Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Таганрогский государственный радиотехнический университет

В.И.ФИНАЕВ

МОДЕЛИ СИСТЕМ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Таганрог 2005

УДК 518.5.001.57(075.8)

В.И.Финаев. Модели систем принятия решений: Учебное пособие. - Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2005. - 118 с.

ISBN

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям: 220200 «Автоматизация и управление», 220300 «Автоматизированные технологии и производства», 220400 «Мехатроника и робототехника», 230100 «Информатика и вычислительная техника». В учебном пособии приведены основные теоретические сведения из теории множеств, нечеткой логики, моделирования ситуационых систем при нечетком определении параметров. Приведены модели нечетких конроллеров.

Табл. 4. Ил. 68. Библиогр.: 13 назв.

Печатается по решению ред.-изд. совета Таганрогского государственного радиотехнического университета.

Рецензенты:

Региональный (областной) центр новых информационных технологий, директор центра, проректор по информатике, докт. техн. наук, профессор А.Н.Целых.

Ромм Я.Е., докт. техн. наук, профессор, зав. кафедрой информатики ТГПИ.

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

Нельзя объять необъятное.
Козьма Прутков

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование сложных систем требует знаний из области естественно гуманитарных дисциплин, в первую очередь знаний математики и физики. Методами системного анализа позволяют разработать модель. Исследование модели методами системного анализа позволяет получить рекомендации относительно поведения реального объекта. Моделирование - творческий процесс, требующий определенного искусства, математических знаний, практических навыков и умения предвидеть результат исследований.

При управлении сложными нелинейными объектами применяют два подхода. Первый подход состоит в том, что разрабатывают для объекта математическую модель, которая может иметь достаточно сложную форму, содержать большое число эмпирических коэффициентов, идентификация которых может задачей, имеющей очень сложное решение или не имеющей решение вообще. Примеров подобных объектов много – это ректификационные колонки при перерботке нефти, печи в металлургии, цементные печи, системы управления подачей топлива в двигатели внутреннего сгорания и т.д.

Разработанные с применением данного подхода системы управления не обеспечивают требуемого качества управления.

При другом подходе, применяя эвристические алгоритмы, используя показания контрольно-измерительных приборов, опыт и интуицию инженерно-технического персонала, разрабатывают системы управления в виде нечетких контроллеров, которые справляются с управлением сложными объектами достаточно уверенно. Впервые этот подход получил инженерное воплощение при управлении цементной печью.

Так как язык нечеткой логики близок по структуре к естественному языку, то это упрощает процедуры построения эвристических алгоритомов для решения задач управления сложными объектами. При применении нечеткой логики выделяют две практические области:

- разработка нечетких регуляторов, которые в прямом контуре управления выполняют функции линейного преобразователя, т.е. могут реализовывать линейные функции П-, ПИ-, ПИД- и других регуляторов;

- разработка комбинированных нечетких регуляторов, причем в прямом контуре управления имеются традиционные регуляторы, а в дополнительном контуре имеются нечеткие системы, позволяющие подстраивать коэффициенты усиления прямого контура к изменяющимся условиям функционирования объекта.

Основные задачи курса данного пособия следующие:

- изучение студентом четких и нечетких множеств, применение сведений их которых необходимо для формализации параметров при решении задач моделирования;
- изучение нечеткой логики для формализации естественного языка при описании работы специалистов;
- изучение моделей ситуационных систем, параметры которых формализованы методами теории нечетких множеств, а управления осуществляется путем принятия решений при формализации правил методами нечеткой логики;
- изучение моделей нечетких контроллеров.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Множества

Под множеством понимается совокупность различаемых друг от друга объектов, которые возможно рассматривать по существующим признакам как единое целое. В множестве не должно быть одинаковых, неразличимых элементов. Множества бывают конечными, если они состоят из конечного числа элементов, и бесконечными в противном случае. Объекты множеств называют элементами множества.

Множества принято обозначать заглавными буквами латинского или русского алфавита, а элементы множеств - строчными буквами. Элементы множества могут быть обозначены одной и той же буквой, но с индексами.

Множества задаются двумя способами: перечислением и описанием элементов.

Если все элементы $\mathbf{a_i}$, $\mathbf{i = \overline{1,n}}$ множества **A** задаются в виде списка, т.е. **A={a1, a2, …,an},** то такой способ задания называется перечислением. Принадлежность элементов **ai** множеству **A** символически обозначается в виде $\mathbf{a_i \in A}$, $\mathbf{i = \overline{1,n}}$, что читается «$\mathbf{a_i}$ принадлежит **A**». Если некоторый объект **aj** не принадлежит множеству **A**, то это символически обозначается в виде $\mathbf{a_j \notin A}$, $\mathbf{j = \overline{1,n}}$.

Элементы могут принадлежать множеству в силу некоторого общего их свойства. Если **P(x)** – свойство элементов **x**, то множество **A** элементов **x**, обладающих свойством **P(x)**, задается способом описания. Символьное задание множества способом описания имеет вид **A={x∈B/P(x)},** где **B** – произвольное множество. Например, если **B** – множество целых чисел, то множество **A** целых чисел в интервале (1,10) определится следующим образом: **A={x∈B/1<x<10}.**

Число элементов, принадлежащих множеству, определяет мощность множества. Например, если **A={a1, a2, a3, a4, a5, a6,}**, то мощность множества **A**, обозначаемая $|\mathbf{A}|$, будет равна шести.

Множество, не содержащее никаких элементов, называется пустым и имеет обозначение ∅.

Если все элементы множества **A** можно пронумеровать в виде бесконечной последовательности $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots}$, причем каждый элемент имеет только один номер, то такое множество называется счетным.

Бесконечные множества, элементы которых невозможно пронумеровать, называют несчетными множествами. Примером может служить множество точек на отрезке **[a,b].**

Если множество не является своим собственным элементом, то такое множество называется ординарным. Например, множество всех натуральных чисел является ординарным.

Множества, содержащие сами себя в качестве элементов, называются экстраординарными. Например, множество всех абстрактных понятий является абстрактным понятием.

Два множества называются равными, если они содержат одни и те же элементы. Множество **A** не равно множеству **B** **(A≠B)**, если в множестве **A** имеются элементы, не принадлежащие множеству **B**, либо в множестве **B** имеются элементы, не принадлежащие множеству **A**.

Символ равенства множеств обладает свойствами:

а) рефлексивности (лат. reflexio – отражение) **A=A**;

б) симметричности: если **A=B**, то **B=A**;

в) транзитивности (лат. transitus – переход): если **A=B** и **B=C**, то **A=C**.

1.2. Подмножества

В математической логике имеются символы, которые возможно использовать для определения подмножеств:

∀ - квантор общности, означающий «для всех», «любой», «каков бы ни был»;

∃ - квантор существования, означающий «существует такой» или «имеется такой»;

→ - импликация (лат implicatio - сплетение, переплетение), означающая «влечет за собой»;

↔ - эквивалентность, означающая «**A** эквивалентно **B**» или «**A** тогда и только тогда, когда **B**».

Множество **A** является подмножеством **B**, если любой элемент **a∈A** принадлежит и множеству **B** **(a∈B)**. Используя символы алгебры логики, определение подмножества можно записать в виде логического выражения **∀a[a∈A→a∈B],** которое читается: «для любого a утверждение «**a** принадлежит **A**» влечет за собой утверждение «**a** принадлежит **B**».

Принадлежность подмножества **A** множеству **B** определяется также записью **A⊆B,** что читается: «**A** является (входит) в **B**», а символ ⊆ является символом включения. Если существует хотя бы один элемент множества **A**, не принадлежащий множеству **B**, то обозначают **A⊄B**. Если **A⊆B** и **A≠B**, то говорят, что **A** строго включается в **B** и пишут **A⊂B**.

Свойства подмножества следующие:

а) рефлексивность: $A \subseteq A$;

б) транзитивность: $[A \subseteq B$ **и** $B \subseteq C] \rightarrow A \subseteq C$;

в) $\varnothing \subseteq A$ – любое множество содержит пустое множество.

Множества $\varnothing$ и **A** называют несобственными подмножествами множества **A**.

1.3. Операции над множествами

1.3.1. Объединение множеств. Объединением множеств **A** и **B** ($A \cup B$) называется множество **C**, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств **A** или **B**. Формально объединение можно записать в виде выражения:

$$C = A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ или } a \in B\}.$$

Геометрическая иллюстрация объединения приведена на рис. 1.1.

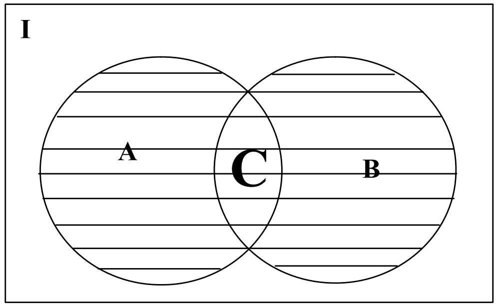


Рис. 1.1

Если имеется совокупность (система) **M**, содержащая множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$, т.е. $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, то объединение этих множеств:

$$\bigcup_{A \in M} A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

представляет собой множество, состоящее из всех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств совокупности **M**.

Для объединения множеств справедливы свойства:

- коммутативности (лат. commutare – менять, переменять): $A \cup B = B \cup A$;

- ассоциативности (лат. associare - присоединять): $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$;

- идемпотентности: $A = A \cup A$.

Введем понятие универсального (полного, универсума) множества **I**. Это некоторое множество, содержащее все рассматриваемые множества, которые входят в **I**, как подмножества.

Тогда очевидно, что $\mathbf{A\cup\varnothing=A;\ A\cup I=I,\ A\subseteq A\cup B;\ B\subseteq A\cup B.}$

1.3.2. Пересечение множеств. Пересечением множеств **A** и **B** ($\mathbf{A\cap B}$) называется множество **C**, состоящее из тех и только тех элементов, соответственно принадлежащих множеству **A** и множеству **B**.

Формально это можно записать выражением: $\mathbf{C=A\cap B=\{a\ |a\in A\ и\ a\in B\}.}$

Иллюстрация пересечения множеств **A** и **B** диаграммой Эйлера – Венна приведена на рис. 1.2.

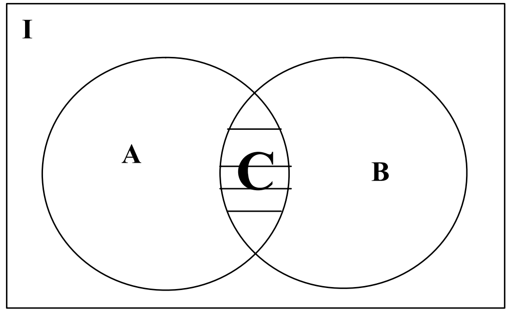


Рис. 1.2

Для системы $\mathbf{M=\{A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n\}}$ справедливо:

$$\bigcap_{\mathbf{A\in M}}\mathbf{A}=\bigcap_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{A_i}=\mathbf{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n}.$$

Также выполняются соотношения:

$$\mathbf{A\cap\varnothing=\varnothing;\ A\cap I=A,\ A\cap B\subseteq A;\ A\cap B\subseteq B.}$$

Для пересечения множеств справедливы свойства:

- коммутативности: $\mathbf{A\cap B=B\cap A}$;

- ассоциативности: $\mathbf{(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C}$;

- идемпотентности: $\mathbf{A=A\cap A}$.

1.3.3. Разность множеств. Разностью множеств **A** и **B** ($\mathbf{A\backslash B}$) называется множество **C**, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат **A** и не принадлежат **B**. Формально $\mathbf{A\backslash B}$ определится выражением: $\mathbf{C=A\backslash B=\{a\ |a\in A\ и\ a\notin B\}.}$ На диаграмме Эйлера – Венна разность множеств $\mathbf{A\backslash B}$ имеет вид, приведенный на рис. 1.3. Очевидно, что $\mathbf{A\backslash B\subseteq A,\ B\backslash A\subseteq B,\ A\backslash\varnothing=A,\ \varnothing\backslash A=\varnothing,\ A\backslash I=\varnothing.}$

Симметрической разностью множеств **A** и **B** ($A \ominus B$) называется множество **C**, элементы которого принадлежат множеству **A\B** или множеству **B\A**. Симметрическая разность $C = A \ominus B$ на диаграмме Эйлера – Венна иллюстрируется рис. 1.4.

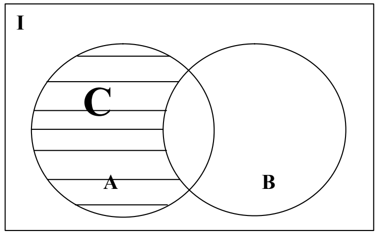


Рис. 1.3

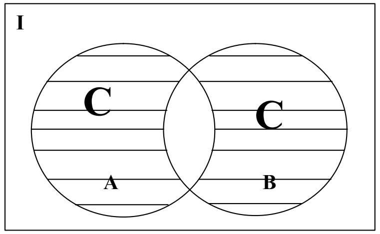


Рис. 1.4

1.3.4. Дополнение множеств. Множество $\overline{A}$, определяемое из соотношения $\overline{A} = I \setminus A$, называется дополнением множества **A** до универсального множества **I**. Формально это запишется выражением $\overline{A} = \{a | a \in I, \ a \notin A\}.$ Очевидно, что $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = I$, $A \setminus \overline{B} = A \cap \overline{B}$, $\overline{I} = \varnothing$. Дополнение множеств обладает свойствами инволюции (лат. involutio – свертывание), что формально запишется в виде $\overline{\overline{A}} = A$.

1.3.5. Разбиение множества. Пусть имеется множество **C** и система множеств $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Система (семейство) множеств **M** называется разбиением множества **C**, если она удовлетворяет условиям:

а) любое множество $Ai \in M$ является непустым подмножеством множества **C**, т.е. $\forall A \in M \quad [A \subseteq M], (A \neq \varnothing);$

б) любые два множества A_i и A_j, $(i \neq j)$, $A_i \in M$, $A_j \in M$ являются непересекающимися, т.е. $\forall\ A_i, A_j \in M\ [A_i \neq A_j \to A_i \cap A_j = \varnothing], (i \neq j);$

в) объединение всех множеств, входящих в разбиение **M**, дает множество **C**, т.е.

$$\bigcup_{A \in M} A = C.$$

Иллюстрация разбиения приведена на рис. 1.5.

Элементы разбиения **M** называются классами разбиения. Разбиение **M** множества **C** называется поэлементным, если каждый класс разбиения **M** является одноэлементным множеством. Разбиение **M** множества **C** называется целым, если оно содержит один класс, совпадающий с множеством **C**. Указанные разбиения носят еще название тривиальных.

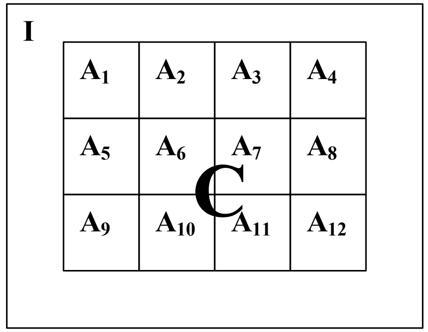


Рис. 1.5

1.4. Тождества алгебры множеств

Операции пересечения, объединения и дополнения позволяют составлять из множеств выражения, называемые алгебраическими. Если два или несколько алгебраических выражений, составленных из ряда множеств, представляют в итоге одно и то же множество, то их можно приравнять друг к другу, получая алгебраическое тождество. Основные тождества алгебры множеств следующие:

- дистрибутивность (анг. distribution – распределение, размещение):

$$\mathbf{(A\cup B)\cap C=(A\cap B)\cup(B\cap C);\quad (A\cap B)\cup C=(A\cup B)\cap(B\cup C);}$$

- ассоциативность:

$$\mathbf{(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C;\quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C};$$

- закон де Моргана:

$$\mathbf{\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\ A\setminus B=A\cap\overline{B},}$$

$$\mathbf{A\setminus(A\setminus B)=A\cap B,\ (A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C),\ A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C).}$$

Доказательство справедливости перечисленных выше множеств легко просматривается на геометрической иллюстрации с помощью диаграмм Эйлера – Венна.

1.5. Прямое произведение и проекция множеств

Упорядоченное множество называют кортежем (фр. cortege – торжественное шествие, выезд). **Кортеж** - последовательность элементов, в которой каждый элемент занимает определенное место. Элементы кортежа называются компонентами. Число элементов кортежа называется его длиной. Множество $\mathbf{A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)}$ является кортежем длины $\mathbf{n}$ с компонентами $\mathbf{a_1,a_2,\ldots,a_n}$. Понятие кортежа соответствует известному понятию вектора.

Кортежи длины **n** называют **n**-ми, а пустой кортеж длины ноль обозначается ( ) или **Λ**. В отличие от обычного множества в кортеже могут быть одинаковые элементы.

Кортеж длины три $(\mathbf{a_1,a_2,a_3})$ рассматривается как точка в трехмерном пространстве (рис. 1.6), а его проекции на соответствующие плоскости образуют кортежи длины два (двойки) – $(\mathbf{a_1,a_2}), (\mathbf{a_1,a_3}), (\mathbf{a_2,a_3})$, т.е.

$$\text{Пр}_{12}(a_1,a_2,a_3) = (a_1,a_2);\ \text{Пр}_{13}(a_1,a_2,a_3)=(a_1,a_3);\ \text{Пр}_{23}(a_1,a_2,a_3)=(a_2,a_3);$$

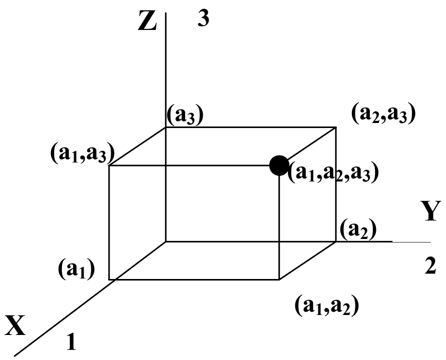


Рис. 1.6

Для **n**-мерного пространства проекция кортежа длины **n** на оси **i, j,…, k** определится как $\text{Пр}_{i,\,j,\dots,k}(a_1,a_2,\dots,a_n)=(a_i,a_j,\dots,a_k)$, где $1 \le i < j <\dots< k \le n$.

Прямым произведением множеств **A** и **B** является множество **C** ($C=A\times B$), содержащее упорядоченные пары (двойки, кортежи длины два), первая компонента каждой из которых принадлежит множеству **A**, а вторая - множеству **B**. Прямое произведение множеств **A** и **B** запишется в виде выражения: $C=A\times B=\{(a, в) \mid a\in A, в\in B\}$.

Истинно высказывание: $(a, в)\in A\times B \leftrightarrow a\in A\ \&\ в\in B$. Например, дано $A=(a_1, a_2, a_3)$ и $B=(в_1, в_2)$, тогда $C=A\times B=\{(a_1,в_1),(a_1,в_2),(a_2,в_1),(a_2,в_2),(a_3,в_1),(a_3,в_2)\}$.

Подмножества множества $C=A\times B$ называют еще графиками.

Графиком называют любое множество, элементы которого представляют собой упорядоченные пары.

Если имеется **n** множеств $A_1,A_2,\dots,A_n$, то их прямым произведением называется множество $C=A_1\times A_2\times\dots\times A_n$, состоящее из таких кортежей длины **n**, первая компонента каждого из которых принадлежит множеству A_1, вторая – множеству A_2,…, $_n$-я компонента принадлежит множеству A_n. Для произвольной $_n$-ки $(a_1,a_2,\dots,a_n)$, принадлежащей прямому произведению множеств $C=A_1\times A_2\times\dots\times A_n$, причем $a_1\in A_1,\ a_2\in A_2,\dots,\ a_n\in A_n$, истинно высказывание $(a_1,a_2,\dots,a_n)\in A_1\times A_2\times\dots\times A_n \leftrightarrow a_1\in A_1,\ a_2\in A_2,\dots,\ a_n\in A_n$.

Если определить прямое произведение одного и того же множества **A** **r** раз, то мы получим множество **C**, которое явится **r**–й степенью множества **A**. Формально это будет записано в виде: $\mathbf{C=A^r=A\times A\times\ldots\times A}$.

Определим также, что $\mathbf{A_0=\{\Lambda\}}$.

Пусть **A** – произвольное множество. Подмножество $\Delta A\subseteq A^2$ называется диагональю множества **A**, если оно состоит из пар вида **(a,a)**, где $\mathbf{a\in A}$. Если $\mathbf{A=(a_1,a_2,a_3)}$, то $\mathbf{\Delta A=\{(a_1,a_1), (a_2,a_2), (a_3,a_3)\}}$.

Определим операцию проектирования множества. Пусть **A** – множество, состоящее из кортежей длины **r**. Тогда проекцией множества **A** будет называться множество проекций кортежей из множества **A**.

Рассмотрим пример. Пусть множество **A** состоит из трех троек

$$A = \{(a_1^1, a_2^1, a_3^1), (a_1^2, a_2^2, a_3^2), (a_1^3, a_2^3, a_3^3)\},$$

причем каждой тройке соответствует точка в трехмерном пространстве. Тогда проекции множества **A** на оси **1,2 и 3** определятся множествами $\mathbf{Пр_1A=}(a_1^1, a_1^2, a_1^3)$, $\mathbf{Пр_2A=}(a_2^1, a_2^2, a_2^3)$, $\mathbf{Пр_3A=}(a_3^1, a_3^2, a_3^3)$. Если обозначить $\mathbf{Пр_1A=A_1}$, $\mathbf{Пр_2A=A_2}$, $\mathbf{Пр_3A=A_3}$, то очевидно, что $\mathbf{A_1\times A_2\times A_3=A}$. Тогда, если $\mathbf{C=A\times B}$, то **Пр1C=A, Пр2C=B**, а если $\mathbf{D\subseteq A\times B}$, то $\mathbf{Пр1D\subseteq A}$, $\mathbf{Пр2D\subseteq B}$.

1.6. Соответствия

Если существует способ (закон) сопоставления элементов $\mathbf{x\in X}$ с элементами $\mathbf{y\in Y}$ так, что имеется возможность образования двоек **(x,y),** причем для каждого элемента $\mathbf{x\in X}$ возможно указать элемент $\mathbf{y\in Y}$, с которым сопоставляется элемент **x**, то говорят, что между множествами **X** и **Y** установлено соответствие. В сопоставлении могут участвовать не все элементы **X** и **Y.** Для задания соответствия необходимо указать:

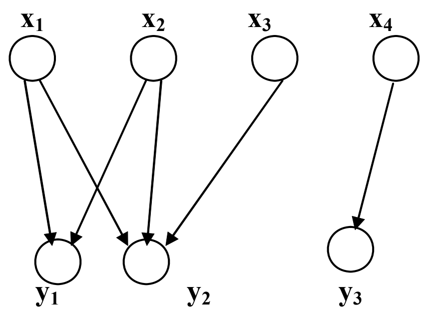
- множество **X**, элементы которого сопоставляются с элементами другого множества;
- множество **Y**, с элементами которого сопоставляются элементы множества **X**;
- множество $\mathbf{Q\subseteq X\times Y}$, определяющее закон, согласно которому осуществляется соответствие, т.е. перечисляющее все пары **(x,y),** участвующие в сопоставлении.

Соответствие, обозначаемое через **q**, представляет собой тройку множеств **q=(X,Y,Q),** где: **X** – область отправления соответствия, **Y** – область прибытия соответствия, **Q** – график соответствия, $\mathbf{Q\subseteq X\times Y}$. Очевидно, что $\mathbf{Пр_1Q\subseteq X}$, а $\mathbf{Пр_2Q\subseteq Y}$, причем множество $\mathbf{Пр_1Q}$ называется областью определения соответствия, а $\mathbf{Пр_2Q}$ – областью значений соответствия. Способы задания соответствий следующие.

При теоретико-множественном задании определяют множества $\mathbf{X=\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}}$, $\mathbf{Y=\{y_1, y_2,\ldots,y_m\}}$ и график $\mathbf{Q=\{(x_i,y_j)\}}$, $\mathbf{x\in X}$, $\mathbf{y\in Y}$ $\mathbf{(i=\overline{1,n})}$, $\mathbf{(j=\overline{1,m})}$

При матричном способе задания соответствие задается в виде матрицы инцидентности $\mathbf{R_Q}$, которая имеет вид прямоугольной таблицы размером $\mathbf{n\times m}$. Элементы $\mathbf{xi\in X}$ соответствуют строкам матрицы $\mathbf{R_Q}$, а элементы $\mathbf{y_j\in Y}$ соответствуют столбцам. На пересечении $\mathbf{x_i}$ строки и $\mathbf{y_j}$ столбца ставится элемент $\mathbf{r_{ij}=1}$, если элемент $\mathbf{(x_i,y_j)\in Q}$, и $\mathbf{r_{ij}=0}$, если $\mathbf{(xi,y_j)\notin Q}$.

При графическом способе соответствие задается в виде рисунка (см. рис. 1.7.), на котором элементы $\mathbf{x_i\in X}$ – кружки одной линии, элементы $\mathbf{y_j\in Y}$ – кружки другой линии, а каждая двойка $\mathbf{(x_i,y_j)\in Q}$ обозначается стрелкой, идущей от кружка $\mathbf{x_i}$ к кружку $\mathbf{y_j}$. Такое представление называется графиком.



$$\mathbf{X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\ Y=\{y_1,y_2,y_3\},\ Q=\{(x_1,y_1),\ (x_1,y_2),\ (x_2,y_1),\ (x_2,y_2),\ (x_3,y_2),\ (x_4,y_3)\}.}$$

Рис. 1.7

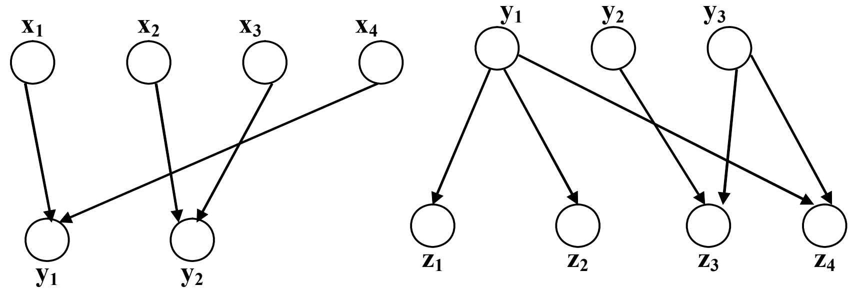
Если будем сопоставлять для множества элементов $\mathbf{y\in Y}$ элементы из множества $\mathbf{X}$, то получим соответствие $\mathbf{q^{-1}=(Y,X,Q^{-1})}$, обратное соответствие $\mathbf{q}$ (инверсия соответствия $\mathbf{q}$).

Композиция (лат. compositio – сочинение, составление) соответствий - последовательное применение двух и более соответствий. Композиция двух соответствий есть операции с тремя множествами, на которых определены два соответствия:

$$\mathbf{Q=(X,Y,Q),\ \ Q\subseteq X\times Y,\ \ p=(Y,Z,P),\ \ P\subseteq Y\times Z.}$$

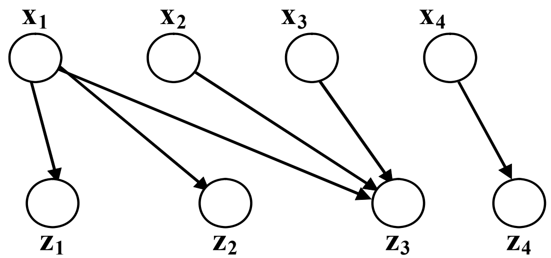
Соответствие $\mathbf{q}$ определяет для некоторого элемента $\mathbf{x\in X}$ некоторый (один или более) элемент $\mathbf{y\in Y}$, а соответствие $\mathbf{p}$ для некоторого элемента $\mathbf{y\in Y}$ определяет некоторый элемент $\mathbf{z\in Z}$. Композиция соответствий $\mathbf{q(p)}$ сопоставляет каждому элементу $\mathbf{x\in X=\Pi p_1 Q}$ (области определения соответствия $\mathbf{q}$) один или более элементов $\mathbf{z\in Z=\Pi p_2 P}$ (области значений соответствия $\mathbf{p}$). Композиция соответствий задается выражением $\mathbf{q(p)=(X,Z,Q\circ P)}$.

Пример графического задания композиции приведен на рис. 1.8 и рис. 1.9.



$\mathbf{q=\{(x_1,x_2,x_3,x_4), (y_1,y_2), (x_1,y_1), (x_2, y_2), (x_3,y_2), (x_4,y_1)\}}$,
$\mathbf{p=\{(y_1,y_2,y_3), (z_1,z_2,z_3,z_4), (y_1,z_1), (y_1,z_2), (y_1,z_4), (y_2,z_3), (y_3,z_3), (y_3,z_4)\}}$

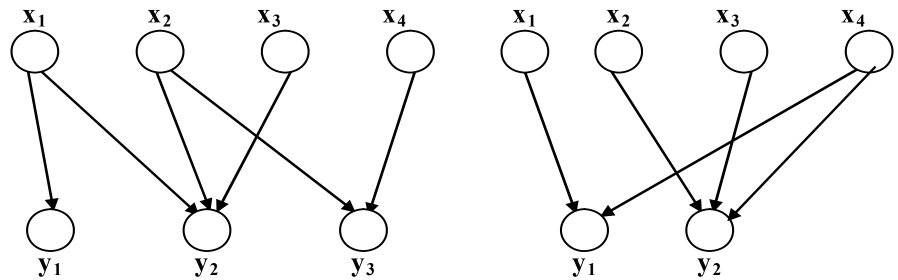
Рис. 1.8



$\mathbf{q(p)=\{(x_1,x_2,x_3,x_4), (z_1,z_2,z_3,z_4), (x_1,z_1), (x_1,z_2), (x_1,z_4), (x_2,z_3), (x_3,z_3), (x_4,z_4)\}}$

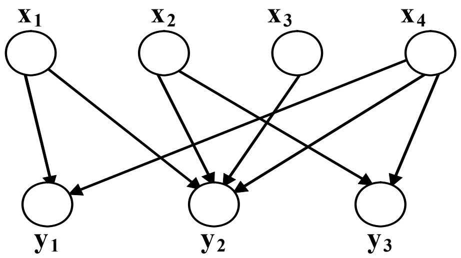
Рис. 1.9

Пример графического задания операций объединения и пересечения соответствий приведен на рис. 1.10 – рис.1.12.



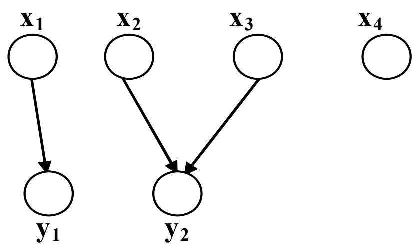
$\mathbf{q=\{(x_1,x_2,x_3,x_4), (y_1,y_2,y_3), (x_1,y1), (x_1,y_2), (x_2,y_2), (x_2,y_3), (x_3,y_2), (x_4,y_3)\}}$,
$\mathbf{p=\{(x_1,x_2,x_3,x_4), (y1,y_2), (x_1,y1), (x_2,y_2), (x_3,y_2), (x_4,y_1), (x_4, y_2)\}}$.

Рис. 1.10



$q\cup p=\{(x_1,x_2,x_3,x_4), (y_1,y_2,y_3), (x_1,y_1), (x_1,y_2), (x_2,y_2), (x_2,y_3), (x_3,y_2), (x_4,y_1), (x_4,y_2), (x_4,y_3)\}$.

Рис. 1.11



$q\cap p=\{(x_1,x_2,x_3,x_4), (y1, y2), (x1, y1), (x2, y2), (x3, y2)\}$.

Рис. 1.12

1.7. Отображения

Для соответствия **$q=(X,Y,Г)$ $Г\subseteq X\times Y$**, **$Пр_1Г\subseteq X$**. Рассмотрим случай, когда **$Пр_1Г=X$**, т.е. тройка множеств **$(X,Y,Г)$** определяет соответствие, для которого область определения **$Пр_1Г$** совпадает с областью отправления **X**. То есть для всякого **$x\in X$** существует такой элемент **$y\in Y$**, что двойка **$(x, y) \in Г$**.

Соответствие, определенное на всяком **$x\in X$**, называется отображением **X** в **Y** и формально записывается в виде **$q=(X, Y, Г)$** или **$Г: X\rightarrow Y$,** где **Г** – закон, в соответствии, с которым осуществляется соответствие.

Если отображение неоднозначно, т.е. элементу **$x\in X$** можно поставить в соответствие несколько элементов из множества **Y**, то в данном случае отображение **Г** элементу **$x\in X$** ставит в соответствие некоторое подмножество **Гx**, причем **$Гx\subseteq Y$,** а **Гx** называется образом элемента **x**.

Пример: Пусть на экзамен явилось множество студентов **$S=\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}$**. На экзамене каждому студенту может быть поставлена одна из множества оценок **$C=\{c_1,c_2,c_3,c_4\}$**, где **C={“неуд.”, “удовл.”, “хорошо”, “отлично”}**.

Говоря языком теории множеств, (по закону **Г** – уровень знаний студентов) модель результатов экзамена будет представлена отображением (каждому элементу множества **C** сопоставляется элемент множества **S**) - $\mathbf{Г: C \to S}$.

Таким образом, каждой оценке $\mathbf{C_i}$ из множества **C** будут сопоставлены в соответствие некоторые подмножества студентов $\mathbf{ГC_1, ГC_2, ГC_3, ГC_4, ГC_i \subseteq S}$.

Пусть $\mathbf{A \subseteq X}$. Образом **ГА** множества **А** называется совокупность элементов множества **Y**, которые являются образами **Гx** для всех $\mathbf{x \in A}$.

В рассмотренном выше примере существует подмножество оценок $\mathbf{П=\{c_2, c_3, c_4\}}$, получив которые на экзамене, студент не считается задолжником по данному курсу. Тогда образом множества **П** будет множество $\mathbf{ГП \subseteq S}$, которое состоит из студентов, не имеющих к концу экзамена задолженности по данному курсу.

Рассмотрим свойства отображений.

Согласно сделанному выше определению, формально

$$\mathbf{ГA = \bigcup_{x \in A} ГA}.$$

Если $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ – подмножества **X**, то образом множества, которое является объединением множества **A1** и $\mathbf{A_2}$, является объединение образов множеств $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$. Формально это запишется в виде $\mathbf{Г(A_1 \cup A_2)=ГA_1 \cup ГA_2}$.

Если $\mathbf{A_1 \subseteq X}$ и $\mathbf{A_2 \subseteq X}$, то образ множества, которое является пересечением множеств $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$, входит в множество, являющееся пересечением образов множеств $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$. Формально это можно записать в виде $\mathbf{Г(A_1 \cap A_2) \subseteq ГA_1 \cap ГA_2}$. Если же отображение $\mathbf{Г: X \to Y}$ является однозначным, то $\mathbf{Г(A_1 \cap A_2)=ГA_1 \cap ГA_2}$. Очевидно, что если $\mathbf{A_1 \subseteq X, A_2 \subseteq X, \ldots, A_n \subseteq X}$, то

$$\mathbf{Г(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} ГA_i; \quad Г(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} ГA_i}.$$

Для отображения имеет место понятие обратного отображения: $\mathbf{q^{-1}=(Y, X, Г_{-1})}$ или $\mathbf{Г^{-1}: Y \to X}$, т.е. существует соответствие, при котором определяются элементы $\mathbf{x \in X}$, с которыми сопоставляются элементы $\mathbf{y \in Y}$. Аналогично существует понятие композиции отображений.

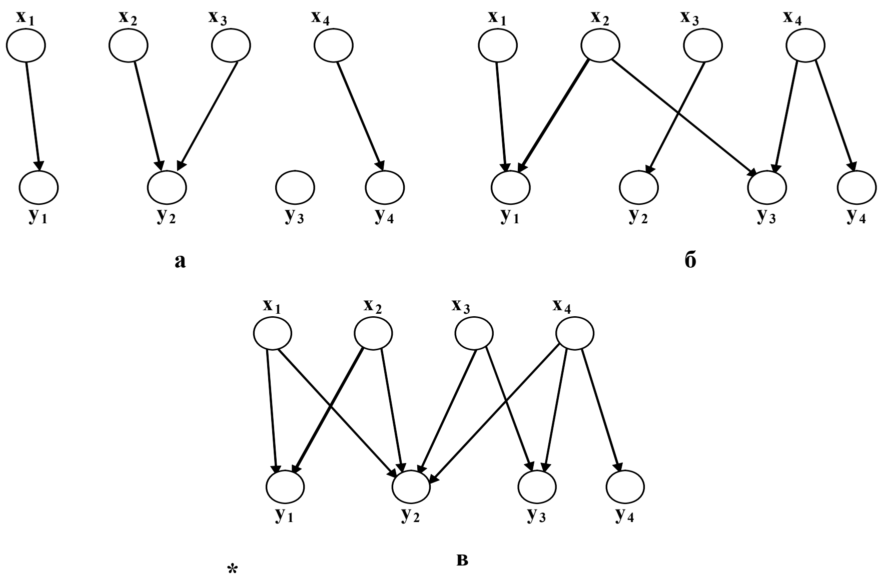
Рассмотрим случай, когда множества **X** и **Y** совпадают, т.е. отображение $\mathbf{Г: X \to Y}$ есть отображение множества **X** самого в себя и формально определяется парой **(X, Г),** где $\mathbf{Г \subseteq X^2}$ $\mathbf{(Г \subseteq X \times X)}$.

Пусть имеется два некоторых множества **Г** и **Δ**, каждое из которых есть отображение **X** в **X**, т.е. $\mathbf{Г: X \to X}$ и $\mathbf{Δ: X \to X}$. Композиция этих отображений **ГА** будет иметь вид: $\mathbf{(ГΔ)x=Г(Δx)}$, или при $\mathbf{Г=Δ}$ получим $\mathbf{Гx^2=Г(Гx)=Г:Гx \to Гx}$, т.е. $\mathbf{Гx^2 \subseteq Гx \times Гx \subseteq Y}$.

Очевидно, что $\mathbf{Гx^3=Г(Гx^2)}$, $\mathbf{Гx^4=Г(Гx^3)}$ и т.д., т.е. при $\mathbf{i \geq 2}$ $\mathbf{Гx^i=Г(Гx^{i-1})}$. Если ввести соотношение $\mathbf{Гx^0=x}$, т.е. отображение $\mathbf{Г^0}$ элементу $\mathbf{x \in X}$ ставит в соответствие тот же элемент $\mathbf{x \in X}$, то и для $\mathbf{i}$ с отрицательным знаком имеем $\mathbf{\Gamma x^0=\Gamma(\Gamma^{x-1})}$, $\mathbf{\Gamma^{-i}=\Gamma^{-1}(\Gamma x_{i-1})}$, когда $\mathbf{i \le -2}$. Отображения на одном множестве широко применяются в теории графов.

1.8. Отображение как функция

1.8.1. Функция. Отображение $\mathbf{f\colon X \to Y}$ называется функцией, если оно является однозначным, т.е. для любых пар $\mathbf{(x_1,y_1) \in f}$ и $\mathbf{(x_2,y_2) \in f}$, если $\mathbf{x_1=x_2}$, следует $\mathbf{y_1=y_2}$. Однозначное соответствие $\mathbf{q=(X,Y,f)}$ в этом случае называется функциональным, т.е. в графике $\mathbf{f}$ не может быть двух пар вида $\mathbf{(x,y_1)}$ и $\mathbf{(x,y_2)}$, $\mathbf{y_1 \neq y_2}$, $\mathbf{x \in X}$, $\mathbf{y_1,y_2 \in Y}$. Если существует такой элемент $\mathbf{x \in X}$, образ которого содержит более одного элемента $\mathbf{y \in Y}$, то соответствие называется нефункциональным. Если же для любого элемента $\mathbf{x \in X}$ образ $\mathbf{f(x)}$ содержит более одного элемента $\mathbf{y \in Y}$, то соответствие называется антифункциональным. На рис. 1.13 приведены графические задания функционального, нефункционального и антифункционального соответствий.



а – функциональное, б – нефункциональное, в – антифункциональное.
Рис. 1.13

Значение $\mathbf{y}$ в любой из пар $\mathbf{(x,y) \in f}$ называется функцией от данного $\mathbf{x}$ и записывается в виде логической формулы $\mathbf{y=f(x)}$. Формально функция определена: $\mathbf{f=\{(x, y) \in X \times Y \mid y=f(x)\}}$.

Говорят, что функция $\mathbf{f}$ отображает элемент $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ в элемент $\mathbf{y}\in\mathbf{Y}$; $\mathbf{x}$ – аргумент функции, $\mathbf{y}$ – значение функции на аргументе $\mathbf{x}$; $\mathbf{f}$ – есть множество, элементами которого являются пары $\mathbf{(x,\ y)}$, участвующие в соответствии $\mathbf{q=(X,\ Y,\ f)}$.

Исходя из определения функции, рассмотрим способы ее задания. Если $\mathbf{X}$ есть конечное множество небольшой мощности, то возможно задание функции перечислением всех пар $\mathbf{(x,\ y)}$, которые составляют множество $\mathbf{f}$. Если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ есть множество вещественных или комплексных чисел, то под $\mathbf{f(x)}$ понимается математическая формула. Например, если $\mathbf{X=Y=\Re}$ - пространство действительных чисел, $\mathbf{f=\{(x,\ y)\in\Re^2 \mid y=x^2\}}$, то тогда $\mathbf{f(x)=x^2}$.

Может рассматриваться случай, когда на некоторых $\mathbf{Ai}$ $(\mathbf{i=\overline{1,n}})$ подмножествах множества $\mathbf{X}$ ($\mathbf{A_i\subseteq X}$, $\mathbf{i=\overline{1,n}}$) при определении соответствия в виде функции приходится пользоваться различными математическими формулами $\mathbf{f_i(x)}$, $\mathbf{i=\overline{1,n}}$. Т.е. функция $\mathbf{f(x)}$ будет определена в виде

$$\mathbf{f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in A_1 \\ f_2(x), & x\in A_2 \\ \dots & \dots \\ f_n(x), & x\in A_n \end{cases}}.$$

Например, релейная функция имеет вид

$$\mathbf{y=f(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}}.$$

Функция $\mathbf{y=f(x)=\mid x\mid}$ задается в виде выражения

$$\mathbf{y=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}}.$$

Множество пар $\mathbf{(x,y)\in f}$ можно также изобразить в виде точек на плоскости $\mathbf{\Re_2}$. В этом случае получим график функции. Если в выражении $\mathbf{f\colon X\to Y}$ множество $\mathbf{X=U\times V}$, то соответствие $\mathbf{f\colon X\to Y}$ есть функция $\mathbf{f(u,v)}$ от двух переменных $\mathbf{u\in U}$ и $\mathbf{v\in V}$, или формально записывается в виде

$$\mathbf{f=\{(u,\ v,\ y)\in U\times V\times Y \mid y=f(u,\ v)\}}.$$

Можно определить в общем случае функцию от $\mathbf{n}$ числа переменных.

Существует операция сужения функции. Если $\mathbf{f\colon X\to Y}$ – некоторая произвольная функция и $\mathbf{A\subseteq X}$ – произвольное множество, то сужением функции $\mathbf{f}$ на множестве $\mathbf{A}$ называется функция $\mathbf{f_A}$, содержащая пары $\mathbf{(x,y)\in f}$, в которых $\mathbf{x\in A}$, а следовательно $\mathbf{(x,y)\in A\times Y}$. Формально сужение функции определится выражением: $\mathbf{f_A=f\cap(A\times Y)}$. Сужение функции возможно, например, при табличном задании функции, определенной на бесконечном множестве $\mathbf{X}$.

Так как соответствию $\mathbf{q=(X,Y,Q)}$ можно сопоставить обратное соответствие $\mathbf{q^{-1}=(Y,X,Q^{-1})}$, то и функции $\mathbf{f: X\rightarrow Y}$ можно сопоставить обратную функцию (отображение) **f-1:** $\mathbf{Y\rightarrow X}$. Условия получения обратной функции для отображения $\mathbf{f: X\rightarrow Y}$ следующие. Отображение $\mathbf{f: X\rightarrow Y}$ должно быть однозначным, т.е. для любых $\mathbf{(x_1,y_1)\in f}$ и $\mathbf{(x_2,y_2)\in f}$ из $\mathbf{x_1=x_2}$ следует $\mathbf{y_1=y_2}$. Отображение $\mathbf{f: X\rightarrow Y}$ должно быть и взаимооднозначным, т.е. из условия $\mathbf{x_1\neq x_2}$ следует $\mathbf{y_1\neq y_2}$. При выполнении этих условий обратное отображение $\mathbf{f^{-1}: Y\rightarrow X}$ также является однозначным и определяет функцию $\mathbf{x=f^{-1}(y)}$, называемую обратной по отношению к функции $\mathbf{y=f(x)}$.

1.8.2. Функция времени. Если в качестве множества **X** функции взять множество моментов времени **T**, а в качестве **Y** взять множество вещественных чисел $\mathfrak{R}$, то получим отображение, называемое функцией времени $\mathbf{f:T\rightarrow \mathfrak{R}}$. Время имеет одно направление, поэтому **T** есть упорядоченное множество. Элементами функции являются двойки **(t,x)** или **x(t)**, где $\mathbf{t\in T}$, $\mathbf{x\in \mathfrak{R}}$. Каждая такая пара задает значение функции в момент времени **t** и определяет мгновенное значение функции. Полная совокупность двоек **(t,x)** представляет собой функцию времени. Примером функции времени является синусоида: $\mathbf{f=\{(t,x)\in T\times\mathfrak{R} \mid x=A\sin(t+\varphi)\}}$.

