В.П. Акимов, W. Kerby

Значения для кооперативных игр. Обобщение теоремы единственности Шепли

Аннотация. Введя аксиоматическим путем значения для кооперативных игр, Шепли доказал их единственность. В статье показано, что, варьируя определенным образом аксиому эффективности, можно получить иные значения, также обладающие свойством единственности. Доказана обобщенная теорема единственности.

Ключевые слова: кооперативные игры, значения Шепли.

Теория кооперативных игр – это теория коалиций. Она изучает игровые ситуации, в которых допустимы совместные действия игроков и побочные платежи (перераспределение выигрыша). Для возможности беспрепятственного перераспределения выигрыша принимается допущение о том, что любые выигрыши, как индивидуальные, так и коллективные, приводимы к единой шкале (например, к денежному эквиваленту) и неограниченно делимы. Смысл этой идеи заключается в том, что выигрыш коалиции всегда можно разделить между ее участниками в нужной пропорции. Одной из основных проблем теории кооперативных игр является как раз проблема (справедливого) дележа.

Отметим, что для осуществления идеи побочных платежей игра должна удовлетворять определенным требованиям. Выигрыши должны быть трансферабельными. Например, в классической постановке игры «семейный спор» жена не может передать часть своего удовольствия от посещения театра мужу. Выигрыши здесь не трансферабельны, и побочные платежи невозможны. Кроме того, выигрыши коалиций игроков должны быть устроены таким образом, чтобы побочные платежи были реализуемы. (Коалиция должна иметь «лишние деньги».)

Пусть N – множество игроков. Любое непустое множество игроков $S \in N$ называется коалицией. Характеристической функцией игры n лиц, отождествляемой обычно с игрой, называется неотрицательная вещественная функция $v(S)$, определенная на множестве всех коалиций $S \in N$ и удовлетворяющая условиям:

$$v(T) + v(S) \le v(T \cup S) \quad (\text{при } T \cap S = \varnothing) \text{ и } v(\varnothing) = 0. \tag{1}$$

Иными словами, характеристическая функция – это функция выигрыша коалиции, которая каждой коалиции ставит в соответствие число – ее выигрыш в универсальных перераспределяемых единицах. Это число $v(S)$, характеризует возможности коалиции и является мерой того, чего могут достигнуть участники S, формируя свою коалицию независимо от других игроков. В частности, $v(\{i\})$ есть то, чего может достигнуть отдельный игрок i своими собственными силами: его индивидуальный выигрыш (максимин). Первое из условий (1) называется свойством супераддитивности и означает, что расширение состава коалиции не может приводить к уменьшению ее возможностей. Второе условие есть просто доопределение функции на пустом множестве: пустая коалиция имеет нулевой выигрыш. Кооперативная игра считается заданной, если задана характеристическая функция, то есть если указаны выигрыши каждой коалиции. Кооперативную игру можно рассматривать как пару (N,v). Но если множество игроков N в рассматриваемых играх неизменно, то для обозначения игры достаточно указания характеристической функции *v*. Таким образом, кооперативная игра задается в форме характеристической функции.

Из свойства супераддитивности следует, что для любой системы непересекающихся множеств $S_1, \ldots, S_k$

$$\sum_{i=1}^{k} v(S_i) \le v(N) \cdot$$

Это, в частности, означает, что не существует такого разбиения множества N на коалиции, чтобы суммарный выигрыш этих коалиций превышал выигрыш всеобщей коалиции. Это означает, что наиболее разумный выбор для всех игроков — объединиться во всеобщую коалицию N.

Основная задача теории кооперативных игр заключается в построении реализуемых принципов оптимального распределения выигрыша всеобщей коалиции v(N) между ее участниками. Пусть α_i – сумма, которую получает игрок i при распределении выигрыша. Тогда вектор $\alpha = (\alpha_1,\ldots, \alpha_n)$ называется *дележом*, если выполнены следующие условия

$$\alpha_i \ge v(\{i\}), \quad i \in N \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = v(N) \cdot \tag{3}$$

Смысл условий весьма прозрачен. Они означает, что каждый игрок должен получить при дележе не меньше, чем он может заработать в одиночку (индивидуальная рациональность), и что весь выигрыш коалиции полностью и без остатка должен быть поделен между ее участниками (эффективность).

