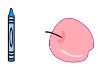
2.2. Кооперативное игры: постановка проблемы

Какой исход можно назвать наилучшим для сообщества игроков в целом? Ответ на это вопрос не так прост, как может показаться. Мы рассмотрим эту проблему в случае игр, в которых допускается кооперирование между игроками. Это значит, что могут заключаться совместные соглашения, что допускается совместный выбор стратегий и совместный выбор исхода.

Игра 6 («Простой обмен»): У Даши есть фломастер, а у Гоши яблоко. Даша оценивает фломастер в 8, яблоко в 10. Гоша оценивает фломастер в 12, яблоко в 5. Оба игрока могут выбрать одно из двух действий: оставить свою вещь при себе или же отдать другому игроку. Если один игрок получает обе вещи, то его оценки складываются, а выигрыш другого игрока нулевой. ⊙

Таблица 21: Игра 6 «Простой обмен»



		Гоша	
		оставить	отдать
Даша	оставить	5 8	17 0
	отдать	0 18	12 10

Вообще говоря, в каждой игре имеется некоторое множество исходов $\mathscr{O}$. В Игре 6, например, имеются следующие четыре исхода:

- у Даши фломастер, у Гоши яблоко;
- у Даши фломастер и яблоко, у Гоши ничего;
- у Даши ничего, у Гоши фломастер и яблоко;
- у Даши яблоко, у Гоши фломастер.

Если игроки действуют совместно, то они могут реализовать по желанию любой возможный исход из множества $\mathscr{O}$. Задача состоит в том, чтобы из множества $\mathscr{O}$ выбрать исход, который в некотором смысле будет удовлетворять всех игроков. Как обычно, предполагается, что игроков интересуют не сами по себе исходы O из множества $\mathscr{O}$, а выигрыши (полезности), которые они получают в этих исходах, т. е. $u_i(O)$. Рассматривая возможности кооперации, мы можем забыть об исходах и сосредоточится на полезностях. Множество исходов $\mathscr{O}$ можно отобразить в векторы выигрышей игроков, т. е. в n-мерное пространство векторов $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Вектор выигрышей $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ мы будем называть **дележом**. Исход игры мы хотим охарактеризовать при помощи соответствующего дележа. Если O — исход игры, то этот исход порождает дележ $\mathbf{u} = \mathbf{u}(O)$ — это n-мерный вектор, компоненты которого представляют выигрыши игроков в этом исходе, т. е. $\mathbf{u}(O) = (u_1(O), u_2(O), \dots, u_n(O))$. Дележ $\mathbf{u}$ называется **допустимым** (возможным), если существует какой-нибудь исход O, который его порождает. Это дележ который физически возможно осуществить. Множество допустимых дележей будем обозначать через $\mathscr{U}$.

Для Игры 6 мы можем изобразить дележи в виде точек (u_1, u_2), где u_1 — выигрыш Даши, а u_2 — выигрыш Гоши. Каждому из четырех возможных исходов соответствует одна точка. В рассматриваемой игре все выигрыши разные, поэтому точки друг на друга не накладывается и в целом дележей столько же, сколько исходов (см. Рис. 17).

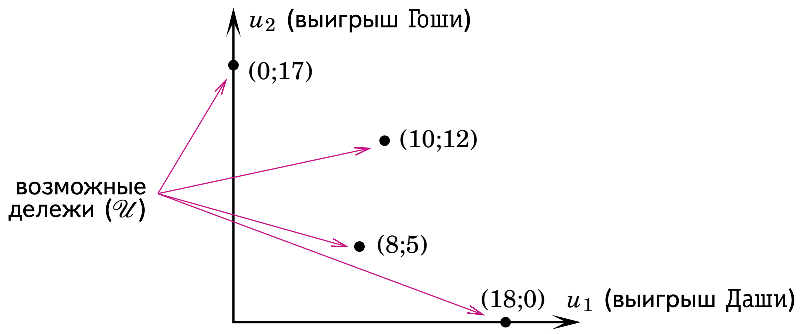


Рис. 17: Множество дележей в Игре 6

Можно предположить, что в Игре 6 есть также не отраженные явно возможности по произвольному уменьшению выигрышей. Например, Даша и Гоша могут выбросить часть яблока или подраться друг с другом. Тогда вместе с дележом (u_1, u_2) множество $\mathscr{U}$ должно включать также любой дележ $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ такой что $\tilde{u}_1 \le u_1$ и $\tilde{u}_2 \le u_2$. Соответствующая модификация множества дележей для Игры 6 показана на Рис. 18.

По-видимому во многих ситуациях исход игры, соответствующий кооперации игроков, можно выразить в терминах соответствующего дележа. Задача состоит в том, чтобы из множества дележей $\mathscr{U}$ выбрать дележ, который будет удовлетворять всех игроков.

Игру называют **кооперативной**, если игроки могут заключать соглашения, причем

- возможности формировать коалиции не моделируются в явном виде в рамках правил игры;

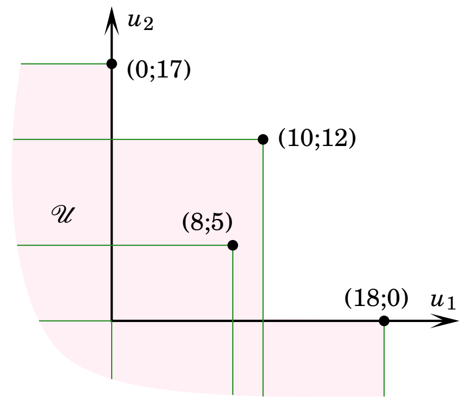


Рис. 18: Множество дележей в Игре 6 при наличии возможности произвольного ухудшения положения игроков

- соглашения (и иные обязательства, которые могут принимать на себя игроки) носят обязывающий характер (игрок не может отказаться от сотрудничества, если он уже обещал).

В кооперативной игре может быть достигнут любой допустимый исход, если игроки подписываются под соответствующим соглашением.