Время является величиной бесконечной, поэтому на практике обычно рассматривают функцию, заданную на временных интервалах.

Сужение функции **x(t)**, заданной на бесконечном интервале $\mathbf{-\infty<t<\infty}$, на конечный интервал $\mathbf{(t_1,t_2]}$ называется отрезком функции **x(t)** и обозначается $\mathbf{x(t_1,t_2]}$, т.е. $\mathbf{x(t_1,t_2]=\{x(t) \mid t\in(t_1,t_2]\}}$. Если множество **T** представляет собой множество натуральных чисел, то функция $\mathbf{f:T\rightarrow\mathfrak{R}}$ называется функцией с дискретным временем. Элементы множества **T** обозначаются через **n** $\mathbf{(n\in T)}$, так что двойка **(n,x)**, обозначаемая также **x[n]** или $\mathbf{x_n}$, определяет значение функции в момент **n**.

1.8.3. Функционал. Пусть в отображении $\mathbf{f: X\rightarrow Y}$ множество **X** есть множество функций **F(x)**, а **Y** – множество вещественных чисел. В частности, пусть **Y** есть множество моментов времени. В этом случае приходим к отображению, называемому функционалом и формально записываемому выражением $\mathbf{J: F(x)\rightarrow T}$.

Понятие функционала поясним на примере. Известно, что если производить подключение питания к некоторой схеме, то в схеме протекают переходные процессы, определяемые параметрами схемы и поданным напряжением. На рис. 1.14 показан пример возможных протеканий переходного процесса. В зависимости от параметров функции **f(x)** время **t** установления переходного процесса различное.

Если множество функций **f(x)** обозначим через **F(x)**, а через **T** – множество вещественных чисел **t**, которые определяют время установления переходного режима, то зависимость времени протекания переходного режима записывается как отображение **J: F(x)→T.**

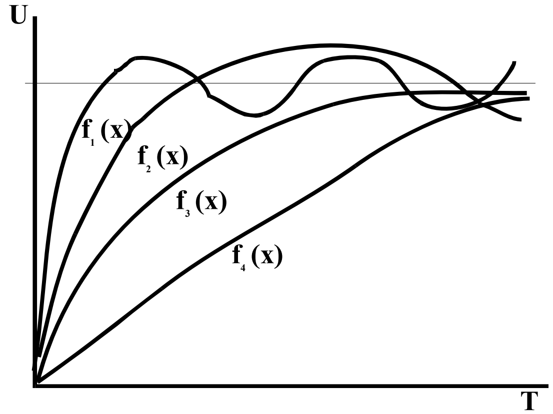


Рис. 1.14

Всевозможные пары **(f(x),t)** есть элементы множества **J**, причем **f(x)∈F(x), t∈T**. Говорят, что вещественное число **t∈T** представляет собой функционал **J** от функции **f(x)∈F(x)** или формально: **t=J[f(x)].**

В задачах теории автоматического регулирования определяется оптимальная функция **f(x)**, которой соответствует минимальное время **t** установления переходного процесса для выходной величины. Требуется выполнить условие $\min\limits_{f\in F} J[f(x)]$, при котором **t** будет минимальной величиной $t_{мин}$. Говоря языком теории множеств, необходимо сопоставить $t_{мин}$ с некоторой функцией **fi(x)∈F(x).**

1.8.4. Оператор. Если в отображении **f: X→Y** множества **X** и **Y** являются множествами функций с элементами **x(t)∈X** и **y(t)∈Y**, то данное отображение называется оператором и обозначается **L: X→Y.** Элементами множества **L** будут всевозможные пары **(x(t),y(t))**. Оператор **L** преобразует функцию **x(t)** в функцию **y(t)** и поэтому **y(t)=L[x(t)].** В математике известны операторы:

- дифференцирования $f^i(x)=P[f^{i-1}(x)]$, $i\geq 1$, что имеет запись в математическом анализе $f^i(x)=df^{i-1}(x)/dx$;

- интегрирования $f(x)=\varphi(x)/p$, что соотвествует записи $f(x)=\int\limits_0^x \varphi(x)dx$;

а также много других операторов.

В системах автоматического управления оператором преобразования управляющей величины **x(t)** в управляемую величину **y(t)** можно рассматривать передаточную функцию системы.

1.9. Отношения

1.9.1. Свойства отношений. Отношение **φ=(X, Г)** - это отображение **φ=(X,Y,Г), X=Y**, заданное на одном множестве **X**, называемом областью задания отношения, график которого **Г**. Говорят, что элемент **y∈Г(x)**, причем **y=(x,x), y∈X** находится в отношении **Г** (по закону **Г**) к элементу **x** и формально записывают **yГx**. Если отображение задано на одном множестве, то отношение есть пара множеств **(X,Г)**, причем **Г⊆X_2**. Элементами множества **X_2** являются упорядоченные пары, следовательно, отношение есть множество упорядоченных пар. Так как каждая пара связывает между собой только два элемента множества **X_2**, то такое отношение называют бинарным.

Если **X=∅**, то отношение называется пустым и обозначается в виде Λ. Два отношения **φ=(X, Г)** и **δ=(Y, P)** называются равными, если **X=Y**, а **Г=P**. Отношения, как и соответствия, могут быть заданы тремя способами: теоретико-множественным, матричным и графическим.

При матричном способе задания матрица смежности представляет собой квадратную таблицу размера **n×n** (где **n** – мощность множества **X**). Строки и столбцы матрицы помечены элементами **x_i∈X**, а на пересечении **x_i** строки и **x_j** столбца ставится элемент **r_{ij}=1**, если **(x_i,x_j)∈Г** или **r_{ij}=0**, если **(x_i,x_j)∉Г.**

При графическом способе задания отношение изображается графом, у которого элементы – произвольно расположенные точки на плоскости, есть вершины графа, а каждая двойка **(x_i,x_j)∈Г** – есть дуга графа, направленная от вершины **xi** к вершине **xj**.

Например, пусть **X=(x_1,x_2,x_3,x_4), Г={(x_1,x_1), (x_1,x_2), (x_2,x_3), (x_2,x_1), (x_3,x_2), (x_3,x_3)}**. Матрица смежности, задающая данное отношение, имеет следующий вид:

$$R_\varphi = \left|\begin{array}{lcccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

На рис. 1.15 приведено графическое задание данного отношения.

Если некоторые **x_1,x_2∈X**, то **x_1Гx_2** является истинным или ложным высказыванием, в зависимости от того, истинно или ложно высказывание **(x_1,x_2)∈Г**.

Пусть **x,y,z** – любые элементы из множества **X**. Рассмотрим свойства отношений.

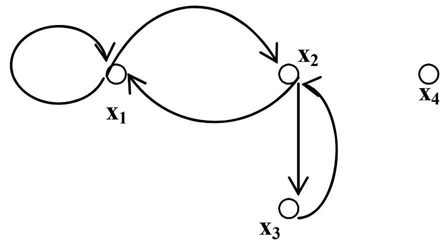


Рис. 1.15

Отношение **(X,Г)** называется **рефлексивным** (лат. reflexio - отражение), если для любого $\mathbf{x \in X}$ истинным является высказывание $\mathbf{x\Gamma x}$.

Графически рефлексивное отношение задают в виде графа, у которого имеется петля у каждой вершины. Если рефлексивное отношение задается в виде матрицы смежности, то у данной матрицы все элементы по главной диагонали равны единице, т.е. $\mathbf{r_{ij}=1, (i=\overline{1,n})}$, **n** – мощность множества **X**.

Отношение **(X,Г)** называется **нерефлексивным**, если для любого $\mathbf{x \in X}$ истинным является высказывание $\mathbf{\overline{((\forall x \in X)(x\Gamma x))}}$. Для графа нерефлексивного отношения характерно отсутствие петли на одной из вершин. В главной диагонали матрицы смежности, задающей нерефлексивное отношение, хотя бы один элемент главной диагонали $\mathbf{r_{ij}=0, (i=\overline{1,n})}$.

Нерефлексивное отношение является **антирефлексивным**, если истинно высказывание $\mathbf{((\forall x \in X)\overline{(x\Gamma x)})}$. Для графа, задающего антирефлексивное отношение, характерно, что ни одна из вершин не имеет петлю, и, следовательно, в матрице смежности все элементы главной диагонали равны нулю.

На рис. 1.16 приведены графы, задающие соответственно рефлексивное, нерефлексивное и антирефлексивное отношения.

Отношение **(X,Г)** называется **симметричным** (гр. symmetria - соразмерность), если истинно высказывание $\mathbf{(\forall x, y \in X)(x\Gamma y \rightarrow y\Gamma x)}$. Если в графе симметричного отношения между какими-либо двумя вершинами $\mathbf{x_1}$ и $\mathbf{x_2}$ есть дуга, то обязательно должна быть дуга с противоположной ориентацией, а матрица смежности отношения симметрична относительно главной диагонали, т.е. если $\mathbf{r_{ij}=1}$, то и $\mathbf{r_{ji}=1}$, если $\mathbf{r_{ij}=0}$, то и $\mathbf{r_{ji}=0}$ $\mathbf{(i=\overline{1,n})}$.

Отношение **(X,Г)** называется **несимметричным**, если истинно высказывание $\mathbf{\neg((\forall x, y \in X)(x\Gamma y \rightarrow y\Gamma x))}$. Граф несимметричного отношения отличается от графа симметричного отношения тем, что хотя бы одна пара вершин не имеет дуги с противоположной ориентацией.

Отношение **(X,Г)** называется **асимметричным**, если истинно высказывание $\mathbf{(\forall x, y \in X)(x\Gamma y \rightarrow \neg y\Gamma x)}$. Граф асимметричного отношения не имеет петель и не имеет дуг с противоположной ориентацией, а в матрице смежности данного отношения $\mathbf{r_{ii}=0}$ $(\mathbf{i=\overline{1,n}})$, а если $\mathbf{r_{ij}=1}$, то $\mathbf{r_{ji}=0}$, или если $\mathbf{r_{ij}=0}$, то и $\mathbf{r_{ji}=1}$ для всех $\mathbf{i=\overline{1,n}}$ $\mathbf{i \neq j}$. Отметим, что любое асимметричное отношение является в то же время антирефлексивным.

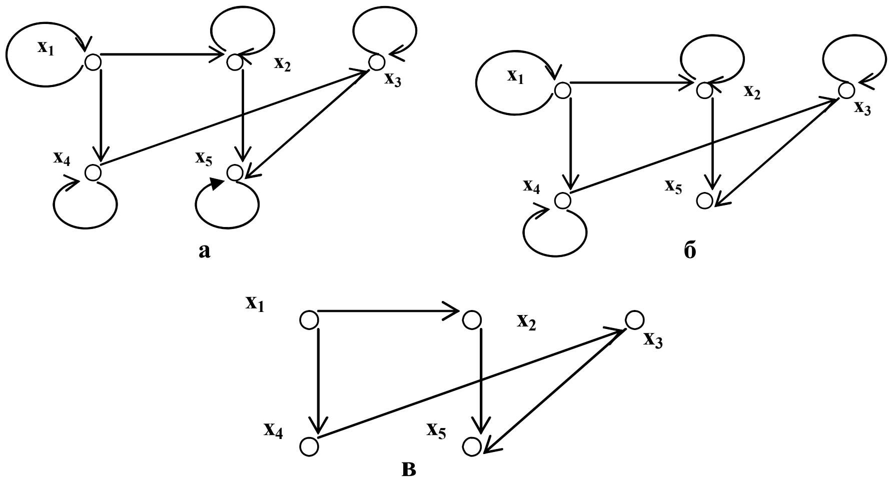


Рис. 1.16
а – рефлексивное, б – нерефлексивное, в – антирефлексивное отношения.

Отношение **(X,Г)** называется **антисимметричным**, если истинно высказывание $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X})(\mathbf{x\Gamma y} \& \mathbf{x \neq y}) \rightarrow \rceil \mathbf{y\Gamma x}$, или истинно высказывание, которое также определяет антисимметричность $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X})(\mathbf{x\Gamma y} \& \mathbf{y\Gamma x}) \rightarrow \mathbf{x=y}$. Граф антисимметричного отношения отличается от графа асимметричного отношения тем, что он может содержать петли, т.е. хотя бы один элемент $\mathbf{r_{ii} \neq 0}$ $(\mathbf{i=\overline{1,n}})$ в матрице смежности, а если $\mathbf{r_{ij}=1}$, то $\mathbf{r_{ji}=0}$, и наоборот для всех $\mathbf{i,j=\overline{1,n}}$, $\mathbf{i \neq j}$. На рис. 1.17 приведено графическое задание соответственно симметричного, несимметричного, асимметричного и антисимметричного отношений.

Отношение **(X,Г)** называется **транзитивным**, если истинно высказывание $(\forall \mathbf{x,y,z} \in \mathbf{X})(\mathbf{x\Gamma y} \& \mathbf{y\Gamma z} \rightarrow \mathbf{x\Gamma z})$, или в противном случае отношение **(X,Г)** называется нетранзитивным. Граф транзитивного отношения отличается тем, что если для каких-либо трех вершин $\mathbf{x_i,x_j,x_k}$ $\mathbf{i,j,k=\overline{1,n}}$ имеются дуги, идущие из вершины **xi** в вершину $\mathbf{x_j}$ и из вершины $\mathbf{x_j}$ в вершину $\mathbf{x_k}$, то обязательно должна быть дуга, идущая из вершины $\mathbf{x_i}$ в вершину $\mathbf{x_k}$. В противном случае это будет граф нетранзитивного отношения. На рис. 1.18

представлена иллюстрация графов соответственно транзитивного и нетранзитивного отношений.

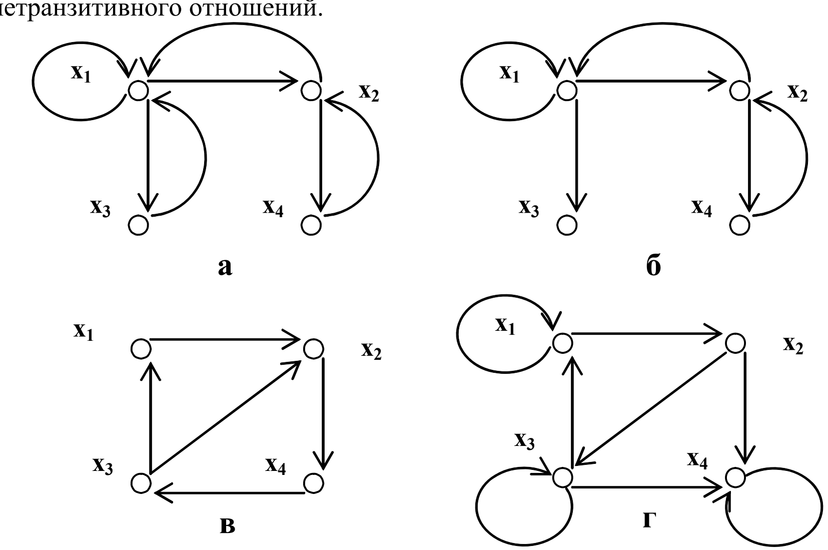


Рис. 1.17
а – симметричное, б – несимметричное, в – асимметричное,
г – антисимметричное отношения

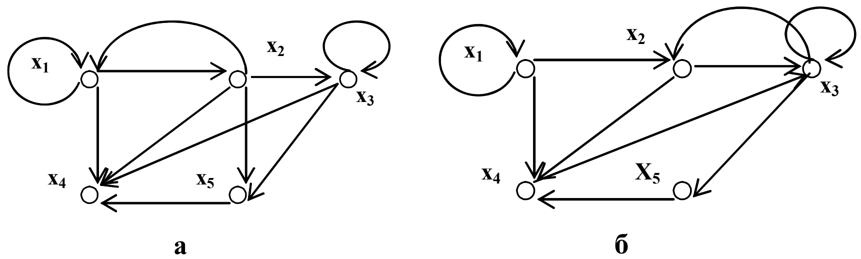


Рис. 1.18
а – транзитивное, б – нетранзитивное отношения

Отношение **(X,Г)** называется **связанным**, если истинно высказывание $(\forall x,y\in X)(x\neq y\rightarrow x\Gamma y\cup y\Gamma x)$. Если данное высказывание ложно, то отношение **(X, Г)** называется несвязанным, а истинным является высказывание

$$\neg((\forall x\,,y\in X)(x\neq y\rightarrow x\Gamma y\cup y\Gamma x)).$$

На графе связанного отношения между любой парой вершин x_i и x_j ($i,j=\overline{1,n}$) должна быть хотя бы одна дуга. На рис. 1.19 приведена иллюстрация связного и несвязного отношений.

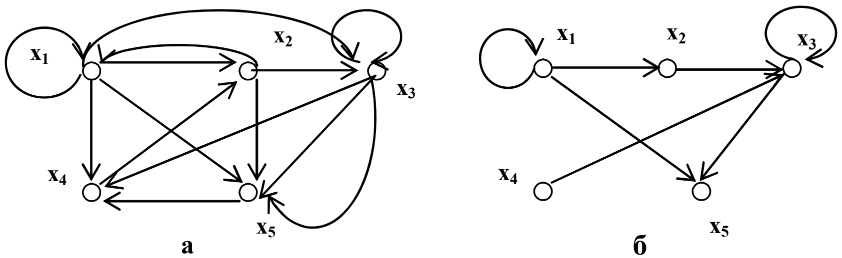


Рис. 1.19
а – связное, б – несвязное отношения

1.9.2. Отношение эквивалентности. Для отношения эквивалентности (лат. aequus – равный + valens (valentis) - имеющий силу, значение, цену) должны выполняться три условия:

- каждый элемент $\mathbf{x \in X}$ эквивалентен самому себе, т.е. отношение рефлексивно, следовательно, истинно высказывание $\mathbf{(\forall x \in X)(x\Gamma x)}$;
- высказывание, что два элемента $\mathbf{x \in X}$ и $\mathbf{y \in X}$ являются эквивалентными, не требует уточнения, в какой последовательности рассматриваются элементы, т.е. отношение симметрично и истинно высказывание $\mathbf{(\forall x,y \in X)(x\Gamma y \to y\Gamma x)}$;
- два элемента, эквивалентные третьему, эквивалентны между собой, т.е. отношение транзитивно и, следовательно, истинно высказывание

$$\mathbf{(\forall x, y, z \in X)(x\Gamma y \& y\Gamma z \to x\Gamma z)}.$$

Если элементы множества при рассмотрениях могут быть заменены друг другом, то данные элементы находятся в отношении эквивалентности. Отношение эквивалентности находится в тесной связи с разбиением множеств. Пример отношений эквивалентности следующий. Отношение «быть в одной группе», заданное на множестве студентов.

Пусть $\mathbf{J}$ - некоторое множество индексов. Обозначим через $\mathbf{\{A_j \subseteq X \mid j \in J\}}$ множество классов эквивалентности для множества $\mathbf{X}$. Все элементы одного класса эквивалентности эквивалентны между собой (свойство транзитивности). Всякий элемент $\mathbf{x \in X}$ может находиться в одном и только одном классе. Тогда $\mathbf{X}$ является объединением непересекающихся множеств $\mathbf{A_j}$, так что полная система классов $\mathbf{\{A_j \subseteq X \mid j \in J\}}$ является разбиением множества $\mathbf{X}$. Таким образом, каждому отношению эквивалентности на множестве $\mathbf{X}$ соответствует некоторое разбиение множества $\mathbf{X}$ на классы $\mathbf{Aj}$.

Отношения эквивалентности на множестве $\mathbf{X}$ и разбиение этого множества на классы $\mathbf{A_j \in M}$, где $\mathbf{M}$ – разбиение множества $\mathbf{X}$, называются сопряженными, если для любых $\mathbf{x \in X}$ и $\mathbf{y \in X}$ отношение $\mathbf{x\Gamma y}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ принадлежат одному и тому же классу $\mathbf{A_j}$ разбиения, т.е. должно быть истинно высказывание:

$$(\forall x,\ y\in X)[x\Gamma y\to(\exists A\in M)(x\in A\&y\in A)]$$

1.9.3. Отношение порядка. Можно упорядочить элементы множества **X** или группы элементов, т.е. ввести отношение порядка на множестве **X**. При этом, возможно, пользоваться понятиями «больше», «больше или равно», «меньше», «меньше или равно» с применением известных математических символов $>, \geq, <, \leq$. Например, для элементов множества моментов времени **T** $t_1\leq t_2$. Рассматривая стоимости различных предметов, как множество, мы можем расположить предметы в порядке возрастания стоимости. Различают отношения нестрогого порядка, для которых справедлив символ $\leq$, и отношения строгого порядка, для которых справедлив символ $<$.

Отношение (X, Γ) называется отношением нестрогого порядка, если оно:

- рефлексивно, т.е. истинно высказывание $(\forall x\in X)(x\Gamma x)$;
- антисимметрично, т.е. истинно высказывание $(\forall x, y\in X)[x\Gamma y\&y\Gamma x\to x=y]$;
- транзитивно, т.е. истинно высказывание $(\forall x, y, z\in X)(x\Gamma y\&y\Gamma z\to x\Gamma z)$.

Причем перечисленные выше свойства возможно также записать в виде: $x\leq x$ – истинно (рефлексивность); $x\leq y$ и $y\leq x\to x=y$ (антисимметричность); $x\leq y$ и $y\leq z\to x\leq z$ (транзитивность).

Отношение (X, Γ) называется отношением строгого порядка, если оно антирефлексивно, асимметрично и транзитивно, т.е. истинными являются высказывания: $((\forall x\in X)\overline{(x\Gamma x)})$; $(\forall x,y\in X)(x\Gamma y\to \rceil y\Gamma x)$; $(\forall x,y, z\in X)(x\Gamma y\&y\Gamma z\to x\Gamma z)$. Свойства антирефлексивности, асимметричности и транзитивности также можно записать в виде: $x<x$ – ложно (антирефлексивность); $x<y$ и $y<x$ – взаимоисключается (антисимметричность); $x<y$ и $y<z\to x<z$ (транзитивность).

Множество **X** называется упорядоченным, если любые два элемента **x** и **y** этого множества являются сравнимыми, т.е. $x<y$, или $x=y$, или $y<x$, где **x** и **y** – любые два элемента множества **X**.

1.9.4. Отношение доминирования. Отношения доминирования (лат. dominari – господствовать, преобладать) рассматриваются на множествах, для которых можно утверждать, что некоторый элемент **x** в чем-то значительно превосходит элемент **y**. Это записывается $x>>y$ и говорят, что **x** доминирует над **y**. Отношение (X, Γ) называется отношением доминирования, если оно:

- а) антирефлексивно, т.е. истинно высказывание $((\forall x\in X)\overline{(x\Gamma x)})$, что означает, что никакой элемент не может доминировать самого себя, или $x>>x$ – ложно;
- б) несимметрично, т.е. истинно высказывание $\rceil((\forall x\ ,y\in X)(x\Gamma y\to y\Gamma x))$, что означает: в каждой паре элементов **x** и **y** один доминирует другого, или $x>>y$ и $x>>y$ взаимоисключается.

2. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА

2.1. Определение нечеткого множества

Решая задачи, приходится встречаться с ситуациями, когда элемент в некоторой степени принадлежит данному множеству. Например, определяется множество небольших величин. Кто может точно сказать, начиная с какого значения величины можно считать величину небольшой? На этот вопрос нет однозначного ответа. Поэтому одним из способов математического описания нечеткого множества является определение степени принадлежности элемента нечеткому множеству. Степень принадлежности задается числом из интервала [0,1]. Границы интервала - 0, 1, означают, соответственно, «не принадлежит» и «принадлежит». В разд. 1 принадлежность элемента **x** множеству **A** записывается в формализованном виде **x∈A**. Данная запись может быть представлена в виде характеристической функции:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Принадлежность множеству может быть представлена в графической виде. Например, в одномерном арифметическом пространстве ***R*** заданы два множества $\mathbf{A}\in\boldsymbol{R}$ и $\mathbf{B}\in\boldsymbol{R}$. Принадлежность $\mathbf{x}\in\mathbf{A}$ можно представить в виде прямоугольника $\mathbf{П_A}$, показанного на рис. 2.1, а принадлежность $\mathbf{x}\in\mathbf{B}$ - в виде прямоугольника $\mathbf{П_B}$, показанного на рис. 2.2. Принадлежность **x** объединению множеств $\mathbf{x}\in\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ представлена прямоугольником $\mathbf{П_{A\cap B}}$, показанны на рис. 2.3. Принадлежность двухмерному множеству будет представлена параллепипедом в трехмерном пространстве, а принадлежность **n**–мерному множеству – (**n**+1)-мерным параллепипедом.

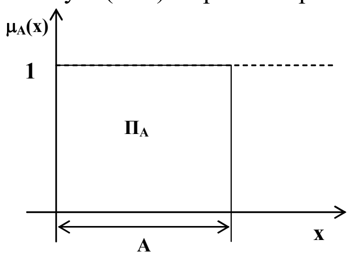


Рис. 2.1

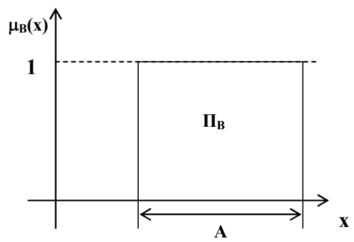


Рис. 2.2

Нечетким подмножеством **A** множества **X** называется множество двоек $\tilde{A} = \{<\mu_A(x)/x>\},\ x\in X,\ \mu_A(x)\in[0,1]$ [2 - 4]. Функция μ_A, являющаяся отражением элементов $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ в элементы множества [0,1] (μ_a:X→[0,1]), называется функцией принадлежности нечеткого множества $\tilde{\mathbf{A}}$, а **X** - базовым множеством.

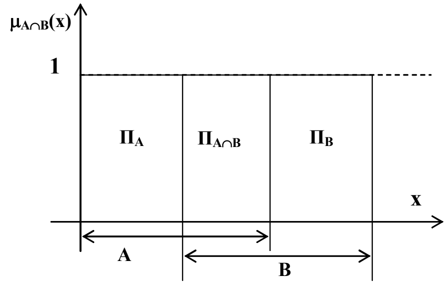


Рис. 2.3

Конкретное значение $\mu_A(\mathbf{x})$, заданное для элемента **x**, называется степенью принадлежности элемента x нечеткому множеству $\tilde{\mathbf{A}}$. Носителем нечеткого множества $\tilde{\mathbf{A}}$ называется подмножество $\tilde{\mathbf{A}}\in\mathbf{X}$, содержащее те элементы $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$, для которых значение функции принадлежности больше нуля.

Пример. Пусть **X** - множество натуральных чисел **X={1,2,3, ...,x$_{max}$}**, предназначенных для определения цены изделия. Нечеткое подмножество $\tilde{\mathbf{A}}$ «небольшая цена» может быть задано в следующем виде:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \{<1/1>,<0{,}9/2>,<0{,}8/3>,<0{,}7/4>,<0{,}6/5>,<0{,}5/6>,<0{,}4/7>,<0{,}3/8>,$$
$$<0{,}2/9>,<0{,}1/10>,<0/11>,...,<0/x_{max}>\}.$$

Принадлежность значений цены нечеткому подмножеству $\tilde{\mathbf{A}}$ «небольшая цена» показана на рис .2.4.

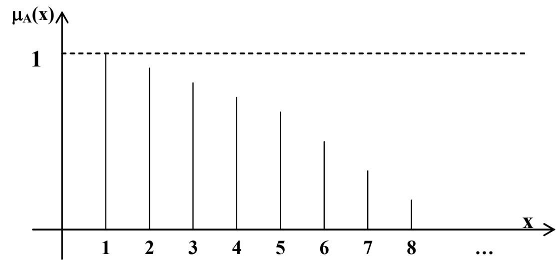


Рис. 2.4

Если рассматривать множество **X** как непрерывное множество натуральных чисел, то принадлежность значений цены нечеткому подмножеству $\tilde{\mathbf{A}}$ «небольшая цена» будет иметь вид непрерывной функции, как показано на рис .2.5. Рассмотрим свойства нечетких множеств.

Высота (height - hgt) нечеткого множества $\tilde{\mathbf{A}}$: $\mathbf{hgt}\tilde{\mathbf{A}} = \sup_{x\in X} \mu_A(\mathbf{x})$.

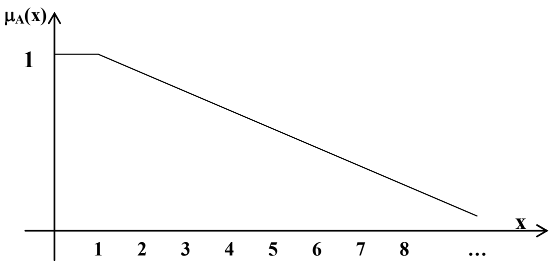


Рис. 2.5

Нечеткое множество $\tilde{\mathbf{A}}$ с **hgtA=1** называется нормальным, а при **hgtA<1** - субнормальным. Ядро (core, kernal, nucleus) или центр нечеткого множества $\tilde{\mathbf{A}}$: **core** $\tilde{\mathbf{A}}=\{\mathbf{x}\in\mathbf{X}/\mu_A(\mathbf{x})=1\}$. Основание (support – supp) нечеткого множества $\tilde{\mathbf{A}}$: **supp** $\tilde{\mathbf{A}}=\{\mathbf{x}\in\mathbf{X}/\mu_A(\mathbf{x})>1\}$. Поперечными точками (crossover point) нечеткого множества $\tilde{\mathbf{A}}$ называется совокупность **core** $\{\mathbf{x}\in\mathbf{X}/\mu_A(\mathbf{x})=0,5\}$. Уровень α, или α–разрез (сечение) нечеткого множества $\tilde{\mathbf{A}}$: $\tilde{\mathbf{A}}_\alpha=\{\mathbf{x}\in\mathbf{X}/\mu_A(\mathbf{x})\geq\alpha\}$. α–разрез нечеткого множества $\tilde{\mathbf{A}}$ еще обозначают: α-**cut** $\tilde{\mathbf{A}}$. Строгий α–разрез нечеткого множества $\tilde{\mathbf{A}}$: $\tilde{\mathbf{A}}_\alpha=\{\mathbf{x}\in\mathbf{X}/\mu_A(\mathbf{x})>\alpha\}$. Выпуклое (convex) нечеткое множество $\tilde{\mathbf{A}}$: $\forall \mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3\in\mathbf{X}:\mathbf{x}_1\leq\mathbf{x}_2\leq\mathbf{x}_3\rightarrow\mu_A(\mathbf{x}_2)\geq\min(\mu_A(\mathbf{x}_1),\mu_A(\mathbf{x}_3))$. При невыполнении неравенства нечеткое множество $\tilde{\mathbf{A}}$ называется невыпуклым. На рис. 2.6 приведена иллюстрация вышеназванных свойств.

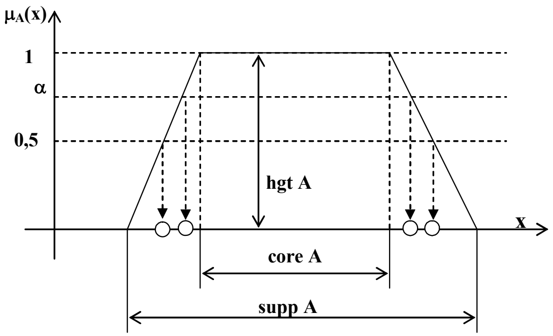


Рис. 2.6

Отдельным видом нечеткого множества **A** является нечеткое число (нечеткий синглтон) при выполнении условий [6]: **A** является выпуклым, высота является нормальной (**hgt A=1**), $\mu_A(\mathbf{x})$ является кусочно-непрерывной функцией, ядро или центр множества **A** (**core A**) содержит одну точку. Пример принадлежности **x** нечеткому числу «приблизительно 5» показан на рис. 2.7.

Другим видом нечеткого множества является задание некоторых переменных в виде нечеткого интервала. Известно [10] определение.

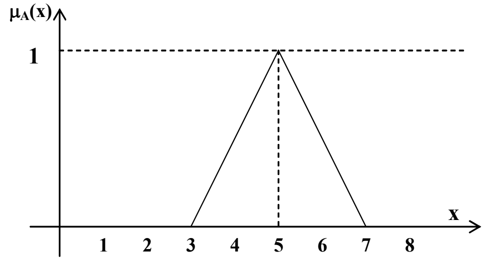


Рис. 2.7

Нечеткий интервал – это выпуклая нечеткая величина **A**, функция принадлежности которой квазивогнута, так что

$$\forall \mathbf{u,v},\ \forall \mathbf{w} \in [\mathbf{u,v}],\ \mu_A(\mathbf{w}) \geq \min(\mu_A(\mathbf{u}),\ \mu_A(\mathbf{v})),\ \ \mathbf{u,v,w} \in \mathbf{X}.$$

Тогда нечеткое число - полунепрерывный сверху нечеткий интервал с компактным носителем и единственным модальным значением. Задание параметров задачи в виде нечеткого интервала – это очень удобная форма для формализации неточных величин. Обычный интервал часто является неудовлетворительным представлением, т.к. необходимо фиксировать его границы. Могут быть оценки завышенными или заниженными, что вызовет сомнение в результатах расчетов. Задание параметров задачи в виде нечеткого интервала будет одновременно и завышенным, и заниженным, а носитель (базовое множество) нечеткого интервала будут выбран так, что ядро содержит наиболее правдоподобные значения и будет гарантировано нахождение рассматриваемого параметра в требуемых пределах.

Задание нечетких интервалов может быть осуществлено экспертами следующим образом. Нечеткий интервал задают четверкой параметров $\mathbf{M}=(\underline{\mathbf{m}}, \overline{\mathbf{m}}, \alpha, \beta)$ (см. рис.2.8), где $\underline{\mathbf{m}}$ и $\overline{\mathbf{m}}$ - соответственно нижнее и верхнее модальные значения нечеткого интервала, а α и β представляют собой левый и правый коэффициент нечеткости. Задание нечеткого интервала может быть выполнено следующими способами.

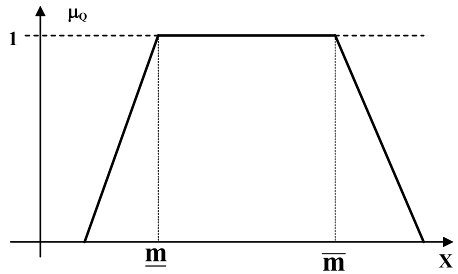


Рис. 2.8

Вариант 1. Нижнее и верхнее модальные значения интервала совпадают, а α и β равны нулю. Значение **x** определяется с неопределенностью равной нулю. Для задания нечеткой входной переменной $\widetilde{\mathbf{A}}$ на множестве **X** определим формально нечеткий интервал $\widetilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{x_{min}=x,\ x_{max}=x,0,0})$, где $\mathbf{x_{imin}}$ - нижнее модальное значение $\underline{\mathbf{m}}$, а $\mathbf{x_{max}}$- верхнее модальное значение $\overline{\mathbf{m}}$.

Четкое задание **x** на множестве значений **X**, как это показано на рис. 2.9, является частным случаем задания нечеткого интервала, причем, $\mu_A(\mathbf{x})$ - значение степени принадлежности интервалу.

Вариант 2. Задание **x** определяется с неопределенностью отличной от нуля. Пример показан на рис. 2.10. Нечеткий интервал определен, как $\widetilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{x_{min},\ x_{max}=x_{min},0,\beta})$, т.е. верхнее и нижнее модальные значения интервала совпадают.

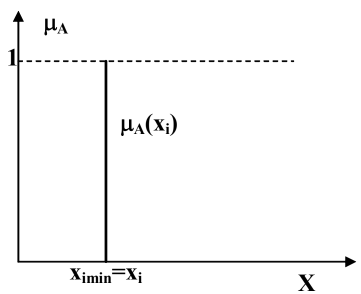


Рис. 2.9

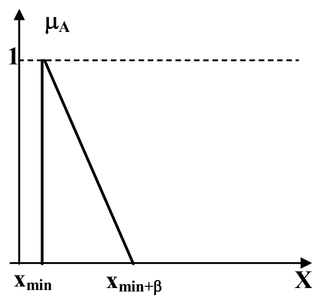


Рис. 2.10

Вариант 3. Задание **x** может быть получено из интервала **[A,B]**. Пример показан на рис. 2.11. Степень принадлежности равна единице, причем $\widetilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A=x_{min},B=x_{max},0,0})$, где **A** – нижнее модальное значение (минимально возможное значение входной переменной **x**), **B** – верхнее модальное значение (максимальное значение входной переменной **x**.

Вариант 4. Значение входной переменной $\mathbf{x_i}$ может быть получено из интервала значений **[A,C]** таким образом, что в интервале **[A,B]** неопределенность получения равна единице **(A≤B≤C).** Формально нечеткий интервал определен в виде $\widetilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A=x_{min},B=x_{max},0,\beta})$. Пример задания показан на рис. 2.12, где β**=C-B.**

Вариант 5. Значение входной переменной $\mathbf{q_i}$ экспертами может быть определено из интервала значений **[A,D]** таким образом, что в интервале **[B,C]** неопределенность получения равна единице **(A≤B≤C≤D).** Формально нечеткий интервал в этом случае определим в виде $\widetilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{B=x_{min},C=x_{max},\alpha,\beta})$. Пример задания нечеткого интервала показан на рис. 2.13, где α**=B-A,** β**=D-C.**

Рассмотрим операции над нечеткими интервалами.

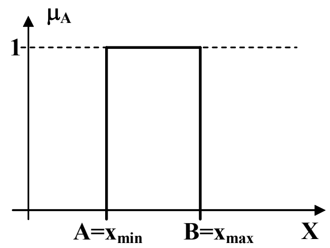


Рис. 2.11

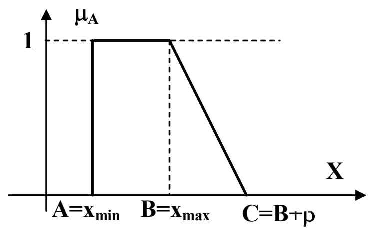


Рис. 2.12

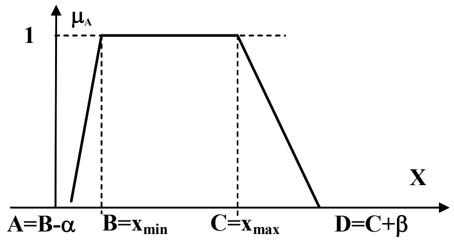


Рис. 2.13

Операция нечеткого суммирования для нечетких интервалов определяется следующим образом. Сумма двух нечетких интервалов $\mathbf{M_i=(\underline{m}_i, \overline{m}_i, \alpha_i, \beta_i)}$ **и** $\mathbf{M_j=(\underline{m}_j, \overline{m}_j, \alpha_j, \beta_j)}$, записываемая в виде $\mathbf{M_i \tilde{+} M_j}$, также есть нечеткий интервал $\mathbf{M_i \tilde{+} M_j=(\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)}$ [11], где $\alpha=\alpha_i + \alpha_j$; $\beta=\beta_i + \beta_j$; $\mathbf{\underline{m} = \underline{m}_i + \underline{m}_j}$, $\mathbf{\overline{m} = \overline{m}_i + \overline{m}_j}$. Сумма **n** нечетких интервалов определится формулами:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i; \quad \beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i; \quad \underline{m} = \sum_{i=1}^{n} \underline{m}_i \quad \overline{m} = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_i .$$

Если $\mathbf{M_1} = \bigcup_{i=1,\dots m_1} \mathbf{M_i^1}$, а $\mathbf{M_2} = \bigcup_{j=1,\dots m_2} \mathbf{M_j^2}$, где $\mathbf{M_i^1}$ и $\mathbf{M_j^2}$ - выпуклые интервалы, то $\mathbf{f(M_1, M_2)} = \bigcup_{\substack{i=1,\dots m_1 \\ j=1,\dots, m_2}} \mathbf{f(M_i^1, M_j^2)}$, причем $\mathbf{f(M_i^1, M_i^2)}$ - совокупность интервалов, которая определена по предыдущим формулам.

Операция разности нечетких интервалов определяется следующим образом. Нечеткая разность $\tilde{\mathbf{Y}} \simeq \tilde{\mathbf{X}}$ двух нечетких интервалов $\tilde{\mathbf{Y}} = (\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}, \alpha, \beta)$

и $\tilde{X} = (\underline{x}, \overline{x}, \eta, \lambda)$ есть трапециевидный интервал $\tilde{Z} = (\underline{z}, \overline{z}, \chi, \delta)$, для которого $\chi=|\alpha-\eta|$, $\delta=|\beta-\lambda|$, $\underline{z} = \underline{y} - \overline{x}$, $\overline{z} = \overline{y} - \underline{x}$, где $\underline{z}, \underline{y}, \underline{x}$ - соответственно нижние модальные значения нечетких интервалов $\tilde{Z}, \tilde{Y}, \tilde{X}$, $\overline{z}, \overline{y}, \overline{x}$ - верхние модальные значения нечетких интервалов $\tilde{Z}, \tilde{Y}, \tilde{X}$.

Принятие решений связано с осуществлением сравнений полученного нечеткого интервала либо экспертами, либо по данным моделирования с действительным числом. Операция сравнения нечеткого интервала $\tilde{Z} = (\underline{z}, \overline{z}, \chi, \delta)$ и действительного числа выполняется следующим образом.

Действительное число **A** представим в виде интервала **(A,A,0,0)**. Определение меньшего или большего значения нечеткого интервала по отношению к действительному числу **A** производится по формулам:

$$\tilde{Z} \underset{\sim}{>} A, \text{ если } |A-(\underline{z} - \chi)| \le |A-(\overline{z} + \delta)| \text{ и } A \le \overline{Z};$$

$$\tilde{Z} \underset{\sim}{<} A, \text{ если } |A-(\underline{z} - \chi)| \ge |A-(\overline{z} + \delta)| \text{ и } A \ge \overline{Z}.$$

Для нечетких интервалов существует операция произведения и деления. Произведение $\tilde{S} \otimes \tilde{X}$ двух нечетких интервалов $\tilde{S} = (\underline{s}, \overline{s}, \alpha, \beta)$ и $\tilde{X} = (\underline{x}, \overline{x}, \eta, \lambda)$ определится в виде трапециевидного интервала $\tilde{Z} = (\underline{z}, \overline{z}, \chi, \delta)$, параметры которого определяют по формулам:

$$\chi=\alpha\eta,\ \delta=\beta\lambda,\ \underline{z} = [\min\{\underline{s}\underline{x}, \overline{s}\underline{x}, \underline{s}\overline{x}, \overline{s}\overline{x}\}];\ \overline{z} = [\max\{\underline{s}\underline{x}, \overline{s}\underline{x}, \underline{s}\overline{x}, \overline{s}\overline{x}\}].$$

Эти правила для умножения двух нечетких интервалов в зависимости от знаков чисел $\overline{s}$, $\underline{s}$, $\overline{x}$, $\underline{x}$ принимают вид:

- если $\underline{s} \ge 0,\ \underline{x} \ge 0$, то $\underline{z} = \underline{s}\underline{x},\ \overline{z} = \overline{s}\overline{x}$;
- если $\underline{s} \ge 0,\ \overline{x} \le 0$, то $\underline{z} = \overline{s}\underline{x},\ \overline{z} = \underline{s}\overline{x}$;
- если $\overline{s} \le 0,\ \overline{x} \ge 0$, то $\underline{z} = \underline{s}\overline{x},\ \overline{z} = \overline{s}\underline{x}$;
- если $\overline{s} \le 0,\ \overline{x} \le 0$, то $\underline{z} = \overline{s}\overline{x},\ \overline{z} = \underline{s}\underline{x}$;
- если $\underline{s} < 0 < \overline{s},\ \underline{x} \ge 0$, то $\underline{z} = \underline{s}\overline{x},\ \overline{z} = \overline{s}\overline{x}$;
- если $\underline{s} < 0 < \overline{s},\ \overline{x} \le 0$, то $\underline{z} = \overline{s}\underline{x},\ \overline{z} = \underline{s}\underline{x}$;
- если $\underline{s} \ge 0,\ \underline{x} < 0 < \overline{x}$, то $\underline{z} = \overline{s}\underline{x},\ \overline{z} = \overline{s}\overline{x}$;
- если $\overline{s} \le 0,\ \underline{x} < 0 < \overline{x}$, то $\underline{z} = \underline{s}\overline{x},\ \overline{z} = \underline{s}\underline{x}$;
- если $\underline{s} < 0 < \overline{s},\ \underline{x} < 0 < \overline{x}$, то $\underline{z} = \min\{\underline{s}\overline{x}, \overline{s}\underline{x}\},\ \overline{z} = \max\{\underline{s}\underline{x}, \overline{s}\overline{x}\}$.