Если в (2) - знак строгого неравенства, то игра называется существенной, в противном случае она несущественна. В существенной игре каждый участник всеобщей коалиции может получить строго больше, чем может заработать сам.

Для любого дележа α через α(S) будем обозначать величину $\sum_{i \in S} \alpha_i$. Несущественная игра имеет единственный дележ $\alpha = \left(v\left(\{1\}\right), v\left(\{2\}\right), \ldots, v\left(\{n\}\right)\right)$. Во всякой существенной игре с более чем одним игроком множество дележей бесконечно, и возникает проблема выбора наилучшего дележа.

В своей статье “A Value for n-Person Games” (1953) Ллойд Шепли [2] ввел понятие вектора значений $\varphi(v) = \left(\varphi_1, \ldots, \varphi_n\right)$ для кооперативной игры v(S) с множеством игроков N={1, 2, ..., n}, $S \subset N$. Эти значения, введенные аксиоматическим путем, могут быть интерпретированы как математическое ожидание взноса игрока i в выигрыш всеобщей коалиции *v(N)* в предположении, что игроки вступают в коалицию в произвольном порядке и все упорядочения игроков являются равновероятными.

Согласно теореме Шепли значение, определенное выше, является единственной функцией, удовлетворяющей следующей системе аксиом:

S1: Симметричность. Пусть π есть перестановка игроков, такая что π(i) есть образ игрока i. Тогда значение Шепли игрока π(i) во вновь полученной игре равно значению Шепли для игрока i в исходной игре.

$$\varphi_{\pi(i)}\left[\pi v\right] = \varphi_i\left[v\right]$$

S2: Линейность. Пусть игра $v+w$ есть сумма двух игр v и w. Тогда значения Шепли в игре $v+w$ есть сумма значений Шепли в играх v и w.

$$\varphi\left[v+w\right] = \varphi\left[v\right] + \varphi\left[w\right]$$

S3: Эффективность или нормализация. Сумма значений Шепли для всех игроков равна выигрышу всеобщей коалиции *v(N)*.

$$\sum_{N} \varphi_i = v\left(N\right)$$

Значения Шепли – это вектор дележа, т.е. способ (справедливого) распределения суммарного выигрыша v(N) полной коалиции игроков такой, что каждый игрок i получает величину φ_i (значение Шепли).

Шепли показал, что в предположениях теоремы единственности точной формулой для значения Шепли игрока i является:

$$\varphi_i\left[v\right] = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\left[v(S) - v(S \setminus \{i\})\right],$$

где n и s – числа игроков в коалициях N и S соответственно.

В [1] введено усредненное значение для кооперативных игр, особенность которого состоит в том, что его сумма с двойственным к нему значением всегда рана значению Шепли. Аксиоматика усредненного значения близка к Шеплиевской: различаются лишь третьи аксиомы. При этом также доказана единственность вводимой функции значения.

Вышесказанное заставляет предположить, что теорема единственности Шепли справедлива для целого класса аксиом нормализации и может быть сформулирована в более общем виде. Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы очертить класс аксиом нормализации, при котором теорема единственности оказывается справедливой, и доказать обобщенную теорему единственности.

Пусть $N=\{1,\ldots,n\}$ - множество игроков. Обозначим множество всех подмножеств данного множества посредством $L(N)=\{U \mid U\subseteq N, U\neq\varnothing\}$. Тогда множество всех кооперативных игр n лиц есть пространство $R^{L(N)}$ отображений L(N) на R, где каждое отображение $v\in R^{L(N)}$ расширяется на пустое множество посредством $v(\varnothing)=0$

Множество T является носителем игры ***v*** тогда и только тогда, когда $\forall S\subset N \quad v(S\cap T)=v(S)$

Любая перестановка π элементов N (то есть $\pi\in Sym(N)$) порождает перестановочный автоморфизм $\overline{\pi}$ пространства $R^{L(N)}$:

$$\overline{\pi}:\quad R^{L(N)}\to R^{L(N)},\quad v\to v^{\overline{\pi}}$$

где $v^{\overline{\pi}}$ определяется следующим образом:

$$\forall S\in L(N):\quad v^{\overline{\pi}}(S)=v\left(\pi^{-1}(S)\right)$$

В дальнейшем R^N будет обозначать n-мерное действительное векторное пространство. Элементами этого пространства являются вектора $(r_1,r_2,\ldots,r_n),\quad r_i\in R,\quad i=1,\ldots,n$. Для любого $T\in L(N)$ определим подпространство R^T, задаваемое множеством *T*. Там, где это удобно, будем считать элементами подпространства n-мерные вектора $(r_1,r_2,\ldots,r_n)$, *где* $r_i=0 \quad \forall i\in N\setminus T$.