С другой стороны, игру называют некооперативной, если не существует возможностей для взятия на себя обязательств (односторонних или многосторонних), от которых нельзя впоследствии отказаться, кроме тех, которые явным образом включены в описание игры.

Если обязывающие соглашения невозможны, то возникновение сотрудничества проблематично. Например, в Игре 6 рациональные игроки вряд ли выберут пару стратегий (`отдать`, `отдать`). Даже если бы они договорились использовать такие стратегии, то каждый из них не мог бы рационально ожидать, что другой игрок будет придерживаться этого соглашения. А это совершенно лишает смысла любое подобное соглашение. Предположим, что Даша предполагает, что Гоша будет придерживаться этого соглашения и отдаст ей яблоко. Но зачем ей самой при этом отдавать фломастер, если ее выигрыш будет меньше? Похожим образом может рассуждать и Гоша. Набор стратегий (`отдать`, `отдать`) не является устойчивым.

В реальной жизни принудительное исполнение соглашений внешне обеспечивается судами, государственными организациями и давлением общественного мнения. Внутренне их исполнение может быть обеспечено нежеланием нарушать соглашения по моральным причинам.

Важный класс игр — это игры с побочными платежами или, как еще говорят, с трансферабельной полезностью. Пусть полезности оцениваются в единицах, общих для всех игроков (в «деньгах»), и каждый из них имеет право передать часть своего выигрыша другому игроку. Тогда игроки могут договариваться о помощи друг другу за счет передачи выигрыша (за счет побочных платежей) — если есть игроки, которые могут сильно помочь другим игрокам, то эту помощь можно купить, если взамен обещать часть выигрыша, полученному благодаря такой помощи.

Пусть, например, в Игре 6 выигрыши выражены в рублях, и Даша и Гоша могут передавать друг другу не только предметы, но и деньги. Если они обменялись своими предметами, то их выигрыши будут равны (10;12). Если, дополнительно, Даша передаст Гоше рубль, то выигрыши будут равны (9;13). Если Даша передаст Гоше z рублей, то выигрыши будут равны $(10-z;12+z)$. Случай $z<0$ будет означать передачу денег от Гоши к Даше. Таким образом, если нет ограничений на количество денег, то игрокам доступны любые дележи вида $(10-z;12+z)$, где z — произвольное действительное число. Это прямая, проходящая с северо-запада на юго-восток. Если, к тому же, игроки могут «выбрасывать деньги на ветер», то все точки, лежащие левее и ниже этой прямой, тоже представляют собой допустимые дележи. В целом множество допустимых дележей выглядит так, как изображено на Рис. 19.

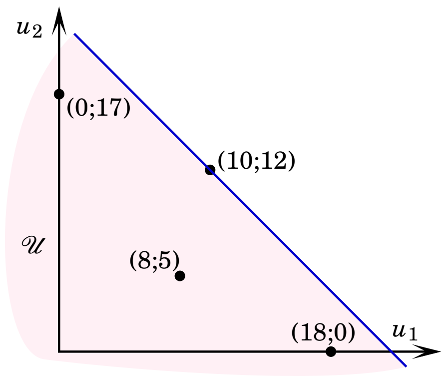


Рис. 19: Множество дележей в Игре 6 при трансферабельности выигрышей

2.3. Оптимальность по Парето

В этом разделе мы рассмотрим важную для экономических приложений концепцию Парето-оптимальности в контексте теории игр.

Тот или иной механизм координации решений отдельных игроков (в том числе механизм достижения соглашений) принято оценивать на основе результатов его работы, т. е. характеристик тех исходов, к которым он приводит, безотносительно самого по себе процесса координации. В духе традиции методологического индивидуализма считается, что подобная оценка исходов должна строится на основе выигрышей отдельных игроков и ни на чем ином.

Но при сравнении разных исходов возникает следующая трудность. Если мы рассматриваем отдельного игрока, то можем судить о том, насколько хорош исход, по тому выигрышу, который он получит. Однако, если игроков несколько, то их интересы зачастую не совпадают. Возможно ли вообще какое-либо правило коллективной рациональности? Если сравнивать два исхода, O_1 и O_2, то для одного игрока O_1 может быть предпочтительнее O_2, а для другого наоборот. Только если мнения всех игроков совпадут, то имеет смысл говорить о том, что один исход *с точки зрения данного сообщества игроков в целом* предпочтительнее другого, и, следовательно, этот другой исход им не подходит. Данный тезис лежит в основе критерия оптимальности, сформулированного Парето.

Оптимумы Парето характеризуются тем, что невозможно одновременно увеличить полезность для всех игроков, или, иначе говоря, тем, что не существует допустимого распределения, которое игроки единодушно предпочитают.

Исход $O' \in \mathscr{O}$ **доминирует по Парето** исход $O \in \mathscr{O}$ (является **Парето-улучшением** по сравнению с O), если в нем каждый игрок получает выигрыш не меньше, чем в исходе O, а хотя бы один из игроков получает выигрыш строго больше, чем в O, т. е.

$$u_i(O') \geq u_i(O) \text{ для всех игроков } i,$$

и

$$u_j(O') > u_j(O) \text{ для некоторого игрока } j.$$

В Игре 6 исход, когда Даша и Гоша оставляют свои предметы у себя, доминируется исходом, когда они оба отдают свои предметы друг другу. На Рис. 20 показано такое Парето-улучшение. В данном случае это **строгое Парето-улучшение**, поскольку все игроки строго улучшили свое положение.

Исход $\hat{O} \in \mathscr{O}$ называется **Парето-оптимальным**, если не существует другого исхода $O' \in \mathscr{O}$, такого что он доминирует $\hat{O}$ по Парето. Множество всех Парето-оптимальных исходов называют **границей Парето**.

В случае двух игроков, если множество дележей $\mathscr{U}$ представляет собой некую связную фигуру, то оптимальные по Парето дележи должны располагаться на границе множества $\mathscr{U}$, обращенной вправо вверх (см. Рис. 21).