Рассмотрим операцию деления. Деление $\tilde{\mathbf{S}}/\tilde{\mathbf{X}}$ двух нечетких интервалов $\tilde{\mathbf{S}} = (\underline{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{s}}, \alpha, \beta)$ и $\tilde{\mathbf{X}} = (\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}, \eta, \lambda)$ даст трапециевидный интервал $\tilde{\mathbf{Z}} = (\underline{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}}, \chi, \delta)$, параметры которого определяются следующим образом:

$$\chi=\alpha\eta,\ \delta=\beta\lambda,\ \underline{\mathbf{z}} = [\mathbf{min}\{\underline{\mathbf{s}}/\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}}/\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{s}}/\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}}/\bar{\mathbf{x}}\}];\ \bar{\mathbf{z}} = [\mathbf{max}\{\underline{\mathbf{s}}/\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}}/\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{s}/}, \bar{\mathbf{s}}/\bar{\mathbf{x}}\}],$$

причем в зависимости от знаков чисел $\bar{\mathbf{s}}$, $\underline{\mathbf{s}}$, $\bar{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{x}}$ данное правило для деления двух нечетких интервалов будет выглядеть так:

- если $\underline{\mathbf{s}} \ge \mathbf{0},\ \underline{\mathbf{x}} \ge \mathbf{0}$, то $\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{s}}/\underline{\mathbf{x}},\ \bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{s}}/\bar{\mathbf{x}}$;
- если $\underline{\mathbf{s}} \ge \mathbf{0},\ \bar{\mathbf{x}} \le \mathbf{0}$, то $\underline{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{s}}/\underline{\mathbf{x}},\ \bar{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{s}}/\bar{\mathbf{x}}$;
- если $\bar{\mathbf{s}} \le \mathbf{0},\ \bar{\mathbf{x}} \ge \mathbf{0}$, то $\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{s}}/\bar{\mathbf{x}},\ \bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{s}}/\underline{\mathbf{x}}$;
- если $\bar{\mathbf{s}} \le \mathbf{0},\ \bar{\mathbf{x}} \le \mathbf{0}$, то $\underline{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{s}}/\bar{\mathbf{x}},\ \bar{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{s}/\mathbf{x}}$;
- если $\underline{\mathbf{s}} < \mathbf{0} < \bar{\mathbf{s}},\ \underline{\mathbf{x}} \ge \mathbf{0}$, то $\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{s}}/\bar{\mathbf{x}},\ \bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{s}}/\bar{\mathbf{x}}$;
- если $\underline{\mathbf{s}} < \mathbf{0} < \bar{\mathbf{s}},\ \bar{\mathbf{x}} \le \mathbf{0}$, то $\underline{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{s}}/\underline{\mathbf{x}},\ \bar{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{s}}/\underline{\mathbf{x}}$;
- если $\underline{\mathbf{s}} \ge \mathbf{0},\ \underline{\mathbf{x}} < \mathbf{0} < \bar{\mathbf{x}}$, то $\underline{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{s}}/\underline{\mathbf{x}},\ \bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{s}}/\bar{\mathbf{x}}$;
- если $\bar{\mathbf{s}} \le \mathbf{0},\ \underline{\mathbf{x}} < \mathbf{0} < \bar{\mathbf{x}}$, то $\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{s}}/\bar{\mathbf{x}},\ \bar{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{s}}/\underline{\mathbf{x}}$;
- если $\underline{\mathbf{s}} < \mathbf{0} < \bar{\mathbf{s}},\ \underline{\mathbf{x}} < \mathbf{0} < \bar{\mathbf{x}}$, то $\underline{\mathbf{z}} = \mathbf{min}\{\underline{\mathbf{s}}/\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}}/\underline{\mathbf{x}}\},\ \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{max}\{\underline{\mathbf{s}}/\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}}/\bar{\mathbf{x}}\}$.

2.2. Функции принадлежности

Функции принадлежности является субъективным понятием, т.к. они определяются людьми (экспертами) и каждый человек дает свою оценку. Существуют различные методы задания функций принадлежности [4-5].

Будем считать, что функция принадлежности - это некоторое невероятное субъективное измерение нечеткости и что она отличается от вероятностной меры, т.е. степень принадлежности $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ элемента $\mathbf{x}$ нечеткому множеству $\tilde{\mathbf{A}}$ есть субъективная мера того, насколько элемент $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ соответствует понятию, смысл которого формализуется нечетким множеством $\tilde{\mathbf{A}}$ [4].

Степень соответствия элемента $\mathbf{x}$ понятию, формализуемому нечетким множеством $\tilde{\mathbf{A}}$, определяется опросом экспертов и представляет собой субъективную меру.

Существует два класса методов построения функций принадлежности множества $\tilde{\mathbf{A}}$: прямые и косвенные.

2.2.1. Прямые методы построения. Прямыми методами построения функций принадлежности называют такие методы, в которых степени принадлежности элементов $\mathbf{x}$ множества $\mathbf{X}$ непосредственно задаются либо одним экспертом, либо коллективом экспертов. Прямые методы подразделяются на прямые методы для одного эксперта и для группы экспертов в зависимости от количества экспертов.

Прямой метод для одного эксперта состоит в том что эксперт каждому элементу $\mathbf{x \in X}$ ставит в соответствие определенную степень принадлежности $\mathbf{\mu_A(x)}$, которая, по его мнению, наилучшим образом согласуется со смысловой интерпретацией множества $\tilde{\mathbf{A}}$.

Применение простых методов для группы экспертов позволяет интегрированно учитывать мнение всех экспертов и строить график соответствия между элементами из множества **X**. Возможна следующая процедура построения функции принадлежности $\mathbf{\mu_A(x)}$.

Экспертам, составляющим группу из **m** человек, задается вопрос о принадлежности элемента $\mathbf{x \in X}$ нечеткому множеству $\tilde{\mathbf{A}}$. Пусть часть экспертов, состоящая из $\mathbf{n_1}$ человек, ответила на вопрос положительно, а другая часть экспертов $\mathbf{n_2=m-n_1}$ ответила отрицательно. Тогда принимается решение, что $\mathbf{\mu_A(x)=n_1/m}$.

В более общем случае оценкам экспертов сопоставляются весовые коэффициенты $\mathbf{a_i \in [0,1]}$. Коэффициенты $\mathbf{a_i}$ отражают степень компетентности экспертов. Степень принадлежности элемента x нечеткому множеству $\tilde{\mathbf{A}}$ определится

$$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i a_i / m_i,$$

где $\mathbf{p_i=1}$ при положительном ответе и $\mathbf{p_i=0}$ при отрицательном ответе эксперта.

Недостатки прямых методов состоят в присущем им субъективизме т.к. человеку присуще ошибаться.

2.2.2. Косвенные методы построения функций принадлежности. Косвенными методами построения функций принадлежности называют такие методы, в которых достигается снижение субъективного влияния за счет разбиения общей задачи определения степени принадлежности $\mathbf{\mu_A(x)}$, $\mathbf{x \in X}$ на ряд более простых подзадач. Одним из косвенных методов является метод попарных сравнений. Рассмотрим его суть.

На основе ответов экспертов строится матрица попарных сравнений $\mathbf{M=||m_{ij}||}$, в которой элементы $\mathbf{m_{ij}}$ представляют собой оценки интенсивности принадлежности элементов $\mathbf{x_i \in X}$ подмножеству $\tilde{\mathbf{A}}$ по сравнению с элементами $\mathbf{x_j \in X}$. Функция принадлежности $\mathbf{\mu_a(x)}$ определяется из матрицы **M**. Предположим, что известны значения функции принадлежности $\mathbf{\mu_A(x)}$ для всех значений $\mathbf{x \in X}$. Пусть $\mathbf{\mu_A(x)=r_i}$, $\mathbf{i=\overline{1,n}}$, $\mathbf{x \in X}$. Тогда попарные сравнения определяются $\mathbf{m_{ij}=r_i/r_j}$. Если отношения точны, то получается соотношение в матричном виде **MR=n*R**, где $\mathbf{R=(r_1,r_2,...,r_n)}$, **n** - собственное значение матрицы **M**, по которому восстанавливается вектор **R** с учетом условия $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r_i} = \mathbf{1}$. Эмпирический вектор **R** имеет решение в задаче на поиск собственного значения $\mathbf{M*R=\lambda_{max}}$, где λ_{max} - наиболее собственное значение. Задача сводится к поиску вектора **R**, который удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{M*R=\lambda_{max}*R}. \qquad (2.1)$$

Это уравнение имеет единственное решение. Значения координат собственного вектора, соответствующие максимальному собственному значению λ_{max}, деленные на их сумму, будут искомыми степенями принадлежности. Понятия, которые предложены экспертам, а также соответствие этих понятий величинам $\mathbf{m_{ij}}$, приведены в табл.2.1.

Таблица 2.1

Интенсивность важности	Качественная оценка	Объяснения
0	Несравнимость	Нет смысла сравнивать элементы
1	Одинаковая значимость	Элементы равны по значению
3	Слабо значимее	Существуют показания о предпочтении одного элемента другому, но показания неубедительны.
5	Существенно или сильнее значимее	Существует хорошее доказательство и логические критерии, которые могут показать, что один из элементов более важен
7	Очевидно значимее	Существует убедительное доказательство большей значимости одного элемента по сравнению с другим
9	Абсолютно значимее	Максимально подтверждается ощутимость предпочтения одного элемента другим
2,4,6,8	Промежуточные оценки между соседними оценками	Необходим компромисс
Обратные величины ненулевых значений	Если оценка $\mathbf{m_{ij}}$ имеет ненулевое значение, приписанное на основании сравнения элемента $\mathbf{r_i}$ с	

	элементом $\mathbf{r_j}$, то $\mathbf{m_{ij}}$ имеет обратное значение $\mathbf{1/m_{ij}}$.	

Производится опрос экспертов относительно того, насколько, по их мнению, величина $\mu_A(x_i)$ превышает величину $\mu_A(x_j)$, т.е. насколько элемент x_i более значим для понятия, описываемого нечетким множеством $\tilde{A}$, чем элемент x_j. Опрос позволит построить матрицу попарных сравнений, которая имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} r_1/r_1 & r_1/r_2 & \dots & r_1/r_n \\ r_2/r_1 & r_2/r_2 & \dots & r_2/r_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_n/r_1 & r_n/r_2 & \dots & r_n/r_n \end{vmatrix}.$$

Определение элемента $r_i \in R$ происходит следующим образом. Вычисляется сумма $K_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}$ каждого **j**-го столбца матрицы **M.** Из построения матрицы **M** следует, что $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{r_j} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i}{r_j} = \frac{1}{r_j}$. Отсюда следует, что $r_i = 1/k_i$.

Определив все величины k_j, получим значения элементов вектора **R**. Исходя из того, что матрица **M**, как правило, построена неточно, найденный вектор **R** используется как начальный в итерационном методе решения уравнения (2.1).

2.2.3. Виды функций принадлежности. Выше было определено, что функции принадлежности могут иметь трапецеидальный вид (см. рис. 2.7), треугольный вид (см. рис. 2.7). Функции принадлежности могут иметь также и колоколообразный вид (рис. 2.14).

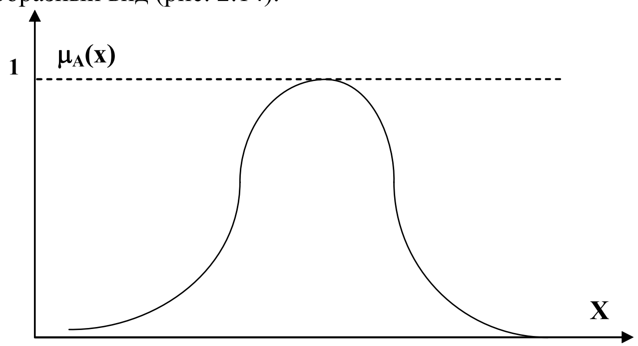


Рис. 2.14

Для колоколообразного вида функция принадлежности определена выражением

$$\mu_A(\mathbf{x}) = \exp\left\{\frac{-(\mathbf{x}-\mathbf{m})^2}{\delta^2}\right\},$$

где **m** - заданное число, δ - показатель нечеткости.

Для трапецеидального вида функция принадлежности определена выражением: $\mu_A(x)=\min\{\max(a-k|x-b|;0);1\}$, где **a**, **b** - заданные числа, **k** - показатель нечеткости.

При решении задач нечеткого управления могут быть применены и другие функции:

$$\mu_A(x)=e^{-kx},\ x>0;\ \mu_A(x)=1-a^x,\ 0\le x\le a^{-1/k};\ \mu_A(x)=(1+kx^2)^{-1},\ k>1.$$

Нечеткое множество с одномерной функцией принадлежности $\mu_A(x)$ принято называть **нечетким множеством первого рода**.

Существуют **нечеткие множества второго рода**, для который функция принадлежности: $\mu_{A_3}(x)=\mu_{A_2}(\mu_{A_1}(x))$.

Двухмерное нечеткое множество **A** определено в следующем виде: $A=(A_1\times A_2\!:\ \mu_A(x_1,x_2))$, где $A_1\times A_2$ - декартово произведение, $\mu_A(x_1,x_2)=\min\{a-k_1|x_1-b| - k_2|x_2-c|;\ (x_1=0,\ x_2=0)\};$ - двухмерная функция принадлежности трапецеидального вида, в которой: **a**, **b**, c - заданные числа, k_1, k_2 - показатели нечеткости. Пример задания двухмерной функции принадлежности трапецеидального вида приведен на рис. 2.15.

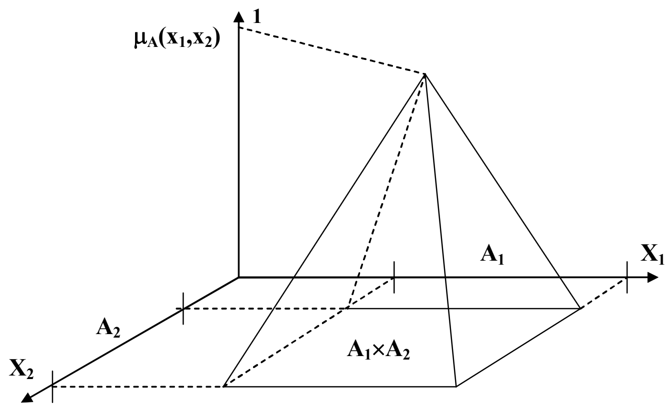


Рис. 2.15

Двухмерная функция принадлежности колоколообразного вида определена формулой:

$$\mu_A(x_1, x_2) = \max\left\{\exp\left\{-\frac{(x_1 - m_1)^2}{\delta_1^2} - \frac{(x_2 - m_2)^2}{\delta_2^2}\right\}; (0;0)\right\},$$

где m_1, m_2 - заданные числа, δ_1, δ_2 - показатели нечеткости.

2.3. Нечеткие предикаты и кванторы

Нечеткие логические формулы могут быть определены не только на нечетких высказывательных переменных, но и на каком-либо множестве **X**. Эти формулы принимают свое значение также в отрезке чисел [0,1].

Нечеткими предикатами $\tilde{A}(x)$ называются нечеткие логические формулы, определенные на элементах множества X и принимающие значения внутри отрезка чисел [0,1]. Числовой характеристикой нечеткого предиката $\tilde{A}(x)$ являются величины $\mu(\tilde{A})$ и $\nu(\tilde{A})$. Величина $\mu(\tilde{A})$, определяемая выражением $\mu(\tilde{A}) = \mu_A(x_1) \wedge \mu_A(x_2) \wedge \ldots \wedge \mu_A(x_n)$, $x_i \in X$, $i = \overline{1, n}$, называется степенью общности свойства $\tilde{A}(x)$ для элементов множества **X**.

На нечеткую логическую формулу $\tilde{A}(x)$ при значении $\mu(\tilde{A}) \geq 0{,}5$ может быть навешен квантор нечеткой общности $\tilde{\forall}$, который имеет смысл «для любого» или «для всех». Величина $\nu(\tilde{A})$, определяемая выражением $\nu(\tilde{A}) = \mu_A(x_1) \vee \mu_A(x_2) \vee \ldots \vee \mu_A(x_n)$, $x_i \in X$, $i = \overline{1, n}$, называется степенью существования свойства $\tilde{A}(x)$ для элементов множества X.

Если величина $\nu(\tilde{A}) \geq 0{,}5$, то на нечеткую логическую формулу $\tilde{A}(x)$ может быть навешен квантор нечеткого существования $\tilde{\exists}$, который читается «существует такой» или «имеется такой».

Возможно задание нечеткой логической формулы $\tilde{A}(x)$ от одной переменной **x**, принимающей значения из множества **X**. Тогда выражение $(\tilde{\forall} \in X)\tilde{A}(x)$ является нечетко истинной формулой и читается «для любого $x \in X$ степень истинности $\tilde{A}(x)$ больше или равна 0,5».

Выражение $(\tilde{\exists} \in X)\tilde{A}(x)$ является также нечетко истинной формулой и читается «существует такой $x \in X$, что степень истинности высказывания $\tilde{A}(x)$ больше или равна 0,5».

2.4. Нечеткие высказывания

Нечетким высказыванием называется предложение, относительно которого можно судить о степени его истинности или ложности при данных входных переменных. Степень истинности (степень логичности) нечеткого высказывания принимает значения из замкнутого интервала [0,1]. Значения степени истинности 0 и 1 совпадают с понятиями лжи и истинности булевой алгебры логики. Нечеткое высказывание, степень истинности которого равна 0,5, называется индифферентностью. Примером нечеткого высказывания является: «скорость движения небольшая». Нечеткие высказывания делятся на простые и составные, которые образуются из простых с помощью логических операций отрицания, импликации, конъюнкции, дизъюнкции и т.д.

Отрицанием нечеткого высказывания $\tilde{\mathbf{A}}$ называется нечеткое высказывание, обозначаемое $\rceil\tilde{\mathbf{A}}$, степень истинности которого определятется выражением $\rceil\tilde{\mathbf{A}}=1-\tilde{\mathbf{A}}$. Конъюнкцией нечетких высказываний $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ называется нечеткое высказывание, обозначаемое $\tilde{\mathbf{A}}\,\&\,\tilde{\mathbf{B}}$, степень истинности которого определяется выражением $\tilde{\mathbf{A}}\,\&\,\tilde{\mathbf{B}}=\mathbf{min}(\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\mathbf{B}})$. Логические операции здесь и далее имеют минимаксную трактовку логических операций, введенную Л.Заде [6].

Дизъюнкцией нечетких высказываний $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ называется нечеткое высказывание $\tilde{\mathbf{A}}\vee\tilde{\mathbf{B}}$, степень истинности определяется выражением

$$\tilde{\mathbf{A}}\vee\tilde{\mathbf{B}}=\mathbf{max}(\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\mathbf{B}}).$$

Импликацией нечетких высказываний $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ называется нечеткое высказывание, обозначаемое $\tilde{\mathbf{A}}\to\tilde{\mathbf{B}}$, степень истинности которого определяется выражением $\tilde{\mathbf{A}}\to\tilde{\mathbf{B}}=\mathbf{max}(\mathbf{1}-\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\mathbf{B}})$.

Эквивалентностью нечетких высказываний $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ называется нечеткое высказывание, обозначаемое $\tilde{\mathbf{A}}\leftrightarrow\tilde{\mathbf{B}}$, степень истинности которого находится выражением $\tilde{\mathbf{A}}\leftrightarrow\tilde{\mathbf{B}}=\mathbf{min}((\mathbf{max}(\mathbf{1}-\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\mathbf{B}})),)\,\mathbf{max}(\mathbf{1}-\tilde{\mathbf{B}},\tilde{\mathbf{A}}))$. Высказывания $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ называются нечетко близкими, если степень истинности высказывания $\tilde{\mathbf{A}}\leftrightarrow\tilde{\mathbf{B}}$ больше значения 0,5, а при равенстве 0,5 - называют взаимно нечетко индифферентными.

Порядок выполнения логических операций в составном нечетком высказывании определяется скобками, а при их отсутствии сначала выполняются отрицания, затем конъюнкции, далее дизъюнкции, а после этого импликация и эквивалентность.

2.5. Нечеткие логические формулы

Нечеткое высказывание совсем необязательно будет иметь постоянное значение степени истинности. Высказывание «скорость дивижения небольшая» в общем случае может иметь значение степени истинности, определенное любой точкой в отрезке [0,1].

Нечеткое высказывание, степень стабильности которого может принимать произвольное значение из отрезка [0,1], называется нечеткой высказывательной переменной $\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}}$. Составные нечеткие высказывания образуют нечеткие логические формулы при условии, что нечеткие высказывания рассматриваются как нечеткие высказывательные переменные.

Нечеткой логической формулой $\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$, $\mathbf{n \geq 1}$ называется:

а) всякая нечеткая высказывательная переменная или константа из отрезка [0.1];

б) выражение $\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$, полученное из нечетких логических формул $\tilde{\mathbf{A}}_1(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$ и $\tilde{\mathbf{A}}_2(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$ путем применения к ним любого числа логических операций.

Логические формулы $\tilde{\mathbf{A}}_1(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$ и $\tilde{\mathbf{A}}_2(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$ определены на наборах $(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$ и нечетких высказывательных переменных. Понятие равносильности для формул $\tilde{\mathbf{A}}_1(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$ и $\tilde{\mathbf{A}}_2(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$ определяется степенью равносильности.

Степень равносильности нечетких логических формул $\tilde{\mathbf{A}}_1(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$ и $\tilde{\mathbf{A}}_2(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$ обозначается $\mu(\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2)$ и определяется выражением

$$\mu(\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2) = \bigcap_{x_1, x_2, ..., x_n} (\tilde{\mathbf{A}}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n) \leftrightarrow \tilde{\mathbf{A}}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n)).$$

Формулы $\tilde{\mathbf{A}}_1(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$ и $\tilde{\mathbf{A}}_2(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$ будут называться нечетко близкими, если значние степеней равносильны на всех определенных наборах $(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$, будут больше или равны величине 0,5. Для обозначения нечетко близких формул применяется запись

$$\tilde{\mathbf{A}}_1(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n) \approx \tilde{\mathbf{A}}_2(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n).$$

Формулы $\tilde{\mathbf{A}}_1(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$ и $\tilde{\mathbf{A}}_2(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$ не являются близкими, если $\mu(\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2) \leq \mathbf{0{,}5}$ на всех наборах $(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$. При этом применяется обозначение $\tilde{\mathbf{A}}_1(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n) \neq \tilde{\mathbf{A}}_2(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$. Если $\mu(\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2) = \mathbf{0{,}5}$, то формулы $\tilde{\mathbf{A}}_1(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$ и $\tilde{\mathbf{A}}_2(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n)$ называются взаимно индифферентными.

Нечеткую логическую формулу $\tilde{A}_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2,..., \tilde{x}_n)$, которая при всех определенных значениях степеней истинности начальных переменных $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2,..., \tilde{x}_n)$ имеет значение степени истинности большее или равное 0,5, называют нечетко истинной на этих наборах и обозначают через $\tilde{И}$.

Если же при всех определенных наборах степеней истинности нечетких переменных $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2,..., \tilde{x}_n)$ значение степени истинности формулы $\tilde{A}_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2,..., \tilde{x}_n)$ меньше или равно 0,5, то такую формулу называют нечетко ложной и обозначают через $\tilde{Л}$.

Для нечетко истинных формул $\tilde{И}_1$, $\tilde{И}_2$ и нечетко ложных формул $\tilde{Л}_1$, $\tilde{Л}_2$ на одних и тех же наборах переменных справедливы соотношения

$$\tilde{И}_1 \vee \tilde{И}_2 \approx \tilde{И}_1 \approx \tilde{И}_2 \approx \tilde{И}_2 \wedge \tilde{И}_1,\ \tilde{Л}_1 \vee \tilde{Л}_2 \approx \tilde{Л}_1 \approx \tilde{Л}_2 \approx \tilde{Л}_2 \wedge \tilde{Л}_1,$$
$$\tilde{И}_1 \wedge \tilde{Л}_1 \approx \tilde{Л}_1,\ \tilde{И}_1 \wedge \tilde{Л}_1 \approx \tilde{И}_1.$$

Если на этих же наборах переменных определены еще произвольные нечеткие логические формулы $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$, то справедливы выражения

$$\tilde{A}_1 \vee \tilde{И}_1 \approx \tilde{A}_2 \vee \tilde{И}_2,\ \tilde{A}_1 \wedge \tilde{Л}_1 \approx \tilde{A}_2 \wedge \tilde{Л}_2.$$

Для доказательства равносильности любых нечетких логических формул $\tilde{A}_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2,..., \tilde{x}_n)$ и $\tilde{A}_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2,..., \tilde{x}_n)$ следует показать, что степень равносильности $\mu(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$ на всех определенных наборах $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2,..., \tilde{x}_n)$ больше или равна 0,5.

2.6. Операции над нечеткими множествами

2.6.1. Нечеткое включение множеств. Пусть на базовом множестве $\mathbf{X}$ заданы нечеткие подмножества $\tilde{A}$ **и** $\tilde{B}$.

Степенью включения $\nu(\tilde{A}, \tilde{B})$ нечеткого множества $\tilde{A}$. в нечеткое множество $\tilde{B}$ называется величина $\nu(\tilde{A}, \tilde{B})$, которая определяется из формулы $\nu(\tilde{A}, \tilde{B}) = \bigwedge\limits_{x \in X} (\mu_A(x) \rightarrow \mu_B(x))$, где $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ - нечеткие выскаывательные переменные; $\rightarrow$ - операция импликации нечетких высказываний; $\wedge$ - операция конъюнкции. При значениях $\nu(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq 0{,}5$ считается, что множество $\tilde{A}$ нечетко включается в множество $\tilde{B}$. Нечеткое включение $\tilde{A}$ в $\tilde{B}$ обозначается $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$. При значениях $\nu(\tilde{A}, \tilde{B}) < 0{,}5$ считается, что множество $\tilde{A}$ нечетко не включается в множество $\tilde{B}$ и обозначается $\tilde{A} \not\subset \tilde{B}$.

2.6.2. Нечеткое равенство множеств. На базовом множестве X пусть заданы два нечетких подмножества $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$. Степенью равенства $\mu(\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\mathbf{B}})$ нечетких множеств $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ называется величина $\mu(\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\mathbf{B}})$, которая определяется из формулы $\mu(\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\mathbf{B}}) = \bigwedge_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} (\mu_\mathbf{A}(\mathbf{x}) \leftrightarrow \mu_\mathbf{B}(\mathbf{x}))$, где $\mu_\mathbf{A}(\mathbf{x})$ и $\mu_\mathbf{B}(\mathbf{x})$ - нечеткие высказывательные переменные, $\leftrightarrow$ – операция эквивалентности нечетких высказываний. При значениях $\mu(\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\mathbf{B}})$=0,5 считается, что множества $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ одновременно нечетко равны и не равны. Этот случай называется взаимной индифферентностью и обозначается $\tilde{\mathbf{A}} \sim \tilde{\mathbf{B}}$.

2.6.3. Теоретико-множественные операции над нечеткими множествами. Пусть на базовом множестве **X** заданы нечеткие множества

$$\tilde{\mathbf{A}} = \{< \mu_\mathbf{A}(\mathbf{x}) / \mathbf{x} >\} \text{ и } \tilde{\mathbf{B}} = \{< \mu_\mathbf{B}(\mathbf{x}) / \mathbf{x} >\},\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$$

Объединением нечетких множеств $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ называется нечеткое множество, которое обозначается $\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}$ и определяется формулой

$$\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}} = \{< \mu_{\mathbf{A}\cup\mathbf{B}}(\mathbf{x}) / \mathbf{x} >\},\quad \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$$

Множества $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ нечетко включаются в множество $\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}$, так что $\tilde{\mathbf{A}} \subseteq \tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}$ и $\tilde{\mathbf{B}} \subseteq \tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}$.

Пересечением множеств $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ называется нечеткое множество, которое обозначается $\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}$ и определяется формулой $\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}} = \{< \mu_{\mathbf{A}\cap\mathbf{B}}(\mathbf{x}) / \mathbf{x} >\}$, $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$. Нечеткое множество $\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}}$ нечетко включается в $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$, так что $\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}} \subseteq \tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}} \subseteq \tilde{\mathbf{B}}$.

Дополнением множества $\tilde{\mathbf{A}}$ называется нечеткое множество, обозначаемое $\rceil\tilde{\mathbf{A}}$, и определяется формулой $\rceil\tilde{\mathbf{A}} = \{< \mu_{\neg\mathbf{A}}(\mathbf{x}) / \mathbf{x} >\},\quad \mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

Разностью множеств $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ называется нечеткое множество $\tilde{\mathbf{A}} \setminus \tilde{\mathbf{B}}$, определяемое формулой $\tilde{\mathbf{A}} \setminus \tilde{\mathbf{B}} = \{< \mu_{\mathbf{A}\setminus\mathbf{B}}(\mathbf{x}) / \mathbf{x} >\},\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}$, где $\mu_{\mathbf{A}\setminus\mathbf{B}}(\mathbf{x})=\mu_\mathbf{A}(\mathbf{x})\wedge\neg\mu_\mathbf{B}(\mathbf{x})$.

Симметрической разностью множеств $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ называется нечеткое множество, которое обозначается $\tilde{\mathbf{A}} \circ \tilde{\mathbf{B}}$ и определяется формулой $\tilde{\mathbf{A}} \circ \tilde{\mathbf{B}} = \{<\mu_{\mathbf{A}\circ\mathbf{B}}(\mathbf{x})/\mathbf{x}>\}$, $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$, где $\mu_{\mathbf{A}\circ\mathbf{B}}(\mathbf{x})=\mu_{\mathbf{A}\setminus\mathbf{B}}(\mathbf{x})\vee\mu_{\mathbf{B}\setminus\mathbf{A}}(\mathbf{x})$.

Перечисленные выше теоретико-множественные операции и введенные понятия нечеткой близости логических формул позволяют получить основные свойства операций, записываемых в виде нечетких формул (нечетких равенств). Основные свойства операций при условии, что $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ и $\tilde{\mathbf{C}}$ - произвольные нечеткие множества, следующие:

$\neg(\neg\tilde{\mathbf{A}}) \approx \tilde{\mathbf{A}}$ - (инволюция);

$\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{A}} \approx \tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{A}} \approx \tilde{\mathbf{A}}$ - (идемпотентность);

$\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}} \approx \tilde{\mathbf{B}} \cup \tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}} \approx \tilde{\mathbf{B}} \cap \tilde{\mathbf{A}}$ - (коммутативность);

$\tilde{\mathbf{A}} \cup (\tilde{\mathbf{B}} \cup \tilde{\mathbf{C}}) \approx (\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}) \cup \tilde{\mathbf{C}} \approx \tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}} \cup \tilde{\mathbf{C}}$,

$\tilde{\mathbf{A}} \cap (\tilde{\mathbf{B}} \cap \tilde{\mathbf{C}}) \approx (\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}}) \cap \tilde{\mathbf{C}} \approx \tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}} \cap \tilde{\mathbf{C}}$ - (ассоциативность);

$\tilde{\mathbf{A}} \cup (\tilde{\mathbf{B}} \cap \tilde{\mathbf{C}}) \approx (\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}) \cap (\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{C}})$,

$\tilde{\mathbf{A}} \cap (\tilde{\mathbf{B}} \cup \tilde{\mathbf{C}}) \approx (\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}}) \cup (\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{C}})$ - (дистрибутивность);

$\neg(\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}) \approx \neg\tilde{\mathbf{A}} \cap \neg\tilde{\mathbf{B}}$, $\neg(\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}}) \approx \neg\tilde{\mathbf{A}} \cup \neg\tilde{\mathbf{B}}$ - (закон де Моргана);

$\tilde{\mathbf{A}} \cup \neg\tilde{\mathbf{B}} \approx \tilde{\mathbf{B}} \cup \neg\tilde{\mathbf{A}}, \quad \tilde{\mathbf{A}} \cap \neg\tilde{\mathbf{B}} \approx \tilde{\mathbf{B}} \cap \neg\tilde{\mathbf{A}}$;

$\tilde{\mathbf{A}} \cup \neg\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}} \approx \tilde{\mathbf{B}} \cup \neg\tilde{\mathbf{B}} \cup \tilde{\mathbf{A}}, \quad \tilde{\mathbf{A}} \cap \neg\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}} \approx \tilde{\mathbf{B}} \cap \neg\tilde{\mathbf{B}} \cap \tilde{\mathbf{A}}$;

$(\tilde{\mathbf{A}} \cup \neg\tilde{\mathbf{A}}) \cup (\tilde{\mathbf{B}} \cap \neg\tilde{\mathbf{B}}) \approx \tilde{\mathbf{A}} \cup \neg\tilde{\mathbf{B}}, \quad (\tilde{\mathbf{A}} \cap \neg\tilde{\mathbf{A}}) \cup (\tilde{\mathbf{B}} \cup \neg\tilde{\mathbf{B}}) \approx \tilde{\mathbf{A}} \cap \neg\tilde{\mathbf{B}}$;

$\tilde{\mathbf{A}} \setminus \tilde{\mathbf{B}} \approx \tilde{\mathbf{A}} \cap \neg\tilde{\mathbf{B}}$; $\tilde{\mathbf{A}} \circ \tilde{\mathbf{B}} \approx \tilde{\mathbf{B}} \circ \tilde{\mathbf{A}}$; $(\tilde{\mathbf{A}} \circ \tilde{\mathbf{B}}) \circ \tilde{\mathbf{C}} \approx \tilde{\mathbf{A}} \circ (\tilde{\mathbf{B}} \circ \tilde{\mathbf{C}}) \approx \tilde{\mathbf{A}} \circ \tilde{\mathbf{B}} \circ \tilde{\mathbf{C}}$;

$\tilde{\mathbf{A}} \circ \tilde{\mathbf{B}} \approx (\tilde{\mathbf{A}} \setminus \tilde{\mathbf{B}}) \cup (\tilde{\mathbf{B}} \setminus \tilde{\mathbf{A}})$; $(\tilde{\mathbf{A}} \subseteq \tilde{\mathbf{B}}) \approx (\neg\tilde{\mathbf{B}} \subseteq \neg\tilde{\mathbf{A}})$;

$(\neg\tilde{\mathbf{A}} \subseteq \tilde{\mathbf{B}}) \approx (\neg\tilde{\mathbf{B}} \subseteq \tilde{\mathbf{A}})$; $(\tilde{\mathbf{A}} \subseteq (\tilde{\mathbf{B}} \cup \neg\tilde{\mathbf{B}}) \approx ((\tilde{\mathbf{A}} \cap \neg\tilde{\mathbf{A}}) \subseteq \tilde{\mathbf{B}})$;

$((\tilde{\mathbf{A}} \cap \neg\tilde{\mathbf{A}}) \subseteq (\tilde{\mathbf{B}} \cup \tilde{\mathbf{C}}) \approx ((\tilde{\mathbf{B}} \cap \neg\tilde{\mathbf{B}}) \subseteq (\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{C}})$;

$\tilde{\mathbf{A}} \cup \varnothing \approx \tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{A}} \cap \varnothing \approx \varnothing$; $\tilde{\mathbf{A}} \cup \mathbf{X} \approx \mathbf{X}$, $\tilde{\mathbf{A}} \cap \mathbf{X} \approx \tilde{\mathbf{A}}$.

2.6.4. Нечеткое покрытие множеств. Пусть задано некоторое непустое множество **X**. Нечетким покрытием множества **X** называется семейство нечетких множеств **R**, для которых выполняются условия: $\forall\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{R}\ \ \tilde{\mathbf{A}} \neq \varnothing$; $\forall\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{R}\ \ \tilde{\mathbf{A}} \subseteq \mathbf{X}$; $\bigcup_{\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{R}} \tilde{\mathbf{A}} \approx \mathbf{X}$. Чтение этих условий говорит о том, что нечеткое покрытие **R** есть совокупность нечетких подмножеств множества **X**, объединение которых нечетко равно множеству **X**. Элементы **A** семейства **R** называются классами нечеткого покрытия.

Максимальным является такой класс нечеткого покрытия, который нечетко не включается ни в один другой класс данного покрытия.

2.6.5. Нечеткое разбиение множеств. Пусть X - произвольное непустое множество, на котором определены различные нечеткие классы покрытия. Если попарное пересечение всех различных нечетких классов покрытия нечетко близко пустому множеству, то это представляет частный вид покрытия, называемый нечетким разбиением множества.

Нечетким разбиением множества X называется семейство **M** нечетких множеств, для которых выполняются следующие условия: $\forall\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{M}\ \ \tilde{\mathbf{A}} \neq \varnothing$; $\forall\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{M}\ \ \tilde{\mathbf{A}} \subseteq \mathbf{X}$; $\forall\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{M}, \forall\tilde{\mathbf{B}} \in \mathbf{M}\ (\tilde{\mathbf{A}} \neq \tilde{\mathbf{B}}) \approx (\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}}) \approx \varnothing))$; $\bigcup_{\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{M}} \tilde{\mathbf{A}} \approx \mathbf{X}$.

Элементы множества **M** называются классами нечеткого разбиения множества **X**.

2.6.6. Прямое произведение нечетких множеств. Пусть на базовом множестве **X** задано нечеткое подмножество $\tilde{\mathbf{A}}=\{<\mu_A(x)/x>\}$, $x\in\mathbf{X}$, а на базовом множестве **Y** задано нечеткое подмножество $\tilde{\mathbf{B}}=\{<\mu_B(y)/y>\}$, $y\in\mathbf{Y}$.

Прямым произведением нечетких множеств $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ называется нечеткое множество, обозначаемое $\tilde{\mathbf{A}}\times\tilde{\mathbf{B}}$, которое является нечетким подмножеством множества $X\times Y$ и определяется выражением $\tilde{\mathbf{A}}\times\tilde{\mathbf{B}}=\{<\mu_{A\times B}<x,y>/<x,y>>\}$, $<x,y>\in X\times Y$, где $\mu_{A\times B}<x,y>=\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)$.

2.6.7. Инверсия нечетких множеств. Пусть на множестве $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ задано нечеткое подмножество $\tilde{\mathbf{F}}=\{<\mu_F<x,y>/<x,y>>\}$, $<x,y>\in X\times Y$. Инверсией нечеткого множества $\tilde{\mathbf{F}}$ называется и через $\tilde{\mathbf{F}}^{-1}$ обозначается нечеткое множество $\tilde{\mathbf{F}}^{-1}=\{<\mu_{F^{-1}}<x,y>/<x,y>>\}$, $<x,y>\in X\times Y$, где $\mu_{F^{-1}}<y,x>=\mu_F<x,y>$.

2.6.8. Композиция нечетких множеств. Пусть на базовом множестве $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ задано нечеткое подмножество $\tilde{\mathbf{F}}=\{<\mu_F<x,y>/<x,y>>\}$, $<x,y>\in X\times Y$, а на базовом множестве $\mathbf{Y}\times\mathbf{Z}$ задано нечеткое подмножество $\tilde{\mathbf{P}}=\{<\mu_P<x,y>/<x,y>>\}$, $<x,y>\in X\times Y$. Композицией нечетких множеств $\tilde{\mathbf{F}}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ называется нечеткое множество, которое обозначается через $\tilde{\mathbf{F}}\bullet\tilde{\mathbf{P}}$ и определяется формулой $\tilde{\mathbf{F}}\times\tilde{\mathbf{P}}=\{<\mu_{F\bullet P}<x,z>/<x,z>>\}$, $<x,z>\in X\times Z$, где $\mu_{F\bullet P}<x,z>=\bigcup\limits_{y\in Y}\mu_F<x,y>\wedge\mu_P<y,z>$, $x\in X$, $y\in Y$, $z\in Z$.

Степень принадлежности пары $<x,z>\in X\times Z$ нечеткому множеству $\tilde{\mathbf{F}}\bullet\tilde{\mathbf{P}}$ равна наибольшей из минимумов степеней принадлежности различных комбинируемых пар $<x,y>\in X\times Y$ и $<y,z>\in Y\times Z$ нечетким множествам $\tilde{\mathbf{F}}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$, где в качестве y могут выступать несколько компонируемых элементов.

Операция композиции нечетких множеств обладает свойствами:

$\tilde{\mathbf{F}}\bullet(\tilde{\mathbf{P}}\bullet\tilde{\mathbf{Q}})\approx(\tilde{\mathbf{F}}\bullet\tilde{\mathbf{P}})\bullet\tilde{\mathbf{Q}}$ - (ассоциативность); $\tilde{\mathbf{F}}\bullet(\tilde{\mathbf{P}}\cup\tilde{\mathbf{S}})\approx(\tilde{\mathbf{F}}\bullet\tilde{\mathbf{P}})\cup(\tilde{\mathbf{F}}\bullet\tilde{\mathbf{S}})$- (дистрибутивность); $(\tilde{\mathbf{F}}\bullet\tilde{\mathbf{P}})^{-1}\approx\tilde{\mathbf{P}}^{-1}\bullet\tilde{\mathbf{F}}^{-1}$, где $\tilde{\mathbf{S}}$ и $\tilde{\mathbf{Q}}$ - некоторые нечеткие подмножества, заданные на базовом множестве $\mathbf{Z}\times\mathbf{W}$.

2.7. Нечеткие соответствия

2.7.1.Способы задания нечетких соответствий. Пусть заданы два произвольных непустых множества **X** и **Y**.

Нечетким соответствием между множествами **X** и **Y** наывается и через $\tilde{\Gamma} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \tilde{\mathbf{F}})$ обозначается тройка множеств, в которой $\tilde{\mathbf{F}}$ - нечеткое множество, заданное в произвольном базовом множестве **X×Y**.

Множество **X** называется областью отправления нечеткого соответствия, множество **Y** - областью прибытия, нечеткое множество $\tilde{\mathbf{F}}$ - нечетким графиком нечеткого соответствия. Носителем нечеткого соответствия $\tilde{\Gamma} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \tilde{\mathbf{F}})$ является четкое соответствие **Г=(X,Y,F)**, график **F** которого является носителем нечеткого графика $\tilde{\mathbf{F}}$.

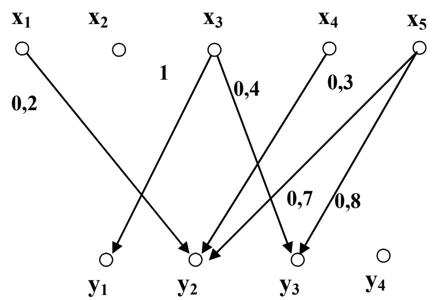
Среди способов задания соответствий имеются теоретико-множественный, графический, матричный.

Теоретико-множественный способ задания нечеткого соответствия предполагает последовательное перечисление всех элементов множеств **X** и **Y**, а затем задание нечеткого множества $\tilde{\mathbf{F}}$ на базовом множестве **X×Y**.

Матричный способ задания нечеткого соответствия требует построения матрицы инциденций **R**, строки которой помечены элементами $\mathbf{x_i \in X}$, $\mathbf{i=1,2,...,n}$, столбцы - элементами $\mathbf{y_j \in Y}$, $\mathbf{j=1,2,...,m}$. На пересечении строки $\mathbf{x_i}$ и столбца $\mathbf{y_j}$ ставится элемент $\mathbf{r_{ij}=\mu_F\langle x_i,y_j\rangle}$, где $\mathbf{\mu_F}$ - функция принадлежности элементов нечеткого множества $\tilde{\mathbf{F}}$.

При задании нечеткого **соответствия графическим способом** строится ориентированный граф с множеством вершин $\mathbf{X \cup Y}$. Каждой дуге $\mathbf{\langle x_i,y_j\rangle}$ графа приписано значение $\mathbf{\mu_F\langle x_i,y_j\rangle}$ функции принадлежности.

Рассмотрим пример задания. Пусть для нечеткого соответствия $\tilde{\Gamma} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \tilde{\mathbf{F}})$ определены множества $\mathbf{X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}}$, $\mathbf{Y=\{y_1,y_2,y_3\}}$, $\tilde{\mathbf{F}}$**={<<0,2/<**$\mathbf{x_1,y_2}$**>>, <<1/<**$\mathbf{x_3,y_1}$**>> <<0,4/<**$\mathbf{x_3,y_3}$**>>, <<0,3/<**$\mathbf{x_4,y_2}$**>>}.** На рис. 2.16 показан граф нечеткого соответствия, матрица инциденций которого **R.**



$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Рис. 2.16

Степень равенства двух нечетких соответствий $\widetilde{\Gamma}=(\mathbf{X},\mathbf{Y},\widetilde{\mathbf{F}})$ и $\widetilde{\Delta}=(\mathbf{X},\mathbf{Y},\widetilde{\mathbf{P}})$, заданных на базовом множестве **X×Y,** определяется формулой

$$\mu(\widetilde{\Gamma},\widetilde{\Delta})=\bigcap_{<x,y>\in X\times Y}(\mu_{F}<x,y>\leftrightarrow\mu_{P}<x,y>/$$

Нечеткие соответствия $\widetilde{\Gamma}$ и $\widetilde{\Delta}$ нечетко равны ($\widetilde{\Gamma}\approx\widetilde{\Delta}$) при $\mu(\widetilde{\Gamma},\widetilde{\Delta})\geq 0{,}5$, нечетко не равны при $\mu(\widetilde{\Gamma},\widetilde{\Delta})<0{,}5$, а при $\mu(\widetilde{\Gamma},\widetilde{\Delta})=0{,}5$ одновременно нечетко равны и не равны, т.е. взаимно индифферентны, что обозначается ($\widetilde{\Gamma}\sim\widetilde{\Delta}$).