Функцией значения на $R^{L(N)}$ является отображение

$$val:\quad R^{L(N)}\to R^N,\quad v\to val[v]$$

которое не искажает носители, то есть $val[v]\subset R^T$ для любого носителя T игры ***v***.

Мы имеем

$$val[v]=\left(val_1[v],val_2[v],\ldots,val_n[v]\right),$$

где *val*$val_i[v]$, $i=1,2,\ldots,n$ - называется значением игрока ***i*** в игре ***v***.

Прежде всего, переформулируем теорему Шепли во введенных обозначениях.

Теорема Шепли. Существует единственная функция

$$\varphi:\quad R^{L(N)}\to R^N,\quad v\to\varphi[v]=\left(\varphi_1[v],\ldots,\varphi_n[v]\right),$$

удовлетворяющая следующим свойствам:

Для любых $v,u\in R^{L(N)}$

S1 $\varphi_{\pi(i)}\left[v^{\overline{\pi}}\right]=\varphi_i[v] \quad \forall\pi\in Sym(N),\quad \forall i\in N$ (симметрия)

S2 $\varphi[u+v]=\varphi[u]+\varphi[v]$ (аддитивность)

S3 $\sum_{i\in T}\varphi_i[v]=v(T)$ для любого носителя *T* игры ***v*** (φ сохраняет носители)

φ задается уравнениями:

$$\varphi_i[v]=\sum_{S\subset N}\gamma_n(s)\cdot\left[v\left(S\cup\{i\}\right)-v(S)\right],\quad i\in N$$

где $\gamma_n(s)=\dfrac{s!(n-s-1)!}{n!},\quad s=|S|$

Так как для любого носителя *T* игры ***v*** мы очевидно имеем $\varphi_i=0 \quad \forall i\in N\setminus T$, то функция φ не нарушает носители.

Введем в рассмотрение взаимно однозначное аддитивное отображение:

$$\sigma:\quad R^{L(N)}\to R^{L(N)},\quad v\to v^{\sigma}$$

которое коммутирует со всеми перестановочными автоморфизмами $R^{L(N)}$, и которое сохраняет носители, то есть: $\sigma\overline{\pi}=\overline{\pi}\sigma$ $\forall\pi\in Sym(N)$; и $\forall T\subset N,\quad \forall v\in R^{L(N)}$ *T* будет носителем ***v*** в том и только в том случае, когда *T* является носителем v^{σ}.

Пусть $Aut\left(R^{L(N)},+\right)$ - группа всех аддитивных автоморфизмов на $R^{L(N)}$. Определим Шеплиевскую подгруппу этой группы следующим образом:

$$Aut_S\left(R^{L(N)}\right)=$$

$$=\ \sigma\in Aut\left(R^{L(N)},+\right)\Big|\begin{array}{l}\sigma\overline{\pi}=\overline{\pi}\sigma\quad\forall\pi\in Sym(N);\\ \text{и }\sigma\text{ сохраняет носители}\end{array}$$

Теперь докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть

$$\sigma: \quad R^{L(N)} \to R^{L(N)}, \quad v \to v^{\sigma}$$

является аддитивным взаимно однозначным отображением, которое коммутирует со всеми перестановочными автоморфизмами на $R^{L(N)}$, и которое сохраняет носители. То есть: $\sigma \in Aut_S\left(R^{L(N)}\right)$.