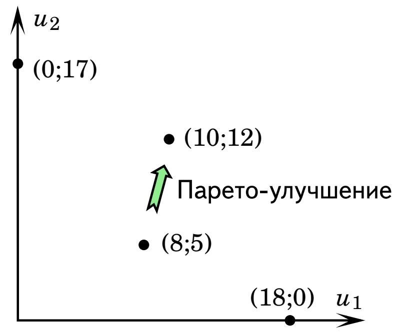


Рис. 20: Парето-улучшение в Игре 6

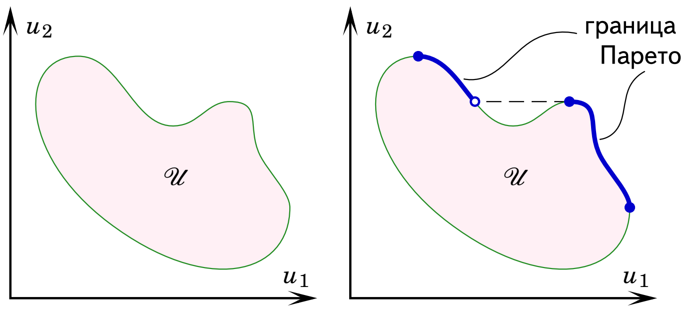


Рис. 21: Парето-граница для множества дележей $\mathscr{U}$

Игра 7: Трое друзей, Антон, Борис и Виктор, решают, куда им пойти вместе на выходные. Имеются следующие варианты: кино, бар, боулинг, сауна, рыбалка, хоккей. Друзья имеют следующие предпочтения в отношении этих вариантов:

$$\begin{aligned} \text{Антон: } & \text{боулинг} \succ \text{кино} \succ \text{сауна} \succ \text{бар} \succ \text{рыбалка} \succ \text{хоккей}, \\ \text{Борис: } & \text{боулинг} \succ \text{хоккей} \succ \text{кино} \sim \text{бар} \succ \text{рыбалка} \succ \text{сауна}, \\ \text{Виктор: } & \text{кино} \succ \text{бар} \succ \text{рыбалка} \succ \text{боулинг} \succ \text{сауна} \sim \text{хоккей}. \end{aligned}$$
⊙

Исходя из указанных предпочтений можно каждому из исходов приписать некий подходящий уровень полезности. Например, можно нумеровать альтернативы натуральными числами, начиная с худшей. Такой вариант задания функций полезности игроков представлен в Таблице 22.

Альтернатива кино доминирует по Парето альтернативу бар. Действительно, Антон и Виктор получают более высокую полезность от кино ($5 > 3$ и $5 > 4$ соответственно), а для Бориса эти альтернативы эквивалентны ($3 = 3$). Альтернатива боулинг строго доминирует по Парето

Таблица 22: Полезности для Игры 7

	кино	бар	боулинг	сауна	рыбалка	хоккей
Антон	5	3	6	4	3	1
Борис	3	3	5	1	2	4
Виктор	5	4	2	1	3	1

альтернативу хоккей ($6 > 1$, $5 > 4$ и $2 > 1$). Кино и боулинг строго доминируют по Парето сауну. Кино строго доминирует рыбалку.

Альтернативы кино и боулинг не сравнимы между собой по критерию Парето — ни одна из них не доминирует другую. Таким образом, Парето-граница данной игры — это множество {кино, боулинг}. Остальные альтернативы следует признать неподходящими для совместного времяпрепровождения.

Ясно, что критерий Парето является довольно слабым, поскольку не позволяет сравнивать между собой те исходы, которые не улучшаемы по Парето. Кроме того, критерий Парето игнорирует такие волнующие большинство людей соображения как равенство и справедливость. Как бы то ни было, понятие эффективности (оптимальности) по Парето является одним из ключевых в экономической теории, в других общественных науках, а также в теории игр. (В частности, оптимальность по Парето — это важный критерий для оценки функционирования экономических систем и результатов экономической политики, другими словами, это критерий экономической эффективности.)

2.4. Задача торга: основные предположения

Процедуру достижения соглашения принято называть **торгом** (англ. *bargaining*). Рассмотрим, какие компоненты должно включать описание ситуации торга и какие предположения о результатах торга естественно сделать.

Обычно при рассмотрении кооперации предполагают, что у каждого игрока i существует минимальное значение выигрыша v_i, который он может себе обеспечить независимо от действий других игроков. Будем говорить, что дележ $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ удовлетворяет **условию участия**[5] для игрока i, если $u_i \geq v_i$. с другой стороны, если это условие не выполнено, т. е. $u_i < v_i$ то можно говорить, что дележ $\mathbf{u}$ **блокируется** игроком i.

[5]Это условие также называют условием **индивидуальной рациональности**. К сожалению, этот термин не очень удачен, поскольку это только одно очень специфическое требование рациональности поведения отдельного игрока. Поэтому в дальнейшем мы не будем использовать этот термин.

Точку $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ принято называть точкой угрозы или статус-кво[6]. По смыслу точка угрозы является допустимым дележом ($\mathbf{v} \in \mathscr{U}$). Дележ должен принять значение $\mathbf{v}$, если игроки не придут к соглашению.

Идея состоит в том, что, коль скоро речь идет о сотрудничестве, то следует исключить из рассмотрения любой дележ, при котором некоторые игроки не получают минимального выигрыша, который они могут себе обеспечить.

По-видимому, следует также постулировать, что любое кооперативное решение должно быть оптимальным по Парето. В самом деле, если имеется дележ, который может улучшить положение некоторых из игроков, не затрагивая интересы других, то сообщество игроков должно отказаться от текущего дележа в пользу этого более удачного варианта. Другими словами, выбранный дележ должен располагаться на границе множества $\mathscr{U}$, обращенной вправо вверх.

