр для формирования управляющего воздействия от диспетчерской службы:

$u_{CiM} = u_{CiM}\left[\Delta CiM\_бух^{m}\right]$ при построение задач управления производственным процессом в срезе учета сырья и материалов. Здесь и ниже мы не будем останавливаться на выводе функции для оптимального управляющего воздействия, лишь заметим, что последнее может быть построено, например, из условия оптимального использования ресурсов, потребляемых предприятием.

В ходе внесения данных диспетчеров возможны ситуации, когда уравнение уровня дает отрицательное значение

$$IAR.K_L = IAR.J_L + DT \cdot (SRR.JK_L - SSR.JK_L) < 0\,; \tag{4}$$

$$IAR.K_L < 0\,; \tag{5}$$

$$IAR.K_L = \Delta IAR.K_L < 0\,. \tag{6}$$

Уровень с отрицательным значением существовать не может, следовательно, в данных о выполнении сменных заданий в форме сводной матрицы «рабочий*операция» имеются ошибки, выраженные, например, в предоставлении рабочим в табельную завышенной информации о выполнении сменного задания. Если ввести для данного случая обозначение

$$IAR.K_L = \Delta IAR.K_L < 0\,,$$

то величина

$$\Delta IAR.K_L < 0 \tag{7}$$

есть основание для предписания мастеру или начальнику цеха на проведение инвентаризации по перепроверке учетных данных о выполненных основных операциях, предоставленных с цеха, т.е. отклонение (7) есть параметр для формирования управляющего воздействия от диспетчерской службы:

$$u_{Ошиб} = u_{\text{Ошиб}}\left[\Delta IAR.K_L\right] \tag{8}$$

при построении задач управления производственным процессом в срезе учета сырья и материалов и начисления фонда заработной платы основному рабочему.

Возможна и другая ситуация, когда диспетчеру предоставляется информация о том, что на L-ом уровне (L-ой операции) отсутствует межоперационный задел, в то время, как исходя из диспетчерской информации на основании уравнения уровня задел больше нуля. Имеем отклонение

$$IAR.K_L = IAR.J_L + DT \cdot (SRR.JK_L - SSR.JK_L) > 0\,; \qquad (9)$$

$$IAR.K_L > 0\,; \qquad (10)$$

$$IAR.K_L = \Delta IAR.K_L > 0\,. \qquad (11)$$

Последнюю ситуацию можно расценивать двояко: как ошибку в предоставлении данных о выполнении сменных заданий в форме сводной матрицы «рабочий*операция», когда рабочим дана заниженная информация, что влечет за собой формирование управляющего воздействия от диспетчерской службы

$$u_{Ошиб} = u_{\text{Ошиб}}\left[\Delta IAR.K_L > 0\right] \qquad (12)$$

при построении задач управления производственным процессом в срезе учета сырья и материалов и начисления фонда заработной платы основному рабочему. В данном случае рабочий «ошибся» в пользу предприятия, однако его ошибка приводит к неправильному представлению о состоянии межоперационных заделов вдоль технологической цепочки движения базового продукта. Возможен и другой исход, когда рабочим предоставлена правильная информация, а указанное отклонение уровня (10) является результатом выпуска бракованной продукции, о существовании которой известно только рабочему, и которая, например, отправлена на участок сдачи металлолома. Данная ситуация довольно типична для ряда производств. Исходом описанного варианта есть формирование управляющего воздействия от диспетчерской службы

$$u_{\text{Качество}} = u_{\text{Качество}}\left[\Delta IAR.K_L > 0\right] \qquad (13)$$

в технический отдел для выяснения причин возникновения брака на L-ом уровне (L-ой технологической операции). Такой вид управления используется при построении схем управления качеством, схем управления производственным процессом в срезе учета сырья и материалов и начисления фонда заработной платы основному рабочему. Довольно интересен и другой случай, когда имеем отклонение на первом уровне: $IAR.K_1 > 0$, что свидетельствует о несоответствии норм расхода сырья и материалов, когда операция в количестве $IAR.K_1 > 0$ выполнена при условии отсутствии сырья. Тем самым имеем дело со случаем, когда обработано $IAR.K_1 > 0$ количество заготовок на данной операции, на изготовление которого пошло сырье, «сэкономленное» за счет назначения завышенных норм расхода. Управляющее воздействие в данном случае имеет вид

$$u_{\text{Нормы расхода}} = u_{\text{Нормы расхода}}\left[\Delta IAR.K_1 > 0\right] \qquad (14)$$

и направляется диспетчером в техотдел для урегулирования норм расхода.