Тогда существует единственная функция

$$val^{\sigma}: \quad R^{L(N)} \to R^{N}, \quad v \to val^{\sigma}[v] = \left(val_1^{\sigma}[v], \ldots, val_n^{\sigma}[v]\right),$$

которая удовлетворяет свойствам:

Для любых $v, u \in R^{L(N)}$

S1 $val_{\pi(i)}^{\sigma}\left[v^{\pi}\right] = val_i^{\sigma}[v] \quad \forall \pi \in Sym(N), \quad \forall i \in N$ (симметрия)

S2 $val^{\sigma}[u+v] = val^{\sigma}[u] + val^{\sigma}[v]$ (аддитивность)

S3 $\sum_{i \in T} val_i^{\sigma}[v] = v^{\sigma}(T)$ для любого носителя T игры $\boldsymbol{v}$ (val^{σ} сохраняет носители)

Эта функция имеет вид:

$$val^{\sigma} = \varphi\sigma,$$

где φ - функция значения Шепли.

Доказательство. Пусть $\sigma \in Aut_S\left(R^{L(N)}\right)$. Положим $val^{\sigma} = \varphi\sigma$. Для любых $v, u \in R^{L(N)}$ имеем:

S1: $val_{\pi(i)}^{\sigma}\left[v^{\pi}\right] = \varphi_{\pi(i)}\left[v^{\pi\sigma}\right] = \varphi_{\pi(i)}\left[v^{\sigma\pi}\right] =$
$= \varphi_i\left[v^{\sigma}\right] = \varphi_i\sigma[v] = val_i^{\sigma}[v] \quad \forall \pi \in Sym(N)$, $\forall i \in N$

S2: $val^{\sigma}[u+v] = \varphi\sigma[u+v] = \varphi\left[u^{\sigma} + v^{\sigma}\right] =$
$= \varphi\left[u^{\sigma}\right] + \varphi\left[v^{\sigma}\right] = val^{\sigma}[u] + val^{\sigma}[v]$

$S3^{\sigma}$ для любого носителя T игры $\boldsymbol{v}$: $\sum_{i \in T} val_i^{\sigma}[v] = \sum_{i \in T} \varphi\left[v^{\sigma}\right] = v^{\sigma}(T)$ так как T является носителем v^{σ}.

Таким образом, существует, по крайней мере, одна функция val^{σ}, которая удовлетворяет $\left\{S1, S2, S3^{\sigma}\right\}$. Предположим, что существует некоторая другая функция ψ, удовлетворяющая $\left\{S1, S2, S3^{\sigma}\right\}$. Положим $\phi = \psi\sigma^{-1}$. Очевидно, что ϕ удовлетворяет S1 и S2. Для любого носителя T игры $\boldsymbol{v}$ имеем:

$$\sum_{i \in T} \phi_i' [v] =$$

$$= \sum_{i \in T} \left(\psi\sigma^{-1}\right)_i [v] = \sum_{i \in T} \psi_i\left[v^{\sigma^{-1}}\right] = v^{\sigma^{-1}\sigma}(T) = v(T)$$

так как T является носителем $v^{\sigma^{-1}}$. Таким образом, ϕ удовлетворят S3, и мы имеем теорему Шепли: $\phi = \varphi$. Следовательно, $\psi = \varphi\sigma = val^{\sigma}$.

Заметим, что теорема Шепли является частным случаем данной при $\sigma = id$. Ясно также, что каждая функция val^{σ} не нарушает носителей, и, следовательно, является функцией значения.

Литература

1. Akimov, V. and W. Kerby. (2000). "An Average Value Function for Cooperative Games", in "Power Indices and Coalition Formation", edited by M. J. Holler and G. Owen and published by Kluwer Academic Publishers; preliminary publication: Homo Oeconomicus 17 (1/2), 2000.
2. Shapley, L., (1953) A value for n-person games. Contributions to the Theory of Games II, Ed. H.W. Kuhn and A.W. Tacker. Annals of Mathematics Study 24. Princeton p. 307-317.

Акимов Владимир Павлович. Профессор кафедры математических методов и информационных технологий МГИМО(У). Окончил Московский физико-технический институт в 1978 году. Доктор физико-математических наук, доцент. Автор 45 печатных трудов. Область научных интересов: искусственный интеллект, теория игр, математическое моделирование. V_Akimov55@mail.ru.

William Kerby. Доктор, профессор математики Гамбургского университета. Гамбургский университет, Бундештрассе, 55, D-20146, Гамбург, Германия. E-mail: bill.kerby@t-online.de.