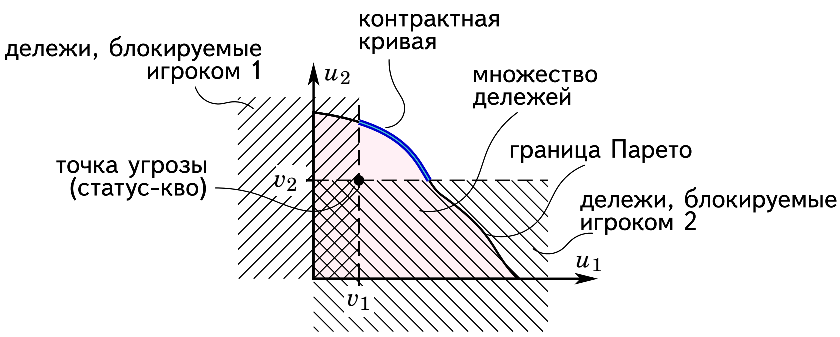


Рис. 22: Ситуация торга в случае двух игроков

Таким образом, можно утверждать, что минимальные естественные требования к дележу, который будет выбран при сотрудничестве игроков должны заключаться в следующем.

- Каждый игрок добровольно соглашается сотрудничать с остальными игроками.

- Выбранный дележ лежит на Парето-границе.

Множество всех дележей, удовлетворяющих этим двум требованиям принято называть контрактной кривой (см. Рис. 22).

[6]С латинского status quo можно перевести как «существующее или сложившееся положение вещей».

2.5. Торг по Нэшу

Компромиссное решение должно быть выбрано на контрактной кривой, если игроки действительно заинтересованы в достижении соглашения. Однако, контрактная кривая, вообще говоря, содержит бесконечно много элементов, и возникают сомнения, какой же из них должен быть в конечном итоге выбран.

Мы вправе закончить на этом анализ. Окончательный выбор в значительной мере зависит от специфических обстоятельств, присущих рассматриваемой частной ситуации, в том числе от соотношения сил игроков. Однако в рамках кооперативной теории игр предпринимались попытки создать концепцию, позволяющую выделить определенное решение в случае отсутствия какой бы то ни было дополнительной информации о ситуации. Речь идет о принципах выделения решения, т. е. о нахождении общего правила для целой категории ситуаций. Рассмотрим один из подобных подходов; он был предложен Джоном Нэшем для случая игры *двух лиц*.

Пусть $\mathcal{U}$ — множество допустимых дележей, и пусть вектор $\mathbf{v}$ из множества $\mathcal{U}$ задает точку статус-кво. На какой вектор $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*)$ из множества $\mathcal{U}$ должны согласиться игроки? Общий ответ должен задавать, как $\mathbf{u}^*$ зависит от $\mathcal{U}$ и от $\mathbf{v}$. Это функция $\boldsymbol{\mu}(\cdot)$, которая должна для заданных $\mathcal{U}$ и $\mathbf{v}$ указывать некоторый вектор $\mathbf{u}^*$ из $\mathcal{U}$:

$$\mathbf{u}^* = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}, \mathcal{U}).$$

Джон Нэш счел необходимым принять следующие четыре аксиомы относительно функции $\boldsymbol{\mu}(\cdot)$. (Две первые из них мы уже упомянули выше в качестве минимального набора требований к кооперативному решению.)

A1. Решение $\mathbf{u}^*$ должно быть оптимумом Парето.

A2. Решение должно удовлетворять условию участия для каждого из игроков[7]. Каждый игрок должен получить выигрыш, не меньший чем тот, который он получил бы в случае отказа от соглашения, т. е. $\mathbf{u}^* \geq \mathbf{v}$.

A3. Решение не должно измениться, если множество дележей $\mathcal{U}$ заменить на множество $\mathcal{W}$, содержащееся в $\mathcal{U}$ ($\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$) и содержащее решение, т. е. должно выполняться $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}, \mathcal{U}) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}, \mathcal{W})$. Это свойство называется **независимостью от посторонних альтернатив**.

Как следствие, если дележ является решением задачи торга, и множество дележей расширяется, то либо старое решение будет

[7]Нэш назвал это условие индивидуальной рациональностью, но, как сказано выше, мы сознательно отказываемся от этого неудачного термина.

решением новой задачи, либо какая-то из новых точек будет решением (но не одна из старых точек, которая не была решением).

A4. (Инвариантность по отношению к линейному преобразованию полезностей.) Предположим, что выигрыши игроков в рассматриваемой ситуации торга подвергаются возрастающим линейным преобразованиям. Преобразования задаются парой функций $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ и превращают $\mathscr{U}$ в $\tilde{\mathscr{U}}$, а $\mathbf{v}$ в $\tilde{\mathbf{v}}$:

$$\tilde{v}_i = \varphi_i(v_i), \quad i = 1,2$$

и

$$\tilde{\mathbf{u}} = (\varphi_1(u_1), \varphi_1(u_2)) \in \tilde{\mathscr{U}}, \text{ если и только если } \mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathscr{U}.$$

Решение в новой ситуации должно с точностью до преобразования остаться таким же, как в исходной ситуации, т. е. если $\mathbf{u}^* = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}, \mathscr{U})$ — решение в старой ситуации, то $\tilde{\mathbf{u}}^* = \boldsymbol{\mu}(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathscr{U}})$ — решение в новой ситуации, где $\tilde{u}_i^* = \varphi_i(u_i^*), \quad i = 1,2.$

Нэш показал, что существует единственная функция $\boldsymbol{\mu}(\cdot)$, определенная для всех задач торга и удовлетворяющая аксиомам A1–A4. А именно, $\mathbf{u}^* = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}, \mathscr{U})$ представляет собой вектор из $\mathscr{U}$, который максимизирует на $\mathscr{U}$ произведение $(u_1 - v_1)(u_2 - v_2)$ (произведение «чистых выигрышей», которые получают игроки от соглашения). Соответствующее решение $\mathbf{u}^*$ называют **решением Нэша** (или **точкой Нэша**) для проблемы торга.