Умножим значения темпов на каждом уровне на расценку за выполнение операции $Расц_L$ и просуммируем за отчетный период $\left[t_{Jk} - t_1\right]$:

$$ФОТ_{Jk} = \sum_{j=1}^{Jk}\sum_{L=1}^{M} SSR.JK_L \cdot Расц_L \qquad (15)$$

получим фонд оплаты цеха за отчетный период. При этом должно выполняться равенство

$$ФОТ_{Jk} = \sum_{j=1}^{Jk}\sum_{L=1}^{M} SSR.JK_L \cdot Расц_L =$$

$$= \sum_{L=1}^{M} z_{L_k} \cdot Расц_L = \sum_{i=1}^{N}\sum_{L=1}^{M} x_{iL_k} \cdot Расц_L \qquad (16)$$

где

$\sum_{L=1}^{M} z_{L_k} \cdot Расц_L = \sum_{i=1}^{N}\sum_{L=1}^{M} x_{iL_k} \cdot Расц_L$ - фонд оплаты труда на основании расчетов, сделанными рабочими ко дню сверке данных по фонду оплаты труда за отчетный период. Наличие отклонения $\Delta ФОТ_{Jk}$ в описанном выше равенстве является основанием для формирования управляющего воздействия от диспетчерской службы:

$$u_{\Phi OT_{Jk}} = u_{\Phi OT_{Jk}} \left[\Delta \Phi OT_{Jk} \right] \qquad (17)$$

в задаче управления начислением фонда заработной платы.

Рассмотренные случаи для удобства представим в виде таблицы:

Таблица 4.2. Формирование управляющих воздействий от диспет-черской службы как результат возникновения отклоне-ний при решении уравнений уровней и фактическими данными

Направление управляющих воздействий	$\Delta CiM\_бух^{m}$	$\Delta IAR.K_L >$	$IAR.K_L <$	$\Delta \Phi OT_{Jk}$
усовершенствование учета сырья в незавершенном производстве	u_{CiM}	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$
усовершенствование методики начисления фонда заработной платы и ликвидации источника ошибок при заполнении нарядов	$\otimes$	$u_{Ошиб}$	$u_{Ошиб}$	$u_{\Phi OT_{Jk}}$
выявления брака между операциями и ликвидацию причин, его порождающих	$\otimes$	$u_{\text{Качество}}$	$\otimes$	$\otimes$
усовершенствования методики определения норм расхода сырья для изготовления заготовки в ходе выполнения конкретной операции	$\otimes$	$IAR.K_1 >$ $u_{\text{Нормы расхода}}$	$\otimes$	$\otimes$

Табличное представление дает формирование ясной картины механизма использования уравнения заделов и уравнения темпа базовых продуктов вдоль технологической цепочки для вывода уравнения уровня для построения систем формирования и усовершенствования учетной политики предприятия.

Вывод

Рассмотрена методика использования системы уравнения балансов для улучшения учетной политики действующего предприятия с серийным выпуском продукции. Показан алгоритм проверки соответствия начисления фонда оплаты труда реально выполненному объему работ. Упрощен процесс инвентаризации остатков сырья и материалов, находящихся в незавершенном производстве. Показаны перспективы использования методики для работы в области управления системой качества предприятия. Осуществлен предельный переход от уравнения балансов для функционирования макропараметров производственного процесса к уравнениям уровня Дж.Форрестера.

1. Форрестер Дж., Основы кибернетики предприятия.- М.:Изд. “Прогресс” 1961г. 341с.

Заключение

В последнее время теория управления предприятием претерпевает бурный рост. Разработка моделей организации, планирования и управления производственным процессом предприятия опережает уровень их практического использования. Само по себе опережение научных исследований закономерно, однако оно полезно лишь в том случае, когда внедрение в практику результатов научных исследований идет достаточно быстрыми темпами. В этих условиях всегда существует «спрос» на продукцию науки, что стимулирует ее дальнейшее развитие.

При построении моделей организации, планирования и управления производственным процессом предприятия довольно часто используется подход, когда случайные параметры технологического процесса рассматриваются детерминированными или описываются заданной функцией. Такая постановка задачи создает впечатление, что удается найти оптимальное единственное решение. Однако полученное решение задачи определяется исходными данными и заданными детерминированными интегральными параметрами системы, точность выбора которых желает лучшего. Обычно при построении интегральных характеристик в моделях организации, планирования и управления производственным процессом предприятия используется экспертный метод или накопившаяся статистика, на основании которой идет прогноз.