Инверсией нечеткого соответствия $\widetilde{\Gamma}=(\mathbf{X},\mathbf{Y},\widetilde{\mathbf{F}})$ называется нечеткое соответствие $\widetilde{\Gamma}^{-1}=(\mathbf{X},\mathbf{Y},\widetilde{\mathbf{F}}^{-1})$, график $\widetilde{\mathbf{F}}^{-1}$ которого является инверсией графика $\widetilde{\mathbf{F}}$, а множества **Y** и **X** - областями отправления и прибытия соответственно.

Композицией нечетких соответствий $\widetilde{\Gamma}=(\mathbf{X},\mathbf{Y},\widetilde{\mathbf{F}})$ и $\widetilde{\Delta}=(\mathbf{X},\mathbf{Y},\widetilde{\mathbf{P}})$ называется нечеткое соответствие $\widetilde{\Phi}=\widetilde{\Gamma}\bullet\widetilde{\Delta}$, область отправления которого совпадает с областью отправления соответствия $\widetilde{\Gamma}$, область прибытия - с областью прибытия соответствия $\widetilde{\Delta}$, а график $\widetilde{\mathbf{S}}$ является композицией графиков $\widetilde{\mathbf{F}}$ и $\widetilde{\mathbf{P}}$.

Рассмотрим пример графического задания композиции соответствий.

Пусть нечеткое соответствие $\widetilde{\Gamma}$ имеет графическое задание, показанное на рис. 2.16, а нечеткое соответствие $\widetilde{\Delta}$ имеет графическое задание, показанное на рис. 2.17. На рис. 2.18 показано графическое задание соответствия $\widetilde{\Phi}=\widetilde{\Gamma}\bullet\widetilde{\Delta}$, построенного по определению композиции

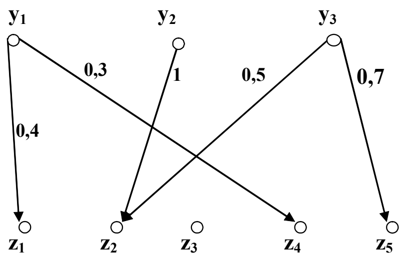


Рис. 2.17

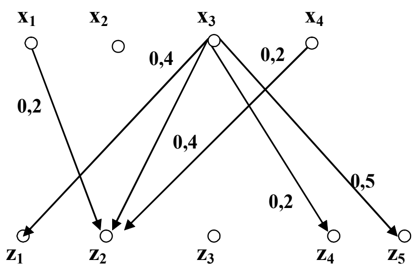


Рис. 2.18

Пусть на базовом множестве задано нечеткое множество $\widetilde{\mathbf{A}}$ с функцией принадлежности μ_F и также задано нечеткое соответствие $\widetilde{\Gamma}=(\mathbf{X},\mathbf{Y},\widetilde{\mathbf{F}})$. **Образом множества** $\widetilde{\mathbf{A}}$ при соответствии $\widetilde{\Gamma}$ называется нечеткое множество

$\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\tilde{\mathbf{A}})$, являющееся подмножеством $\mathbf{Y}$ и определяемое формулой $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\tilde{\mathbf{A}})=\{\mu_{\Gamma(A)}(y)/y>\}$, $y\in\mathbf{Y}$, где

$$\mu_{\Gamma(A)}(y)=\bigcup_{x\in X}(\mu_A(x)\wedge\mu_F<x,y> \qquad (2.2)$$

Из определения следует, что, поскольку всякий элемент $y\in\mathbf{Y}$ может соответствовать нескольким элементам $x\in\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ – носитель множества $\tilde{\mathbf{A}}$, то значение функции принадлежности элемента y нечеткому множеству $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\tilde{\mathbf{A}})$ определяется как наибольшее из значений, получаемых с помощью выбора минимального между значениями функции принадлежности каждого $x\in\mathbf{A}$ нечеткому множеству $\tilde{\mathbf{A}}$ и значением функции принадлежности пары <x,y> нечеткому графику $\tilde{\mathbf{F}}$.

Рассмотрим пример нахождения образа множества $\tilde{\mathbf{A}}$.

Пусть дано нечеткое соответствие, граф которого приведен на рис. 2.15, нечеткое множество **A={<0,6/x1>,<0,7/x2>,<0,9/x4>}**. Найти образ $\tilde{\mathbf{A}}$ при соответствии $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$. Для каждого $y\in\mathbf{Y}$ определим значение $\mu_{\Gamma(A)}(y)$:

$$\mu_{\Gamma(A)}(y_1)=(\mu_A(x_1)\wedge\mu_F<x_1,y_1>)\vee(\mu_A(x_2)\wedge\mu_F<x_2,y_1>)\vee(\mu_A(x_4)\wedge\mu_F<x_4,y_1>)=0;$$

$$\mu_{\Gamma(A)}(y_2)=(\mu_A(x_1)\wedge\mu_F<x_1,y_1>)\vee(\mu_A(x_2)\wedge\mu_F<x_2,y_2>)\vee(\mu_A(x_4)\wedge\mu_F<x_4,y_2>)=0,2\vee0\vee0,3;$$

$$\mu_{\Gamma(A)}(y_3)=(\mu_A(x_1)\wedge\mu_F<x_1,y_3>)\vee(\mu_A(x_2)\wedge\mu_F<x_2,y_3>)\vee(\mu_A(x_4)\wedge\mu_F<x_4,y_3>)=0;$$

Образом нечеткого множества $\tilde{\mathbf{A}}$ при соответствии $\tilde{\mathbf{\Gamma}}=(\mathbf{X},\mathbf{Y},\tilde{\mathbf{F}})$ является нечеткое множество $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\tilde{\mathbf{A}})=\{<0/y_1>,<0,3/y_2>,<0/y_3>\}$. Справедливы следующие свойства для образов нечетких множеств $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ множества X при нечетком соответствии $\tilde{\mathbf{\Gamma}}=(\mathbf{X},\mathbf{Y},\tilde{\mathbf{F}})$. Если $\tilde{\mathbf{A}}\subseteq\tilde{\mathbf{B}}$, то $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\tilde{\mathbf{A}})\subseteq\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\tilde{\mathbf{B}})$, $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\tilde{\mathbf{A}}\cup\tilde{\mathbf{B}})\approx\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\tilde{\mathbf{A}})\cup\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\tilde{\mathbf{B}})$, $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\tilde{\mathbf{A}}\cap\tilde{\mathbf{B}})\approx\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\tilde{\mathbf{A}})\cap\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\tilde{\mathbf{B}})$.

Понятие прообраза нечеткого множества при нечетком соответствии следующее. Пусть $\tilde{\mathbf{B}}$ - нечеткое множество, заданное на базовом множестве Y с функцией принадлежности μ_B, а $\tilde{\mathbf{\Gamma}}=(\mathbf{X},\mathbf{Y},\tilde{\mathbf{F}})$ - нечеткое соответствие.

Прообразом множества $\tilde{\mathbf{B}}$ при соответствии $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ называется нечеткое множество $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1}=(\tilde{\mathbf{B}})$, которое задается в X и определяется формулой $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1}=(\tilde{\mathbf{B}})=\{<\mu_{\Gamma^{-1}(B)}(x)/x>\}$, $x\in\mathbf{X}$, где

$$\mu_{\Gamma^{-1}(B)}(x)=\bigcup_{y\in B}\mu_B(y)\wedge\mu_F(x,y). \qquad (2.3)$$

2.7.2. Основные свойства нечетких соответствий. Рассмотрим такие свойства нечетких соответствий, как нечеткая функциональность, нечеткая инъективность, нечеткая всюду определенность, нечеткая сюръективность, нечеткая биективность.

Свойство функциональности четких соответствий $\mathbf{Г=(X,Y,F)}$ предполагает отсутствие в графике $\mathbf{F}$ двух пар вида $\mathbf{<x_i,y_1>}$ и $\mathbf{<x_i,y_2>, y_1 \neq y_2}$.

Если использовать понятия прообраза при данном соответствии, то оно будет нефункционально, если для любых двух элементов $\mathbf{y_i,y_j \in Y}$ выполняется условие $\mathbf{Г^{-1}=(y_i) \cap Г^{-1}=(y_j) \neq \varnothing}$. В функциональном соответствии для любых $\mathbf{y_i,y_j}$ справедливо условие $\mathbf{Г^{-1}=(y_i) \cap Г^{-1}=(y_j) = \varnothing}$. Аналогичные рассуждения положены в основу определения степеней функциональности и нефункциональности нечеткого соответствия $\tilde{\mathbf{Г}} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \tilde{\mathbf{F}})$.

Рассматривая каждый элемент $\mathbf{y \in Y}$ как множество $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{y})$, у которого $\mu_{\mathbf{B}}\mathbf{(y)=1}$, определим прообраз $\tilde{\mathbf{Г}}^{-1} = (\tilde{\mathbf{B}})$ при соответствии $\tilde{\mathbf{Г}}$, исходя из формулы (2.3), в следующем виде: $\tilde{\mathbf{Г}}^{-1}(\mathbf{y}) = \{< \mu_{\mathbf{Г^{-1}(y)}}(\mathbf{x}) / \mathbf{x} >\}$. Тогда сможем получить множество нечетких прообразов $\tilde{\mathbf{Г}}^{-1}(\mathbf{y}_1), \tilde{\mathbf{Г}}^{-1}(\mathbf{y}_2),..., \tilde{\mathbf{Г}}^{-1}(\mathbf{y}_m)$ элементов области прибытия соответствия $\tilde{\mathbf{Г}}$.

Степень нефункциональности $\alpha(\tilde{\mathbf{Г}})_{\mathbf{fon}}$ соответствия $\tilde{\mathbf{Г}}$ определяется формулой $\alpha(\tilde{\mathbf{Г}})_{\mathbf{fon}} = \bigcup\limits_{\mathbf{y_i, y_j \in Y}} (\bigcup\limits_{\mathbf{x \in X}} (\mu_{\mathbf{Г^{-1}(y_i)}}(\mathbf{x}) \wedge \mu_{\mathbf{Г^{-1}(y_j)}}(\mathbf{x}))),$ т.е. величина $\alpha(\tilde{\mathbf{Г}})_{\mathbf{fon}}$ совпадает с наибольшим значением функции принадлежности тех элементов $\mathbf{x \in X}$, которые являются одновременно нечеткими прообразами любых двух элементов $\mathbf{y_i, y_j \in Y}$.

Соответствие $\tilde{\mathbf{Г}}$ нечетко функционально, если $\alpha(\tilde{\mathbf{Г}})_{\mathbf{fon}} \geq 0{,}5$.

Степень функциональности $\beta(\tilde{\mathbf{Г}})_{\mathbf{fon}}$ определяется формулой

$$\beta(\tilde{\mathbf{Г}})_{\mathbf{fon}} = \mathbf{1} - \alpha(\tilde{\mathbf{Г}})_{\mathbf{fon}}.$$

Соответствие $\tilde{\mathbf{Г}}$ нечетко функционально, если $\beta(\tilde{\mathbf{Г}})_{\mathbf{fon}} \geq 0{,}5$. Соответствие $\tilde{\mathbf{Г}}$ функционально индифферентно, если $\alpha(\tilde{\mathbf{Г}})_{\mathbf{fon}} = \beta(\tilde{\mathbf{Г}})_{\mathbf{fon}} = \mathbf{0{,}5}$.

Для четкого соответствия $\tilde{\mathbf{Г}} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \tilde{\mathbf{F}})$ **свойство неинъективности** предполагает наличие хотя бы двух элементов $\mathbf{x_1,x_2 \in X}$, для которых $\mathbf{Г(x_1) \cap Г(x_2) \neq 0}$, а свойство инъективности требует - $\mathbf{Г(x_1) \cap Г(x_2) = 0}$. При условии задания произвольного нечеткого соответствия $\tilde{\mathbf{Г}} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \tilde{\mathbf{F}})$ определим для каждого $\mathbf{x \in X}$ нечеткое множество $\tilde{\mathbf{Г}}(\mathbf{x})$, используя формулу (2.2), преобразуем к виду: $\tilde{\mathbf{Г}}(\mathbf{x}) = \{\mu_{\mathbf{Г(x)}}(\mathbf{y})/\mathbf{y}>\}$, $\mathbf{y \in Y}$, где $\mu_{\mathbf{Г(x)}}\mathbf{(y)} = \mu_{\mathbf{Г(x)}}\mathbf{(x,y)}$, т.к. $\mathbf{A=\{x\}}$, $\mu_{\mathbf{A}}\mathbf{(x)=1}$. В результате определим множество $\{\tilde{\mathbf{Г}}(\mathbf{x}_1), \tilde{\mathbf{Г}}(\mathbf{x}_2),..., \tilde{\mathbf{Г}}(\mathbf{x}_n)\}$ нечетких образов для всех элементов области отправления соответствия $\tilde{\mathbf{Г}}$.

Степень неинъективности $\alpha(\tilde{\Gamma})_{inj}$ соответствия $\tilde{\Gamma}$ определяется формулой

$$\alpha(\tilde{\Gamma})_{inj} = \bigcup_{x_i, x_j \in X} (\bigcup_{y \in Y} (\mu_{\Gamma(x_i)}(y) \wedge \mu_{\Gamma(x_j)}(y))). \qquad (2.4)$$

Анализ формулы (2.4) показывает, что величина $\alpha(\tilde{\Gamma})_{inj}$ совпадает с наибольшим значением функции принадлежности тех элементов $y \in Y$, которые являются одновременно нечеткими образами любых двух элементов.

Соответствие $\tilde{\Gamma}$ нечетко неинъективно, если величина $\alpha(\tilde{\Gamma})_{inj} \geq 0{,}5$.

Степень инъективности $\beta(\tilde{\Gamma})_{inj}$ соответствия $\tilde{\Gamma}$ определяется формулой $\beta(\tilde{\Gamma})_{inj} = 1 - \alpha(\tilde{\Gamma})_{inj}$. Соответствие $\tilde{\Gamma}$ нечетко инъективно, если величина $\beta(\tilde{\Gamma})_{inj} \geq 0{,}5$. При условии, что величины $\alpha(\tilde{\Gamma})_{inj} = \beta(\tilde{\Gamma})_{inj} = 0{,}5$, соответствие $\tilde{\Gamma}$ инъективно индифферентно.

Рассмотрим **свойство всюду определенности.** Задано произвольное нечеткое соответствие $\tilde{\Gamma} = (X, Y, \tilde{F})$ и для каждого $x \in X$ найден образ $\tilde{\Gamma}(x)$. **Степень всюду определенности** $\beta(\tilde{\Gamma})_{def}$ соответствия $\tilde{\Gamma}$ определяется формулой $\beta(\tilde{\Gamma})_{inj} = \bigcap_{x \in X} (\bigcup_{y \in \Gamma(x)} (\mu_{\Gamma(x)}(y))$. Соответствие $\tilde{\Gamma}$ нечетко всюду определено при $\beta(\tilde{\Gamma})_{def} \geq 0{,}5$, нечетко не всюду определено при $\beta(\tilde{\Gamma})_{def} \leq 0{,}5$ и индифферентно относительно всюду определенности при $\beta(\tilde{\Gamma})_{def} = 0{,}5$. Если соответствие $\tilde{\Gamma}$ нечетко всюду определено, то $\forall x \in X \; \tilde{\Gamma}(x) \neq 0$.

Рассмотрим **свойство сюръективности.** Для определения свойства сюръективности произвольного нечеткого соответствия $\tilde{\Gamma} = (X, Y, \tilde{F})$ следует определить для каждого $y \in Y$ прообраз $\tilde{\Gamma}^{-1}(y)$. **Степень сюръективности** $\beta(\tilde{\Gamma})_{sur}$ соответствия $\tilde{\Gamma}$ определяется по формуле

$$\beta(\tilde{\Gamma})_{sur} = \bigcap_{yx \in Y} (\bigcup_{x \in \Gamma^{-1}(x)} (\mu_{\Gamma^{-1}(y)}(x)).$$

Соответствие $\tilde{\Gamma}$ нечетко сюръективно при $\beta(\tilde{\Gamma})_{sur} \geq 0{,}5$, нечетко несюръективно при $\beta(\tilde{\Gamma})_{sur} \leq 0{,}5$, а при $\beta(\tilde{\Gamma})_{sur} = 0{,}5$ сюръективно индифферентно. Если соответствие $\tilde{\Gamma}$ нечетко сюръективно, то

$$(\forall y \in Y) \; (\tilde{\Gamma}^{-1}(y) \neq 0).$$

Рассмотрим **свойство биективности.** Степень нечеткой биективности $\beta(\tilde{\Gamma})_{bij}$ произвольного соответствия $\tilde{\Gamma} = (X, Y, \tilde{F})$ определяется формулой

$$\beta(\widetilde{\Gamma})_{bij} = \beta(\widetilde{\Gamma})_{fon} \wedge \beta(\widetilde{\Gamma})_{def} \wedge \beta(\widetilde{\Gamma})_{sur}.$$

Соответствие $\widetilde{\Gamma}$ нечетко биективно при $\beta(\widetilde{\Gamma})_{bij} \geq 0{,}5$, нечетко небиективно при $\beta(\widetilde{\Gamma})_{bij} \leq 0{,}5$ и биективно индифферентно при $\beta(\widetilde{\Gamma})_{bij} = 0.5$.

2.8. Нечеткие отношения

2.8.1. Задание нечетких отношений. Нечетким отношением на произвольном непустом множестве **X** называется и через $\widetilde{\varphi} = (\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{F}})$ обозначается пара множеств, в которой $\widetilde{\mathbf{F}}$ является нечетким подмножеством множества $\mathbf{X}^2 = \mathbf{X} \times \mathbf{X}$. Множество X называется областью задания отношения $\widetilde{\varphi}$, а нечеткое множество $\widetilde{\mathbf{F}}$ называется нечетким графиком отношения.

Нечеткое отношение $\widetilde{\varphi} = (\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{F}})$ есть нечеткое соответствие $\widetilde{\Gamma} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \widetilde{\mathbf{F}})$, у которого **X=Y**. Носителем нечеткого отношения $\widetilde{\varphi} = (\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{F}})$ называется четкое отношение $\varphi = (\mathbf{X}, \mathbf{F})$, у которого график **F** является носителем графика $\widetilde{\mathbf{F}}$. Имеются четыре способа задания нечетких отношений: теоретико-множественный, матричный, графический и с помощью нечетких предикатов (предикатный).

При **теоретико-множественном способе** перечисляются последовательно множество $\mathbf{X} = \{x_i\}$, $i = \overline{1, n}$ и нечеткое множество $\widetilde{\mathbf{F}} = \{\mu_F\langle x_i, x_j\rangle / \langle x_i, x_j\rangle\}$, $x_i, x_j \in \mathbf{X}^2$.

Матричный способ требует задания матрицы смежностей $\mathbf{R}_\varphi$, строки и столбцы которой помечены элементами $x \in \mathbf{X}$, а на пересечении **i**-й строки и **j**-го столбца указывается элемент $r_{ij} = \mu_F\langle x_i, x_j\rangle$, где μ_F - функция принадлежности элементов x_i, $x_j \in \mathbf{X}^2$ нечеткому графику $\widetilde{\mathbf{F}}$.

Задание нечеткого отношения $\widetilde{\varphi}$ **в виде графа** предполагает, что граф имеет множество вершин **X**, а дугам $\langle x_i, x_j\rangle$ приписаны соответствующие значения $\mu_F\langle x_i, x_j\rangle$.

Нечеткое отношение $\widetilde{\varphi} = (\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{F}})$, граф которого показан на рис. 2.19, имеет $\mathbf{X} = \{x_1, x2, \ldots, x_5\}$, $\mathbf{F} = \{\langle 0{,}5/\langle x_1, x_5\rangle\rangle, \langle 0{,}7/\langle x_1, x_3\rangle\rangle, \langle 0{,}4/\langle x_2, x_3\rangle\rangle, \langle 0{,}8/\langle x_3, x_3\rangle\rangle, \langle 0{,}2/\langle x_4, x_3\rangle\rangle, \langle 0{,}1/\langle x_4, x_1\rangle\rangle, \langle 0{,}6/\langle x_5, x_4\rangle\rangle, \langle 1/\langle x_5, x_3\rangle\rangle, \langle 1/\langle x_5, x_5\rangle\rangle\}$.

Рассмотрим **способ задания** нечеткого отношения $\widetilde{\varphi} = (\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{F}})$ **с помощью нечетких предикатов**.

Если $\mu_F\langle a,b\rangle / \langle a,b\rangle \in \widetilde{\mathbf{F}}$, $a, b \in \mathbf{X}$, то выражение $a\widetilde{\varphi}b$ представляет собой нечеткое логическое высказывание, значение истинности которого равно $\mu_F\langle a,b\rangle$. Следовательно, для задания нечеткого отношения $\widetilde{\varphi}$ на **X** достаточно задать нечеткую логическую формулу $\mathbf{x_i \tilde{\varphi} x_j}$ от двух переменных или нечеткий предикат, который определен на множестве $\mathbf{X^2}$, а значения принимает из интервала [0,1].

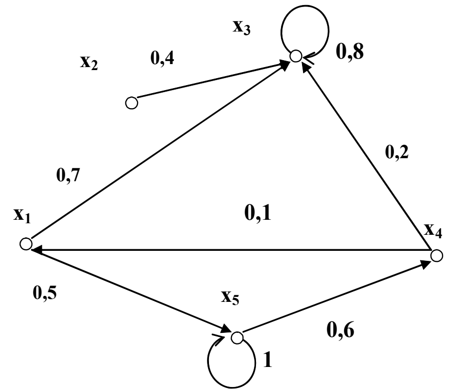


Рис. 2.19

Степень равенства $\mu(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})$ отношений $\tilde{\varphi} = (\mathbf{X},\tilde{\mathbf{F}})$ и $\tilde{\psi} = (\mathbf{X},\mathbf{P})$ определится выражением

$$\mu = (\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) \bigcap_{<x_i,x_j>\in X^2} (\mu_F < x_i, x_j > \leftrightarrow \mu_P < x_i, x_j >).$$

Отношения $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ нечетко равны при $\mu = (\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) \geq 0{,}5$, нечетко не равны при $\mu = (\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) \leq 0{,}5$ и взаимно индифферентны $\tilde{\varphi} \approx \tilde{\psi}$ при $\mu = (\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) = 0{,}5$.

Степенью нечеткости $\rho(\tilde{\varphi})$ отношения $\tilde{\varphi} = (\mathbf{X},\tilde{\mathbf{F}})$ называется величина $\rho(\tilde{\varphi}) = \mathbf{1} - \mu(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})$, где φ - носитель нечеткого отношения $\tilde{\varphi}$.

2.8.2. Операции над нечеткими отношениями. Пусть заданы производные отношения $\tilde{\varphi} = (\mathbf{X},\tilde{\mathbf{F}})$ и $\tilde{\psi} = (\mathbf{X},\mathbf{P})$, причем отношение $\tilde{\varphi}$ нечетко включается в отношение $\tilde{\psi}$.

Объединением отношений $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ называется нечеткое отношение $\tilde{\eta} = (\mathbf{X},\tilde{\mathbf{S}})$, если $\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{F}} \cup \tilde{\mathbf{S}}$. При этом для любых $\mathbf{x_i,x_j \in X}$ выполняется условие $\mu_S<x_i,x_j>=\mu_F<x_i,x_j>\vee\mu_P<x_i,x_j>$.

Пересечением отношений $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ называется нечеткое отношение $\tilde{\pi} = (\mathbf{X},\tilde{\mathbf{U}})$, обозначаемое $\tilde{\pi} = \tilde{\varphi} \cap \tilde{\psi}$, если $\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{F}} \bigcap \tilde{\mathbf{P}}$. Для любых $\mathbf{x_i,x_j \in X}$ выполняется условие: $\mu_U<x_i,x_j>=\mu_F<x_i,x_j>\wedge\mu_P<x_i,x_j>$.

Дополнением отношения $\tilde{\varphi}$ называется нечеткое отношение $\neg\tilde{\varphi} = (\mathbf{X}, \neg\tilde{\mathbf{F}})$, причем для любых $x_i, x_j \in X$ выполняется условие $\mu_F<x_i,x_j>=1-\mu_F<x_i,x_j>$/

Инверсией нечеткого отношения $\tilde{\varphi}$ называется нечеткое отношение $\tilde{\varphi}^{-1} = (\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{F}}^{-1})$ такое, что нечеткий график $\tilde{\mathbf{F}}^{-1}$ представляет собой инверсию графика $\tilde{\mathbf{F}}$. Для любых $x_i, x_j \in X$ справедливо $\mu_{F^{-1}}<x_j,x_i>=\mu_F<x_i,x_j>$

Композицией отношений $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ называется нечеткое отношение $\tilde{\kappa} = (\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{U}})$, обозначаемое $\tilde{\kappa} = \tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}$, такое, что нечеткий график $\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{F}} \circ \tilde{\mathbf{P}}$. Для любых $x_i, x_j x_k \in X$ выполняется условие

$$\mu_U < x_i, x_j >= \bigcup_{x_k} \mu_F < x_i, x_k > \wedge \mu_P < x_k, x_j > .$$

Для произвольных $\tilde{\varphi} = (\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{F}})$, $\tilde{\psi} = (\mathbf{X}, \mathbf{P})$ и $\tilde{\kappa} = (\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{U}})$ справедливы следующие нечеткие равенства: $(\tilde{\varphi} \cup \tilde{\psi})^{-1} \approx \tilde{\varphi}^{-1} \cup \tilde{\psi}^{-1}$; $(\tilde{\varphi} \cap \tilde{\psi})^{-1} \approx \tilde{\varphi}^{-1} \cap \tilde{\psi}^{-1}$; $(\neg\tilde{\varphi})^{-1} \approx \neg(\tilde{\varphi}^{-1})$; $(\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi})^{-1} \approx \tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\psi}^{-1}$; $\tilde{\varphi} \circ (\tilde{\psi} \cup \tilde{\kappa}) \approx (\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}) \cup (\tilde{\varphi} \circ \tilde{\kappa})$.

2.8.3. Основные свойства нечетких отношений. Пусть дано произвольное нечеткое отношение $\tilde{\varphi} = (\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{F}})$.

Степень рефлексивности $\alpha(\tilde{\varphi})_{ref}$ отношения $\tilde{\varphi}$ определится формулой

$$\alpha(\tilde{\varphi})_{ref} = \underset{x \in X}{\&} \mu_F < x, x > .$$

Отношение $\tilde{\varphi}$ нечетко рефлексивно при $\alpha(\tilde{\varphi})_{ref} \geq 0{,}5$, нечетко нерефлексивно при $\alpha(\tilde{\varphi})_{ref} \leq 0{,}5$, и рефлексивно индифферентно при $\alpha(\tilde{\varphi})_{ref} = 0{,}5$.

Степенью антирефлексивности $\beta(\tilde{\varphi})_{ref}$ называется величина

$$\beta(\tilde{\varphi})_{ref} = \underset{x \in X}{\&} (\neg\mu_F < x, x >).$$

Отношение $\tilde{\varphi}$ нечетко антирефлексивно, если $\beta(\tilde{\varphi})_{ref} \geq 0{,}5$, нечетко неантирефлексивно при $\beta(\tilde{\varphi})_{ref} \leq 0{,}5$ и антирефлексивно индифферентно при $\beta(\tilde{\varphi})_{ref} = 0{,}5$. Следует отметить, что если отношение $\tilde{\varphi}$ рефлексивно индиффирентно, то это не обязательно антирефлексивно индифферентно и наоборот.

Степенью симметричности $\alpha(\tilde{\varphi})_{sym}$ отношения $\tilde{\varphi}$ называется величина

$$\alpha(\tilde{\varphi})_{sym} = \mathop{\&}_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}} (\mu_F < x,y > \rightarrow \mu_F < y,x > .$$

При величине $\alpha(\tilde{\varphi})_{sym}$ ≥0,5 отношение $\tilde{\varphi}$ называется нечетко симметрично, при $\alpha(\tilde{\varphi})_{sym}$ ≤0,5 называется нечетко несимметрично, а при $\alpha(\tilde{\varphi})_{sym}$ =0,5 - симметрично индифферентно.

Степень антисимметричности $\beta(\tilde{\varphi})_{sym}$ отношения $\tilde{\varphi}$ определяется формулой

$$\beta(\tilde{\varphi})_{sym} = \mathop{\&}_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}} \neg(\mu_F < x,y > \rightarrow \mu_F < y,x > .$$

Отношение $\tilde{\varphi}$ называется нечетко антисимметричным при величине $\beta(\tilde{\varphi})_{sym}$ ≥0,5, нечетко антисимметричным при величине $\beta(\tilde{\varphi})_{sym}$ ≤0,5 и антисимметрично индифферентным при величине $\beta(\tilde{\varphi})_{sym}$ =0,5.

В общем случае антисимметрично индифферентное отношение не является симметрично индифферентным отношением и наоборот.

Степенью транзитивности $\alpha(\tilde{\varphi})_{tr}$ отношения $\tilde{\varphi}$ называется величина

$$\alpha(\tilde{\varphi})_{tr} = \mathop{\&}_{\substack{x,y,z\in X\\ x\neq y,\ y\neq z,\ x\neq z}} (\bigcup_{y} \mu_F < x,y > \& \mu_F < y,z >) \rightarrow \mu_F < x,z > .$$

Нечетко транзитивным называется отношение $\tilde{\varphi}$, если $\alpha(\tilde{\varphi})_{tr}$ ≥0,5. Если $\alpha(\tilde{\varphi})_{tr}$ ≤0,5, то отношение $\tilde{\varphi}$ называется нечетко нетранзитивным, а при величине $\alpha(\tilde{\varphi})_{tr}$ =0,5 отношение $\tilde{\varphi}$ называется транзитивно индифферентным.

Степенью связности $\alpha(\tilde{\varphi})_{con}$ отношения $\tilde{\varphi}$ называется величина

$$\alpha(\tilde{\varphi})_{con} = \mathop{\&}_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}} (\mu_F < x,y > \vee \mu_F < y,x >).$$

Нечетко связанным будет называться отношение, для которого величина $\alpha(\tilde{\varphi})_{con}$ ≥0,5. Если $\alpha(\tilde{\varphi})_{con}$ ≤0,5 то отношение $\tilde{\varphi}$ будет нечетко несвязанным. При величине $\alpha(\tilde{\varphi})_{con}$ =0,5 отношение $\tilde{\varphi}$ называется индифферентным относительно связанности.

Описанные выше свойства называют основными свойствами отношений. Регулярные совокупности основных свойств определяют основные типы нечетких отношений.

2.8.4. Отношение нечеткой эквивалентности. Отношение $\tilde{\varphi} = (\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{F}})$ называется нечеткой эквивалентностью, если оно нечетко рефлексивно, нечетко транзитивно и нечетко симметрично.

Степень эквивалентности $\eta(\tilde{\varphi})$, определяющая, насколько отношение $\tilde{\varphi}$ является отношением нечеткой эквивалентности, определяется формулой

$$\eta(\tilde{\varphi}) = \alpha(\tilde{\varphi})_{\mathbf{ref}} \; \& \; \alpha(\tilde{\varphi})_{\mathbf{sym}} \; \& \; \alpha(\tilde{\varphi})_{\mathbf{tr}} .$$

При значении степени эквивалентности $\eta(\tilde{\varphi})\geq 0{,}5$ отношение $\tilde{\varphi}$ является нечеткой эквивалентностью, при $\eta(\tilde{\varphi})\leq 0{,}5$ отношение $\tilde{\varphi}$ не является нечеткой эквивалентностью. В случае, когда $\eta(\tilde{\varphi})=0{,}5$, отношение $\tilde{\varphi}$ будет называться индифферентным относительно эквивалентности. В отношении $\tilde{\varphi} = (\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{F}})$, являющемся нечеткой эквивалентностью на множестве **X**, элементы $\mathbf{x,y}\in\mathbf{X}$ будут называться нечетко эквивалентными, если $\mu_{\mathbf{F}}\langle\mathbf{x,y}\rangle\geq 0{,}5$.

Примерами нечетких эквивалентностей являются нечеткие отношения «товары примерно одинаковой цены» на множестве товаров, «иметь примерно одинаковые знания» на множестве студентов.

2.8.5. Отношение нечеткой толерантности. Отношение $\tilde{\tau} = (\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{F}})$ называется отношением нечеткой толерантности, если оно нечетко рефлексивно и нечетко симметрично.

Степень толерантности $\gamma(\tilde{\tau})$ отношения $\tilde{\tau}$ определяется формулой

$$\gamma(\tilde{\tau}) = \alpha(\tilde{\tau})_{\mathbf{ref}} \; \& \; \alpha(\tilde{\tau})_{\mathbf{sym}} .$$

Отношение $\tilde{\tau}$ будет являться **нечеткой толерантностью**, если величина $\gamma(\tilde{\tau})\geq 0{,}5$. При значении $\gamma(\tilde{\tau})\leq 0{,}5$ отношение $\tilde{\tau}$ не является нечеткой толерантностью. Если значение $\gamma(\tilde{\tau})=0{,}5$, отношение $\tilde{\tau}$ является индифферентным относительно толерантности.

Если отношение $\tilde{\tau} = (\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{F}})$ - нечеткая толерантность на множестве **X**, то элементы $\mathbf{x,y}\in\mathbf{X}$ будут называться нечетко толерантными при условии $\mu_{\mathbf{F}}(\mathbf{x,y})\geq 0{,}5$.

Отношение $\tilde{\varphi}$ нечеткой эквивалентности является частным случаем отношения $\tilde{\tau}$ нечеткой толерантности, т.к. всегда $\eta(\tilde{\tau}) \leq \gamma(\tilde{\tau})$. Выполнение этого неравенства следует из определения степеней эквивалентности и толерантности.

Примерами нечеткой толерантности являются нечеткие отношения «параметры микросхем немного схожи» на заданном множестве микросхем, «цены на разные микросхемы отличаются друг от друга в пределах допустимой разницы» - на множестве, определенном диапазоном цен на микросхемы. Эти отношения нечетко рефлексивны и симметричны, но не транзитивны и являются отношением нечеткой толерантности.

2.8.6. Отношения нечетких порядков. Отношение $\tilde{\delta} = (\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{F}})$ является отношением нечеткого порядка, если оно нечетко антирефлексивно, нечетко антисимметрично и нечетко транзитивно.

Степень строгого порядка $\pi_1(\tilde{\delta})$ отношения $\tilde{\delta}$ определяется формулой

$$\pi_1(\tilde{\delta}) = \beta(\tilde{\delta})_{\mathbf{ref}} \,\&\, \beta(\tilde{\delta})_{\mathbf{sym}} \,\&\, \alpha(\tilde{\delta})_{\mathbf{tr}}\,.$$

Отношение $\tilde{\delta}$ является **нечетким строгим порядком**, если величина $\pi_1(\tilde{\delta})$≥0,5. Если величина $\pi_1(\tilde{\delta})$≤0,5, то отношение $\tilde{\delta}$ не является нечетким нестрогим порядком, а при $\pi_1(\tilde{\delta})$=0,5 отношение $\tilde{\delta}$ называется индифферентным относительно строгого порядка.

Если для отношения $\tilde{\delta} = (\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{F}})$ нечеткого строгого порядка $\mu_F(\mathbf{x,y})$≥0,5, то элементы **x,y∈X** связаны отношением нечеткого строгого порядка и элемент x нечетко предшествует элементу y.

Степенью совершенного строгого порядка $\pi_2(\tilde{\delta})$ называют величину

$$\pi_2(\tilde{\delta}) = \pi_1(\tilde{\delta}) \,\&\, \alpha(\tilde{\delta})_{\mathbf{con}}\,.$$

При $\pi_2(\tilde{\delta})$≥0,5 отношение $\tilde{\delta}$ является нечетким совершенным строгим порядком.

Отношение $\tilde{\rho} = (\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{F}})$ **называется отношением нечеткого нестрогого порядка**, если оно нечетко рефлексивно, нечетко антисимметрично и нечетко транзитивно.

Степень нестрогого порядка $\varepsilon_1(\tilde{\rho})$ определяется формулой

$$\varepsilon_1(\tilde{\rho}) = \alpha(\tilde{\rho})_{\mathbf{ref}} \,\&\, \beta(\tilde{\rho})_{\mathbf{sym}} \,\&\, \alpha(\tilde{\rho})_{\mathbf{tr}}\,.$$

Отношение $\tilde{\rho}$ является нечетким нестрогим порядком, если $\varepsilon_1(\tilde{\rho})$≥0,5, если $\varepsilon_1(\tilde{\rho})$≤0,5, то отношение $\tilde{\rho}$ является нечетким нестрогим порядком. При величине $\varepsilon_1(\tilde{\rho})$=0,5 отношение $\tilde{\rho}$ будет индифферентным относительно нестрогого порядка.

Степень совершенного нестрогого порядка $\varepsilon_2(\tilde{\rho})$ определяется формулой $\varepsilon_2(\tilde{\rho}) = \varepsilon_1(\tilde{\rho}) \,\&\, \alpha(\tilde{\rho})_{\mathbf{con}}$.

Отношение $\tilde{\rho}$ называется нечетким совершенным нестрогим порядком, если величина $\varepsilon_2(\tilde{\rho})$≤0,5.

Примером отношения нечеткого нестрогого порядка является отношение нестрогого включения, определенное на семействе нечетких подмножеств некоторого множества **X≠0**.

2.8.7. Отношение нечеткого квазипорядка. Отношение $\tilde{\psi} = (X, \tilde{P})$ называется отношением нечеткого квазипорядка, если оно нечетко рефлексивно и нечетко транзитивно.

Степень квазипорядка $\kappa(\tilde{\psi})$ определится формулой

$$\kappa(\tilde{\psi}) = \alpha(\tilde{\psi})_{ref} \ \& \ \alpha(\tilde{\psi})_{tr}.$$

При величине $\kappa(\tilde{\psi}) \geq 0,5$ отношение $\tilde{\psi}$ является нечетким квазипорядком, а при $\kappa(\tilde{\psi}) \leq 0,5$ не является нечетким квазипорядком. Отношение $\tilde{\psi}$ будет индифферентным относительно квазипорядка при величине $\kappa(\tilde{\psi}) = 0,5$.

Отношения нечеткой эквивалентности и нечеткого нестрогого порядка являются частными случаями отношения нечеткого квазипорядка, поскольку из определения степеней нечеткой эквивалентности, нестрогого порядка и квазипорядка следует, что $\eta(\tilde{\psi}) \leq \kappa(\tilde{\psi})$ и $\varepsilon(\tilde{\psi}) \leq \kappa(\tilde{\psi})$.

2.9. Нечеткие и лингвистические переменные

2.9.1. Определение. Методами теории нечетких множеств описывают смысловые понятия, например, для понятия «надежность работы узла» можно определить такие составляющие, как «небольшая величина надежности узла», «средняя величина надежности узла», «большая величина надежности узла», которые задаются как нечеткие множества на базовом множестве, определяемом всеми возможными значениями величин надежности.

Обобщением описания лингвистических переменных с формальной точки зрения является введение нечетких и лингвистических переменных [3,4,5,6].

Н**ечеткой переменной** называется тройка множеств $<\alpha, X, \tilde{C}(\alpha)>$, где α - наименование нечеткой переменной, **X** - область определения, $\tilde{C}(\alpha) = \{<\mu_{C(\alpha)}(x)/x>\}, x \in X$ - нечеткое подмножество в множестве X, описывающее ограничения на возможные значения переменной α.

Лингвистической переменной называется набор множеств $<\beta, T(\beta), X, G, M>$, где β - название лингвистической переменной, $T(\beta)$ – множество лингвистических (вербальных) значений переменной β, называемое еще терм-множеством лингвистической переменной, **X** - область определения, **G** - синтаксическое правило, имеющее форму грамматики, порождающее наименования $\alpha \in T(\beta)$ вербальных значений лингвистических переменных β, **M** - семантическре правило, которое ставит в соответствие каждой нечеткой переменной α нечеткое множество, $\tilde{C}(\alpha)$ - смысл нечеткой переменной α.

Из определения следует, что лингвистической переменной называется переменная, заданная на количественной (измеряемой) шкале и принимающая значения, являющиеся словами или словосочетаниями естественного языка общения. Нечеткие переменные описывают значения лингвистической переменной. На рис. 2.20 показана взаимосвязь основных понятий.

Таким образом, лингвистическими переменными можно описать трудноформализуемые понятия в виде качественного, словесного описания. Лингвистическая переменная и все ее значения связываются при описании с конкретной количественной шкалой, которая по аналогии с базовым множеством иногда называется базовой шкалой.

Рис. 2.20

Применяя лингвистические переменные, можно формализовать качественную информацию в системах управления, которая специалистами (экспертами) формулируется в словесной форме. Это позволяет строить нечеткие модели систем управления (нечеткие регуляторы).

2.9.2. Вид функций принадлежности. Рассмотрим требования, которые выдвигаются к виду функций принадлежности нечетких множеств, описывающих термы лингвистических переменных.

Пусть лингвистическая переменная $<\boldsymbol{\beta},\mathbf{T},\mathbf{X}>$ содержит базовое терм-множество $\mathbf{T}=\{\mathbf{T_i}\}$, $\mathbf{i=\overline{1,m}}$. Нечеткая переменная, соответствующая терму $\mathbf{T_i}$, задана множеством $<\mathbf{T_i},\mathbf{X},\mathbf{\tilde{C}_i}>$, где нечеткое множество $\mathbf{\tilde{C}_i=\{<\mu_{C_i(x)}/x>\},x\in X}$. Определим множество $\mathbf{C_i}$ как носитель нечеткого множества $\mathbf{\tilde{C}_i}$. Будем считать, что $\mathbf{X\subseteq R_1}$, где $\mathbf{R_1}$ - упорядоченное множество действительных чисел. Обозначим нижнюю границу множества **X** через **infX=x**$_1$, а верхнюю границу - **supX=x**$_2$.

Множество **T** упорядочим согласно выражению

$$\forall T_i, T_j \in T \quad i>j \leftrightarrow (\exists x \in C_i)(\forall y \in C_j)(x>y). \qquad (2.5)$$

Выражение (2.5) требует, чтобы терм, который имеет носитель, расположенный левее, получил меньший номер. Тогда терм-множество всякой лингвистической переменной должно удовлетворять условиям:

$$\mu_{C_i}(x_1) = 1 \quad \mu_{C_{mi}}(x_2) = 1 \qquad (2.6)$$

$$(\forall T_i \in T \setminus \{T_m\})(0 < \sup_{x \in X} \mu_{C_i \cap C_{i+!}}(x) \le 1); \qquad (2.7)$$

$$(\forall T_i \in T)(\exists x \in X)(\mu_{C_i}(x_1) = 1); \qquad (2.8)$$

$$(\forall \beta)(\exists x_1 \in R_1)(\exists x_2 \in R_2)(\forall x \in X)(x_1 < x < x_2). \qquad (2.9)$$

Условие (2.6) требует, чтобы значения функций принадлежности крайних термов **(T**$_1$ и **T**$_2$**)** в точках **x**$_1$ и **x**$_2$ соответственно равнялись единице и чтобы не допускался вид колоколобразных кривых, как это показано на рис. 2.21.

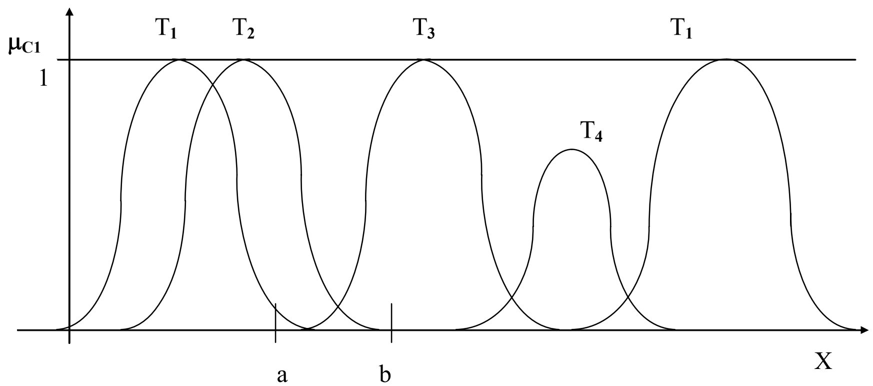


Рис.2.21

Условие (2.7) запрещает в базовом множестве **X** пар термов типа **T**$_1$ и **T**$_2$, **T**$_2$ и **T**$_3$. Для пары **T**$_1$ и **T**$_2$ отсутствует естественная разграниченность понятий. Для пары **T**$_2$ и **T**$_3$ отрезку **[a,b]** не соответствует никакое понятие. Условие (2.7) запрещает существование термов типа **T**$_4$, поскольку каждое понятие имеет по крайней мере один типичный объект. Условие (2.8) определяет физическое ограничение (в рамках задачи) на числовые значения параметров.

На рис. 2.22 приведен пример задания функций принадлежности термов «малое значение цены», «небольшое значение цены», «среднее значение цены», «достаточно большое значение цены», «большое значение цены» лингвистической переменной «цена товара».

2.9.3. Универсальные шкалы. Функции принадлежности строятся по результатам опросов экспертов. Однако порядок использования нечетких множеств, построенных по результатам опроса экспертов, имеет недостаток, который заключается в том, что изменение условий функционирования модели (объекта) требует корректировки нечетких множеств. Корректировка может быть осуществлена по результатам повторного опроса экспертов.