В случае трансферабельной полезности множество $\mathscr{U}$ состоит из точек, все из которых удовлетворяют неравенству $u_1 + u_2 \le v(I)$, где, как и раньше, $v(I)$ — максимально возможная полезность, которую эти два игрока могут получить совместно. Любые такие точки, лежащие вправо вверх от точки угрозы (v_1, v_2), принадлежат $\mathscr{U}$.

Точка Нэша находится как решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} &\text{максимизировать } (u_1 - v_1) \cdot (u_2 - v_2) \text{ по } u_1 \text{ и } u_2 \\ &\qquad\qquad\qquad \text{при ограничении } u_1 + u_2 \le v(I). \end{aligned}$$

В оптимальном решении должно быть $u_1 + u_2 = v(I)$. При этом можно выразить u_2 через u_1, $u_2 = v(I) - u_1$, и подставить в целевую функцию. Получится задача

$$\text{максимизировать } (u_1 - v_1) \cdot (v(I) - u_1 - v_2) \text{ по } u_1.$$

Решая эту задачу получим, что соответствующим случаю трансферабельной полезности решением Нэша будет точка $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*)$, где

$$u_1^* = \frac{v_1 - v_2 + v(I)}{2} \quad \text{и} \quad u_2^* = \frac{v_2 - v_1 + v(I)}{2}.$$

Можно заметить, что $u_1^* + u_2^* = v(I)$, а $u_2^* - u_1^* = v_2 - v_1$. Таким образом, в этом решении полезности игроков максимально возросли при том ограничении, что разность уровней полезности остается такой же, как и в точке угрозы (так что избыток полезности $v(I) - v_1 - v_2$ делится поровну между игроками). Этот случай иллюстрирует Рис. 23.

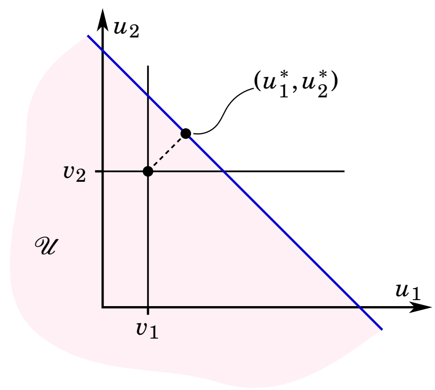


Рис. 23: Решение Нэша в случае трансферабельной полезности

Приведем также пример нахождения точки Нэша для игры с нетрансферабельными выигрышами.

Игра 8: ⟦Оуэн⟧ Двоим людям предлагают 100 долларов, если они смогут поделить эти деньги между собой. Предполагается, что первый из них очень богат, а второй имеет капитал всего в 100 долларов. Предполагается также, что полезность суммы денег пропорциональна ее натуральному логарифму. ⊙

Рассмотрим, как должны быть поделены деньги с точки зрения решения Нэша. Исходом игры в данном случае можно считать вектор (x_1, x_2), где x_1 — сумма, которую получит первый игрок, x_2 — сумма, которую получит второй игрок и $x_1 + x_2 \le 100$.

Пусть богатство первого игрока равно W. Тогда в одиночку, без сотрудничества со вторым игроком, его полезность составит $v_1 = \ln W$. Если же игроки договорятся, и первый игрок получит дополнительно к своему богатству x_1, то его полезность составит $u_1 = \ln(W + x_1)$. Эту полезность можно расписать как

$$u_1 = \ln W + \ln(W + x_1) - \ln W = v_1 + \ln\left(1 + \frac{x_1}{W}\right).$$

Если богатство W очень велико по сравнению с x_1, то относительный прирост богатства x_1/W мал, и мы можем принять следующее приближение[8]:

$$u_1 = v_1 + \frac{x_1}{W}.$$

Второй игрок имеет 100 долларов, так что его полезность в статус-кво равна $v_2 = \ln 100$. Соответственно, если он получит дополнительно x_2 долларов, то полезность составит $u_2 = \ln(100 + x_2)$.

В Парето-оптимуме должно выполняться $x_1 + x_2 = 100$ (вся сумма будет поделена между игроками). Из уравнения полезности первого игрока имеем $x_1 = (u_1 - v_1)W$. Отсюда $x_2 = 100 - x_1 = 100 - (u_1 - v_1)W$. Подставив это выражение в функцию полезности второго игрока, получим, что множество дележей $\mathscr{U}$ справа вверху ограничивается дугой, задаваемой уравнением

$$u_2 = \ln(200 - (u_1 - v_1)W).$$

Дуга выгибается вправо вверх. Контрактная кривая состоит из точек, расположенных между этой дугой и точкой угрозы $(\ln W, \ln 100)$.

Чтобы найти решение Нэша, надо на указанной дуге найти точку, которая максимизирует произведение $(u_1 - v_1)(u_2 - v_2)$. Подставляя уравнение дуги, получим, что следует максимизировать по u_1 функцию

$$(u_1 - v_1) \cdot (\ln(200 - (u_1 - v_1)W) - \ln 100).$$

Однако, в этом примере удобнее выразить полезности через x_1, что приводит к задаче максимизации по x_1 функции

$$\frac{x_1}{W} \cdot \ln \frac{200 - x_1}{100}.$$

В максимуме производная этой функции равна нулю. Таким образом, получаем следующее условие первого порядка:

$$\ln \frac{200 - x_1}{100} = \frac{x_1}{200 - x_1}.$$

Решая это нелинейное уравнение, найдем, что $x_1 \approx 54.4$, то есть в точке Нэша первый игрок должен получить приближенно 54.4 доллара, а второй — 45.6 доллара.