Принципиально новый подход к организации, планирования и управления производственным процессом предприятия рассмотрен в настоящей монографии. Производственная система предприятия представлена в виде большого множества элементов, каждый из которых описывается микропараметрами в заданном технологическом пространстве. Поведение элемента производственной системы в технологическом пространстве определяется установленным на предприятии технологическим процессом, наличием оборудования, трудовых ресурсов и т.д.. Состояние системы задается состоянием элементов производственной системы и может быть описано через функцию распределения случайной величины, удовлетворяющую кинетическому уравнению производственной системы. Наблюдаемые макропараметры производственной системы являются моментами функции распределения случайной величины, а связь между ними определяется балансовыми уравнениями, полученными через интегрирование кинетического уравнения производственной системы. Балансовые уравнения, связывающие между собой через микроскопический уровень макропараметры производственной системы, позволяют исследовать поведение предприятия в динамике. Такая возможность является важным инструментом в вопросах организации, планирования и управления производственным процессом. Большая свобода маневра, многовариантность выбора элемента системы и координат пространства, в котором рассматривается его движение, открывает широкие возможности для использования предложенной теории в оперативном управлении и стратегическом планировании производственным процессом предприятия.

Предложенная в монографии статистическая теория описания экономического объекта рассмотрена на основе моделирования производственных процессов предприятия. Используя микроскопический подход, записаны макроскопические балансовые уравнения производственной системы исходя из заданной технологии производства базового продукта с учетом наличия производственных ресурсов. Используя допущения, принятые при описании производственно-сбытовой системы Дж.Форрестером, из системы уравнения балансов для макропараметров производственной системы выведено уравнение уровней Форрестера. Произведено сравнение полученных теоретических результатов с экспериментальными данными функционирующих предприятий.

Однако, применение предложенной теории описания производственных процессов может быть более обширным, если в качестве большой системы выбрать отрасль народного хозяйства или, например, экономику отдельно взятой страны. В этом несомненный интерес к более углубленному развитию стохастической теории описания экономического объекта. Каковы же главные направления научных работ по развитию самого математического метода применительно к экономическим объектам? Это методика выбора технологического пространства и движущегося в нем базового продукта производственной системы. Актуальными являются исследования характера неопределенностей в параметрах модели, обусловленных взаимодействием базового продукта с технологическим оборудованием и другими элементами производственной системы. Исследование производственной системы на устойчивость, получение оптимальной функции оперативного управления макропараметрами производственной системы и оценка рисков представляют большой практический интерес. Работы по этим направлениям продолжаются. Но они пока еще находятся не в такой степени завершения, чтобы обеспечить нужные практические результаты. Предстоит сделать еще многое, как по решению научных задач, так и по практическому использованию метода. Широкая разработка автоматизированных систем управления предприятием является мощным ускорителем этих процессов.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3
От автора 5
ВВЕДЕНИЕ 9
1. Производственное предприятие как социально-экономическая система 10
2. Производственный и технологический процессы. Основная терминология и определения. 13
3. Анализ существующих моделей и методов управления предприятием. 21
4. Об особенностях построения статистической теории производственных систем. 25
ЧАСТЬ 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ 33
1. ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ 34
1.1. Особенности моделирования технологического процесса в единичном производстве 34
1.2. Особенности моделирования технологического процесса в серийном производстве 39
1.3. Особенности моделирования технологического процесса в массовом производстве 42
1.4. Принципы моделирования производственных систем 43
1.5. Моделирование крупносерийного и массового производства 47
Выводы 49
2. О ПОДХОДАХ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ 51
2.1. Вариационный принцип построения целевой функции производственной системы 53
2.2. Дифференциальный принцип построения целевой функции производственной системы 56
2.3. Первые интегралы в модели микроскопического описания производственной системы 58
2.4. Свойства целевой функции производственной системы ...60
Выводы 61
3. ОГРАНИЧЕНИЯ, НАКЛАДЫВАЕМЫЕ НА ФУКЦИОНИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ. ВИДЫ ОГРАНИЧЕНИЙ ПРИ ФУНКЦИОНИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ. 62
Выводы 66
4. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ 67