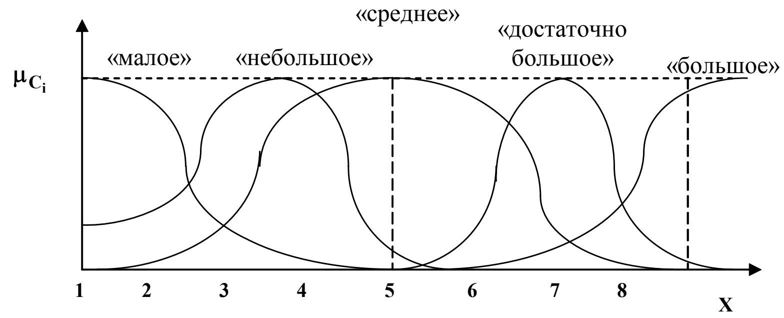


Рис. 2.22

Одним из путей преодоления данного недостатка является переход к универсальным шкалам измерения значений оцениваемых параметров. Известная методика построения универсальных шкал предполагает описание частоты явлений и процессов, которая на качественном уровне в естественном языке определяется следующими словами и словосочетаниями: «никогда», «чрезвычайно редко», «редко», «ни редко ни часто», «часто», «очень часто», «почти всегда» (или им подобными). Человек этими понятиями пользуется для оценки субъективных частостей событий (отношение числа событий, характеризованных понятием, к общему числу событий).

Универсальная шкала строится на отрезке [0,1] и представляет собой ряд пересекающихся колоколообразных кривых, соответствующих шкалируемым частотным оценкам. Универсальную шкалу лингвистической переменной для заданного оцениваемого параметра объекта управления строят по следующей процедуре.

1. По данным экспертного опроса определяется минимальное $\mathbf{x_{min}}$ и максимальное $\mathbf{x_{max}}$ значения переменной шкалы **X**.

2. Строятся по результатам экспертного опроса функции принадлежности нечетких множеств, описывающих значения лингвистической переменной, определенной на шкале **X**. На рис. 2.23 показан пример построения функций принадлежности μ_{α_i}, где α_1, α_2, α_3 - некоторые названия нечетких переменных.

3. Точки ($\mathbf{x_{min}}$,0) и ($\mathbf{x_{max}}$,1) соединяются прямой линией π_0, которая является функцией отображения π_0**:X→[0,1]**.

4. Переход от шкалы относительных частот появления событий к частотным оценкам, называемым квантификаторами, происходит следующим образом.

Для произвольной точки **z** на универсальной шкале $\overline{\mathbf{X}}$ строится ее прообраз $\mathbf{x_2 = \pi_0^{-1}(z)}$ на шкале **X**. Затем по функциям принадлежности μ_{C_i} нечетких множеств, соответствующих термам α_1, α_2, α_3, определяются значения $\mu_{C_i}(\mathbf{x_z})$, которые принимаются в качестве значений соответствующих функций принадлежности μ_{C_i} в точке z на универсальной шкале $\overline{\mathbf{X}}$. Функция π (π=π_0 в рассмотренном примере) определяется экспертным опросом, т.к. ее выбор влияет на адекватность модели исследуемому объекту.

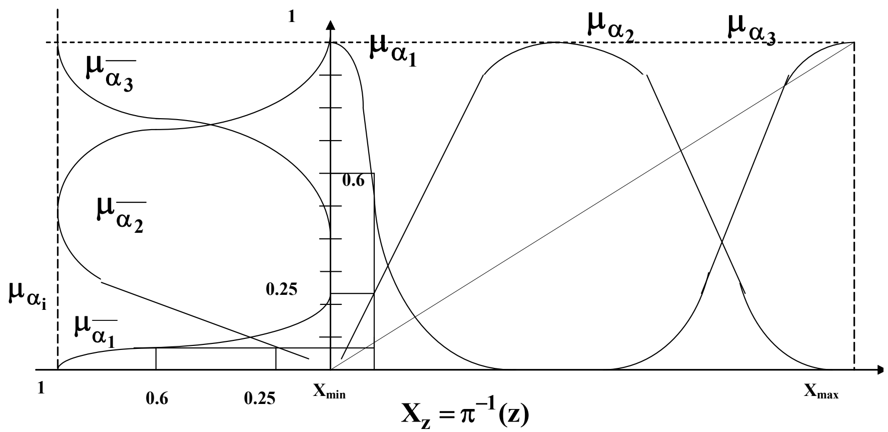


Рис. 2.23

2.9.4. Множественные функции отображения. Однозначное определение функции отображения π ограничивают возможности одновременного учета разных критериев в системе управления, которые могут даже находиться в антогонизме по отношению друг к другу, а также возможность одновременного учета различных условий управления, определяемых свойствами управляемого объекта.

Учет различных условий и критериев определяется субъективным подходом к решению задачи. Если же принять функцию отображения однозначного вида, то тем самым различные точки зрения будут сведены к «общему знаменателю» или фактически отвергнуты. Практика показывает, что при управлении трудноформализуемыми процессами учет всех вариантов субъективного воззрения повышает качество управления, увеличивая устойчивость к различного рода возмущениям. Однако следует заметить, что почти никогда не удается учесть в людях все условия, влияющие на выбор управления, и все характеристики объекта. Рассмотрим, как осуществляется формализованный учет условий управления при опросе экспертов в виде множественных функций отображения.

Пусть по опросам экспертов количественно и качественно определен состав состояний исследуемого объекта. Оценка состояний объекта производится по значениям признаков $\mathbf{y_i \in Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}}$.

Все учесть невозможно, поэтому при оценке состояний лучше использовать нечеткие категории, а нечеткие определения значений параметров следует производить с известной степенью неуверенности в правильности определений. Действительно, всегда можно предположить, что есть некоторое множество признаков $\mathbf{Y_0 = \{y_1^0, y_2^0, \ldots, y_p^0\}}$, не указанных экспертами по разным причинам: про них забыли; эксперты считают, что эти признаки не влияют на точность; эти параметры нельзя оценить, следствие сложностей технического характера.

Функциям отображения $\pi_i \in \Pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_b\}$ сопоставляются степени уверенности $\beta(\pi_i) \in [0,1]$, которые задаются экспертами. Также каждой функции отображения π_i сопоставляется вес $\alpha(\pi_i)$, который соответствует уровню компетентности эксперта. Значения весов $\alpha(\pi_i)$ определяются числами отрезка [0,1]. Таким образом, множественная функция отображения $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_b\}$ состоит из набора функций отображений π_i, каждой из которых ставится в соответствие степень $\gamma(\pi_i)$, определяемая как конъюнкция степеней компетентности и уверенности в правильном определении функций отображения π_i, т.е. $\gamma(\pi_i) = \alpha(\pi_i) \& \beta(\pi_i)$.

Практическое использование множественных функций показало, что в пределах определенной компетентности экспертов построенная множественная функция отображения хорошо согласуется с их индивидуальными мнениями о наиболее правдоподобном соответствии нечетких понятий точкам предметной шкалы **X**.

3. НЕЧЕТКАЯ ЛОГИКА

3.1. Нечеткая операция «И»

Задание нечетких множеств позволяет обобщить четкие логические операции в их нечеткие аналоги. Нечетким расширением операции «И» является триангулярная норма **T**, Другим название **T**–нормы яляется **S**–конорма. На рис. 3.1 приведено схемотехническое предствление **T**–нормы.

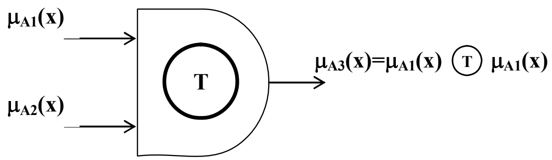


Рис. 3.1

Нечеткая операция «И» в общей форме определяется как отображение:

$$\mu_{A_1}(x)(T)\mu_{A_2}(x) \to \mu_{A_3}(x);\ \mu_{A_1}(x) \in [0,1];\ \mu_{A_2}(x) \in [0,1];\ \mu_{A_3}(x) \in [0,1],$$

для которых выполняются аксиомы:

- аксиомы граничных условий **T**–нормы:

$$\mu_{A_1}(x)(T)(\mu_{A_2}(x) = 1) = \mu_{A_3}(x) = \mu_{A_1}(x);\ \forall\mu_{A_1}(x) \in [0,1]; \qquad (3.1)$$

$$\mu_{A_1}(x)(T)(\mu_{A_2}(x) = 0) = \mu_{A_3}(x) = 0;\ \forall\mu_{A_1}(x) \in [0,1]; \qquad (3.2)$$

- аксиомы объединения (перечечения):

$$\mu_{A_1}(x)(T)\mu_{A_2}(x) = \mu_{A_2}(x) = \mu_{A_1}(x); \qquad (3.3)$$

$$\mu_{A_1}(x)(T)(\mu_{A_2}(x)(T)\mu_{A_3}(x)) = (\mu_{A_1}(x)(T)(\mu_{A_2}(x))(T)\mu_{A_3}(x); \qquad (3.4)$$

- аксиома упорядоченности:

$$\mu_{A_1}(x) \le \mu_{A_2}(x) \to \mu_{A_1}(x)(T)\mu_{A_3}(x) \le \mu_{A_2}(x)(T)\mu_{A_3}(x). \qquad (3.5)$$

В теории нечетких множеств существует бесчисленное количество нечетких операций «И», которые определяются способами задания операции (Т) при выполнении условий (3.1) - (3.2). В теории нечеткого управления применимы следующие способы задания операции (Т), перечисленные ниже.

Логическое произведение [Заде, 1973 г.]:

$$\mu_{A_3}(x) = \mu_{A_1 \wedge A_2}(x) = \mu_{A_1}(x)(T)\mu_{A_2}(x) = \mu_{A_2}(x) \wedge \mu_{A_2}(x) = .$$

$$= \min(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)),\ \forall x \in \boldsymbol{R}. \qquad (3.6)$$

Алгебраическое произведение [Бандлер, Кохоут, 1980 г.]:

$$\mu_{A_3}(x) = \mu_{A_1}(x)(T)\mu_{A_2}(x) = \mu_{A_1}(x) \cdot \mu_{A_2}(x),\quad \forall x \in \boldsymbol{R}, \qquad (3.7)$$

где «.» - произведение, принятое в классической алгебре.

Граничное произведение [Лукашевич, Гилес, 1976 г.]:

$$\mu_{A_3}(x) = \mu_{A_1}(x)(T)\mu_{A_2}(x) = \mu_{A_1}(x) \odot \mu_{A_2}(x) = \max(\mu_{A_1}(x) + \mu_{A_2}(x) - 1; 0 \equiv$$
$$\equiv (\mu_{A_1}(x) + \mu_{A_2}(x) - 1) \vee 0, \qquad (3.8)$$

где $\odot$ - символ граничного произведения.

Сильное, или драстическое (drastic), произведение [Вебер, 1983 г.]:

$$\mu_{A_3}(x) = \mu_{A_1}(x)(T)\mu_{A_2}(x) = \mu_{A_2}(x)\Delta\mu_{A_2}(x) =$$
$$= \begin{cases} \mu_{A_1}(x), & \mu_{A_2}(x) = 1; \\ \mu_{A_2}(x), & \mu_{A_1}(x) = 1, \ \forall x \in R; \\ 0 & \forall x \notin R, \end{cases} \qquad (3.9)$$

где Δ - символ сильного произведения.

На рис. 3.2 показана функция принадлежности при логическом, алгебраическом, граничном и сильном произведении нечетких множеств.

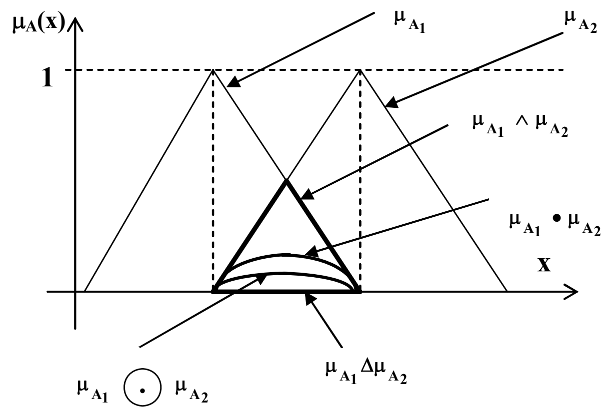


Рис. 3.2

3.2. Нечеткая операция «ИЛИ»

Нечетким расширением операции «ИЛИ» является **S**–норма. Иногда применяют название **T**–конорма. На рис. 3.3 приведено схемотехническое предствление **S**–нормы.

Нечеткая операция «ИЛИ» определяется как отображение

$$\mu_{A_1}(x)(S)(\mu_{A_2}(x) \to \mu_{A_3}(x),$$

для которого выполняются отображения:

- аксиомы граничных условий **T**–нормы:

$$\mathbf{\mu_{A_1}(x)(S)((\mu_{A_2}(x)=1)=(\mu_{A_3}(x)=1)},\ \forall\mu_{A_1}(x)\in[0,1]; \tag{3.10}$$

$$\mathbf{\mu_{A_1}(x)(S)((\mu_{A_2}(x)=0)=(\mu_{A_3}(x)=\mu_{A_1}(x))},\ \forall\mu_{A_1}(x)\in[0,1]; \tag{3.11}$$

- аксиомы объединения (перечечения):

$$\mathbf{\mu_{A_1}(x)(S)\mu_{A_2}(x)=\mu_{A_2}(x)(S)\mu_{A_1}(x))}; \tag{3.12}$$

$$\mathbf{\mu_{A_1}(x)(S)(\mu_{A_2}(x)(S)\mu_{A_3}(x))=(\mu_{A_1}(x)(S)\mu_{A_2}(x))(S)\mu_{A_3}(x)}; \tag{3.13}$$

- аксиома упорядоченности:

$$\mathbf{\mu_{A_1}(x)\le\mu_{A_2}(x)\to\mu_{A_1}(x)(S)\mu_{A_3}(x)\le\mu_{A_2}(x)(S)\mu_{A_3}(x)}; \tag{3.14}$$

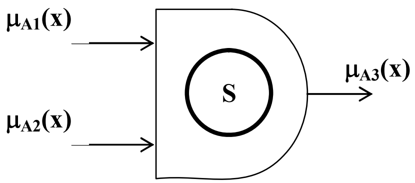


Рис. 3.3

Из бесконечного числа нечетких операций, удовлетворяющих аксиомам (3.10) – (3.14), в теории управления нашли применением следующие операции, перечисленные ниже.

Логическая сумма [Заде, 1973 г.]:

$$\mathbf{\mu_{A_3}(x)=\mu_{A_1\vee A_2}(x)=\mu_{A_1}(x)(S)\mu_{A_2}(x)=\mu_{A_2}(x)\vee\mu_{A_2}(x)=}$$

$$\mathbf{=\max(\mu_{A_1}(x),\mu_{A_2}(x))},\ \forall \mathbf{x}\in\boldsymbol{R}. \tag{3.15}$$

Алгебраическая сумма [Бандлер и Кохоут, 1980 г.]:

$$\mathbf{\mu_{A_3}(x)=\mu_{A_1+A_2}(x)=\mu_{A_1}(x)+\mu_{A_2}(x)-\mu_{A_1}(x)\cdot\mu_{A_2}(x)},\quad \forall \mathbf{x}\in\boldsymbol{R}, \tag{3.16}$$

Граничная сумма [Лукашевич, Гилес, 1976 г.]:

$$\mathbf{\mu_{A_3}(x)=\mu_{A_1\oplus A_2}(x)=\mu_{A_1}(x)(S)\mu_{A_2}(x)=\mu_{A_1}(x)\oplus\mu_{A_2}(x)=}$$

$$\mathbf{=\min(\mu_{A_1}(x)+\mu_{A_2}(x),1)\equiv\mu_{A_1}(x)+\mu_{A_2}(x)\wedge 1}, \tag{3.17}$$

Сильная, или драстическое (drastic), сумма [Вебер, 1983 г.]:

$$\mathbf{\mu_{A_3}(x)=\mu_{A_1}(x)(S)\mu_{A_2}(x)=\mu_{A_2}(x)\nabla\mu_{A_2}(x)=}$$

$$\mathbf{=\begin{cases}\mu_{A_1}(x),\ \ \mu_{A_2}(x)=0;\\ \mu_{A_2}(x),\ \mu_{A_1}(x)=o,\ \forall x\in R;\\ 0\ \ \forall x\notin R,\end{cases}} \tag{3.18}$$

Сравнение аксиом **Т**–нормы с аксиомами **S**–нормы показывает, что различие в них состоит только в аксиомах граничных условий.

На рис. 3.4 показана функция принадлежности при логической, алгебраической, граничной и сильной сумме нечетких множеств.

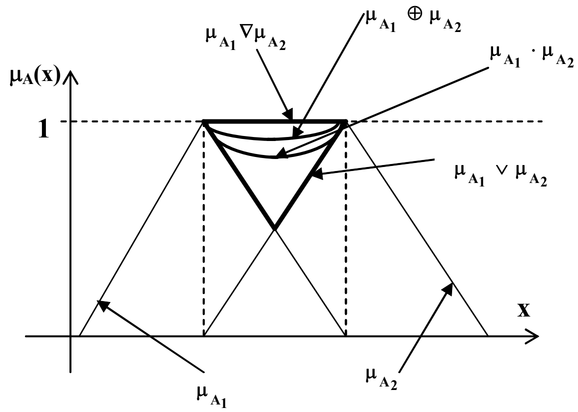


Рис. 3.4

3.3 Нечеткая операция «НЕ»

Операция нечеткого «НЕ» определяется как отображение $(-): \mu_A(x) \to \mu_{A(-)}(x)$, для которого выполняются аксиомы:

$$(\mu_A(x) = 0)^{(-)} = (\mu_{A(-)}(x) = 1); \tag{3.19}$$

$$((\mu_A(x) = 0)^{(-)})^{(-)} = \mu_A(x), \quad \forall \mu_A(x) \in [0,1]; \tag{3.20}$$

$$\mu_{A_1}(x) < \mu_{A_2}(x) \to= (\mu_{A_1}(x))^{(-)} > (\mu_{A_2}(x))^{(-)}, \quad \forall \mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x) \in [0,1]; \tag{3.21}$$

Множество отображений, удовлетворяющих аксиомам (3.19) – (3.21), являются нечетким отрицанием. Операция нечеткого отрицания в виде схемы показана на рис. 3.5.

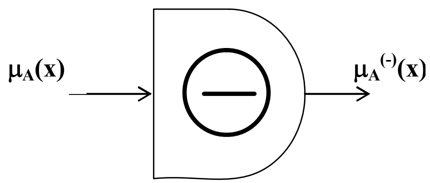


Рис. 3.5

Из бесконечного числа нечетких операций «НЕ», удовлетворяющих аксиомам (3.19) – (3.21), в теории управления нашли применение следующие операции, перечисленные ниже.

Нечеткое «НЕ» по Заде (1973) определяется как вычитание из единицы:

$$\mu_{A^{(-)}}(x) = 1 - \mu_A(x). \tag{3.22}$$

Нечеткое «НЕ» по Сугено (1977) или λ-дополнение определяется в виде формулы

$$\mu_{A_\lambda^{(-)}}(\mathbf{x}) = \frac{1-\mu_A(\mathbf{x})}{1+\lambda\cdot\mu_A(\mathbf{x})}. \tag{3.23}$$

При **λ=0** уравнение (3.23) совпадает с уравнением (3.22).

Нечеткое «НЕ» по Ягеру (1980) определяется в виде формулы:

$$\mu_{A^{(-)}}(\mathbf{x}) = \sqrt[p]{1-\mu_A(\mathbf{x})}, \tag{3.24}$$

где **p>0** – параметр. При **p=1** уравнение (3.24) совпадает с уравнением (3.22).

Для **T-**норм и **S-**норм могут существовать различные варианты отрицаний из-за бесконечного числа возможных нечетких операций «НЕ». Однако, желательно выбирать такие варианты отрицаний, которые удовлетворяют условиям:

$$(\mu_{A_1}(\mathbf{x})(\mathbf{T})\mu_{A_2}(\mathbf{x}))^{(-)} = (\mu_{A_1}(\mathbf{x}))^{(-)}(\mathbf{S})(\mu_{A_2}(\mathbf{x}))^{(-)}; \tag{3.25}$$

$$(\mu_{A_1}(\mathbf{x})(\mathbf{S})\mu_{A_2}(\mathbf{x}))^{(-)} = (\mu_{A_1}(\mathbf{x}))^{(-)}(\mathbf{T})(\mu_{A_2}(\mathbf{x}))^{(-)}. \tag{3.26}$$

Эти условия по аналогии с четкой логикой называют нечеткими законами де Моргана. Операции (3.25) и (3.26) называют взаимно дуальными, т.к. в теории нечетких множеств доказывается, что из (3.25) следует (3.26) и, наоборот, из (3.26) следует (3.25).

Взаимно дуальными являются также следующие нечеткие операции:

$$\mu_{A_1}(\mathbf{x}) \wedge \mu_{A_2}(\mathbf{x}) \overset{\text{в.д.}}{\Leftrightarrow} = \mu_{A_1}(\mathbf{x}) \vee (\mu_{A_2}(\mathbf{x}); \tag{3.27}$$

$$\mu_{A_1}(\mathbf{x}) \cdot \mu_{A_2}(\mathbf{x}) \overset{\text{в.д.}}{\Leftrightarrow} = \mu_{A_1}(\mathbf{x}) + (\mu_{A_2}(\mathbf{x}); \tag{3.28}$$

$$\mu_{A_1}(\mathbf{x}) \odot \mu_{A_2}(\mathbf{x}) \overset{\text{в.д.}}{\Leftrightarrow} = \mu_{A_1}(\mathbf{x}) \oplus (\mu_{A_2}(\mathbf{x}); \tag{3.29}$$

$$\mu_{A_1}(\mathbf{x}) \Delta \mu_{A_2}(\mathbf{x}) \overset{\text{в.д.}}{\Leftrightarrow} = \mu_{A_1}(\mathbf{x}) \nabla (\mu_{A_2}(\mathbf{x}). \tag{3.30}$$

3.4. Алгебра нечетких выводов

3.4.1. База нечетких правил. В нечеткой логике существует понятие нечеткого предложения (fuzzy proposition). Нечеткое предложение определяется в виде высказывания «$\mathbf{p : x}$ **есть** $\tilde{\mathbf{A}}$». Символ «**x**» обозначает физическую величину (ток, напряжение, давление, скорость и прочее), символ «$\tilde{\mathbf{A}}$» обозначает лингвистическую переменную (ЛП), а символ «**p**» - аббревиатура proposition – предложение. Например, в высказывании «величина тока есть большая» физической переменной **x** является «величина тока», которая может быть измерена датчиком тока. Нечеткое множество $\tilde{\mathbf{A}}$ определено ЛП «большая» и формализовано функцией принадлежности $\mu_A(\mathbf{x})$.

Связке «есть» соответствует операция упорядоченности в виде равенства, которая обозначается символом «=». Получает формализованный вид предложение «$\mathbf{p: x\ есть\ \tilde{A}}$».

Нечеткое предложение может состоять из нескольких отдельных нечетких предложений, соединенных между собой связками «И», «ИЛИ». Выбор логических связок «И», «ИЛИ» от смысла и контекста предложений, от взаимосвязи между ними. Отметим, что операции нечеткого «И» и «ИЛИ» по Заде (формулы (3.6) и (3.15)) в теории управления предпочтительны по отношению к остальным, т.к. они не имеют избыточности. Когда нечеткие предложения не являются эквивалентными, но коррелированны и взаимосвязаны, то возможно применение **T-**норм и **S-**норм по Лукашевичу (формулы (3.8) и (3.17)).

Предложение **p** может быть представлено как нечеткое отношение **P** с функцией принадлежности: $\mu_P(x_1, x_2) = T(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x))$. Для составления нечеткого предложения, состоящего из нескольких отдельных нечетких предложений, соединенных между собой связками «И», используют индикатор «если». В результате получаем систему условных нечетких высказываний:

$$\mathbf{L:}\begin{cases}\textbf{Если } p_{11}: x_1 = \tilde{A}_{11} \textbf{ и } p_{12}: x_2 = \tilde{A}_{12} \textbf{ и ...}\\ \textbf{Или}\\ \textbf{Если } p_{21}: x_1 = \tilde{A}_{21} \textbf{ и } p_{22}: x_2 = \tilde{A}_{22} \textbf{ и ...}\\ \textbf{Или}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{cases}.$$

Нечеткие предложения называют **условиями** или **предпосылками**.

Множество условий позволяет построить множество **выводов** или **заключений**. В этом случае применяют индикатор «тогда».

Продукционное нечеткое правило (fuzzy rule) – это совокупность условий и выводов:

$$\begin{array}{l}\mathbf{R_1}\textbf{: если } x_1 = \tilde{A}_{11} \textbf{ и } x_2 = \tilde{A}_{12} \textbf{ и ..., тогда } y_1 = \tilde{B}_{11} \textbf{ и } y_2 = \tilde{B}_{12} \textbf{ и ...}\\ \textbf{Или}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\end{array}$$

где символ $\mathbf{R_1}$ – аббревиатура «rule» - правило.

Например [11], правило при управлении температурой воды сформулировано в следующем виде: «$\mathbf{R_1}$: если температура воды есть холодная и температура воздуха есть холодная, тогда проверни вентиль горячей воды влево на большой угол и вентиль холодной воды вправо на большой угол».

Нечеткие условия для решения задачи:

-$\mathbf{x_1}$ - температура воды (измеряется датчиком); $\tilde{\mathbf{A}}_1$ - холодная;

-x_2 - температура воздуха (измеряется датчиком); $\tilde{A}_2$ - холодная;

- нечеткие условия вывода:

- y_1 - угол поворота вентиля влево, $\tilde{B}_1$ - большой;

- y_2 - угол поворота вентиля вправо, $\tilde{B}_2$ – большой.

Данному лингвистическому нечеткому правилу соответствует формализованная запись:

$$\mathbf{R_1}\text{: если } x_1=\tilde{A}_1 \text{ и } x_2=\tilde{A}_2\text{, тогда } y_1=\tilde{B}_1 \text{ и } y_2=\tilde{B}_2, \qquad (3.31)$$

где $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{B}_1$ и $\tilde{B}_2$ – нечеткие множества, заданные функциями принадлежности.

Совокупность нечетких продукционных правил образует базу нечетких правил $\{R_i\}_{i=1}^k$, где **R_i: если …, тогда …;** $i=\overline{1,k}$. Для базы нечетких правил справедливы следующие свойства: непрерывность, непротиворечивость, полнота.

Непрерывность $\{R_i\}_{i=1}^k$ определена понятиями: упорядоченная совокупность нечетких множеств; прилегающие нечеткие множества.

Совокупность нечетких множеств $\{A_i\}$ называется **упорядоченной**, если для них задано отношение порядка: «<»: $A_1<\ldots<A_{i-1}<A_i<A_{i+1}<\ldots$.

Если совокупность нечетких множеств $\{\tilde{A}_i\}$ упорядочена, то множества $\tilde{A}_{i-1}$ и $\tilde{A}_i$, $\tilde{A}_i$ и $\tilde{A}_{i+1}$ называются **прилегающими** при условии, что эти нечеткие множества являются перекрывающимися.

База нечетких правил $\{R_i\}_{i=1}^k$ называется **непрерывной**, если для правил

$$\mathbf{R_k}\text{: если } x_1=\tilde{A}_{1k} \text{ и } x_2=\tilde{A}_{2k}\text{, тогда } y=\tilde{B}_k \text{ и } k'\neq k$$

выполнены условия:

- $\tilde{A}_{1k}=\tilde{A}_{2k}\wedge\tilde{A}_{2k}$ и $\tilde{A}_{2k}$ являются прилегающими;
- $\tilde{A}_{2k}=\tilde{A}_{2k}\wedge\tilde{A}_{1k}$ и $\tilde{A}_{1k}$ являются прилегающими;
- $\tilde{B}_k$ и $\tilde{B}_{k'}$ являются прилегающими.

Непротиворечивость базы нечетких правил $\{R_i\}_{i=1}^k$ рассмотрим на примере [11]. База нечетких правил $\{R_i\}_{i=1}^k$ для управления роботом задана в виде:

…………………………………..

или

R_i: если препятствие впереди, то двигайся влево,

$\{R_i\}_{i=1}^k$: **или**

R_{i+1}: если препятствие впереди, то двигайся вправо,

или

……………………………………

База правил $\{\mathbf{R_i}\}_{i=1}^{k}$ **:** противоречива.

Пример непротиворечивой базы нечетких правил $\{\mathbf{R_i}\}_{i=1}^{k}$ следующий:

$$\{\mathbf{R_i}\}_{i=1}^{k}: \begin{array}{l} \mathbf{R_1}\text{: если } x_1=\tilde{A} \text{ или } x_2=\tilde{E}\text{, тогда } y=\tilde{H}\,; \\ \mathbf{R_2}\text{: если } x_1=\tilde{C} \text{ или } x_2=\tilde{F}\text{, тогда } y=\tilde{I}\,; \\ \mathbf{R_3}\text{: если } x_1=\tilde{B} \text{ или } x_2=\tilde{D}\text{, тогда } y=\tilde{G}\,. \end{array}$$

Если правила содержат два условия и один вывод, то эти правила представляют собой систему с двумя входами $\mathbf{x_1}$ и $\mathbf{x_2}$ и одним выходом $\mathbf{y}$. Данная система может быть представлена в матричной форме:

x_2	x_1		
	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$	$\tilde{C}$
$\tilde{D}$		$y=\tilde{G}$	
$\tilde{D}$	$y=\tilde{H}$		
$\tilde{F}$		$y=\tilde{I}$	

База нечетких правил непротиворечива.

Для противоречивой базы нечетких правил матричная форма имеет вид:

x_2	X_1		
	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$	$\tilde{C}$
$\tilde{D}$	$\tilde{H}$	$\tilde{G}$	I
$\tilde{D}$	$\tilde{H}$	$\tilde{H}$	$\tilde{H}, \tilde{I}$
$\tilde{F}$	$\tilde{H}, \tilde{I}$	$\tilde{I}$	$\tilde{I}$

Противоречивая база нечетких правил приводит к неоднозначности выводов при $x_1=\tilde{A}$, $x_2=\tilde{E}$ и $x_1=\tilde{C}$ **или** $x_2=\tilde{E}$.

Полнота базы нечетких правил $\{\mathbf{R_i}\}_{i=1}^{k}$ связана с полнотой знаний, которые содержатся в базе правил. Если база нечетких правил неполная, то в ней для определенных ситуаций отсутствуют связи между входами и выходами. Но может быть, что результат вывода из правил обусловлен свойствами нечетких множеств, а не из-за неполноты базы правил. Мерой полноты базы нечетких правил является критерий:

$$\mathbf{CM(x)} = \sum_{k=1}^{N_r} \left\{ \prod_{i=1}^{N_x} \mu_{A_{ik}}(\mathbf{x}) \right\},$$

где $\mathbf{x}$ – физическая переменная входных данных (условий); $\mathbf{N_x}$ - число условий в правиле; $\mathbf{N_r}$ - число правил в базе правил.

Существует классификация баз нечетких правил по полноте знаний:

- **CM(x)=0** – неполная база правил;
- **0<CM(x)<1** – база правил незначительно полная;

- **CM(x)=1** – база правил точно полная;
- **CM(x)>1** – база правил сверхполная (избыточная).

При разработке алгоритмов и программного приложения для нечетких систем управления следует вначале осуществить проверку базы нечетких правил на непрерывность, непротиворечивость и полноту, а затем приступать к разработке программных модулей.

3.4.2. Нечеткая импликация. Продукционное правило (3.31) для одного вывода может быть представлено в виде $\mathbf{R_i : \mu_{B_{1i}} = \mu_{A_{1i}}(x_1) \to \mu_{A_{2i}}(x_2),\ i = \overline{1,k}}$, где символ «→» - нечеткая импликация; $\mu_{A_{1i}}(x_1),\ \mu_{A_{2i}}(x_2)$ - функции принадлежности нечетких множеств $\tilde{A}_{1i}$, $\tilde{A}_{2i}$ соотвественно; $\mu_{B_{1i}}$ - функция принадлежности нечеткого множества (вывода) $\tilde{B}_{1i}$.

Нечеткая импликация является обобщением четкой импликации и имеет эквивалентные обозначения: $\mu_B = I(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)) \equiv \mu_{A_1}(x) \to \mu_{A_2}(x)$.

В лингвистических определениях примером четкой импликации является силлогизм, который может быть представлен в виде трех формул.

Формула 1. Заданы четкие переменные: $\mathbf{u_1}$ - электрическая печь; $\mathbf{u_2}$ – нагрев помещения; $\mathbf{u_3}$ – в помещении тепло. Построим следующую схему, приведенную в табл. 3.1.

Переменные	Формальный уровень	Лингвистический уровень
$\mathbf{u_1, u_2}$	$\mathbf{y_1=u_1 \to u_2}$	«если электрическая печь, то нагрев в помещении»
$\mathbf{u_2, u_3}$ –	$\mathbf{y_2=u_2 \to u_3}$	«если нагрев в помещении, то в помещении тепло»
Вывод	$\mathbf{y_3=u_1 \to u_3}$	«если электрическая печь, то в помещении тепло»

Из утверждений: $\mathbf{y_1=u_1 \to u_2}$ и $\mathbf{y_2=u_2 \to u_3}$ следует новое $\mathbf{y_3=u_1 \to u_3}$.

Формула 2. Из утверждения $\mathbf{y_1=u_1 \to u_2}$ («если электрическая печь, то нагрев в помещении») делается вывод $\mathbf{y_2}$: «если это устройство печь, то оно греет». Формула 2 известна под названием: правило modus ponens.

Формула 3. Из утверждения $\mathbf{y_1}$: «если электрическая печь, то нагрев в помещении» делается вывод $\mathbf{y_1^{(-)}}$: «если это устройство не греет, то оно не электрическая печь».

Подобные формулы существуют и для нечеткой импликации [12].

В нечеткой логике существуют следующие способы вычисления нечеткой импликации.

Нечеткая импликация S–типа является аналогом четкой импликации. Для нечетких формул $\tilde{\mathbf{u}}_1$ и $\tilde{\mathbf{u}}_2$ нечеткая импликация определяется (Клине, 1938): $\tilde{I}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \tilde{u}_1^{(-)} \vee \tilde{u}_2 = (1 - \tilde{u}_1)\tilde{u}_2$. Степень принадлежности нечеткой импликации для данного случая определится по формуле $\mu_B = \tilde{I}(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)) = \max((1-\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x))$.

Нечеткая импликация QL–типа (QL – Quantum Logic) для нечетких формул $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$ определяется (по Рейшенбаху): $\tilde{I}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = S(\tilde{u}_1^{(-)}, T(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)) = \tilde{u}_1^{(-)} + \tilde{u}_1 \cdot \tilde{u}_2 = (1-\tilde{u}_1) + \tilde{u}_1 \cdot \tilde{u}_2$. Степень принадлежности нечеткой импликации для данного случая определится по формуле:
$\mu_B = \tilde{I}(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)) = \max[(1-\mu_{A_1}(x), \min[\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)]]$.

Модификацией **QL**-типа является импликация «расширение импликации исчисления высказываний по Ли»: $\tilde{I}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = S(T(\tilde{u}_1^{(-)}, \tilde{u}_2^{(-)}), \tilde{u}_2)$. Степень принадлежности нечеткой импликации для данного случая определится по формуле: $\mu_B = \tilde{I}(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)) = \max[(1-\min[(1-\mu_{A_1}(x)), (1-\mu_{A_2}(x)]), \mu_{A_2}(x)]$.

Нечеткая импликация R–типа (R - аббревиатура «residuated» - «разность, остаток») отражает частичный порядок в предложениях:

$$\tilde{I}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \begin{cases} 1, \ \tilde{u}_1 \le \tilde{u}_2; \\ 0, \ \tilde{u}_1 = 1 \wedge \tilde{u}_2 = 0; \\ \text{иначе } \in (0,1) \end{cases}.$$

Нечеткая импликация Т–типа основана на **Т** –норме: $\tilde{I}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = T(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$. Примером импликации **Т**-типа является импликация по Мамдани (1974): $\tilde{I}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \tilde{u}_1 \wedge \tilde{u}_2 = \min(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$, степень принадлежности которой определится по формуле: $\mu_B = \tilde{I}(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)) = \min[\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)]$.

Нечеткая импликация, отражающая частичный порядок и основанная на классическом пересечении множеств:

$$\tilde{I}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \begin{cases} 0, \ \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 \le 1; \\ 1, \ \tilde{u}_1 = 1 \wedge \tilde{u}_2 = 1; \\ \text{иначе } \in (0,1) \end{cases}.$$

3.5. Композиция нечетких отношений

В теории нечетких множеств рассматривают композицию нечетких отношений (см. разд. 2.7.8), которая для двухмерного нечеткого отношения определена в виде $\tilde{B} = \tilde{A} \bullet \tilde{R}$, где $\tilde{R}$ - заданное двухмерное нечеткое отношение на множестве $A_1 \times A_2$ с функцией принадлежности $\mu_R(x_1,x_2)$; $\tilde{A}$ - заданное одномерное нечеткое отношение на множестве A_1 с функцией принадлежности $\mu_R(x_1)$; $\tilde{B}$ - заданное одномерное нечеткое отношение на множестве A_2 с функцией принадлежности $\mu_R(x_2)$.

Для определения композиции нечетких отношений используют операции проектирования (proj) и цилиндрического расширения (cext).

Операция проектирования нечеткого отношения с $\tilde{\mathbf{R}}$, причем $\tilde{\mathbf{R}} \subset \mathbf{A}=\mathbf{A_1}\times\mathbf{A_2}$,

$$\tilde{\mathbf{R}} = \int_{A=A_1\times A_2} \mu_R(x_1,x_2)/(x_1,x_2)$$

на одномерное нечеткое множество $\tilde{\mathbf{A}}_2$ определяется в виде

$$\tilde{\mathbf{A}}_2 = \{<\mu_{A_2}(x_2)/(x_2)>\} = \mathbf{proj}(\tilde{\mathbf{R}},\tilde{\mathbf{A}}_2) = \int_{A_1\times A_2} \sup_{x_2} \mu_R(x_1,x_2)/(x_1,x_2)\cdot$$

Пример выполнения операции **proj** показан на рис. 3.6.

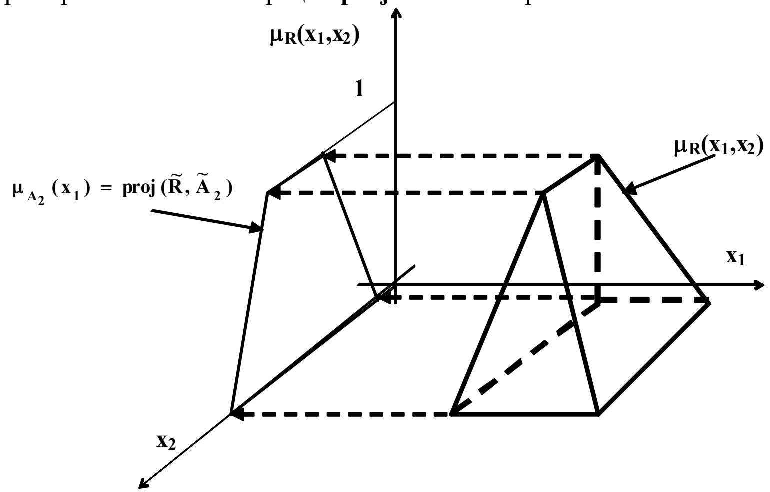


Рис. 3.6

Операция цилиндрического расширения по Заде определяется в виде

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{cext}(\mathbf{A};\ \mathbf{A_1}\times\mathbf{A_2}) = \int_{A=A_1\times A_2} \mu_R(x_1)/(x_1,x_2)\cdot$$

Пример выполнения операции **cext** показан на рис. 3.7.

Операция композиции нечетких отношений, определенная в виде $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{A}} \bullet \tilde{\mathbf{R}}$, с учетом операций проектирования и цилиндрического расширения определяется в виде: $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{proj}(\tilde{\mathbf{R}} \cap \mathbf{cext}(\tilde{\mathbf{A}};\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2);\tilde{\mathbf{A}}_2)$, где операция $\cap$ задается в виде **T**–нормы.

Приведем наиболее часто употребляемые определения операции композиции нечетких отношений.

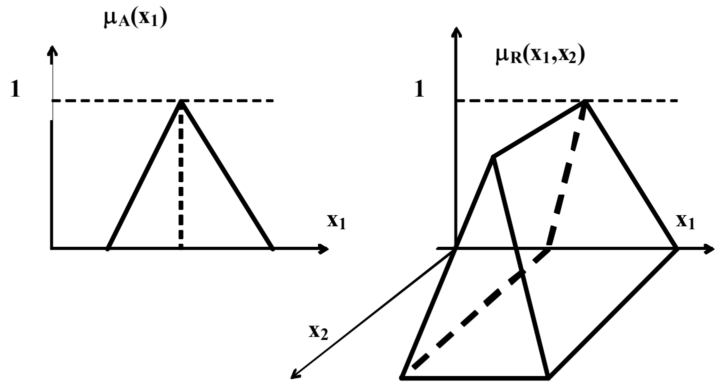


Рис. 3.7

Если в качестве **T-**нормы в операции композиции применяется логическое произведение по Заде (3.6), то нечеткая композиция называется максиминной композицией двух отношений $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{R}}$. Функция принадлежности $\mu_B(x_2)$ нечеткого множества $\tilde{\mathbf{B}}$ будет равна

$$\mu_B(x_2) = \sup_{x_1} T(\mu_A(x_1), \mu_R(x_1, x_2)) = \sup_{x_1} \min(\mu_A(x_1), \mu_R(x_1, x_2)) \cdot \qquad (3.32)$$

Если рассматривать два нечетких отношений $\tilde{\mathbf{P}}$ и $\tilde{\mathbf{Q}}$, заданных на **U**×**U**, то максиминная композиция этих нечетких отношений будет иметь функцию принадлежности вида

$$\mu_{P\bullet Q}(u, w) = \sup_{v\in U} \min(\mu_P(u, v), \mu_Q(v, w)) \cdot$$

Минимаксная композиция двух нечетких отношений $\tilde{\mathbf{P}}$ и $\tilde{\mathbf{Q}}$, заданных на **U**×**U,** будет иметь функцию принадлежности вида

$$\mu_{P\bullet Q}(u, w) = \inf_{v\in U} \max(\mu_P(u, w), \mu_Q(u, w)) \cdot$$

Макси-мультипликативная композиция двух нечетких отношений $\tilde{\mathbf{P}}$ и $\tilde{\mathbf{Q}}$, заданных на **U**×**U,** будет иметь функцию принадлежности вида

$$\mu_{P\bullet Q}(u, w) = \sup_{v\in U}(\mu_P(u, w) \times \mu_Q(u, w)) \cdot$$

Рассмотрим пример, в котором для композиции нечетких отношений функция принадлежности определяется согласно уравнению (3.32).

Пусть задана нечеткая переменная «≈5» с одномерной функцией принадлежности $\mu_{A_1}(x_1) = \mu_{\approx 5}(x_1) = \max\left(1 - \frac{1}{2}|x_1 - 5|; 0\right)$ и нечеткая переменная в виде нечеткого отношения «≈» с двухмерной функцией принадлежности пирамидального вида $\mu_R(x_1,x_2)=\mu_{\approx}(x_1,x_2)=\max\left(1-\frac{1}{2}|x_1-x_2|;(0;0)\right)$. Найдем нечеткую переменную «приблизительно 5 приблизительно равное x_2», где x_2 – заданное число. Согласно уравнению (3.32) получим:

$$\mu_B(x_2)=\sup_{x_1}\min(\mu_{\approx 5}(x_1),\mu_{\approx}(x_1,x_2))=$$

$$=\sup_{x_1}\min\left(\max[1-\frac{1}{2}|x_1-5|;0],\max[1-\frac{1}{2}|x_1-x_2|;(0;0]\right)=\max[1-\frac{1}{4}|x_1-5|;0]\cdot$$

На рис. 3.8 приведена иллюстрация вычисления степени принадлежности $\mu_B(x_2)$.

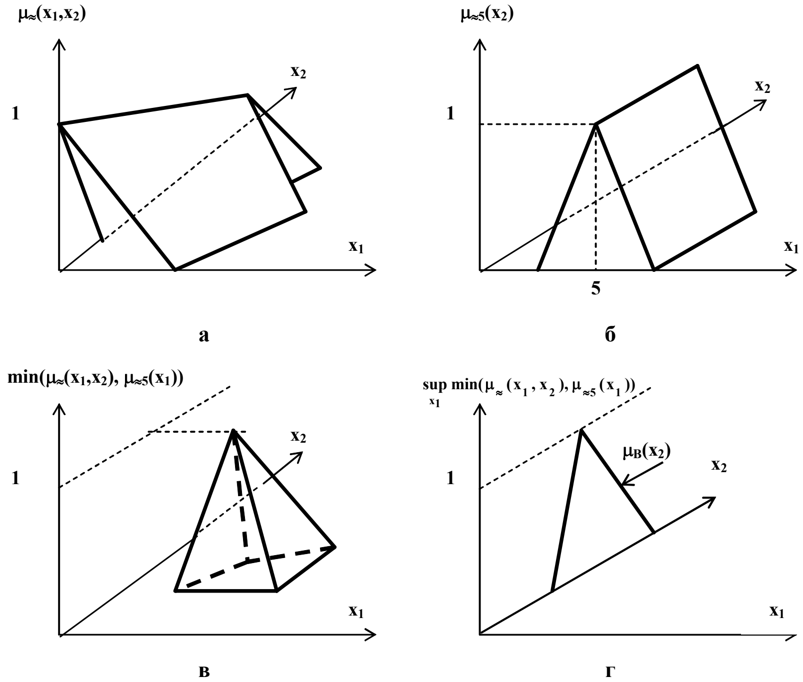


Рис. 3.8

а – композиция нечеткого отношения $\tilde{R}$; **б** - цилиндрическое расширение $\mu_{\approx 5}(x_2)$; **в** - пересечение нечеткого отношения и цилиндрического расширения; **г** - проекция нечеткого множества $\tilde{B}$.