В некотором смысле этот результат кажется странным; из него вытекает, что богатый игрок должен получить больше, чем бедный, нуждающийся в деньгах. Однако такие рассуждения опираются на сравнение полезностей разных лиц, что противоречит логике, заложенной Нэшем. Решение учитывает, что фактически полезность денег у игрока 2 убывает быстро, а у игрока 1 медленно. В результате получается, что игрок 2 стремится получить хоть что-нибудь и при сделке может уступить игроку 1.

[8] Как известно из математического анализа, $\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon$ при малых ε.

2.6. Коалиции и ядро

Если игроков только двое, то рассмотренные выше условия добровольности участия и Парето-оптимальности — это, по-видимому, все, что мы можем вывести, исходя только из рациональности игроков. Однако если игроков трое или более, то игроки могут группироваться по разному, образуя коалиции (охватывающие только часть игроков) и заключая соглашения в пределах коалиции. Анализ коалиций представляется очень важным для хорошего понимания взаимозависимостей между игроками, когда их более двух.

Формально, в теории кооперативных игр **коалицией** называют (непустое) подмножество S множества всех игроков I. Из соображений удобства теоретического анализа коалициями называют и само множество всех игроков, I, и множества, состоящие из единственного игрока, $\{i\}$. Таким образом, коалиция — это и все множество I, и отдельный игрок и все возможные случаи между этими двумя крайностями.

В игре с тремя игроками (игре трех лиц) $I = \{1,2,3\}$ — это множество всех игроков. В такой игре возможны следующие коалиции:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}.$$

Дележ $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ называется **допустимым** (возможным) для коалиции S, если коалиция S, автономно от остальных игроков, не входящих в нее, может обеспечить своим членам i выигрыши u_i (где $i \in S$). (Каковы бы ни были действия, предпринимаемые игроками, не входящими в S.) Множество допустимых дележей для коалиции S обозначим через $V(S)$. Ясно, что в прежних обозначениях $V(I) = \mathscr{U}$ для коалиции из всех игроков и $V(i) = v_i$ для каждого отдельного игрока i.

Множества $V(S)$ допустимых для коалиций дележей могут рассчитываться, например, на основе некоторого семейства некооперативных игр или на основе некоторой задачи принятия решений.

Условно можно вообразить, что некий арбитр помогает игрокам в выработке соглашения и предлагает дележ $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, так что полезность для игрока i равна u_i. Для того чтобы это предложение было принято, необходимо прежде всего, чтобы оно было реалистичным, т. е., чтобы это был допустимый дележ для данной игры в целом (для коалиции из всех игроков). Таким образом, дележ должен быть таким, чтобы $\mathbf{u} \in V(I)$.

Далее, игроки не примут предложенный арбитром дележ $\mathbf{u}$, если они сочтут его невыгодным для себя. В частности, как указывалось ранее, необходимо предложить игроку i по крайней мере столько, сколько он может гарантировать себе, действуя в одиночку. Для того, чтобы предложенный дележ был приемлем для всех n игроков, необходимо, чтобы выполнялось $u_i \geq v_i$ для всех i.

Но что если рассматривать не только отдельных игроков, ни и их коалиции? Игроки могут анализируют всевозможные коалиции, и если члены коалиции S поймут, что объединившись и действуя отдельно от остальных они смогут получить больше, чем им предложил арбитр, то они воспользуются этим и откажутся от предложенного дележа.

Если коалиции S выгодно отказаться от дележа $\mathbf{u}$, т. е. если она может обеспечить своим членам более высокие выигрыши, то говорят, что коалиция S **блокирует** дележ $\mathbf{u}$. Формально, коалиция S блокирует дележ $(u_1,\ldots,u_n)$, если существует допустимый для нее дележ $(u'_1,\ldots,u'_n)$, такой что $u'_i \geq u_i$ для каждого игрока i из S и $u'_i > u_i$ по меньшей мере для одного игрока i из S.

Заметим, что если применить указанное определение блокирования к коалиции из всех игроков, взяв $S = I$, то определение блокирования совпадет с определением доминирования по Парето.

Мы можем постулировать, что соглашение между игроками приемлемо, если соответствующий дележ является допустимым и не блокируется ни одной из возможных коалиций. Множество подобных дележей принято называть C-ядром или просто **ядром**[9].

По-видимому, ядро игры дает приемлемое решение проблемы торга. Исход устойчив, если для любой коалиции никакое отклонение не приводит к увеличению выигрыша.?? Если предлагается дележ, принадлежащий ядру, то никто (будь то отдельный игрок или коалиция) не имеет побудительных мотивов противопоставить этому дележу другой дележ, ибо в последнем случае собственные союзники его покинут и он получит меньше, чем было предложено.??

В игре *с трансферабельной полезностью* коалиция всегда может перераспределить выигрыши между своими членами. Если коалиция S может обеспечить своим членам выигрыши u_i $(i \in S)$, то она также может обеспечить им выигрыши u'_i, если только $\sum_{i\in S} u'_i \leq \sum_{i\in S} u_i$ (новая общая сумма выигрышей членов коалиции равна или меньше). (Всегда можно отдельному игроку сделать сколь угодно плохо, не затрагивая остальных игроков.) Таким образом, для описания множества допустимых для данной коалиции дележей, достаточно определить максимальный суммарный выигрыш, которого может достичь эта коалиция (автономно от игроков, не входящих в коалицию). Это будет уже не множество векторов, а одно число. Обозначим такой максимальный суммарный выигрыш для коалиции S через $v(S)$. Это игра в **характеристической форме**, а $v(\cdot)$ называют характеристической функцией. Для простых игр удобно записывать коалиции без запятых и скобок, как нижний индекс. Например, вместо $v(\{1,2\})$ можно писать

[9] C-ядро — это перевод англоязычного термина *core*. Приставку C в русском языке добавляют, чтобы не возникало путаницы с термином *kernel* (K-ядром).

v_{12}.