4.1. Обзор производственных функций предприятия 68
4.1.1. Количественное представление технологических способов и затрат 68
4.1.2. Производственные функции и агрегирование 70
4.1.3. Производственные функции, основанные на инженерных расчетах. 75
4.1.4. Функции затрат 77
4.2. Математический аппарат анализа производственных функций предприятия 84
5. О МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ 93
5.1. Исследование устойчивости функционирования производственных систем первым методом Ляпунова. Метод линеаризации. 97
5.2. Исследование устойчивости функционирования производственных систем вторым методом Ляпунова. Метод функций Ляпунова. 98
5.3. Исследование устойчивости функционирования производственных систем первым методом Ляпунова. Метод собственных функций. 100
5.4. Исследование устойчивости функционирования производственных систем вторым методом Ляпунова. Энергетический метод. 102
5.5. Техническая устойчивость функционирования производственных систем. 104
Выводы 105
6. УПРАВЛЕНИЕ МАКРОПАРАМЕТРАМИ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРОЦЕССА 107
6.2. Виды управления макропараметрами 113
производственного процесса 113
Выводы 114
ЧАСТЬ 2. МИКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ 117
1. ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ С МАССОВЫМ ВЫПУСКОМ ПРОДУКЦИИ 118
1.1. Микроскопические параметры производственной системы с массовым выпуском продукции 118
1.2. Вид целевой функции производственной системы с массовым выпуском продукции 123

1.3.Первые интегралы движения производственной системы с массовым выпуском продукции 136
1.4.Уравнение Эйлера для центрального базового продукта производственной системы 137
1.5. О выборе вида целевой функции 143
Выводы 147
2. РАСЧЕТ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ЦИКЛА ДЛЯ ПРЯМОТОЧНОЙ ЛИНИИ ПРЕДПРИЯТИЯ С СЕРИЙНЫМ И МАССОВЫМ ВЫПУСКОМ ПРОДУКЦИИ 149
2.1.Применение целевой функции производственной системы для расчета продолжительности производственного цикла 150
2.2.Условия стационарности технологического процесса. 154
2.3.Определение длительности производственного цикла в случае нестационарного значения величины межоперационных заделов технологической цепочки производственного процесса. 158
Выводы 161
ЧАСТЬ 3. МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ 163
1. СТАХОСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ С МАССОВЫМ ВЫПУСКОМ ПРОДУКЦИИ 164
2.УРАВНЕНИЯ БАЛАНСОВ В СТАХОСТИЧЕСКОМ ОПИСАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ С МАССОВЫМ ВЫПУСКОМ ПРОДУКЦИИ 173
2.1. Балансовые уравнения для макропараметров производственной системы, выраженные через начальные моменты функции распределения случайной величины. .179
2.1.1. Макропараметры производственной системы, выраженные через начальные моменты функции распределения случайной величины. 179
2.1.2. Уравнение баланса для момента нулевого порядка функции распределения случайной величины. Уравнение заделов базовых продуктов. 180
2.1.3. Уравнение баланса для момента первого порядка через начальные моменты функции распределения случайной величины. Уравнение темпа базовых продуктов. 181
2.1.4. Уравнение баланса для момента второго порядка через начальные моменты функции распределения 183
2.1.5. Общая система уравнений для макропараметров производственной системы, выраженных через

начальные моменты функции распределения случайной величины. 184
2.2. Балансовые уравнения для макропараметров производственной системы, выраженные через центральные моменты функции распределения 186
2.2.1. Макропараметры производственной системы, выраженные через центральные моменты функции распределения случайной величины. 186
2.2.2. Уравнение баланса для момента второго порядка через начальные и центральный моменты. Уравнение среднеквадратичного отклонения темпа базовых продуктов от математического ожидания. 189
2.3. Балансовые уравнения для альтернативных макропараметров производственной системы с массовым выпуском продукции 193
2.3.1. Альтернативные макропараметры производственной системы с массовым выпуском продукции 193
2.3.2. Уравнение баланса для момента нулевого порядка через альтернативные макропараметры производственной системы. Уравнение заделов базовых продуктов через альтернативные макропараметры производственной системы. 195
2.3.3. Уравнение баланса для момента первого порядка через альтернативные макропараметры 195
2.3.4.Уравнение баланса для момента второго порядка через альтернативные макропараметры производственной системы. 197
2.3.5. Общая система уравнений для альтернативных макропараметров производственной системы 199
Выводы 201
3. ХАРАКТЕРНЫЕ ЧИСЛА ОПИСАНИЯ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ 203
3.1.Кинетическое уравнение, описывающее функционирование производственной системы 204
3.2.Безразмерные характерные числа производственной системы. 206
Выводы 211
4. ГЕНЕРАТОРНАЯ ФУНКЦИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ 213
Выводы 224