В рассмотренном примере элементы x_1 и x_2 заданы на непрерывных областях. Возможен случай задания элементов x_1 и x_2 на дискретных областях с $x_1,x_2\in\{0,1,2,3,\ldots\}$. Рассмотрим, как применяется композиционное правило для получения нечеткого вывода на отрезке [0,1]. Получим следующие преобразования:

$$\mu_B(x_2) = \overset{\mu_{\approx 5}(x_1)}{\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,5 \\ 1 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}} \bullet \overset{\mu_{\approx}(x_1, x_2)}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & \ldots & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \overset{\min(\mu_{\approx 5}(x_1), \mu_{\approx}(x_1, x_2))}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & 0,5 & 1 & 0,5 & \ldots \\ 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & \ldots & \ldots \\ \ldots & 1 & 0,5 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{vmatrix}} =$$

$$= \max_{x_1} \min(\mu_{\approx 5}(x_1), \mu_{\approx}(x_1, x_2)) = (0;0;0;0,5;0,5;2;0,5;0,5;0;0;0) \cdot$$

Иллюстрация данных преобразования показана на рис. 3.9.

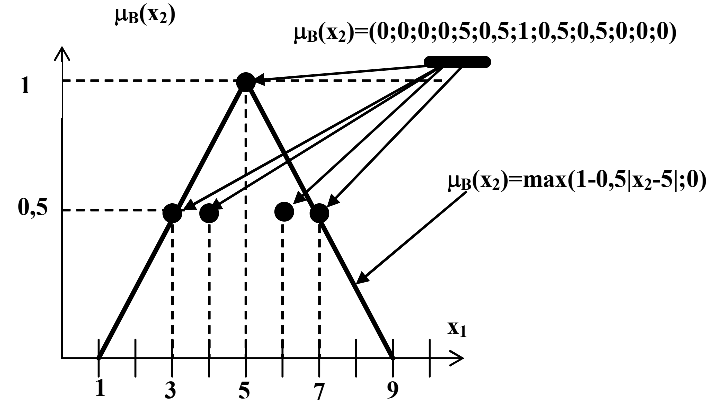


Рис. 3.9

В виде примера рассмотрим, каким образом можно получить вывод о принятии решения в задаче управления уровнем воды в бассейне. На рис. 3.10 приведена иллюстрация к решению задачи. Вода поступает через вентиль, а уровень воды в бассейне контролируется датчиком. Нечеткая система управления подает на вентиль сигналы управления, определяющие количество поступающей в бассейн воды. Определим лингвистические правила для управления уровнем воды в бассейне.

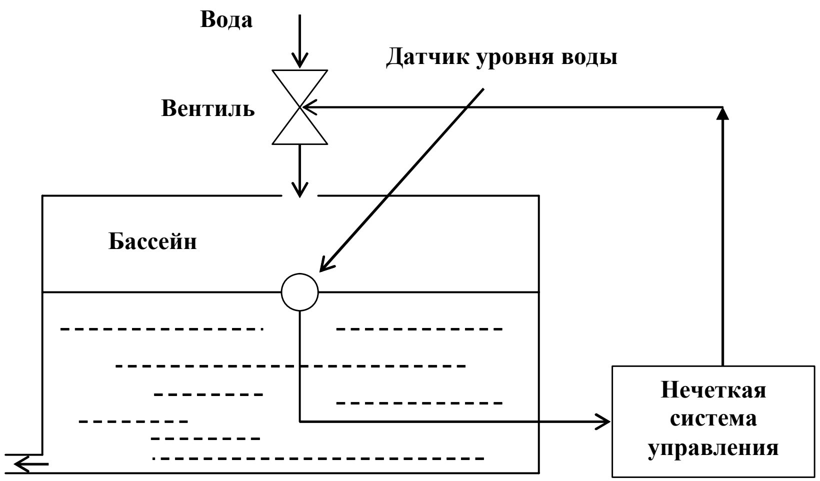


Рис. 3.10

Правило $\mathbf{R_1}$: если уровень воды в бассейне низкий (нечеткое множество $\tilde{\mathbf{A}}_1$), то вентиль открыт (нечеткое множество $\tilde{\mathbf{A}}_2$);

Правило $\mathbf{R_2}$: если уровень воды в бассейне не очень высокий (нечеткое множество $\tilde{\mathbf{A}}$), то вентиль слегка открыт (нечеткое множество $\tilde{\mathbf{B}}$);

Нечеткий локальный вывод для получения нечеткого множества $\tilde{\mathbf{B}}$ определяется нечеткой композицией и нечеткой импликацией так, что:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{A}} \bullet \tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{A}} \bullet (\tilde{\mathbf{A}}_1 \to \tilde{\mathbf{A}}_2).$$

При определении импликации **T**-типа по Мамдани получим для $\tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{A}}_1 \to \tilde{\mathbf{A}}_2)$: $\mathbf{T}(\mu_{A_1}(\mathbf{x}), \mu_{A_2}(\mathbf{x})) = \mathbf{min}[\mu_{A_1}(\mathbf{x}), \mu_{A_2}(\mathbf{x})] = \mu_R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

Для нечеткого множества $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{A}} \bullet \tilde{\mathbf{R}}$, при определении копмозиции по Заде, получим:

$$\mu_B(\mathbf{x}_2) = \sup_{\mathbf{x}} \mathbf{T}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbf{max}\{\mu_A(\mathbf{x}_1), \mathbf{min}[\mu_{A_1}(\mathbf{x}), \mu_{A_2}(\mathbf{x})]\}.$$

Процесс определения $\mu_B(\mathbf{x})$ иллюстрирован на рис. 3.11.

3.6. Агрегация локальных выводов и дефазификация

Множество локальных выводов $\tilde{\mathbf{B}}_i$, определенных правилами $\mathbf{R_i}$, определяется в один общий вывод $\tilde{\mathbf{B}}$ операцией агрегации (aggregation). Общий вывод $\tilde{\mathbf{B}}$ характеризует базу правил $\{\mathbf{R}_i\}_1^k$.

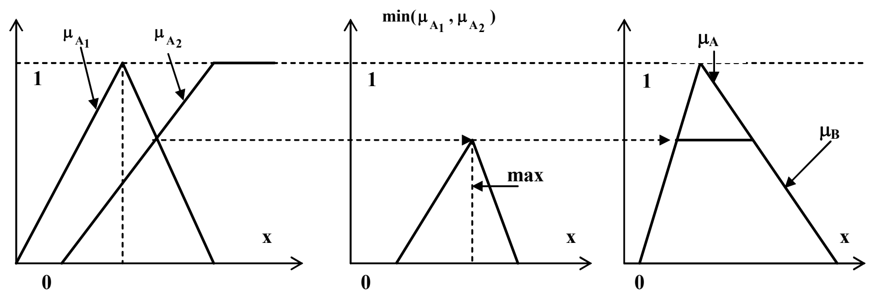


Рис. 3.11

Операция агрегации в символическом виде определена следующим образом:

$\mathbf{R_i}$: если …, тогда $\tilde{\mathbf{B}}_\mathbf{i},\ \mathbf{i}=\overline{\mathbf{1,k}}$ (нечеткое множество $\tilde{\mathbf{B}}_\mathbf{i}$ известно) $\to$? нечеткое множество $\tilde{\mathbf{B}}$ для базы правил $\{\mathbf{R_i}\}_1^k$, где символ $\to$? обозначает «найти».

Существуют несколько подходов к решению данной задачи [11]. Расмотрим два из них.

При первом подходе в экспертных системах вначале получают выводы $\tilde{\mathbf{B}}_\mathbf{i}$ по каждому из правил, а затем комбинируют эти выводы в общий вывод $\tilde{\mathbf{B}}$, исходя из определенных алгоритмов.

При другом подходе вначале комбинируют все правила $\mathbf{R_i}$, а затем получают вывод из этой комбинации, который принимается за общий вывод $\tilde{\mathbf{B}}$ для базы правил $\{\mathbf{R_i}\}_1^k$.

Теория нечетких множеств позволила доказать, что при применении базиса Заде для вычисления операций нечетких «И», «ИЛИ» и нечеткой импликации эти два подхода при получении общего вывода дают эквивалентные результаты:

$$\mathbf{B}=\bigcup_{i=1}^{k}\tilde{\mathbf{B}}_\mathbf{i},$$

где $\bigcup$ - объединение локальных выводов в виде нечетких множеств $\tilde{\mathbf{B}}_\mathbf{i}$.

Для характеристики процесса обработки на ЭВМ нечеткой информации принята **единица быстродействия – FLIPS** (число нечетких локальных выводов/сек). В настоящее время созданы нечеткие контроллеры с быстродействием 4.10^7 FLIPS.

Рассмотрим пример получения общего вывода $\tilde{\mathbf{B}}$ на основе локальных выводов $\tilde{\mathbf{B}}_\mathbf{1}$, $\tilde{\mathbf{B}}_\mathbf{2}$ $\tilde{\mathbf{B}}_\mathbf{3}$. На рис. 3.12 показан процесс получения вывода $\tilde{\mathbf{B}}$.

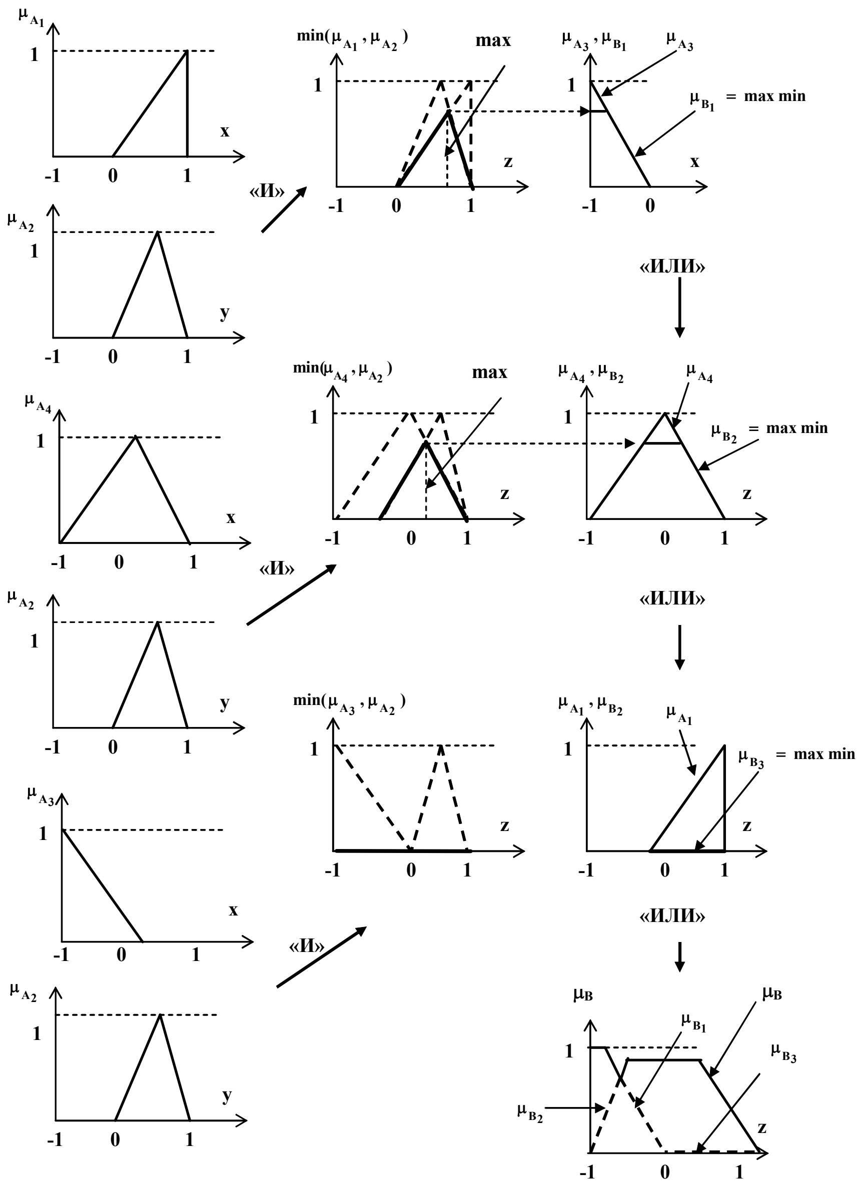

max
min(μA1, μA2)
μA3, μB1
μA3
μB1 = max min
«И»
«ИЛИ»
min(μA4, μA2)
μA4, μB2
μA4
μB2 = max min
min(μA3, μA2)
μA1, μB2
μA1
μB3 = max min
μB
μB1
μB2
μB3

Рис. 3.12

База правил $\{\mathbf{R}_i\}_1^k$ содержит всего три правила:

$$\{\mathbf{R}_i\}_{i=1}^3: \quad \begin{array}{l} \mathbf{R_1: если\ x=}\tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{\ и\ y=}\tilde{\mathbf{A}}_2\mathbf{,\ тогда\ z=}\tilde{\mathbf{A}}_3\mathbf{;} \\ \mathbf{R_2: если\ x=}\tilde{\mathbf{A}}_4 \mathbf{\ и\ y=}\tilde{\mathbf{A}}_2\mathbf{,\ тогда\ z=}\tilde{\mathbf{A}}_4\mathbf{;} \\ \mathbf{R_3: если\ x=}\tilde{\mathbf{A}}_3 \mathbf{\ и\ y=}\tilde{\mathbf{A}}_2\mathbf{,\ тогда\ z=}\tilde{\mathbf{A}}_1\mathbf{,} \end{array}$$

где $\tilde{\mathbf{A}}_i,\ \mathbf{i} = \overline{\mathbf{1,4}}$ - нечеткие множества, заданные своими функциями принадлежности. Нечеткие логические операции «И» и «ИЛИ» заданы по Заде. Функции принадлежности выводов $\tilde{\mathbf{B}}_i$ определятся по формулам:

$$\mu_{B_1}(\mathbf{z}) = \mathbf{max}\{\mu_{A_3}(\mathbf{z}), \mathbf{min}[\mu_{A_1}(\mathbf{x}), \mu_{A_2}(\mathbf{y})]\},$$

$$\mu_{B_2}(\mathbf{z}) = \mathbf{max}\{\mu_{A_4}(\mathbf{z}), \mathbf{min}[\mu_{A_4}(\mathbf{x}), \mu_{A_2}(\mathbf{y})]\},$$

$$\mu_{B_1}(\mathbf{z}) = \mathbf{max}\{\mu_{A_1}(\mathbf{z}), \mathbf{min}[\mu_{A_3}(\mathbf{x}), \mu_{A_2}(\mathbf{y})]\}.$$

Функция принадлежности общего вывода $\tilde{\mathbf{B}}$ определится формулой

$$\mu_B(\mathbf{z}) = \mu_{B_1}(\mathbf{z}) + \mu_{B_2}(\mathbf{z}) + \mu_{B_3}(\mathbf{z}).$$

Необходимо преобразовать результат нечеткого общего вывода $\tilde{\mathbf{B}}$ в физическую переменную. Это происходит с применением **операции дефазификации** (defuuzzification – **dfz**). Для выполнения операции **dfz** применяют различные методы. Рассмотрим некоторые из них.

Преобразование общего вывода $\tilde{\mathbf{B}}$ в физическую переменную может быть сделано с помощью техники усреднения функции принадлежности $\mu_B(\mathbf{z})$ с применением **метода центра тяжести** (center of gravity - **cog**) на основе формул:

$$\mathbf{z}_{cog}(\mathbf{B}) = \frac{\int_z \mu_B(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z}\,\mathbf{dz}}{\int_z \mu_B(\mathbf{z})\,\mathbf{dz}}$$ - аналоговое задание $\mu_B(\mathbf{z})$,

$$\mathbf{z}_{cog}(\mathbf{B}) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \mu_B(\mathbf{z}_i) \cdot \mathbf{z}_i}{\sum_{i=1}^{N} \mu_B(\mathbf{z}_i)}$$ - дискретное задание $\mu_B(\mathbf{z})$,

где **N** – число разбиений при дискретизации функции принадлежности $\mu_B(\mathbf{z})$.

Метод центра тяжести **cog** при задании функции принадлежности $\mu_B(\mathbf{z_1,z_2,\ldots,\ z_n})$ в **n**–мерном пространстве позволяет определить численное значение **i**–й координаты по формуле:

$$\mathbf{z}_{i\,cog}(\mathbf{B}) = \frac{\int_Z \mu_B(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n) \cdot \mathbf{z}_i\ \mathbf{d}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n}{\int_Z \mu_B(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)\ \mathbf{d}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n},$$

где **Z** – произведение пространств.

На рис. 3.13 приведен пример дефазификации методом **cog** функции принадлежности $\mu_B(z)$, полученной в вышеприведенном примере (см. рис. 3.12).

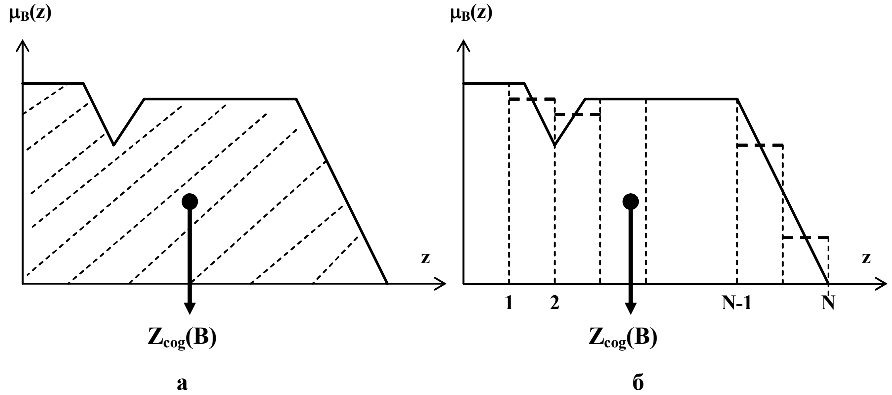


Рис. 3.13
а – непрерывный **cog**; **б** – дискретный **cog**.

Достаточно широко распространен такой метод дефазификации, как **метод центра области** (center of area - **coa**), называемый еще **методом медиана**. Площадь под функцией принадлежности $\mu_B(z)$ разбивается на две равные части, так что:

$$z_{coa}(B) = \int_{\inf z}^{z_{coa}(B)} \mu_B(z)\,dz = \int_{z_{coa}(B)}^{\sup z} \mu_B(z)\,dz\,.$$

Метод медианы показан на рис. 3.14.

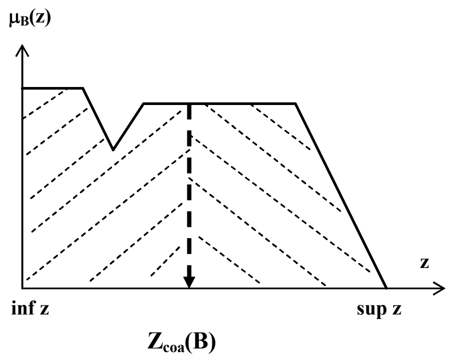


Рис. 3.14

Метод медианы может быть обобщен при задании функции принадлежности $\mu_B(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ в **n**–мерном пространстве. Например, для двухмерного задания функции принадлежности $\mu_B(z_1,z_2)$ определение $z_{coa}(B)$ происходит по формулам:

$$z_{1coa}(B) = \int\limits_{\inf z_2}^{\sup z_2} \int\limits_{\inf z_1}^{z_{1coa}(B)} \mu_B(z_1,z_2)\, dz_1,z_2 = \int\limits_{\inf z_2}^{\sup z_2} \int\limits_{z_{coa}(B)}^{\sup z_1} \mu_B(z_1,z_2)\, dz_1,z_2 ,$$

$$z_{2coa}(B) = \int\limits_{\inf z_2}^{z_{2coa}(B)} \int\limits_{\inf z_1}^{\sup z_1} \mu_B(z_1,z_2)\, dz_1,z_2 = \int\limits_{z_{2coa}(B)}^{\sup z_2} \int\limits_{\inf z_1}^{\sup z_1} \mu_B(z_1,z_2)\, dz_1,z_2 .$$

Существует **метод среднего максимума** (mean of maxima - **mom**), для которого операция дефазификации выполняется, исходя из сечения множества $\tilde{B}$ при $\alpha = hgt\,\tilde{B}$. При этом результат определяется по формуле

$$Z_{mom}(\tilde{B}) = cog\{\tilde{B} \cap \tilde{C}\} ,$$

где $\tilde{C} = \alpha - cut\tilde{B}\,|_{\alpha = hgt\tilde{B}}$ - сечение множества $\tilde{B}$ при $\alpha = hgt\,\tilde{B}$. На рис. 3.15 показано применение метода **mom**.

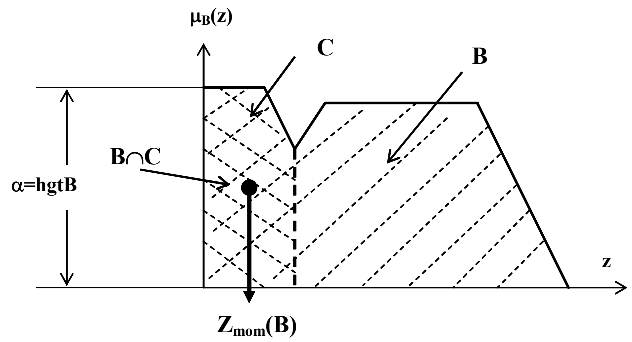


Рис. 3.15

Так как метод **mom** «теряет» часть информации нечеткого множества $\tilde{B}$, то этот метод применяется только в тех случаях, когда операция дефазификации имеет фильтрующие свойства. В данных случаях метод называют индексным или **методом пороговой дефазификации** (idexed defuzzification - **idfz**). В сочетании с методом **cog** его обозначают - **icog**. Результат дефазификации формально определен в виде

$$Z_{mom}(\tilde{B}) = cog\{\tilde{B} \cap \tilde{C}\} = icog\{\tilde{B}, hgt\tilde{B}\} .$$

В сочетании с методом **coa** метод пороговой дефазификации обозначают **icoa**. Результат дефазификации формально определен в виде

$$Z_{mom}(\tilde{B}) = icoa\{\tilde{B}, hgt\tilde{B}\} .$$

Существуют **индексные методы с фильтрующими свойствами**, в которых $\alpha=\beta_t$, β_t - заданные априори значения (как правило, β_t=0,5), а результат дефазификации определен в виде

$$\mathbf{Z_{idfz}(\tilde{B},\beta_t) = cog\{\tilde{B} \cap \tilde{C}_{\beta_t}\},\ \tilde{C}_{\beta_t} = \alpha - cut\tilde{B}/_{\alpha=\beta_t}},$$

$$\mathbf{Z_{idfz}(\tilde{B},\beta_t) = coa\{\tilde{B} \cap \tilde{C}_{\beta_t}\}}.$$

На рис. 3.16 показана дефазификации индексными методами с уровнем разреза β_t.

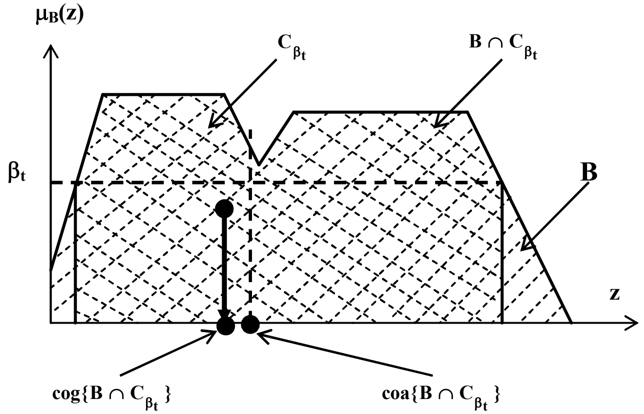


Рис. 3.16

При разработке систем управления в виде нечетких контроллеров могут применяться различные методы дефазификации в зависимости от поставленной задачи.

4. МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

4.1. Структура системы принятия решений

Для организации эффективного функционирования систем управления целесообразно применять системы с элементами искусственного интеллекта. Это позволит на основе работы моделей искусственного интеллекта разрабатывать нечеткие контроллеры. Применение искусственного интеллекта не означает отказ от традиционных методов управления, основанных на применении моделей динамических процессов, описываемых дифференциальными уравнениями. Модели искусственного интеллекта дополняют традиционные подходы к моделированию систем управления и позволяют создавать модели гибридного интеллекта.

Применение моделей искусственного интеллекта требует сбора и обработки экспертной информации: определение лингвистических переменных, характеризующих параметры системы управления, формализации правил принятия решений. Экспертные оценки позволяют сочетать опыт и знания специалистов со статистическими оценками, поэтому дают более реальные показатели. Преимущество данного подхода к моделированию состоит также в том, что он позволяет оценить такие ситуации, которые не возможно формализовать в практике решения задач управления.

Основное отличие применения экспертных оценок при моделировании и в процессах принятия решений от других методик состоит в том, что используют не только данные о процессах функционирования системы управления, но и знания экспертов, а также специальные механизмы вывода решений и новых знаний на основе имеющихся. Под механизмом вывода решений понимается структура построения и применения правил из некоторого множества при выводе решения.

В системе принятия решений правила (или эвристики), по которым принимаются решения, хранятся в базе знаний. Задачи ставятся перед системой искусственного интеллекта в виде совокупности фактов, описывающих некоторую ситуацию, и система с помощью базы знаний выводит заключение из этих фактов. Общая структура системы искусственного интеллекта показана на рис. 4.1.

Модель представления знаний, правила принятия решений определяют качество экспертных оценок. Качество экспертных оценок определяется размером и качеством базы знаний (правил или эвристик).

Система функционирует в следующем циклическом режиме: выбор (запрос) данных или результатов исследований, наблюдения, интерпретация результатов, усвоение новой информации, выдвижении с помощью правил временных гипотез и затем выбор следующей порции данных или результатов исследований. Такой процесс продолжается до тех пор, пока не поступит информация, достаточная для окончательного заключения.

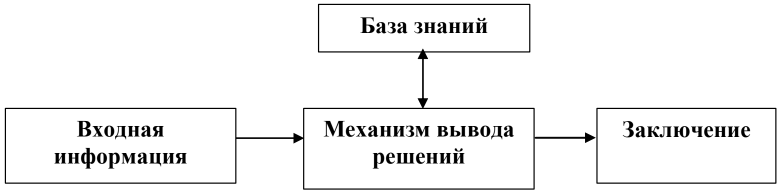


Рис. 4.1

В базе знаний интеллектуальной системы управления применяют три вида знаний:

- структурированные знания - статические знания об объекте управления (после того как эти знания выявлены, они уже не изменяются);
- структурированные динамические знания - изменяемые знания об объекте управления (они обновляются по мере выявления новой информации);
- рабочие знания- знания, применяемые для решения конкретной задачи или проведения консультации.

Для построения базы знаний требуется провести опрос специалистов, являющихся экспертами в области управления, а затем систематизировать, организовать и снабдить эти знания указателями, чтобы впоследствии их можно было легко извлечь из базы знаний.

Системы принятия решений должны «выдавать» управляющие решения в сложившейся ситуации, которая описывается множеством входных факторов и параметров интеллектуальной системы управления**.**

Итак, модель интеллектуальной системы управления с нечетким описанием параметров строится на основе формализации субъективных знаний специалистов - экспертов. Формирование результатов работы моделей происходит следующим образом.

Экспертами на базовых множествах входных факторов $\mathbf{X_1,X_2,\ldots,X_n}$ для элементов $\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_n}$, принадлежащих соответствующим базовым множествам $\mathbf{x_i \in X_i}$, задаются степени принадлежности значений нечетких переменных базовым множествам. Экспертами формулируются правила принятия решений. Затем для момента времени $\mathbf{t_0}$ принятия решения вводятся, как параметры соответствующих моделей, текущие значения координат входных факторов $\mathbf{(x_1^0 x_2^0,\ldots,x_m^0) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = X}$. Работа модели происходит по схеме, показанной на рис. 4.2.

Модель принятия решений вырабатывает управление **y**. Интеллектуальная система управления должна рассматривать все факторы, как входные переменные. Следовательно, должны быть заданы базовые множества, синтаксические и семантические правила формирования лингвистической переменной и ее термов.

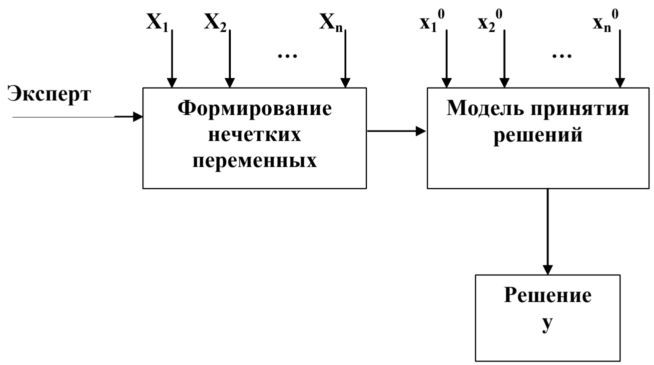


Рис. 4.2

В интеллектуальной системе управления могут быть применены разные модели нечеткого логического вывода. Среди этих моделей назовем следующие.

Модель нечеткого логического вывода может быть построена на основе сопоставления в виде четкого соответствия наборов нечетких ситуаций (описываемых кортежами нечетких переменных) и принимаемых решений.

Модель нечеткого логического вывода может быть построена также и в виде нечеткого отношения на прямом произведении множества правил нечеткого логического вывода и нечеткого множества принимаемых решений.

Можно экспертным путем определить нечеткие эталонные ситуации, которым будут сопоставлены определенные решения. Работа модели нечеткого логического вывода заключается в выявлении для конкретного момента времени некоторой реальной нечеткой ситуации (сложившейся на исследуемом объекте), нахождении наиболее «близкой» эталонной нечеткой ситуации для данной реальной нечеткой ситуации, а затем формировании соответствующего решения.

4.2. Модель классификации

Известна модель принятия решений [4,7,8] при условии описания входных переменных в виде лингвистических переменных и установления соответствия между наборами нечетких переменных (из термов лингвистических переменных) и элементами множества решений. Данная модель названа моделью классификации, так как в ней задаются классы (множества) наборов нечетких переменных, соответствующие определенным решениям.

Входные переменные (факторы), определяющие исходные данные для принятия решений, заданы в виде лингвистических переменных. Эффективность применения лингвистических переменных в подобных ситуациях определяется следующим. Мнение специалистов при управлении объектом можно формально определить экспертным путем. Для этого необходимо для каждого конкретного параметра задачи (фактора) определить базовое множество возможных цифровых оценок **X**, смысловое название входного фактора.

Лингвистическая переменная (ЛП) задается набором (см. разд. 2.10): $<\alpha_i, T(\alpha_i), XI, G, M>, \; i=\overline{1,n},$ где α_i - название i - й ЛП; $T(\alpha_i)$ - терм-множество ЛП α_i; **XI** - область определения каждого элемента множества $T(\alpha_i)$; **G** - синтаксическое правило (грамматика), порождающее элементы (**j**-е нечеткие переменные) $\alpha_i^j \in T(\alpha_i)$; **M** - семантическое правило, которое ставит в соответствие каждой нечеткой переменной (НП) $\alpha_i^j \in T(\alpha_i)$ нечеткое множество $\tilde{C}(\alpha_i^j)$ - смысл НП α_i^j.

Формальное задание входного фактора в виде ЛП раскрывает возможности в моделировании и исследовании истинности высказываний и принимаемых решений субъектом при решении задачи управления.

Нечеткие переменные (НП) α_i^j, составляющие терм-множества лингвистических переменных α_I, задаются в виде тройки множеств (см. разд. 2.10): $<\alpha_i^j, XI, \tilde{C}(\alpha_i^j)>, \; j=\overline{1,m},$ где α_i^j - наименование НП; XI - базовое множество; $\tilde{C}(\alpha_i^j)=\{<\mu_{C(\alpha_i^j)}(x_i)/x_i>\}, \;\; x_i \in XI$ - нечеткое подмножество множества **XI**; $\mu_{C(\alpha_i^j)}(x_i)$ - функции принадлежности, задание происходит путем экспертного опроса.

Модель принятия решений о выборе управления зададим в виде нечеткой классификационной системы, которая формально представлена набором

$$(X,\Psi,H), \tag{4.1}$$

где **X** - множество признаков-факторов задачи управления; Ψ - разбиение **X** на нечеткие эталонные классы $L_j \, (j=\overline{1,|H|})$; **H** - множество принимаемых решений об управлении.

Множество $\mathbf{X}$ определим $\mathbf{X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n}$, причем с каждым из множеств $\mathbf{X_i \subset X, i=\overline{1,n}}$ связывается конкретная ЛП α_i со значениями НП из терм-множества $\mathbf{T(\alpha_i)}$.

Для построения модели принятия решений необходима соответствующая экспертная информация, которая формализует знания экспертов. Экспертная информация представляется в виде системы условных нечетких высказываний, например:

$$\mathbf{L:}\begin{cases} \tilde{\mathbf{L}}_1;<\text{если}\ \tilde{\mathbf{E}}_{11}\ \text{или}\ \tilde{\mathbf{E}}_{12}\ \text{или}\ldots\text{или}\ \tilde{\mathbf{E}}_{1n_1},\ \text{то}\ \tilde{\mathbf{B}}_1>; \\ \tilde{\mathbf{L}}_2;<\text{если}\ \tilde{\mathbf{E}}_{21}\ \text{или}\ \tilde{\mathbf{E}}_{22}\ \text{или}\ldots\text{или}\ \tilde{\mathbf{E}}_{2n_2},\ \text{то}\ \tilde{\mathbf{B}}_2>; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{\mathbf{L}}_k;<\text{если}\ \tilde{\mathbf{E}}_{k1}\ \text{или}\ \tilde{\mathbf{E}}_{k2}\ \text{или}\ldots\text{или}\ \tilde{\mathbf{E}}_{kn_{\text{ь}1}},\ \text{то}\ \tilde{\mathbf{B}}_k>; \end{cases}$$

где $\tilde{\mathbf{E}}$ - эталонные ситуации (высказывания); $\tilde{\mathbf{B}}$ - нечеткие высказывания.

В соответствии с правилами преобразования нечетких высказываний можно записать следующую систему $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L:}\begin{cases} \tilde{\mathbf{L}}_1;<\text{если}\ \tilde{\mathbf{A}}_1,\ \text{то}\ \tilde{\mathbf{B}}_1>; \\ \tilde{\mathbf{L}}_2;<\text{если}\ \tilde{\mathbf{A}}_{21},\ \text{то}\ \tilde{\mathbf{B}}_2>; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{\mathbf{L}}_k;<\text{если}\ \tilde{\mathbf{A}}_{k1},\ \text{то}\ \tilde{\mathbf{B}}_k>; \end{cases}$$

где $\tilde{\mathbf{A}}_i,\ (\mathbf{i=\overline{1,k}})$ - нечеткие высказывания вида $<\mathbf{a_L}$ **есть** $\mathbf{h_L}>$, где $\mathbf{a_L}$ - обобщенная ЛП, определенная на множестве $\mathbf{X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n}$, и принимающая значения α_{ij} с функцией принадлежности:

$$\mu_{L_j}(\psi)=\bigvee_{i=1,n_j}\mu_{\alpha_1^i}(x_1)\,\&\,\mu_{\alpha_2^i}(x_2)\,\&\ldots\&\,\mu_{\alpha_n^i}(x_n),$$

$$x_i\in XI,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,|H|}, \tag{4.2)}$$

где $\mathbf{n_j}$ - число наборов $\alpha_1^i,\ldots,\alpha_n^i$ принадлежащих $\mathbf{j}$-му классу разбиения.

Формулу (3.2) можно представить и в другом виде:

$$\mu_{L_j}(x_1x_2\ldots x_n)=\bigvee_{(\alpha_1^j,\alpha_2^j,\ldots,\alpha_n^j)\in L_j}\mu_{\alpha_1^j}(x_1)\,\&\,\mu_{\alpha_2^j}(x_2)\,\&\ldots\&\,\mu_{\alpha_n^j}(x_n),$$

$$x_i\in XI,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,|H|},$$

Модель принятия решений основана на определении степени истинности нечеткого правила modus ponens [9]. Согласно данной модели для конкретных значений параметров $\mathbf{(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$ из множества $\mathbf{X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n}$ выбирается такое значение $\mathbf{(x_1^s,x_2^s,\ldots,x_k^s)\in X}$, для которого степень истинности нечеткого правила modus ponens

$\widetilde{\mathbf{L}}$;

А истинно;

$\overline{\textbf{В истинно}}$

достигает своего наибольшего значения.

Модель в виде нечеткой классификационной системы представляется таблицей соответствия, содержащей $|T(\alpha_1)|\times|T(\alpha_2)|\times\ldots\times|T(\alpha_n)|$ строк и **(n+1)** столбцов. В строках записываются все возможные комбинации значений ЛП α_i (из терм-множеств $\mathbf{T(\alpha_i)}$), а в **(n+1)**-м столбце - соответствующие этим комбинациям управляющие решения $\mathbf{h_l,\ l=\overline{1,|H|}}$. Работа модели осуществляется по следующим правилам.

Измеряют (определяют) физические значения компонент точки $(\mathbf{x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0}) \in \mathbf{X}$ и подставляют эти значения в функции принадлежности $\mu_{\mathbf{L_j}}$ эталонных классов L_j.

Вычисляют значения $\mu_{L_j}(\mathbf{x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0}),\ \mathbf{j=\overline{1,|H|}}$.

Среди всех значений $\mu_{\mathbf{L_j}}$ находится максимальное

$$\mu_{L_s} = \max_j \mu_{L_j}(\mathbf{x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0})$$

и принимается управляющее решение h_s со степенью принадлежности $\mu_{\mathbf{L_S}}$.

Дальнейшее рассмотрение особенностей построения модели будем осуществлять на примере.

Система управления должна контролировать дистанцию автомобиля до впереди двигающегося транспортного средства. В каждый такт времени от датчиков в нечеткий контроллер поступает следующая информация: дистанция до впереди идущего транспортного средства, скорость изменения дистанции, обороты двигателя.

Нечеткий контроллер обрабатывает эту информацию и принимает одно из следующих решений: резко снизить обороты двигателя; снизить обороты двигателя; разрешать оставить обороты без изменения; разрешать повысить обороты двигателя.

Математическая модель нечеткого контроллера задается в виде тройки множеств: **<X,F,H>**, где $\mathbf{X=\{X_1\times X_2\times X_3\}}$ - множество входных сигналов; **F** - правило управления; $\mathbf{H=\{h_1,h_2,h_3,h_4\}}$ - множество решений.

Определим ЛП α - «дистанция», терм-множество которой имеет вид $\mathbf{T(\alpha)}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$, где α_i - НП: α_1 - «очень малая дистанция»; α_2 - «небольшая дистанция»; α_3 - «средняя дистанция»; α_4 - «большая дистанция»; α_5 - «очень большая дистанция». Для каждой НП α_i задаются нечеткие подмножества $\widetilde{C}(\alpha_i) = \{< \mu_{\alpha_i}(d)/d >\}, \ d \in D, \ \ i = \overline{1,5},$ где $D=\{d_{min},...,d_{max}\}$ - множество значений дистанции **d**, причем d_{min} и d_{max} задается экспертами, хотя d_{max} в общем случае ограничено работой радара. Дистанция измеряется в метрах.

Определим ЛП β - «скорость сокращения дистанции», терм-множество которой имеет вид $T(\beta)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, где β_i - НП: β_1 - «небольшая скорость изменения дистанции»; β_2 - «средняя скорость изменения дистанции»; β_3 - «большая скорость изменения дистанции». Для каждой НП β_i задаются нечеткие подмножества $\widetilde{C}(\beta_i) = \{< \mu_{\beta_i}(v)/v >\}, \ v \in V, \ \ i = \overline{1,3},$ где множество значений скорости $V=\{0,...,v_{max}\}$, причем v_{max} зависит от характеристик транспортного средства либо вводится как ограничение согласно правилам дорожного движения.

Определим ЛП γ - «величина оборотов коленчатого вала в единицу времени», терм-множество которой имеет вид $T(\gamma)=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, где γ_i - нечеткие переменные: γ_1 – «небольшая величина оборотов»; γ_2 - «средняя величина оборотов»; γ_3 – «большая величина оборотов». Для каждой НП γ_i задаются нечеткие подмножества $\widetilde{C}(\gamma_i) = \{< \mu_{\gamma_i}(\omega)/\omega >\}, \ \omega \in \Omega, \ \ i = \overline{1,3},$ где множество значений оборотов коленчатого вала двигателя определим $\Omega=\{\omega_{min},\omega_{max}\}$, причем, ω_{min} и ω_{max} зависят от типа и марки двигателя.

Вариант задания функций принадлежности НП лингвистической переменной γ - «величина оборотов коленчатого вала в единицу времени» приведен на рис. 4.3.

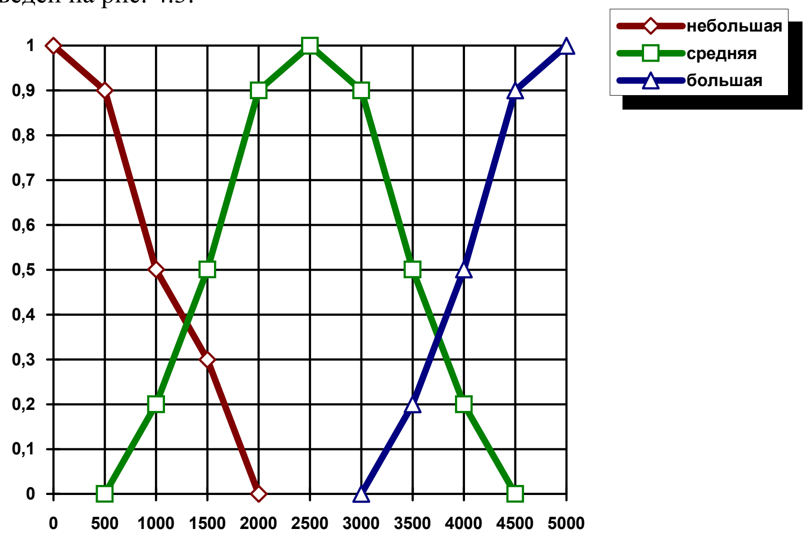


Рис. 4.3

Определим множество **H** - управляющих сигналов (решений). Пусть **H**={$\mathbf{h_1}$,$\mathbf{h_2}$,$\mathbf{h_3}$,$\mathbf{h_4}$}, где: $\mathbf{h_1}$ – «резко снизить обороты коленчатого вала»; $\mathbf{h_2}$ – «снизить обороты коленчатого вала»; $\mathbf{h_3}$ – «оставить без изменения обороты коленчатого вала»; $\mathbf{h_4}$ – «повысить обороты коленчатого вала».