В игре с трансферабельной полезностью ядро представляет собой множество дележей $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, таких что они удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i \in I} u_i \le v(I),$$
$$\sum_{i \in S} u_i \ge v(S) \text{ для всех коалиций } S.$$

Поскольку множество всех игроков I — это тоже коалиция, то $\sum_{i \in I} u_i \ge v(I)$ и первое условие можно записывать в виде равенства:

$$\sum_{i \in I} u_i = v(I).$$

Рассмотрим пример игры с трансферабельной полезностью и найдем в ней ядро.

Игра 9 (Джаз-оркестр [[Мулен]]): Владелец ночного клуба в Париже обещает 1000 долларов певцу (S), пианисту (P) и ударнику (D) за совместную игру в его клубе. Выступление дуэта певца и пианиста он расценивает в 800 долларов, ударника и пианиста — в 650 долларов и одного пианиста — в 300 долларов. Другие дуэты и солисты не рассматриваются, поскольку присутствие фортепиано владелец клуба считает обязательным. Дуэт певец — ударник зарабатывает 500 долларов за вечер в одной удобно расположенной станции метро, певец зарабатывает в среднем 200 долларов за вечер в открытом кафе. Ударник в одиночку ничего не может заработать. ⊙

Суммарный доход трех музыкантов максимален (1000) в случае их совместного выступления в ночном клубе. Если певец выступает отдельно от пианиста с ударником, то все втроем они получают $650+200$ долларов, если пианист один выступает в ночном клубе, то $300+500$ долларов. Наконец, суммарный доход равен 800 долларов, если пианист и певец отказываются от участия ударника. Какое распределение максимального общего дохода следует признать разумным, учитывая описанные возможности игроков в смысле частичной кооперации и индивидуального поведения?

Для Игры 9 возможные коалиции можно записать как

$$\{S\},\ \{P\},\ \{D\},\ \{S,P\},\ \{S,D\},\ \{P,D\},\ \{S,P,D\}.$$

Характеристическая форма задается следующими выигрышами:

$$v_S = 200, \quad v_P = 300, \quad v_D = 0,$$
$$v_{SP} = 800, \quad v_{PD} = 650, \quad v_{SD} = 500.$$
$$v_{SPD} = 1000,$$

Вектор $\mathbf{u} = (u_S, u_P, u_D)$ в Игре 9 принадлежит ядру тогда и только тогда, когда

$$u_S + u_P + u_D = 1000,$$
$$u_S + u_P \geq 800, \quad u_P + u_D \geq 650, \quad u_S + u_D \geq 500,$$
$$u_S \geq 200, \quad u_P \geq 300, \quad u_D \geq 0.$$

Это множество можно изобразить в трехмерном пространстве так, как показано на Рис. 24. Контрактная кривая (множество Парето-оптимальных дележей, удовлетворяющих условиям участия) имеет следующий вид:

$$\{\mathbf{u} = (u_S, u_P, u_D) \mid u_S + u_P + u_D = 1000,\, u_S \geq 200,\, u_P \geq 300,\, u_D \geq 0\}.$$

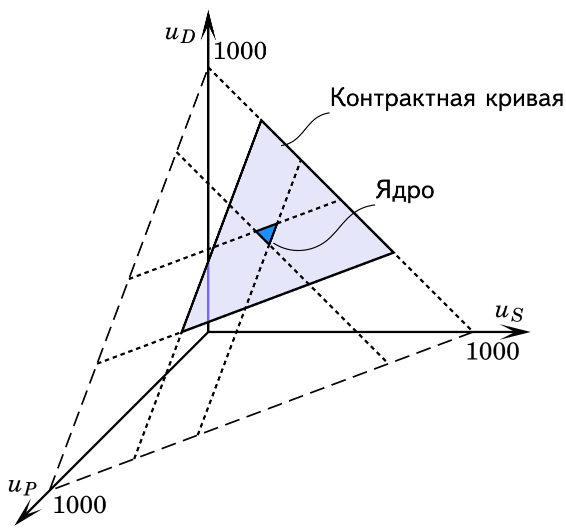


Рис. 24: Трехмерная иллюстрация ядра в Игре 9

Это множество можно изобразить также в двумерном пространстве — пространстве выигрышей первых двух игроков, S и P, (см. Рис. 25). Выигрыш третьего игрока вычисляется однозначно по выигрышам первых двух игроков по формуле $u_D = 1000 - u_S - u_P$ (отражающей требование Парето-оптимальности). Учитывая это, можно выразить остальные шесть условий как неравенства для u_S и u_P:

$$u_S + u_P \geq 800, \quad u_P + (1000 - u_S - u_P) \geq 650, \quad u_S + (1000 - u_S - u_P) \geq 500,$$
$$u_S \geq 200, \quad u_P \geq 300, \quad 1000 - u_S - u_P \geq 0$$

или

$$u_S + u_P \geq 800, \quad u_S \leq 350, \quad u_P \leq 500,$$
$$u_S \geq 200, \quad u_P \geq 300, \quad u_S + u_P \leq 1000.$$

Первая строчка в последней формуле содержит условия, что дележ не должен блокироваться коалициями из двух игроков, а вторая строчка — условия, что дележ не должен блокироваться коалициями из одного игрока. Таким образом, вторая строчка дает условия на контрактную кривую (множество Парето-оптимальных и удовлетворяющих условию участия дележей).

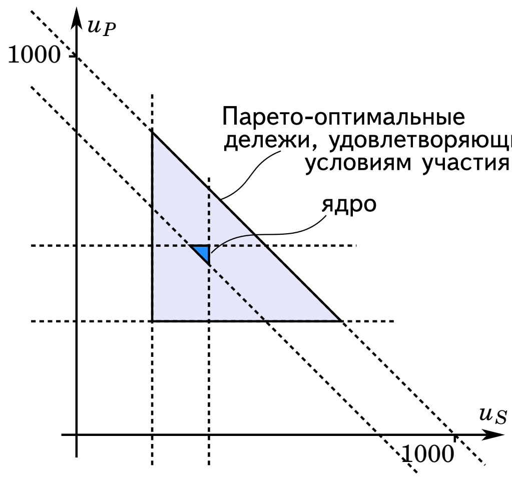


Рис. 25: Двумерная иллюстрация ядра в Игре 9

Первая проблема: существуют ли на самом деле в рассматриваемой игре такие дележи, которые принадлежат ядру? Могут и не существовать.