5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕРАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ 226
5.1. Использование теории возмущений для решения кинетического уравнения функционирования производственной системы. 226
5.2. Решение кинетического уравнения для производственных систем с характерными числами описания производственных систем $K_v << 1$, $P_m \approx 1$ 230
5.3. Решение кинетического уравнения для производственных систем с характерными числами описания производственных систем $K_v >> 1$, $P_m \approx 1$. 233
5.4. Решение кинетического уравнения для производственных систем с характерными числами описания производственных систем $K_v \approx 1$, $P_m \approx 1$. 236
5.5. Решение кинетического уравнения для производственных систем с характерными числами описания производственных систем $K_v \approx 1$, $P_m >> 1$. 241
Выводы 244
6. ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БАЛАНСОВ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ 245
6.1. Уравнения балансов при функционировании производственных систем в нулевом приближении 248
по малому параметру $Kv << 1$ при $Pm \approx 1$ 248
6.2. Уравнения балансов при функционировании производственных систем в нулевом приближении 255
по малому параметру $\frac{1}{Kv} << 1$ при $Pm \approx 1$. 255
6.3. Уравнения балансов при функционировании производственных систем в нулевом приближении по малому параметру $\frac{1}{Pm} << 1$, $Kv \approx 1$. Случай быстроразвивающихся производственных систем. 260
Выводы 264
7. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ 265
7.1. Условия устойчивого функционирования производственных систем в нулевом приближении по малому параметру

$Kv << 1$ (при $Pm \approx 1$) для модели производственных процессов в 2-х моментном описании 270
7.1.2. Условия устойчивого функционирования производственных систем для предельного случая $\left(a_{yV} \cdot [c]_{1y} - [c]_1\right) \to 0$ при условии синхронизации производительности технологического оборудования. 282
7.2. Условия устойчивого функционирования производственных систем в нулевом приближении по малому параметру $\frac{1}{K_v} << 1$ (при $P_m \approx 1$) для модели производственных процессов в 2-х моментном описании 284
7.3. Условия устойчивого функционирования производственных систем в нулевом приближении по малому параметру $\frac{1}{Pm} << 1$ (при $Kv \approx 1$) для модели производственных процессов в 2-х моментном описании. 288
7.4. Условия устойчивого функционирования производственных систем в нулевом приближении по малому параметру $Kv << 1$ (при $Pm \approx 1$) для модели производственных процессов в 2-х моментном описании. 292
Выводы 300
8. ОПТИМАЛЬНОЕ ОПЕРАТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МАКРОПАРАМАТРАМИ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ. 304
8.1. Оперативное управление макропараметрами производственного процесса. Нулевое приближение по малому параметру $K_v << 1$ (при $P_m \approx 1$) для модели производственных процессов в 2-х моментном описании. 316
8.1.1. Оперативное управление заделами производственного процесса. Задача оперативного управления заделами «точно в срок». 320
8.1.2. Оперативное управление темпом производственного процесса. 331
8.2. Оперативное управление макропараметрами производственного процесса. Нулевое приближение по малому параметру $\frac{1}{K_v} << 1$ (при $P_m \approx 1$) для модели производственных процессов в 2-х моментном описании. 337

8.2.1. Оперативное управление заделами производственного процесса. Задача оперативного управления заделами «точно в срок». 339
8.2.2. Оперативное управление темпом производственного процесса. 343
Выводы 346
ЧАСТЬ 4. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ 349
1. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРОЦЕССА ПРЕДПРИЯТИЯ С МАССОВЫМ ВЫПУСКОМ ПРОДУКЦИИ 350
1.1. Постановка задачи 350
1.2. Исходные данные производственной системы 354
1.3. Условия устойчивого функционирования производственной системы 355
1.4. Диспетчерские функции оптимального управления производственной системой 360
Вывод 364
2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ УРОВНЕЙ ДЖ.ФОРРЕСТЕРА. ПРИМЕР ОПИСАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ В ОДНОМОМЕНТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ. 365
Вывод 368
3. МЕТОДИКА УЧЕТА ТОВАРНО-МАТЕРИАЛЬНЫХ ЦЕННОСТЕЙ И НАЧИСЛЕНИЯ ФОНДА ОПЛАТЫ ТРУДА. 369
Вывод 378
Заключение 379

Научное издание

О.М. Пигнастый

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

Ответственный за выпуск Демиуцкий В.П.

Редактор Пробоев Е.В.

Подписано в печать 24.12.2007 г.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Гарнитура Arial. Усл. печ. л.22,55. Уч. изд. л.12,59.
Тираж 5000 экз. (1 завод 1000 экз.) Цена договорная
Заказ №05-06.

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
61077, г. Харьков, площадь Свободы 4, ХГУ. Издательский центр