Принятие решения нечетким контроллером осуществляется согласно правилам управления **F**, которые для данной модели задаются в виде таблицы соответствий «ситуация – действие», возможный вид которой приведен в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Соответствие «ситуация — действие»

S	α	β	γ	H
$\mathbf{S_1}$	α_1	β_1	γ_1	$\mathbf{h_2}$
$\mathbf{S_2}$	α_1	β_1	γ_2	$\mathbf{h_2}$
$\mathbf{S_3}$	α_1	β_1	γ_3	$\mathbf{h_2}$
$\mathbf{S_4}$	α_1	β_2	γ_1	$\mathbf{h_1}$
$\mathbf{S_5}$	α_1	β_2	γ_2	$\mathbf{h_1}$
$\mathbf{S_6}$	α_1	β_2	γ_3	$\mathbf{h_1}$
$\mathbf{S_7}$	α_1	β_3	γ_1	$\mathbf{h_1}$
$\mathbf{S_8}$	α_1	β_3	γ_2	$\mathbf{h_1}$
$\mathbf{S_9}$	α_1	β_3	γ_3	$\mathbf{h_1}$
$\mathbf{S_{10}}$	α_2	β_1	γ_1	$\mathbf{h_3}$
$\mathbf{S_{11}}$	α_2	β_1	γ_2	$\mathbf{h_2}$
$\mathbf{S_{12}}$	α_2	β_1	γ_3	$\mathbf{h_2}$
$\mathbf{S_{13}}$	α_2	β_2	γ_1	$\mathbf{h_2}$
$\mathbf{S_{14}}$	α_2	β_2	γ_2	$\mathbf{h_2}$
$\mathbf{S_{15}}$	α_2	β_2	γ_3	$\mathbf{h_2}$
$\mathbf{S_{16}}$	α_2	β_3	γ_1	$\mathbf{h_2}$
$\mathbf{S_{17}}$	α_2	β_3	γ_2	$\mathbf{h_2}$
$\mathbf{S_{18}}$	α_2	β_3	γ_3	$\mathbf{h_2}$
$\mathbf{S_{19}}$	α_3	β_1	γ_1	$\mathbf{h_3}$
$\mathbf{S_{20}}$	α_3	β_1	γ_2	$\mathbf{h_3}$
$\mathbf{S_{21}}$	α_3	β_1	γ_3	$\mathbf{h_2}$
$\mathbf{S_{22}}$	α_3	β_2	γ_1	$\mathbf{h_3}$
$\mathbf{S_{23}}$	α_3	β_2	γ_2	$\mathbf{h_2}$
$\mathbf{S_{24}}$	α_3	β_2	γ_3	$\mathbf{h_2}$
$\mathbf{S_{25}}$	α_3	β_3	γ_1	$\mathbf{h_2}$
$\mathbf{S_{26}}$	α_3	β_3	γ_2	$\mathbf{h_2}$

$\mathbf{S_{27}}$	α_3	β_3	γ_3	$\mathbf{h_2}$
$\mathbf{S_{28}}$	α_4	β_1	γ_1	$\mathbf{h_4}$
$\mathbf{S_{29}}$	α_4	β_1	γ_2	$\mathbf{h_3}$

Окончание табл. 4.1

S	α	β	γ	H
S_{30}	α_4	β_1	γ_3	h_3
S_{31}	α_4	β_2	γ_1	h_3
S_{32}	α_4	β_2	γ_2	h_3
S_{33}	α_4	β_2	γ_3	h_3
S_{34}	α_4	β_3	γ_1	h_2
S_{35}	α_4	β_3	γ_2	h_2
S_{36}	α_4	β_3	γ_3	h_2
S_{37}	α_5	β_1	γ_1	h_4
S_{38}	α_5	β_1	γ_2	h_4
S_{39}	α_5	β_1	γ_3	h_3
S_{40}	α_5	β_2	γ_1	h_3
S_{41}	α_5	β_2	γ_2	h_3
S_{42}	α_5	β_2	γ_3	h_3
S_{43}	α_5	β_3	γ_1	h_3
S_{44}	α_5	β_3	γ_2	h_3
S_{45}	α_5	β_3	γ_3	h_2

Решение (команда) подается в систему «круиз-контроль». Кроме этой информации, в систему «круиз-контроль» подается значение текущей скорости движения автомобиля относительно дорожного покрытия от соответствующего датчика (от спидометра).

Если от нечеткого контроллера поступает команда $\mathbf{h_2}$ – «снизить обороты коленчатого вала», то система «круиз-контроль» подает соответствующую команду системе питания двигателя, которая в свою очередь уменьшает количество подаваемого в камеру сгорания топлива на одну ступень.

Если от нечеткого контроллера поступает команда $\mathbf{h_1}$ – «резко снизить обороты коленчатого вала», то система «круиз-контроль» подает соответствующие команды системе питания и тормозной системе. Подача топлива прекращается и тормозная система отрабатывает одну ступень торможения.

Если от нечеткого контроллера поступает команда $\mathbf{h_3}$ – «оставить без изменения обороты коленчатого вала», то система «круиз-контроль» не вмешивается в управление автомобилем.

Если от нечеткого контроллера поступает команда $\mathbf{h_4}$ – «повысить обороты коленчатого вала», то система «круиз-контроль» сравнивает текущее значение скорости движения автомобиля с введенным в нее при включении значением. Если текущее значение меньше введенного, то система «круиз-контроль» посылает соответствующие команды системам питания и тормозной системе. Торможение прекращается, а количество подаваемого топлива увеличивается на одну ступень. В противном случае система «круиз-контроль» никак не реагирует на данную команду нечеткого контроллера и поддерживает заданную скорость автомобиля.

Система «круиз-контроль» отключается от управления автомобилем при нажатии водителем на педаль тормоза или акселератора. Взаимодействие систем показано на рис. 4.4.

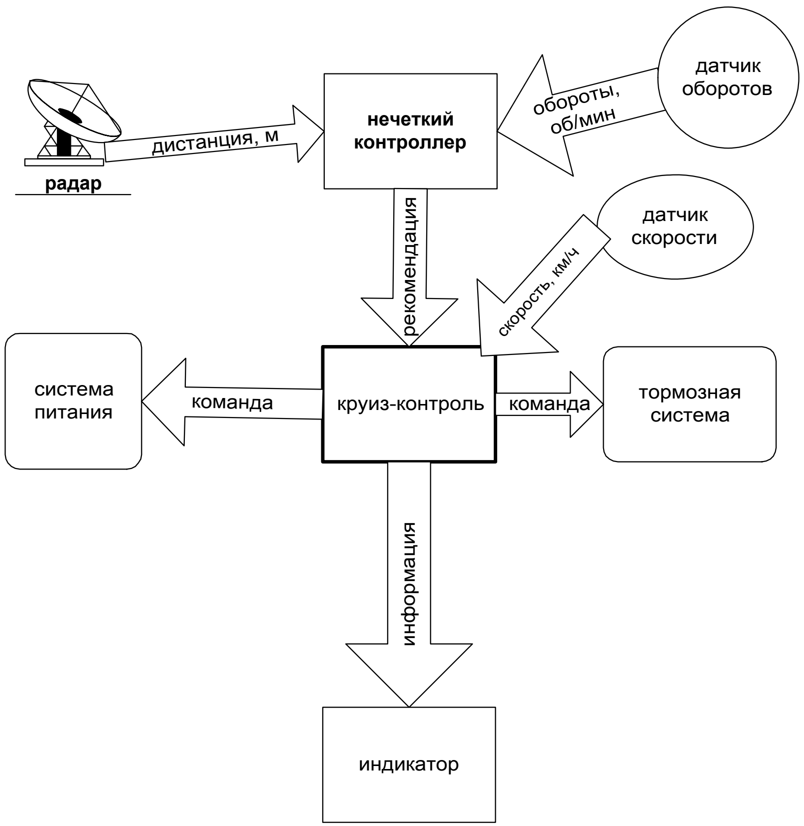


Рис. 4.4

Пусть ситуация, характеризующая состояние объекта на дороге, представляется в **i**-й такт времени точкой $\mathbf{W_i=(d_i,v_i,\omega_i)}$, где $\mathbf{d_i}$ -дистанция до впереди идущего объекта, $\mathbf{v_i}$ - скорость изменения дистанции, $\mathbf{\omega_i}$ - обороты двигателя. Алгоритм работы нечеткого контроллера состоит в следующем.

1°. Подставим точку $(\mathbf{d_i,v_i,\omega_i})$ в соответствующие функции принадлежности. Вычислим значения функций принадлежности:

$$\mu_{\alpha_1}(\mathbf{d_i}),\ \mu_{\alpha_2}(\mathbf{d_i}),\ \mu_{\alpha_3}(\mathbf{d_i}),\ \mu_{\alpha_4}(\mathbf{d_i}),\ \mu_{\alpha_5}(\mathbf{d_i})\ ;$$

$$\mu_{\beta_1}(\mathbf{v_i}),\ \mu_{\beta_2}(\mathbf{v_i}),\ \mu_{\beta_3}(\mathbf{v_i});\ \mu_{\gamma_1}(\omega_i),\ \mu_{\gamma_2}(\omega_i),\ \mu_{\gamma_3}(\omega_i).$$

2°. Найдем максимальные значения функций принадлежности в точке $(\mathbf{d_i,v_i,\omega_i})$:

$$\max\{\mu_{\alpha_1}(\mathbf{d_i}),\ \mu_{\alpha_2}(\mathbf{d_i}),\ \mu_{\alpha_3}(\mathbf{d_i}),\ \mu_{\alpha_4}(\mathbf{d_i}),\ \mu_{\alpha_5}(\mathbf{d_i})\} = \mu_{\alpha_k}(\mathbf{d_i});$$

$$\max\{\mu_{\beta_1}(\mathbf{v_i}),\ \mu_{\beta_2}(\mathbf{v_i}),\ \mu_{\beta_3}(\mathbf{v_i})\} = \mu_{\beta_k}(\mathbf{v_i});$$

$$\max\{\mu_{\gamma_1}(\omega_i),\ \mu_{\gamma_2}(\omega_i),\ \mu_{\gamma_3}(\omega_i)\} = \mu_{\gamma_m}(\omega_i).$$

Значения лингвистических переменных, при которых соответствующие функции принадлежности максимальны, и будут искомыми значениями.

3°. Перейдем от «четкой» информации, полученной от датчиков, к нечеткому ее представлению с помощью лингвистических переменных:

$$\mathbf{W_i=(d_i,v_i,\omega_i) \longrightarrow S_j(\alpha_k,\beta_l,\gamma_m)}.$$

4°. В таблице соответствия «ситуация — действие» находится решение $\mathbf{h_n}$, соответствующее ситуации $\mathbf{S_j(\alpha_k,\beta_l,\gamma_m)}$, и выдается на выход нечеткого контроллера.

5°. Конец.

Для наглядности рассмотрим работу нечеткого контроллера в некоторой конкретной ситуации. Пусть пределы измерения физических величин будут следующими: дистанция от 5 до 50 м; обороты двигателя от 300 до 6000 об/мин; скорость изменения дистанции вычисляется в пределах от 0 до 150 км/час. Предположим, в **i**-й такт времени с датчиков поступила следующая информация: дистанция 10 м; скорость изменения дистанции 50 км/час; обороты двигателя 3000 об/мин. Пусть функции принадлежности имеют следующий вид, показанный на рис. 4.5 - 4.7 Определим значения функций принадлежности для этого конкретного состояния:

$$\mu_{\alpha_1}(10) = 0{,}5;\ \mu_{\alpha_2}(10) = 1;\ \mu_{\alpha_3}(10) = 0{,}25;\ \mu_{\alpha_4}(10) = 0;\ \mu_{\alpha_5}(10) = 0;$$

$$\mu_{\beta_1}(50) = 0{,}1;\ \mu_{\beta_2}(50) = 0{,}7;\ \mu_{\beta_3}(50) = 0;$$

$$\mu_{\gamma_1}(3000) = 0;\ \mu_{\gamma_2}(3000) = 0{,}9;\ \mu_{\gamma_3}(3000) = 0.$$

Найдя максимальные значения функций принадлежности для лингвистических переменных, перейдем от «четкой» информации, полученной от датчиков, к нечеткому ее представлению по данным табл. 4.1.

Ситуацию на дороге можно отобразить следующим образом: дистанция малая (α_2); скорость изменения дистанции средняя (β_2); обороты коленвала средние (γ_2).

В табл. 4.1 «ситуация — действие» находим ситуацию ($\alpha_1,\beta_2,\gamma_2$) и решение, которое целесообразно принять в этой ситуации.

Для данного примера решением будет $\mathbf{h_1}$, то есть «снизить обороты».

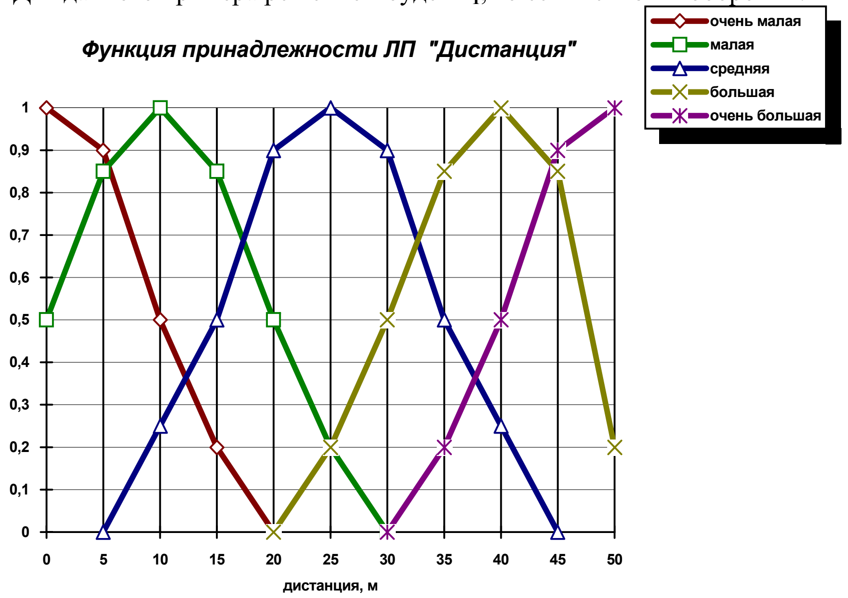


Рис. 4.5

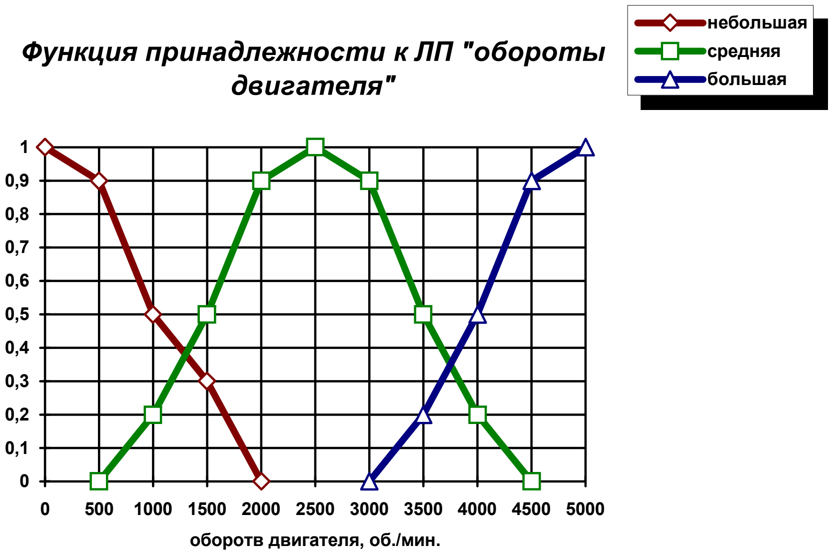


Рис. 4.6

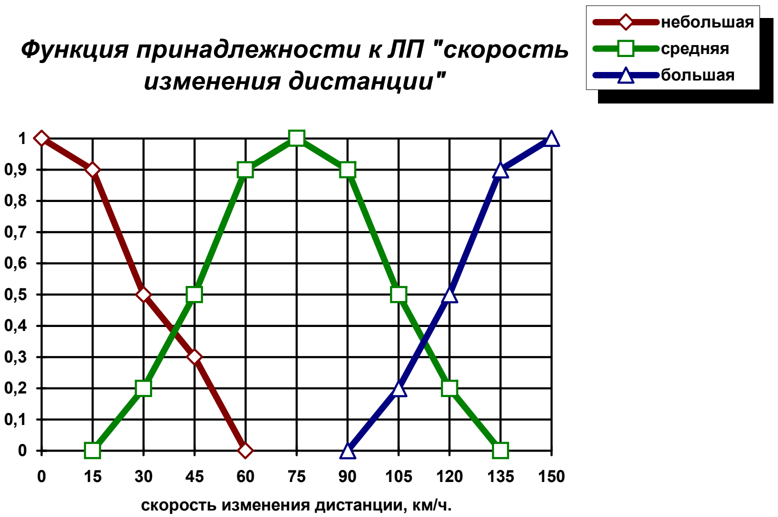


Рис. 4.7

Модель классификации может быть также реализована с учетом степеней предпочтительного выбора управляющего решения. При подобном подходе каждому из возможных вариантов $\mathbf{S_j}$ сочетания параметров объекта управления и возможных решений об управлении сопоставляется степень предпочтения $\mathbf{p_j}$, задаваемая экспертами. Тогда таблица соответствия «ситуация – действие» для общего случая примет вид табл. 4.2.

Таблица 4.2

Таблица соответствия «ситуация – действие»

S	α	β	γ	H	P
S_1	α_1	β_1	γ_1	h_2	p_1
S_2	α_1	β_1	γ_2	h_2	p_2
S_3	α_1	β_1	γ_3	h_2	p_k
	…	…	…	…	…
S_{m-1}	α_k	β_l	γ_2	h_4	p_g
S_m	α_k	β_l	γ_3	h_3	p_m

Выбор решения об управлении происходит следующим образом. Для такта времени $\mathbf{t_0}$ определяются параметры объекта управления в виде точки $(x_1^0, x_2^0, ..., x_3^0) \in X$ и определяются численные значения степеней принадлежности $\mu_{C(\alpha_i)}, \mu_{C(\beta_i)}, \mu_{C(\gamma_i)}$. Значения степеней принадлежности подставляются в формулу (4.2) и определяется тот класс разбиения $\mathbf{L_S}$, для которого имеет наибольшее значение функция μ_{L_S}. Найденному классу разбиения $\mathbf{L_S}$ сопоставлены решения и степени предпочтения. Затем в соответствии с принятыми правилами определяется решение об управлении. Правила могут быть следующими:

- решение принимается, исходя из наибольшего значения степени предпочтительного выбора: $\delta_j : j \equiv \max\limits_{l} p_l^i;$

- решение выбирается случайным образом из подмножества решений, образованного классом разбиения $\mathbf{L_S}$. Подмножество определено заданием допустимого уровня значений степеней предпочтительного выбора, т.е. задано $p_{l\,dop}^i$, определяется подмножество P_i^* исходя из условия $p_l^i \in P_i^*$, если $p_l^i \geq p_{l\,dop}^i$, затем генерируется равномерно распределенное число в интервале [0,1] и по схеме случайных событий из множества решений, у которых степень предпочтительного выбора принадлежит подмножеству P_i^*, выбирается единственное.

Достоинство модели классификации при построении нечетких контроллеров состоит в возможности установления достаточно полного соответствия между наборами нечетких переменных, характеризующих состояние объекта управления, и элементами множества **H** принятия решений об управлении. Однако данная модель обладает недостатком, заключающимся в следующем. Если число ЛП велико, значительны размеры мощностей их терм-множеств, то таблица соответствия «ситуация – действие» существенно разрастается. Например, если число ЛП равно пяти и терм-множество каждой ЛП равно трем, то таблица соответствия «ситуация – действие» будет содержать 243 строки. Если число ЛП равно десяти и терм-множество каждой ЛП равно трем, то таблица соответствия «ситуация – действие» будет содержать 58049 строк. Очевидно, что заполнять эту таблицу экспертными данными не предоставляется никакой возможности при большом числе ЛП.

4.3. Модель вычисления степени истинности нечетких правил вывода

Рассмотренная в разд. 4.1 модель классификации обладает трудностями применения, избежать которые можно путем ограничения числа рассматриваемых правил принятия решений об управлении.

Известна модель, названная в работе [7] моделью композиции, которая в работе [8] названа более полно моделью вычисления степени истинности нечетких правил вывода. Применение этой модели позволит избежать недостатка модели классификации, связанного с ростом числа строк таблицы соответствия «ситуация-действие».

Модель вычисления степени истинности нечетких правил вывода задается тройкой **(X,T,H)**, где **T** - нечеткое отношение на множестве **X×H**, причем **T** - нечеткое соответствие, которое выводится на основе словесно - качественной информации экспертов: $\mathbf{X \times H \xrightarrow{T} H}$. Заметим, что в данной модели множества **H** рассматривается как множество НП из терм-множества ЛП - принимаемое решение. Формальное задание модели вычисления степени истинности нечетких правил вывода происходит следующим образом.

Элементы множества **X** - множества, составляющего прямое произведение множеств входных факторов $\mathbf{X=X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n}$, определяются при конкретной постановке задачи управления объектом. Определяется ЛП - принимаемое решение об управлениях и задаются элементы из терм-множества ЛП, характеризующие нечетко заданное принятие решения.

Основной частью построения модели является выбор экспертами элементов множества **T** - соответствия в виде правил нечеткого выбора решения о кредитовании. Полнота этого множества определяет достоверность работы модели. Эксперт описывает принятия решений в виде некоторого множества **T**, содержащего высказывания $\{\pi_j\},\ \mathbf{j = \overline{1,l}}$. Высказывания $\pi_{\mathbf{j}}$ формализуют посредством назначающих, условных и безусловных операторов. Для каждого высказывания $\pi_{\mathbf{j}}$ выводится функция принадлежности $\mu_{\pi_j}(\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n, h_i})$. Для отношения **T** значения функции принадлежности определяются через обобщенную операцию σ, так что

$$\mu_{\mathbf{T}}(\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n, h_i}) = \sigma_{\mu_{\pi_j}}(\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n, h_i}). \tag{4.3}$$

В результате модель вычисления степени истинности нечетких правил вывода будет иметь вид:

$$\mathbf{(X,T,H),\ X=X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n},\ \mathbf{T} = \mathop{\&}_{\mathbf{j=\overline{1,L}}} \mathbf{T}(\pi_{\mathbf{j}}). \tag{4.4}$$

Построенная таким образом модель вычисления степени истинности нечетких правил вывода работает по следующему алгоритму при принятии решения о выборе управления.

Для момента времени $\mathbf{t_0}$ определяется координата множества **X** $\mathbf{x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in X}$, характеризующая состояние объекта управления в этот момент времени $\mathbf{t_0}$. Для точки $\mathbf{x^0}$ определяют значения функций принадлежности $\mu_{\mathbf{T}(\pi_j)}(\mathbf{x^0, h_i})$ нечеткого решения выбора $\mathbf{h_i}$ решения об управлении.

Затем выбирается такое значение базового множества (Ω в модели классификации) лингвистической переменной, качественно определяющей принимаемое решение, при котором значение функций принадлежности $\mu_{\mathbf{T}(\pi_j)}(\mathbf{x^0, h_i})$ имеет максимальное значение

$$\mu_{T(\pi_s)}(x^0, h_s) = \max_j \mu_{T(\pi_j)}(x^0, h_i).$$

Решение h_i об управлении является выбранным в результате работы модели вычисления степени истинности нечетких правил вывода.

К числу достоинств данной модели следует отнести ее упрощенную реализацию по сравнению с моделью классификации, так как в данной модели не осуществляется экспертами перебор и анализ всех нечетких ситуаций, которые могут существовать при решении задачи управления. Эксперты формулируют правила вывода лишь для наиболее значимых, с их точками зрения, нечетких ситуаций, характеризующих объект управления, и соответствующих им нечетким решениям о параметрах управления.

Однако данная модель обладает и недостатками. Нет уверенности в том, что экспертами задано достаточно полное множество непротиворечивых правил, которые бы включали в себя все значимые нечеткие ситуации с требуемыми для этих ситуаций решениями о параметрах управления. Если же стремиться с перебору всех возможных правил принятия решений, то модель вычисления степени истинности нечетких правил вывода сводится к модели классификации.

Работу модели вычисления степени истинности нечетких правил вывода рассмотрим на примере устройства выбора корректирующей способности циклического кода [8].

Современные модемы построены, как адаптивные системы, имеющие канал обратной связи, с помощью которого осуществляется контроль состояний канала передачи дискретной информации (КПДИ). Система передачи информации (СПИ) подобного вида носит название системы с решающей обратной связью либо с информационной обратной связью. При искажении переданного кода, выявленного с применением канала обратной связи, происходит повторение передачи. Если применять циклический код с постоянной корректирующей способностью, то такие системы не будут эффективны. Их эффективность можно повысить, если применять коды различной корректирующей способности в зависимости от изменений уровня помех в КПДИ. Если $\mathbf{B}$ - скорость модуляции в канале, то для передачи $\mathbf{N}$ сообщений кодом наибольшей корректирующей способности (длина кода $\mathbf{n_k}$) потребуется время $\mathbf{T=Nn_k/B}$ (с). Если применять коды различной корректирующей способности с длинами $\mathbf{n_1,n_2,n_3,\dots,n_k}$, $(\mathbf{n_1<n_2<n_3<\dots<n_k})$, то для передачи $\mathbf{N}$ сообщений потребуется время

$$\mathbf{T_a = N\sum_{i=1}^{k} p_i n_i / B,\ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1},$$

где $\mathbf{p_i}$ - финальная вероятность применения кода с длиной $\mathbf{n_i}$. Очевидно, что если для любого $\mathbf{p_i \geq 0}$, то $\mathbf{T_a<T}$.

Исходными данными для принятия решения о выборе корректирующего кода является текущее состояние КПДИ, характеризуемое действующим значением напряжения помехи в линии связи, числом переспросов о повторных передачах за заданный отрезок времени, скоростью модуляции в канале связи и другими факторами.

Пусть значение напряжения помехи будет определено в множестве **X1**, значение числа переспросов определено в множестве **X2**, значение числа скоростей модуляции в канале связи определено в множестве **X3**. Множество применяемых для передачи кодов упорядочено в соответствии с ростом длины кода $\mathbf{K=\{n_1,n_2,n_3,\dots,n_k\}}$.

Введем ЛП α - «уровень помех», терм-множество которой имеет вид $\mathbf{T(\alpha)}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$, где α_1 - «несущественный уровень помех»; α_2 - «низкий уровень помех»; α_3 - «средний уровень помех»; α_4 - «высокий уровень помех». Для каждой НП α_i задаются нечеткие подмножества $\tilde{C}(\alpha_i)=\{<\mu_{\alpha_i}(x1)/x1>\},\ x1\in X1,\ \ i=\overline{1,4},$ где $\mathbf{X1=\{0,x1_{max}\}}$ - множество значений напряжения помехи, причем считается, что канал симметричный и помехи одинаково распределены по знаку. Вид функций принадлежности μ_{α_i} приведен на рис. 4.8.

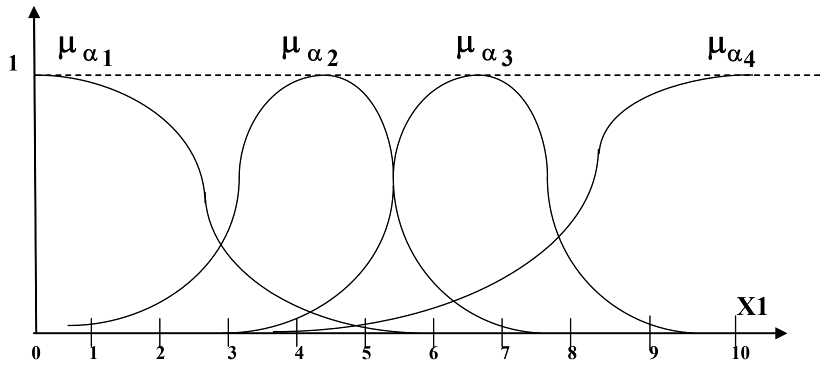


Рис. 4.8

Введем ЛП β - «число переспросов», терм-множество которой имеет вид $\mathbf{T(\beta)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}$, где β_i - НП: β_1 - «небольшое число переспросов»; β_2 - «обычное число переспросов»; β_3 - «большое число переспросов». Зададим нечеткие подмножества $\tilde{C}(\beta_i)=\{<\mu_{\beta_i}(x2)/x2>\},\ x2\in X2,\ \ i=\overline{1,3},$ где $\mathbf{X2=\{0,...,x2_{max}\}}$ **-** множество значений число переспросов. Вид функций принадлежности μ_{β_i} приведен на рис. 4.9.

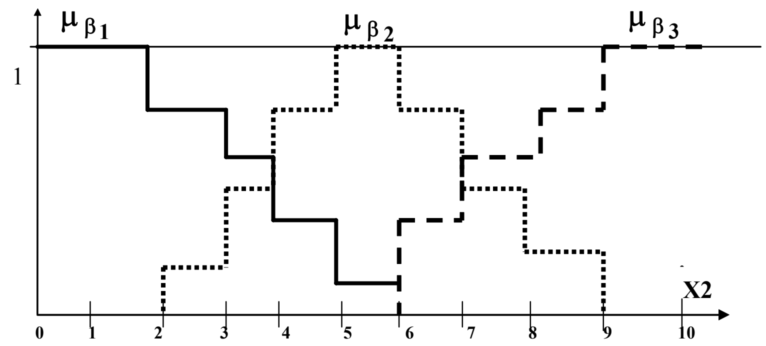


Рис. 4.9

Определим ЛП γ - «скорость модуляции», терм-множество которой имеет вид $\mathbf{T(\gamma)}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, где γ_1 – «невысокая скорость модуляции»; γ_2 - «средняя скорость модуляции»; γ_3 – «большая скорость модуляции». Зададим нечеткие подмножества $\tilde{\mathbf{C}}(\gamma_i) = \{< \mu_{\gamma_i}(\mathbf{x3})/\mathbf{x3} >\}, \ \mathbf{x3} \in \mathbf{X3}, \ \ \mathbf{i} = \overline{\mathbf{1,3}}$. Вид функций принадлежности μ_{γ_i} приведен на рис. 4.10.

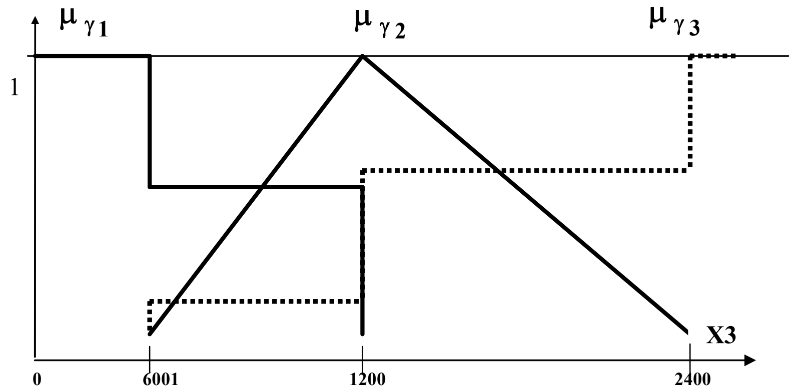


Рис. 4.10

Определим ЛП δ - «корректирующая способность кода», терм-множество которой имеет вид $\mathbf{T(\delta)}=(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$, где δ_1 – «небольшая корректирующая способность кода»; δ_2 - «средняя корректирующая способность кода»; δ_3 – «большая корректирующая способность кода». Зададим нечеткие подмножества $\tilde{\mathbf{C}}(\delta_i) = \{< \mu_{\delta_i}(\mathbf{n})/\mathbf{n} >\}, \ \mathbf{n} \in \mathbf{K}, \ \ \mathbf{i} = \overline{\mathbf{1,3}}$, где $\mathbf{K=\{n_1,n_2,n_3,\ldots,n_{10}\}}$. Вид функций принадлежности μ_{δ_i} приведен на рис. 4.11.

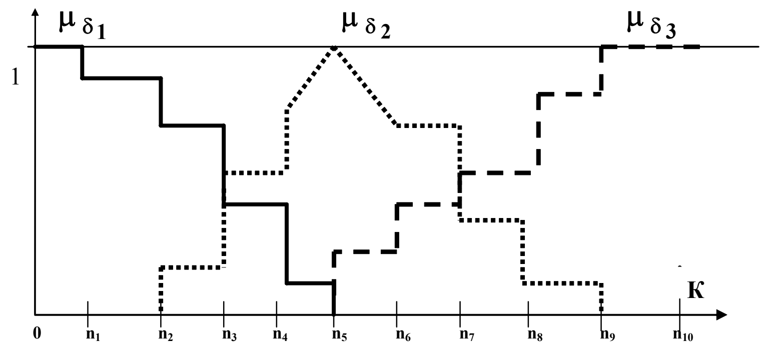


Рис. 4.11

Пусть экспертами представлены следующими правилами особенности функционирования системы управления выбором кода:

- π_1: если α_1 - несущественный уровень помех и β_1 - небольшое число переспросов и γ_1 – невысокая скорость модуляции, то δ_1 - небольшая корректирующая способность кода;

- π_2: если α_1 - несущественный уровень помех и β_2 - обычное число переспросов и γ_2 - средняя скорость модуляции, то δ_2 - средняя корректирующая способность кода;

- π_3: если α_1 - несущественный уровень помех и β_2 - обычное число переспросов и γ_1 – невысокая скорость модуляции, то δ_1 - небольшая корректирующая способность кода;

- π_4: если α_1 - несущественный уровень помех и β_2 - обычное число переспросов и γ_3 – большая скорость модуляции, то δ_2 - средняя корректирующая способность кода;

- π_5: если α_1 - несущественный уровень помех и β_3 - большое число переспросов и γ_2 - средняя скорость модуляции, то δ_3 - большая корректирующая способность кода;

- π_6: если α_2 - низкий уровень помех и β_1 - небольшое число переспросов и γ_2 - средняя скорость модуляции, то δ_1 - небольшая корректирующая способность кода;

- π_7: если α_2 - низкий уровень помех и β_2 - обычное число переспросов и γ_2 - средняя скорость модуляции, то δ_2 - средняя корректирующая способность кода;

- π_8: если α_3 - средний уровень помех и β_2 - обычное число переспросов и γ_3 - высокая скорость модуляции, то δ_2 - средняя корректирующая способность кода;

- π_9: если α_3 - средний уровень помех и β_3 - большое число переспросов и γ_2 - средняя скорость модуляции, то δ_3 - большая корректирующая способность кода;

- π_{10}: если α_3 - средний уровень помех и β_3 - большое число переспросов и γ_3 - высокая скорость модуляции, то δ_3 - большая корректирующая способность кода;

- π_{11}: если α_4 - высокий уровень помех и β_2 - обычное число переспросов и γ_2 - средняя скорость модуляции, то δ_3 - большая корректирующая способность кода;

- π_{11}: если α_4 - высокий уровень помех и β_3 - большое число переспросов и γ_3 - высокая скорость модуляции, то δ_3 - большая корректирующая способность кода.

Модель вычисления степени истинности нечетких правил вывода для данной задачи будет иметь вид

$$\mathbf{(X,T,K),\ X=X1\times X1\times X3\times K},\quad T = \underset{j=\overline{1,11}}{\&} T(\pi_j)\,.$$

Значение функции принадлежности нечеткого выбора управляющего решения определяется по формуле

$$\mu_T(x1,x2,x3,n) = \underset{j=\overline{1,11}}{\&} \mu_{T(\pi_j)} = \{[\mu_{\alpha_1}(x1) \wedge \mu_{\beta_1}(x2) \wedge \mu_{\gamma_1}(x3) \to \mu_{\delta_1}(k)] \wedge$$
$$[\mu_{\alpha_1}(x1) \wedge \mu_{\beta_2}(x2) \wedge \mu_{\gamma_2}(x3) \to \mu_{\delta_2}(k)] \wedge [\mu_{\alpha_1}(x1) \wedge \mu_{\beta_2}(x2) \wedge \mu_{\gamma_1}(x3) \to \mu_{\delta_1}(k)] \wedge$$
$$[\mu_{\alpha_1}(x1) \wedge \mu_{\beta_2}(x2) \wedge \mu_{\gamma_3}(x3) \to \mu_{\delta_2}(k)] \wedge [\mu_{\alpha_1}(x1) \wedge \mu_{\beta_3}(x2) \wedge \mu_{\gamma_2}(x3) \to \mu_{\delta_3}(k)] \wedge$$
$$[\mu_{\alpha_2}(x1) \wedge \mu_{\beta_1}(x2) \wedge \mu_{\gamma_2}(x3) \to \mu_{\delta_1}(k)] \wedge [\mu_{\alpha_2}(x1) \wedge \mu_{\beta_2}(x2) \wedge \mu_{\gamma_2}(x3) \to \mu_{\delta_2}(k)] \wedge$$
$$[\mu_{\alpha_3}(x1) \wedge \mu_{\beta_2}(x2) \wedge \mu_{\gamma_3}(x3) \to \mu_{\delta_2}(k)] \wedge [\mu_{\alpha_3}(x1) \wedge \mu_{\beta_3}(x2) \wedge \mu_{\gamma_2}(x3) \to \mu_{\delta_3}(k)] \wedge$$
$$[\mu_{\alpha_3}(x1) \wedge \mu_{\beta_3}(x2) \wedge \mu_{\gamma_3}(x3) \to \mu_{\delta_3}(k)] \wedge [\mu_{\alpha_4}(x1) \wedge \mu_{\beta_2}(x2) \wedge \mu_{\gamma_2}(x3) \to \mu_{\delta_3}(k)]\}\,.$$

Для принятия решения о выборе корректирующей способности кода в момент времени $\mathbf{t_0}$ определяются значения $\mathbf{x1(t_0)}$, $\mathbf{x2(t_0)}$, $\mathbf{x3(t_0)}$ и находится значение функции $\mathbf{\mu_T(x1(t_0),x2(t_0),x3(t_0),n)}$. Та величина $\mathbf{n}$, которой соответствует наибольшее значение функции принадлежности $\mathbf{\mu_T(x1(t_0),x2(t_0),x3(t_0),n)}$, и будет длиной корректирующего кода, который следует применять в момент времени $\mathbf{t_0}$.

Пусть, например, к моменту времени $\mathbf{t_0}$ известно, что уровень помех **x1=5В**, среднее число переспросов **x2=3**, а скорость модуляции **x3=600 бод**.

Из рис. 4.8 определяем μ_{α_1}**(x1)=0,05;** μ_{α_2}**(x1)=0,9;** μ_{α_3}**(x1)=0,3;** μ_{α_4}**(x1)=0**. Из рис. 4.9 определяем μ_{β_1}**(x2)=0,6;** μ_{β_2}**(x2)=0,5;** μ_{β_3}**(x2)=0**. Из рис. 4.10 определяем μ_{γ_1}**(x3)=1;** μ_{γ_2}**(x3)=0,05;** μ_{γ_3}**(x3)=0,1**. Вычислим $\mathbf{\mu_T(x1(t_0),x2(t_0),x3(t_0),n)}$.

$$\mu_T(x1(t_0),x2(t_0),x3(t_0),n)=[0{,}05\wedge 0{,}6\wedge 1\to \mu_{\delta_1}(n)]\wedge[0{,}05\wedge 0{,}5\wedge 0{,}05\to \mu_{\delta_2}(n)]\wedge$$

$[0{,}05\wedge0{,}5\wedge1\to\mu_{\delta_1}(n)]\wedge[0{,}05\wedge0{,}5\wedge0{,}1\to\mu_{\delta_2}(n)]\wedge[0{,}05\wedge0\wedge0{,}05\to\mu_{\delta_3}(n)]\wedge$
$[0{,}9\wedge0{,}6\wedge0{,}05\to\mu_{\delta_1}(n)]\wedge[0{,}9\wedge0{,}5\wedge0{,}05\to\mu_{\delta_2}(n)]\wedge[0{,}3\wedge0{,}5\wedge0{,}1\to\mu_{\delta_2}(n)]\wedge$
$[0{,}3\wedge0\wedge0{,}05\to\mu_{\delta_3}(n)]\wedge[0{,}3\wedge0\wedge0{,}1\to\mu_{\delta_3}(n)]\wedge[0\wedge0{,}5\wedge0{,}05\to\mu_{\delta_3}(n)]=$
$=[0{,}05\to\mu_{\delta_1}(n)]\wedge[0{,}05\to\mu_{\delta_2}(n)]\wedge[0{,}05\to\mu_{\delta_1}(n)]\wedge[0{,}05\to\mu_{\delta_2}(n)]\wedge$
$[0\to\mu_{\delta_3}(n)]\wedge[0{,}05\to\mu_{\delta_1}(n)]\wedge[0{,}05\to\mu_{\delta_2}(n)]\wedge[0{,}1\to\mu_{\delta_2}(n)]\wedge$
$[0\to\mu_{\delta_3}(n)]\wedge[0\to\mu_{\delta_3}(n)]\wedge[0\to\mu_{\delta_3}(n)]=[0{,}95\vee\mu_{\delta_1}(n)]\wedge[0{,}95\vee\mu_{\delta_2}(n)]\wedge$
$[0{,}95\vee\mu_{\delta_1}(n)]\wedge[0{,}95\vee\mu_{\delta_2}(n)]\wedge[1\vee\mu_{\delta_3}(n)]\wedge[0{,}95\vee\mu_{\delta_1}(n)]\wedge[0{,}95\vee\mu_{\delta_2}(n)]\wedge$
$[0{,}9\vee\mu_{\delta_2}(n)]\wedge[1\vee\mu_{\delta_3}(n)]\wedge[1\vee\mu_{\delta_3}(n)]\wedge[1\vee\mu_{\delta_3}(n)]=$
$[0{,}95\vee\mu_{\delta_1}(n)]\wedge[0{,}95\vee\mu_{\delta_2}(n)]\wedge[1\vee\mu_{\delta_3}(n)]\wedge[0{,}9\vee\mu_{\delta_2}(n)]=$
$[0{,}95\vee\mu_{\delta_1}(n)]\wedge[0{,}95\vee\mu_{\delta_2}(n)]$.

Таким образом, в сложившейся ситуации можно применить корректирующие коды с длинами от $\mathbf{n_5}$ до $\mathbf{n_{10}}$ (см. рис. 4.11).

4.4. Ситуационная модель принятия решений

Известен [4] метод построения моделей принятия решений, основанный на выборе решения, исходя из анализа реальных нечетких ситуаций, характеризующих объект управления, и сопоставления их с эталонными нечеткими ситуациями, которым сопоставлено определенное управляющее действие. Нечеткие эталонные ситуации определяют эксперты.

Задача выбора решения об управлении сводится к сопоставлению реального состояния объекта управления с эталонными состояниями. Необходимо выявить наиболее близкую эталонную ситуацию реальной ситуации, а затем, в соответствии с этой нечеткой эталонной ситуацией, осуществляется принятие решения об управлении.

Суть работы модели отображена на рис. 4.12.

Эталонные ситуации о возможных состояниях объекта управления задаются в виде элементов множества $\mathbf{S^*=\{\tilde S_1^*,\tilde S_2^*,...,\tilde S_R^*\}}$, множество управляющих решений состоит из элементов $\mathbf{h_1, h_2,\dots,h_m}$.

Рассмотрим основные понятия теории нечетких множеств и нечеткой логики, которые применены для построения ситуационной модели.

Нечеткой ситуацией $\tilde S$ называется нечеткое множество второго уровня [2,3,6] $\tilde S=\{<\mu_S(\alpha_i)/\alpha_i>\},\alpha_i\in A$, где α_i, $(i=\overline{1,n})$, $\mathbf{i}$-я ЛП, характеризующая $\mathbf{i}$-ю компоненту нечеткого состояния $\tilde S$. Множество $\mathbf{A}$ имеет следующий вид: $\mathbf{A=\{\alpha_1, \alpha_2,..,\alpha_n,\}}$.

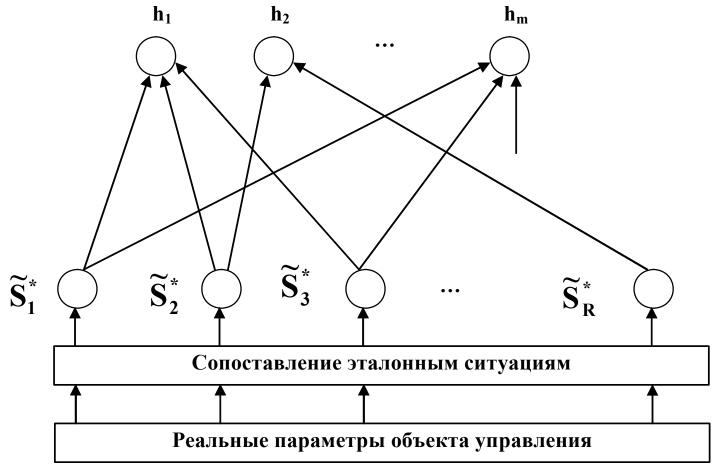


Рис. 4.12

В виде примера можно привести следующую нечеткую ситуацию, определяющую положение движущегося автомобиля: {<<0.1/"большая">, <0,8/"средняя">, <0,4/"малая"> /"скорость движения">, <<0,2/"большое">, <0,6/"небольшое">, <1,0/"среднее">, <0,6/"малое"> /"расстояние до обочины">, <<0,3/"большое">, <0,6/"среднее">, <0,1/"малое"> /"расстояние до припятствия">}.

Положение движущегося объекта характеризуется некоторой реальной нечеткой ситуацией $\tilde{S}_i$. Экспертами для принятия решения задаются эталонные нечеткие ситуации $\tilde{S}_j^*$. Для определения близости реальных и нечетких эталонных ситуаций необходимо применить из нечеткой логики такие операции, как определение степени включения, определение степени нечеткого равенства, определение степени нечеткой эквиваленсии.