Вторая проблема: если ядро состоит более чем из одного дележа, то какой из них фактически реализуется? Концепция ядра не дает ответа на этот вопрос.

Пусть в Игре 9 ударник в одиночку может заработать некоторую сумму v_D. При каких значениях параметра v_D ядро пусто, а при каких — нет? **?**

Примеры игр с пустым ядром

Существуют игры, ядро которых пусто. Это означает, что для каждого допустимого дележа можно найти коалицию, которая способна его блокировать.

Игра 10 (Наследство ⟦Ekeland⟧): Миллиардер имеет трех племянников. Он завещает свое наследство целиком тому из трех племянников, кого они назовут большинством голосов. ⊙

Логично предположить, что это игра с трансферабельной полезностью. Например, двое из племянников могут договориться голосовать за одного из них с тем, чтобы наследник перечислил половину наследства своему партнеру. Но третий, оставшийся в стороне, возможно, не позволит столь просто это сделать и попытается переманить одного из сообщников, обещая ему бо́льшую часть наследства.

Пусть f — размер наследства. Ядро описанной игры — это множество дележей (u_1, u_2, u_3), удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$u_1 + u_2 + u_3 = f,$$
$$u_1 + u_2 \geq f, \quad u_1 + u_3 \geq f \quad u_2 + u_3 \geq f,$$
$$u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad u_3 \geq 0.$$

Несложно проверить, что эти неравенства несовместны. Если сложить неравенства для парных коалиций (средняя строчка), то получится

$$2(u_1 + u_2 + u_3) \geq 3f,$$

а это противоречит равенству в первой строчке. Это значит, что любой дележ блокируется хотя бы одной коалицией. Например, дележ $(f/2, f/2, 0)$ блокируется коалицией $\{2,3\}$, которая может обеспечить дележ $(0, 3f/4, f/4)$.

Игра 11 (Мусор): Имеется n игроков. Каждый из игроков обладает мешком мусора и собственным домом. Игра состоит в том, чтобы забросить свой мешок с мусором в чей-либо двор. Выигрыш игрока — это количество мешков в его дворе со знаком минус.

В этой игре для коалиции из всех игроков выполнено

$$v(I) = -n,$$

т. е. ее выигрыш равен общему числу мешков с мусором со знаком минус. Для коалиции S из k игроков при $k < n$ выигрыш равен

$$v(S) = k - n,$$

поскольку коалиция S может перебросить свой мусор тем игрокам, которые в нее не входят; таких игроков $n - k$, и эти игроки могут отплатить коалиции S тем, что сбросят свои $n - k$ мешков с мусоров во дворы ее членов. ⊙

Легко показать, что ядро этой игры пусто при $n > 2$. Пусть S_{-i} — это коалиция, состоящая из всех игроков, кроме игрока i. Двор игрока i как бы служит свалкой для игроков коалиции S_{-i}. Выигрыш этой коалиции равен минус единице: $v(S_{-i}) = (n-1) - n = -1$ — владелец двора, служащего свалкой, может отомстить только одним мешком с мусором. Чтобы дележ $\mathbf{u}$ принадлежал ядру, требуется, чтобы при этом дележе члены коалиции S_{-i} (при любом i) в сумме получили не менее -1:

$$\sum_{j\in S_{-i}} u_j \geq v(S_{-i}) = -1 \text{ для всех } i$$

Суммируя эти неравенства по всем $i \in I$, получим

$$(n-1)\sum_{i\in I} u_i \geq -n.$$

Множитель $n-1$ появляется здесь из-за того, что в каждой из суммируемых сумм отсутствует выигрыш одного из n игроков. Если дележ принадлежит ядру, то $\sum_{i\in I} u_i = v(I)$, причем по условиям игры $v(I) = -n$. Таким образом, если дележ $\mathbf{u}$ принадлежит ядру, то должно выполняться неравенство

$$-(n-1)n \geq -n.$$

или

$$-(n-1) \geq -1.$$

Получаем, что при $n > 2$ ни один дележ не может принадлежать ядру. Ядро непусто только при $n \leq 2$.

При $n = 2$ в игре «Мусор» ядро будет непусто. Какой вид оно будет иметь? **?**

Для $n = 3$ в игре «Мусор» выпишите все неравенства, которым должен удовлетворять дележ из ядра, и убедитесь, что эти неравенства несовместны. Изобразите ситуацию графически. **?**

2.7. Сравнение теории кооперативных и некооперативных игр

Вообще говоря, теория кооперативных игр предлагает богатое разнообразие концепций решения. Мы рассмотрели решение Нэша и C-ядро, но есть еще много других подходов[10]. Каждая из этих концепций по своему интересна и имеет некоторое разумное обоснование. Но

[10]Устойчивые множества Неймана—Моргенштерна, вектор Шепли, K-ядро, нуклеолус, переговорные множества Аумана—Машлера, решение Калаи—Смородинского и многое другое.

как группа они не составляют ясной и последовательной теории. Большинство различных концепций решения имеют весьма слабую логическую связность, и поэтому их нельзя интерпретировать как частные случаи обобщающей теории. Кроме того, фактически, ни одна из классических концепций теории кооперативных игр не применима к ситуациям неполной информированности игроков и/или динамическим играм с несовершенной информированностью.

Именно этими сложностями объясняется тот факт, что теория некооперативных игр получила гораздо большее распространение в экономическом моделировании. Теория некооперативных игр позволяет делать достаточно определенные предсказания о том, каков будет исход той или иной игры. Оставшаяся часть курса будет посвящена именно некооперативным играм.