Степень включения $\tilde{S}_i$ в $\tilde{S}_j^*$, $\tilde{S}_i \subseteq \tilde{S}_j^*$ определится формулами [4]:

$$\mathbf{v(\tilde{S}_i, \tilde{S}_j^*) = \underset{y \in Y}{\&} v(\mu_{S_i}(y), \mu_{S_j^*}(y)),}$$

$$\mathbf{v(\tilde{A}, \tilde{B}) = \underset{x \in X}{\&} (\mu_A(x) \to \mu_B(x)), \quad \tilde{A} \to \tilde{B} = max(1 - \tilde{A}, \tilde{B}).}$$

Степень нечеткого равенства двух нечетких множеств $\tilde{S}_i$ и $\tilde{S}_j^*$ определится формулой [4]:

$$\mathbf{\mu(\tilde{S}_i, \tilde{S}_j^*) = \underset{y_I \in Y}{\&} \mu(\mu_{S_i}(y_I), \mu_{S_j^*}(y_I)), \quad \mu(\tilde{S}_i, \tilde{S}_j^*) = v(\tilde{S}_i, \tilde{S}_j^*) \,\&\, v(\tilde{S}_i, \tilde{S}_j^*).}$$

Степень нечеткого равенства $\mu(\tilde{S}_i, \tilde{S}_j^*)$ определяется:

$$\mu(\widetilde{S}_i,\widetilde{S}_j^*) = \underset{y_1\in Y}{\&}\mu(\mu_{S_i}(y_1),\mu_{S_j^*}(y_1)),$$

$$\mu(\mu_{S_i}(y_1),\mu_{S_j^*}(y_1)) = \underset{T_k^1\in T_1}{\&} C(\mu_{\mu_{S_i}(y_1)}(T_k^1),\mu_{\mu_{S_j^*}(y_1)}(T_k^1)),$$

$$C(\mu_{\mu_{S_i}(y_1)}(T_k^1),\mu_{\mu_{S_j^*}(y_1)}(T_k^1)) = \mu_{\mu_{S_i}(y_1)}(T_k^1) \leftrightarrow \mu_{\mu_{S_j^*}(y_1)}(T_k^1),$$

$$C(\mu_{\mu_{S_i}(y_1)}(T_k^1),\mu_{\mu_{S_j^*}(y_1)}(T_k^1)) = \mu_{\mu_{S_i}(y_1)}(T_k^1) \leftrightarrow \mu_{\mu_{S_j^*}(y_1)}(T_k^1),$$

$$\text{при } \mu_{\mu_{S_i}(y_1)}(T_k^1) \notin (1-t,t) \text{ и } \mu_{\mu_{S_j^*}(y_1)}(T_k^1) \notin (1-t,t);$$

$$C(\mu_{\mu_{S_i}(y_1)}(T_k^1),\mu_{\mu_{S_j^*}(y_1)}(T_k^1)) = 1, \text{ при } \mu_{\mu_{S_i}(y_1)}(T_k^1) \in (1-t,t)$$

$$\text{или } \mu_{\mu_{S_j^*}(y_1)}(T_k^1) \in (1-t,t).$$

В качестве примера равенства двух нечетких ситуаций можно привести следующее. Определим нечеткое равенство множеств $\widetilde{S}_i \approx \widetilde{S}_j^*$ при условии $\mu(\widetilde{S}_i,\widetilde{S}_j^*) \geq t$, $t\in[0,6;1]$, t - порог нечеткого равенства ситуации. Множество ЛП - $Y=\{y_1,y_2\}$,

Терм-множества ЛП - $T_1 = \{T_1^1,T_2^1,T_3^1\}$, $T_2 = \{T_1^2,T_2^2\}$. Нечеткие множества заданы в следующем виде:

$$\widetilde{S}_i = \{<< 0{,}8/T_1^1 >,< 0{,}3/T_2^2 >,< 0{,}1/T_3^1 > /y_1 >,\ << 0{,}2/T_1^2 >,< 1/T_2^2 > /y_2 >\}$$

$$\widetilde{S}_j^* = \{<< 1/T_1^1 >,< 0{,}2/T_2^1 >,< 0{,}3/T_3^1 > /y_1 >,\ << 0{,}1/T_1^2 >,< 0{,}8/T_2^2 > /y_2 >\}.$$

Степень нечеткого равенства определится:

$$\mu(\mu_{S_i}(y_1),\mu_{S_j^*}(y_1)) = 0{,}7, \quad \mu(\mu_{S_i}(y_2),\mu_{S_j^*}(y_2)) = 0{,}8.$$

Ситуации $\widetilde{S}_i$ и $\widetilde{S}_j^*$ нечетко равны при $t=0{,}7$.

Операция нечеткой эквивалентности определится формулой [4]:

$$\widetilde{A} \leftrightarrow \widetilde{B} = \min\{[\max(1-\widetilde{A},\widetilde{B})],[\max(1-\widetilde{B},\widetilde{A})]\}.$$

Рассмотрим описание нечетких ситуаций.

Пусть реальные параметры объекта управления будут заданы в виде множества $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$. Для каждого параметра x_i задана область определения $X(I)=[d_{imin},d_{imax}]$, где d_{imin} - минимальная граница области определения, d_{imax} - максимальная граница области определения НП из терм-множества ЛП, заданной на базовом множестве $X(I)$.

Нечеткие эталонные ситуации $\widetilde{S}_j^*$ задаются следующим образом. Нечеткие эталонные ситуации имеют в обозначении справа вверху символ «*», а для обозначения реальных нечетких ситуаций этот символ не применяем. Экспертами определяется количество нечетких эталонных ситуаций $R=|S^*|$, где $S^* = \{\widetilde{S}_1^*,\widetilde{S}_2^*,...,\widetilde{S}_R^*\}$ - множество нечетких эталонных ситуаций и для каждой нечеткой ситуации $\widetilde{S}_k^*$ экспертами задаются значения степеней принадлежности нечетких множеств $\mu_{S_k^*}(\alpha_i)$, определенных для соответствующих ЛП.

В результате проведенных экспертных опросов получим:

а) **n** - число ЛП, характеризующих объект управления;

б) множество ЛП - $\{<\alpha_i, T(\alpha_i), XI, G_i, M_i>\}, i=\overline{1,n};$

в) заданные нечеткие множества - $\widetilde{C}(\alpha_j^i) = \{<\mu_{\alpha_j^i}(x_i)/x_i>\}, \quad x_i \in XI.$

г) заданные нечеткие множества второго уровня (множество нечетких эталонных ситуаций) - $S^* = \{\widetilde{S}_K^* = \{<\mu_{S_K^*}\alpha_i)/\alpha_i>\}\},\ i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,R}.$

Рассмотрим пример задания множества S^* нечетких эталонных ситуаций. Пусть экспертами определено, что число **R=3**, т.е. $S^* = \{\widetilde{S}_1^*, \widetilde{S}_2^*, ..., \widetilde{S}_R^*\}$, а число лингвистических переменных **n=5**. Экспертами определяются величины степеней принадлежности $\mu_{S_K^*}(\alpha_i),\ k=\overline{1,5},\ i=\overline{1,3}$.

Пусть, например, множество нечетких эталонных ситуаций для описания параметров объектов управления имеет вид:

S*={{<<0,9/«неудовлетворительный»>, <0,5/«удовлетворительный»>,
<0,1/«хороший»>/«первый параметр состояния»>,
<<0,7/«неудовлетворительный»>, <0,6/«удовлетворительный»>,
<0,15/«хороший»>/«второй параметр состояния»>,
<<0,6/«неудовлетворительный»>, <0,7/«удовлетворительный»>,
<0,3/«хороший»>/«третий параметр состояния»>,
<<0,4/«неудовлетворительный»>, <0,8/«удовлетворительный»>,
<0,5/«хороший»>/«четвертый параметр состояния»>,
<<0,2/«неудовлетворительный»>, <0,9/«удовлетворительный»>,
<0,6/«хороший»>/«пятый параметр состояния»>},
{<<0,5/«неудовлетворительный»>, <0,5/«удовлетворительный»>,
<0,5/«хороший">/«первый параметр состояния">,
<<0,4/«неудовлетворительный»>, <0,55/«удовлетворительный»>,
<0,6/«хороший»>/«второй параметр состояния»>,
<<0,7/«неудовлетворительный»>, <0,6/«удовлетворительный»>,
<0,05/«хороший»>/«третий параметр состояния»>,
<<0,2/«неудовлетворительный»>, <0,75/«удовлетворительный»>,
<0,3/«хороший»>/«четвертый параметр состояния»>,
<<0,1/«неудовлетворительный»>, <0,9/«удовлетворительный»>,
<0,25/«хороший">/«пятый параметр состояния">},
{<<0,1/«неудовлетворительный»>, <0,9/«удовлетворительный»>,
<0,5/«хороший»>/«первый параметр состояния»>,

<<0,2/«неудовлетворительный»>, <0,85/«удовлетворительный»>, <0,45/«хороший»>/«второй параметр состояния»>, <<0,3/«неудовлетворительный»>, <0,8/«удовлетворительный»>, <0,4/«хороший»>/«третий параметр состояния»>, <<0,4/«неудовлетворительный»>, <0,7/«удовлетворительный»>, <0,35/«хороший»>/«четвертый параметр состояния»>, <<0,5/«неудовлетворительный»>, <0,6/«удовлетворительный»>, <0,5/«хороший»>/«пятый параметр состояния»>}}.

На рис. 4.13 приведен вариант задания гипотетических функций принадлежности. В общем случае функции принадлежности имеют непрерывный вид, а на рис. 4.13 функции имеют дискретное разбиение.

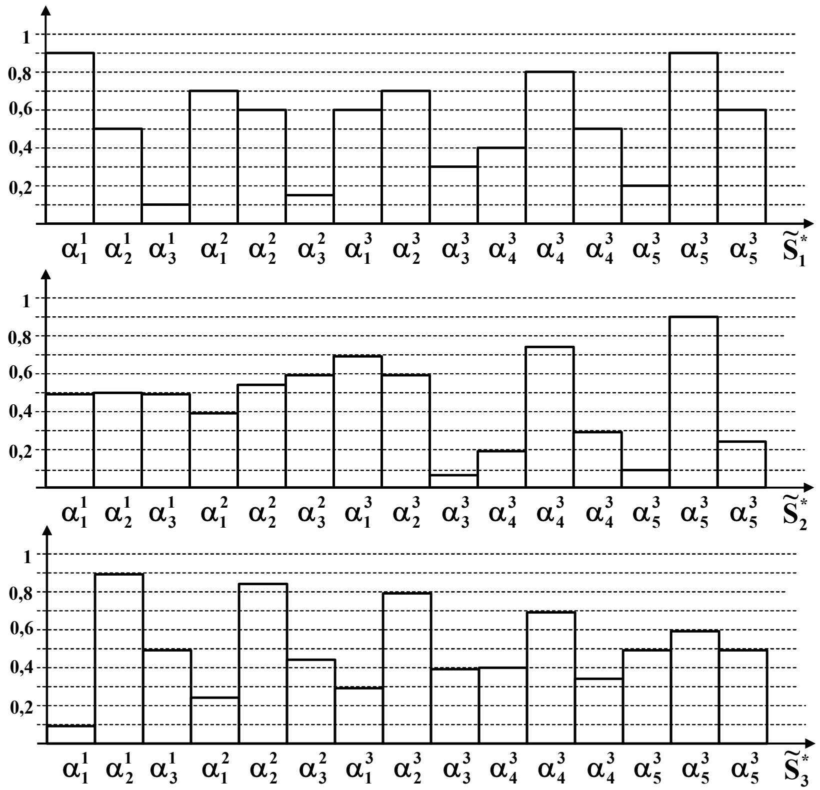


Рис. 4.13

Рассмотрим пример определения степеней нечеткого равенства некоторой реальной нечеткой ситуации $\widetilde{S}_i$ с эталонными ситуациями множества $\mathbf{S}^*$. Определим величину порога нечеткого равенства **t=0,6**.

Будем считать, что экспертами определены требуемые функции принадлежности нечетких множеств, определены датчиками текущие измеряемые параметры, характеризующие объект управления, и установлены значения степеней принадлежности в функциях принадлежности для этих текущих параметров. Пусть реальная нечеткая ситуация будет задана в следующем виде:

$\widetilde{\mathbf{S}}$ ={<<0/"неудовлетворительный">, <0,4/"удовлетворительный">,
<0,3/"хороший"> /"первый параметр">,
<<0/"неудовлетворительный">, <0,2/"удовлетворительный">,
<0,5/"хороший">/ "второй параметр">,
<<0,75/"неудовлетворительный">, <0,25/"удовлетворительный">,
<0/"хороший">/ "третий параметр">,
<<0,3/"неудовлетворительный">, <0,6/"удовлетворительный">,
<0,05/"хороший">/ "четвертый параметр">,
<<0,3/"неудовлетворительный">, <1/"удовлетворительный">,
<0,1/"хороший">/"пятый параметр состояния">}.

Определим степени нечеткого равенства реальной ситуации $\widetilde{\mathbf{S}}$ и эталонных ситуаций $\widetilde{\mathbf{S}}_i^* \in \mathbf{S}^*$. Получим следующее:

$$\mu(\widetilde{S},\widetilde{S}_i^*) = \mathop{\&}_{\beta_l \in Y} \mu(\mu_S(\beta_l),\mu_{S_i^*}(\beta_l)), \text{ где } \mathbf{Y=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5\}},$$

$$\mu(\mu_S(\beta_l),\mu_{S_i^*}(\beta_l)) = \mathop{\&}_{\alpha_k^l \in T(\beta_l)} C(\mu_{\mu_{S(\beta_l)}}(\alpha_k^l),\mu_{\mu_{S_i^*(\beta_l)}}(\alpha_k^l)),$$

$$C(\mu_{\mu_{S(\beta_l)}}(\alpha_k^l),\mu_{\mu_{S_i^*(\beta_l)}}(\alpha_k^l)) = \mu_{\mu_{S(\beta_l)}}(\alpha_k^l) \leftrightarrow \mu_{\mu_{S_i^*(\beta_l)}}(\alpha_k^l)$$

$$\text{при } \mu_{\mu_{S(\beta_l)}}(\alpha_k^l) \notin (0,4;0,6) \text{ и } \mu_{\mu_{S_i^*(\beta_l)}}(\alpha_k^l) \notin (0,4;0,6;$$

$$C(\mu_{\mu_{S(\beta_l)}}(\alpha_k^l),\mu_{\mu_{S_i^*(\beta_l)}}(\alpha_k^l)) = 1$$

$$\text{при } \mu_{\mu_{S(\beta_l)}}(\alpha_k^l) \in (0,4;0,6) \text{ или } \mu_{\mu_{S_i^*(\beta_l)}}(\alpha_k^l) \in (0,4;0,6) \in (0,4;0,6).$$

$\mu(\widetilde{S},\widetilde{S}_1^*)$ =(0↔0,9)∧(1)∧(0,3↔0,15)∧(0↔0,7)∧(1)∧(1)∧(1)∧(0,25↔0,7)∧(0↔0,3)∧(1)∧(1)∧(1)∧(0,3↔0,2)∧(1↔0,9)∧(1);

$\mu(\widetilde{S},\widetilde{S}_2^*)$ =(1)∧(1)∧(1)∧(1)∧(1)∧(1)∧(0,75↔0,7)∧(1)∧(0↔0,05)∧(0,3↔0,2)∧(1)∧(0,05↔0,3)∧(0,3↔0,1)∧(1↔0,9)∧(0,1↔0,25);

$\mu(\widetilde{S},\widetilde{S}_3^*)$ =(0↔0,1)∧(1)∧(1)∧(0↔0,2)∧(0,2↔0,85)∧(1)∧(0,75↔0,3)∧(0,25↔0,8)∧(1)∧(1)∧(1)∧(0,05↔0,35)∧(1)∧(1)∧(1);

$\mu(\tilde{S},\tilde{S}_1^*)=0{,}1\wedge1\wedge0{,}7\wedge0{,}3\wedge1\wedge1\wedge0{,}75\wedge0{,}7\wedge1\wedge1\wedge1\wedge0{,}7\wedge0{,}1\wedge1=0{,}1;$

$\mu(\tilde{S},\tilde{S}_2^*)=1\wedge1\wedge1\wedge1\wedge1\wedge1\wedge0{,}7\wedge1\wedge0{,}95\wedge0{,}7\wedge1\wedge0{,}7\wedge0{,}7\wedge0{,}9\wedge0{,}75=0{,}7;$

$\mu(\tilde{S},\tilde{S}_3^*)=0{,}9\wedge1\wedge1\wedge0{,}8\wedge0{,}15\wedge1\wedge0{,}3\wedge0{,}25\wedge1\wedge1\wedge1\wedge0{,}65\wedge1\wedge1\wedge1=0{,}15.$

Таким образом, в рассмотренном примере реальная нечеткая ситуация $\tilde{S}$ нечетко равна эталонной нечеткой ситуации $\tilde{S}_2^*$.

Может существовать событие, в котором рассматриваемая реальная нечеткая ситуация $\tilde{S}$ нечетко не равна ни одной из эталонных нечетких ситуаций $\tilde{S}_j^*$. В этом случае близость реальной и нечеткой ситуации определяется с применением понятия нечеткой общности ситуаций.

Нечеткой **(p-q)**-общностью ситуаций называется такое сходство ситуаций, когда нечеткие значения всех признаков в ситуациях нечетко равны, кроме нечетких значений не более, чем **q** признаков (**p** - число лингвистических переменных).

Степень **(p-q)-**общности $\chi_{p-q}(\tilde{S}_i,\tilde{S}_j^*)$ ситуаций $\tilde{S}_i$ и $\tilde{S}_j^*$ определяется выражением [4]: $\chi_{p-q}(\tilde{S}_i,\tilde{S}_j^*)=\underset{y\in Y/Y_q}{\&}\mu(\mu_{S_i}(x),\mu_{S_j^*}(x))$, $|X_q|\le q$, признак x_k принадлежит X_q, если $\mu(\mu_{S_i}(x_k),\mu_{S_j^*}(x_k))<t$.

Соответствие между элементами множества S^* нечетких эталонных ситуаций и элементами множества **H** принятия решений может быть и нечетким. Рассмотрим возможность задания нечеткого соответствия на элементах множества S^* и элементах множества **H** принятия решений о некоторых управляющих действиях. Нечеткое соответствие задается в виде тройки множеств $\tilde{\Gamma}=(S^*,H,\tilde{F})$, в которой $\tilde{F}$ - нечеткое множество в $S^*\times H$.

Пример задания нечеткого соответствия $\tilde{\Gamma}=(S^*,H,\tilde{F})$, где $S^*=\{\tilde{S}_1^*,\tilde{S}_2^*,\tilde{S}_3^*\}$, $H=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}$. График нечеткого соответствия задается в виде

$$\tilde{F}=\{<\mu_F(\tilde{S}_1^*,h_1)/(\tilde{S}_1^*,h_1)>,<\mu_F(\tilde{S}_1^*,h_2)/(\tilde{S}_1^*,h_2)>,<\mu_F(\tilde{S}_1^*,h_3)/(\tilde{S}_1^*,h_3)>,\ldots,$$
$$<\mu_F(\tilde{S}_1^*,h_5)/(\tilde{S}_1^*,h_5)>,\ldots,<\mu_F(\tilde{S}_3^*,h_1)/(\tilde{S}_3^*,h_1)>,<\mu_F(\tilde{S}_3^*,h_2)/(\tilde{S}_3^*,h_2)>,\ldots,$$
$$<\mu_F(\tilde{S}_3^*,h_5)/(\tilde{S}_3^*,h_5)>\}.$$

Рассмотрим достоинства и недостатки ситуационной модели принятия решений.

Экспертами выделяются некоторые эталонные ситуации в объекте управления, которым сопоставляются в виде соответствия принимаемые решения об управлении. Это является достоинством данной модели, т.к. в этом случае нет необходимости в задании правил выбора управлений, что упрощает процедуру наладки системы принятия решений, построенной с применением данной модели. Возможны варианты упрощения данной модели, связанные, например, с заданием четкого соответствия между элементами множества эталонных ситуаций и элементами множества принимаемых решений об управлении.

Данная модель обладает тем же недостатком, что и модель вычисления степени истинности нечетких правил вывода. Полноту задания множества всех эталонных ситуаций при значительном количестве входных факторов объекта управления трудно определить априорно.

5. НЕЧЕТКИЕ КОНТРОЛЛЕРЫ

5.1. Алгоритм функционирования

Алгоритм функционирования нечеткого контроллера (нечеткого регулятора) определим, исходя из следущей системы уравнений:

$$\{\tilde{\mathbf{R}}_i\}_{i=1}^k = \begin{cases} \tilde{\mathbf{R}}_1 : \tilde{\mathbf{A}}_1 \circ \tilde{\mathbf{r}}_1 = \tilde{\mathbf{A}}_1 \circ (\tilde{\mathbf{A}}_{11} \to \tilde{\mathbf{A}}_{21}) = \tilde{\mathbf{B}}_1; \\ \tilde{\mathbf{R}}_2 : \tilde{\mathbf{A}}_2 \circ \tilde{\mathbf{r}}_2 = \tilde{\mathbf{A}}_2 \circ (\tilde{\mathbf{A}}_{12} \to \tilde{\mathbf{A}}_{22}) = \tilde{\mathbf{B}}_2; \\ \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \tilde{\mathbf{R}}_k : \tilde{\mathbf{A}}_k \circ \tilde{\mathbf{r}}_k = \tilde{\mathbf{A}}_k \circ (\tilde{\mathbf{A}}_{1k} \to \tilde{\mathbf{A}}_{2k}) = \tilde{\mathbf{B}}_k; \end{cases}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \bigcup_{i=1}^{k} \tilde{\mathbf{B}}_i, \quad \mathbf{z} = \mathbf{dfz}\,\tilde{\mathbf{B}},$$

где «°» - композиция нечетких отношений;

«→ - нечеткая импликация;

$\{\tilde{\mathbf{R}}_i\}_{i=1}^k$ - база правил (совокупность нечетких продукционных правил);

$\tilde{\mathbf{B}}_i,\ \mathbf{i} = \overline{\mathbf{1,k}}$ - локальный вывод из правил;

$\tilde{\mathbf{B}}$ – общий вывод из базы правил $\{\tilde{\mathbf{R}}_i\}_{i=1}^k$;

$\tilde{\mathbf{A}}_i = \mathbf{fuzz(x)},\ \mathbf{i} = \overline{\mathbf{1,k}}$ - процедура преобразования физической (числовой) величины в нечеткую переменную (fazzification – англ.), **fazz** - операция фазификации;

dfz - процедура дефазификации, т.е. $\mathbf{z{=}dfz}\,\tilde{\mathbf{B}}$ – преобразование нечеткого множества $\tilde{\mathbf{B}}$ в физическую переменную **z.**

Приведенный выше алгоритм функционирования нечеткого контроллера в виде системы уравнений показывает, что в нечетком контроллере реализованы три последовательных этапа обработки информации.

Этап 1. На вход нечеткого контроллера поступает физическая переменная **x** и выполняется преобразование этой входной переменной **x** в нечеткое множество $\tilde{\mathbf{A}}_i = \mathbf{fuzz(x)}$. Результатом обработки информации на первом этапе является получение нечетких множеств $\tilde{\mathbf{A}}_i,\ \mathbf{i} = \overline{\mathbf{1,k}}$.

- Этап 2. Выполняется логическая обработка нечетких множеств $\tilde{\mathbf{A}}_i$: $\tilde{\mathbf{A}}_i \circ \mathbf{r}_i = \tilde{\mathbf{B}}_i$; $\bigcup_{i=1}^{k} \tilde{\mathbf{B}}_i = \tilde{\mathbf{B}}$. В результате обработки информации на втором этапе будут получены локальные правила вывода $\tilde{\mathbf{B}}_i$ и общее правило вывода в виде нечеткого множества $\tilde{\mathbf{B}}$.

Этап 3. Выполняется преобразование нечеткой переменной $\widetilde{\mathbf{B}}$ в физическую переменную **z=dfz** $\widetilde{\mathbf{B}}$, которая является управляющим воздействием для объекта управления.

Этапы обработки информации в нечетком контроллере показывают, что алгоритм функционирования нечеткого контроллера рассматривается как модель регулятора в терминх «вход-выход» в новом пространстве, переход в которое из пространство реальных параметров осуществляется с применением оператора **fazz**. На рис. 5.1 показано сопоставление преобразования Лапласа и преобразования Фурье, принятых в классической теории автоматического управления, с преобразованиямием переменных операторами **fazz** и **dfz**, используемыми в теории нечеткого управления [11].

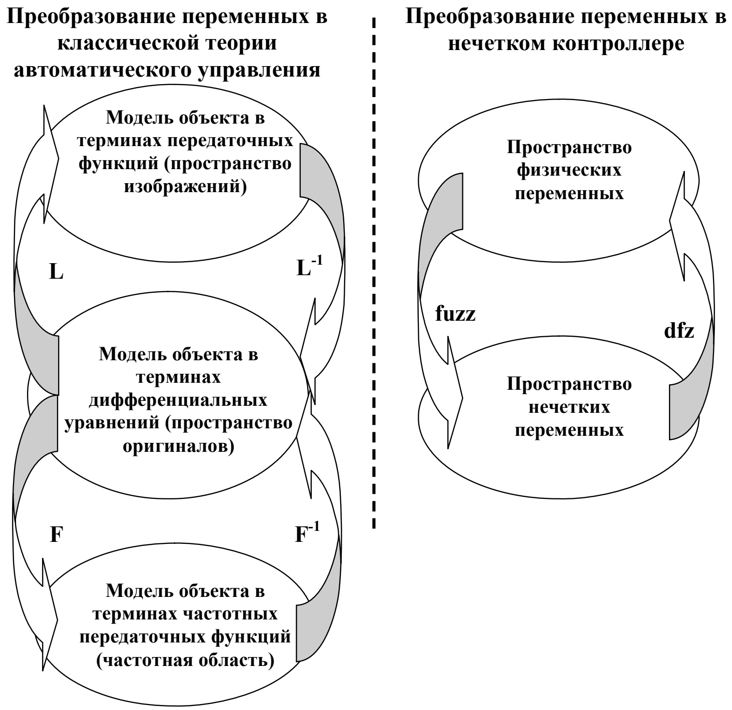


Рис. 5.1

Оператор **dfz** осуществляет обратное преобразование результатов, полученных в новом пространстве после применения оператора **fazz**, в исходное пространство действительных парамеров.

Оператор **fazz** определяется видом задания функций принадлежности: треугольные, колоколообразные, трапецеидальные и др. Логическая обработка нечетких множеств определяется способами задания нечеткой импликации и композиции. Применение оператора **dfz** также возможно разными методами.

Архитектура нечеткого контроллера приведена на рис. 5.2.

Рис. 5.2

Нечеткий контроллер реализуется в микропроцессорном варианте.

На рис. 5.3 приведена типовая структурная схема нечеткого контроллера.

Генератор задает опорную частоту, таймер работает в режиме делителя частоты и вырабатывает сигналы для управления синхронной работой устройств.

Контроллер шины является согласующим устройством между выходами процессора и входами других устройств для передачи сигналов «запись» и «чтение». Буфер обмена является двунаправленным усилителем.

Настройка нечеткого контроллера осуществляется при применении специализированного программного обеспечения персональной ЭВМ. В постоянное запоминающее устройство (ПЗУ) записывается программа из ЭВМ через плату связи персональной ЭВМ и нечеткого контроллера. В оперативном запоминающем устройстве (ОЗУ) хранятся временные данные.

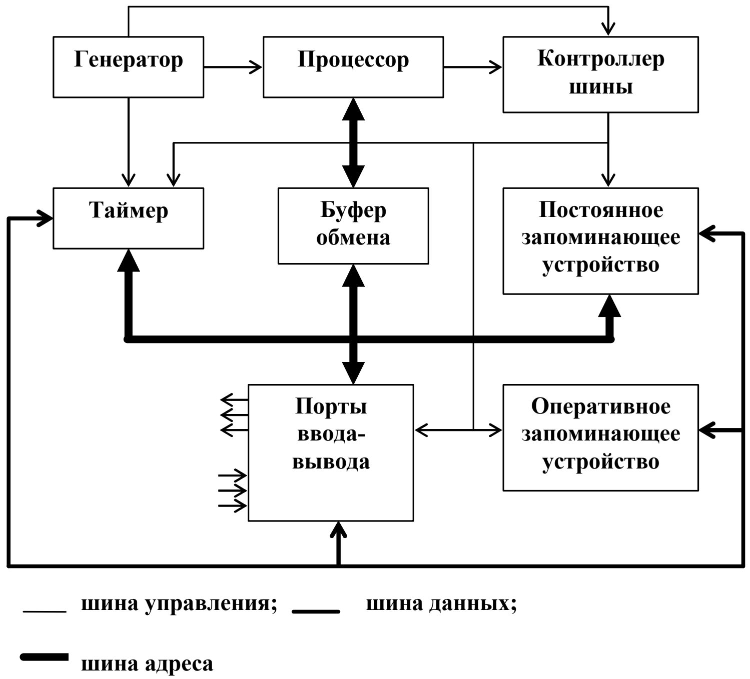


Рис. 5.3

Настройка специализированного программного обеспечения заключается в выборе вида фукций принадлежности нечтких переменных и задании их значений, определении типов логических операций и здания способа дефазификации.

Схема нечеткого контроллера, приведенная на рис. 5.3, является типовой. При конкретной реализации нечеткого контроллера его принципиальная схема и конструкция будут зависеть от выбора элементной базы.

Возможен вариант применения микроЭВМ, в которой вся структура нечеткого контроллера будет совмещена в одной микросхеме.

Нечеткие контроллеры выпускаются многими странами. Нечеткие контроллеры имеют вид платы универсального контроллера, универсального контроллера персональной ЭВМ либо вид самостоятельного блока.

Выпускается программное обеспечение с интерфейсом пользователя, которое позволяет программировать контроллер в виде структурных блоков, как это принято при моделировании в теории автоматического управления.

5.2. Примеры моделей нечетких контроллеров

5.2.1. Нечеткое управление подъемно-транспортным механизмом. На рис. 5.4 показана схема разложения на силы при раскачивании груза, который перемешается краном.

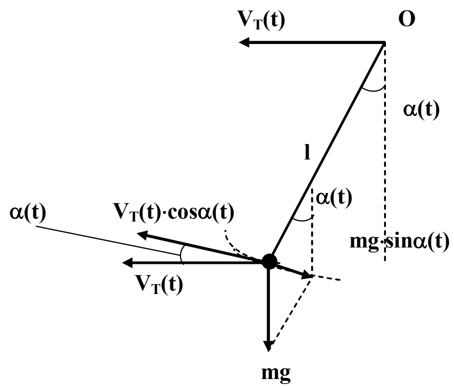


Рис. 5.4. $\mathbf{V_T(t)}$ - текущая скорость перемещения крана, $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{(t)}$ - текущий угол отклонения груза, **m** - масса груза.

Баланс моментов относительно точки **O** имеет вид $\mathbf{M_1+M_2=M_3}$, где $\mathbf{M_1 = J_r\ddot{\alpha}(t)}$ - момент инерции груза относительно точки подвеса; $\mathbf{M_2 = m[V_r(t)\cos\alpha(t)\cdot l]_t'}$ - момент, создаваемый составляющей скорости подвеса относительно точки подвеса; $\mathbf{M_3=mgl\cdot\sin\alpha(t)}$ - момент, создаваемый составляющей веса груза относительно точки подвеса. После интегрирования и преобразований получим уравнение:

$$\mathbf{J_r = \frac{1}{\cos\alpha(t)}\dot{\alpha}(t) + mgl\frac{1}{\cos\alpha(t)}\int \sin\alpha(t)dt = -mlV_T(t)},$$

где $\mathbf{\alpha(t=0)=\alpha_0}$, $\mathbf{\int \sin\alpha(t)dt\,|_{t=0} = \beta_0}$ - начальные условия нелинейного интерго-дифференциального уравнения.

Сформулируем задачу управления данным нелинейным объектом. На рис. 5.5 показано требуемое изменение текущей скорости $\mathbf{V_T(t)}$ перемещения крана.

Необходимо определить скорости $\mathbf{V_O(t)}$ в конце торможения по изменениям текущей скорости $\mathbf{V_T(t)}$ и угла раскачивания груза $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{(t)}$.

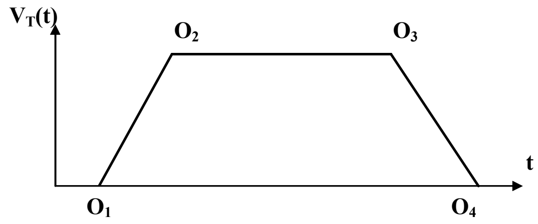


Рис. 5.5. $\mathbf{O_1}$ – точка начала разгона, $\mathbf{O_2}$ – точка конца разгона, $\mathbf{O_3}$ – точка начала торможения, $\mathbf{O_4}$ – точка конца торможения.

Оператор крана обычно решает данную задачу эвристическим путем, причем, следующее лингвистическое правило может формализовать принятие решения оператором о выборе скорости $\mathbf{V_O(t)}$ в конце торможения:

$\mathbf{R_i}$**:** если угол $\delta\alpha=\alpha_з-\alpha$, где $\alpha_з$ - заданное значение, α - измеренное значение α; немного увеличивается по часовой стрелке и производная угла $\delta\dot{\alpha}$ колебания груза немного увеличивается против часовой стрелки и скорость $\mathbf{\delta V_T=V_{TЗ}-V_T}$, где $\mathbf{V_{TЗ}}$ – заданное значение скорости, $\mathbf{V_T}$ - измеренное значение скорости; равна нулю, тогда скорость $\mathbf{V_O}$ должна быть небольшой в отрицательном направлении относительно нуля.

Введем лингвистические переменные (ЛП): $\delta\alpha$ - «угол раскачивания», $\delta\dot{\alpha}$ - «производная угла раскачивания»; $\mathbf{\delta V_T}$ – «разность заданной и измеренной скоростей»; $\mathbf{V_O}$ – «определяемая скорость». Согласно работе [13], для ЛП введем нечеткие переменные (НП).

Определим терм-множество ЛП $\delta\alpha$: $T(\delta\alpha)$={$PM_{\delta\alpha}$ - угол раскачивания $\delta\alpha$ положительный (против часовой стрелки) средний; $PS_{\delta\alpha}$ - угол раскачивания $\delta\alpha$ положительный небольшой; $ZR_{\delta\alpha}$ - угол раскачивания $\delta\alpha$ нулевой; $NS_{\delta\alpha}$ - угол раскачивания $\delta\alpha$ отрицательный (против часовой стрелки) небольшой; $NM_{\delta\alpha}$ – угол раскачивания $\delta\alpha$ отрицательный средний}. На рис. 5.6 приведены функции принадлежности $\mu_{\delta\alpha}$ для нечетких переменных терм-множества $T(\delta\alpha)$.

Определим терм-множество ЛП $\delta\dot{\alpha}$: $T(\delta\dot{\alpha})$={$PS_{\delta\dot{\alpha}}$ - производная угла раскачивания $\delta\dot{\alpha}$ положительная небольшая; $ZR_{\delta\dot{\alpha}}$ - производная угла раскачивания $\delta\dot{\alpha}$ нулевая; $NS_{\delta\dot{\alpha}}$ - производная угла раскачивания $\delta\dot{\alpha}$ отрицательная}. На рис. 5.7 приведены функции принадлежности $\mu_{\delta\dot{\alpha}}$ для нечетких переменных терм-множества $T(\delta\dot{\alpha})$.

Определим терм-множество ЛП $\mathbf{\delta V_T}$: $T(\mathbf{\delta V_T})$={$PM_{\delta V_T}$ - разность скоростей $\mathbf{\delta V_T}$ положительная (против часовой стрелки) средняя; $PS_{\delta V_T}$ - разность скоростей $\mathbf{\delta V_T}$ положительная небольшая; $ZR_{\delta V_T}$ - разность скоростей $\mathbf{\delta V_T}$

нулевая; $NS_{\delta V_T}$ - разность скоростей δV_T отрицательная (против часовой стрелки) небольшая; $NM_{\delta V_T}$ – разность скоростей δV_T отрицательная средняя}. На рис. 5.8 приведены функции принадлежности $\mu(\delta V_T)$ для нечетких переменных терм-множества $T(\delta V_T)$.

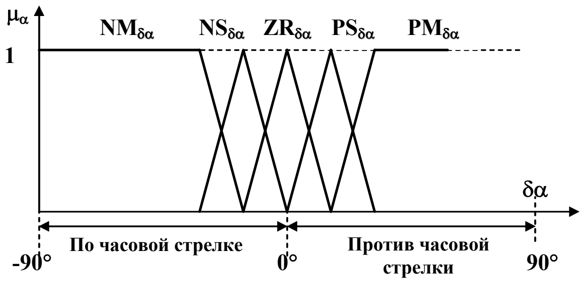


Рис. 5.6

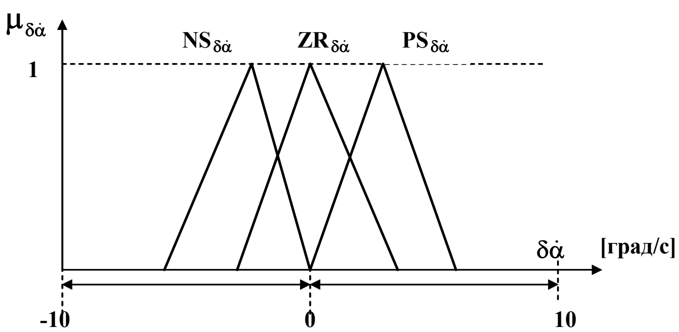


Рис. 5.7

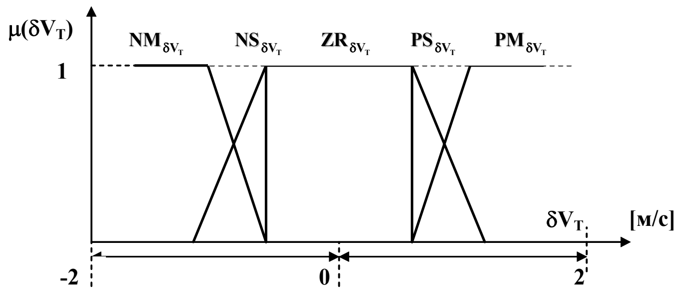


Рис. 5.8

Определим терм-множество ЛП δV_O: $T(V_O)$={PM_{VO} - скорость V_O положительная (против часовой стрелки) средняя; PS_{VO} - скорость V_O

положительная небольшая; ZR_{VO} - скорость $\mathbf{V_O}$ нулевая; NS_{VO} - скорость $\mathbf{V_O}$ отрицательная (против часовой стрелки) небольшая; NM_{VO} – скорость $\mathbf{V_O}$ отрицательная средняя}. На рис. 5.9 приведены функции принадлежности $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{V_O})$ для нечетких переменных терм-множества $T(\mathbf{V_O})$.

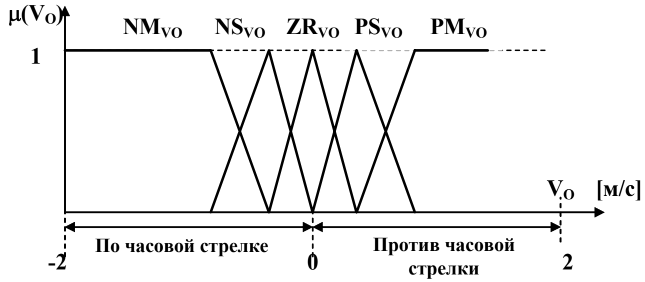


Рис. 5.9

Для точки $\mathbf{O_4}$ определим следующую базу правил эвристического алгоритма управления оператором скоростью $\mathbf{V_O(t)}$ крана при $\mathbf{V_T(t)=0}$:

R_1: если $\delta\alpha=NS_{\delta\alpha}$ и $\delta\dot{\alpha}=NS_{\delta\dot{\alpha}}$ и $\delta V_T=ZR_{\delta V_T}$, тогда $V_O=ZR_{VO}$;

R_2: если $\delta\alpha=NS_{\delta\alpha}$ и $\delta\dot{\alpha}=ZR_{\delta\dot{\alpha}}$ и $\delta V_T=ZR_{\delta V_T}$, тогда $V_O=NS_{VO}$;

R_3: если $\delta\alpha=NS_{\delta\alpha}$ и $\delta\dot{\alpha}=PS_{\delta\dot{\alpha}}$ и $\delta V_T=ZR_{\delta V_T}$, тогда $V_O=NS_{VO}$;

$\{R_i^{O_4}\}_{i=1}^{7}$: R_4: если $\delta\alpha=ZR_{\delta\alpha}$ и $\delta\dot{\alpha}=NS_{\delta\dot{\alpha}}$ и $\delta V_T=ZR_{\delta V_T}$, тогда $V_O=PS_{VO}$;

R_5: если $\delta\alpha=ZR_{\delta\alpha}$ и $\delta\dot{\alpha}=ZR_{\delta\dot{\alpha}}$ и $\delta V_T=ZR_{\delta V_T}$, тогда $V_O=ZR_{VO}$;

R_6: если $\delta\alpha=ZR_{\delta\alpha}$ и $\delta\dot{\alpha}=PS_{\delta\dot{\alpha}}$ и $\delta V_T=ZR_{\delta V_T}$, тогда $V_O=NS_{VO}$;

R_7: если $\delta\alpha=PS_{\delta\alpha}$ и $\delta\dot{\alpha}=NS_{\delta\dot{\alpha}}$ и $\delta V_T=ZR_{\delta V_T}$, тогда $V_O=PS_{VO}$;

На рис 5.10 показано решение об изменении скорости крана для предотвращения раскачивания груза в точке $\mathbf{O_4}$.

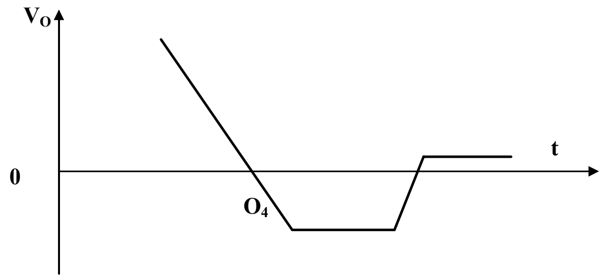


Рис. 5.10

Аналогичные базы правил изменения скоростных режимов можно составить для точек $\mathbf{O_1}$-$\mathbf{O_3}$.

Объединение правил для всех точек **O_1-O_4** позволит получить формализованное представление эвристического алгоритма управления скоростью перемещения крана. Если затем разработать нечеткий контроллер, то можно построить систему управления, которая без оператора будет решать задачу управления скоростью перемещения крана для предотвращения опасного раскачивания груза.

Блок-схема нечеткой системы управления приведена на рис. 5.11.

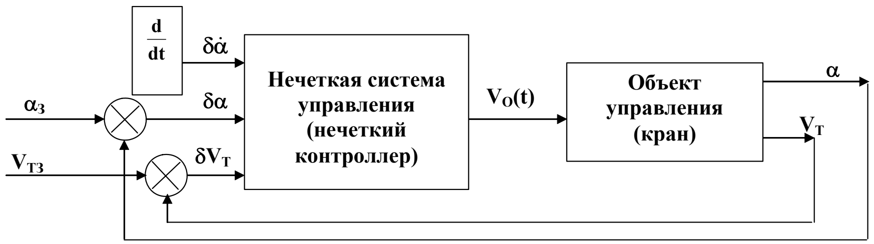


Рис. 5.11

Очевидно преимущество за счет простоты реализации нечеткой системы управления (регулирования) нелинейным объектом (краном) по сравнению с традиционной системой регулирования.

В практике разработки технических систем подобные задачи встречаются очень часто. Это системы регулирования для всевозможных подъемно-транспортных механизмов.

5.2.2. Гибридная система регулирования. Объектом для регулирования принят асинхронный электропривод с частотным преобразователем. На рис. 5.12 приведена структурная схема системы регулирования асинхронного электропривода с ПД-регулятором в цепи обратной связи.

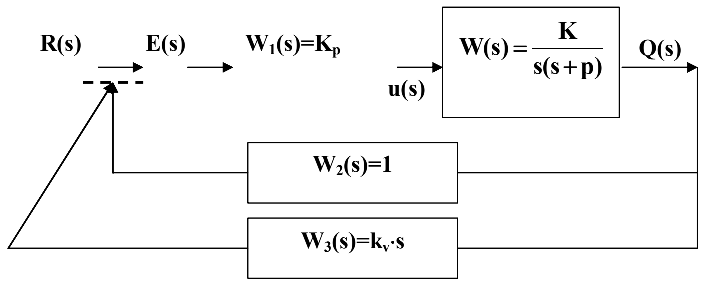


Рис. 5.12

Передаточная функция электропривода определена формулой:

$$\mathbf{W(s)=\frac{Q(s)}{U(s)}=\frac{k}{s(s+p)}},$$

где $\mathbf{Q(s)}$ – угол поворота вала двигателя; $\mathbf{U(s)}$ – управляющий сигнал; $\mathbf{p}$ – динамический параметр объекта; $\mathbf{s}$ – переменная преобразования Лапласа; $\mathbf{k}$ – коэффициент усиления двигателя; $\mathbf{W_1(s)=k_p}$ – передаточная функция П-регулятора в прямой цепи регулирования; $\mathbf{W_2(s)}$ – передаточная функция измерительного устройства; $\mathbf{W_3(s)=k_v s}$ – передаточная функция ПД-регулятора в цепи обратной связи; $\mathbf{R(s)}$ – задание; $\mathbf{E(s)}$ – ошибка в отработке задания.

Передаточная функция замкнутой системы управления определится формулой:

$$\mathbf{W_{зам1}(s) = \frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{\dfrac{W_1 \cdot W_2}{1 + W_1 \cdot W \cdot W_2}}{1 + \dfrac{W_1 \cdot W}{W_1 \cdot W \cdot W_2} W_3} = \frac{k \cdot k_p}{s^2 + (p + k \cdot k_v \cdot k_p) \cdot s + k \cdot k_p}},$$

из которой получим:

$$\mathbf{\ddot{Q}(t) + (p + k \cdot k_v \cdot k_p)\dot{Q}(t) + k \cdot k_p Q(t) = k \cdot k_p R(t)},$$

$$\mathbf{Q(t = 0) = 0, \quad \dot{Q}(t = 0) = 0}. \tag{5.1}$$

Переходная характеристика системы имеет вид, показанный на рис. 5.13.

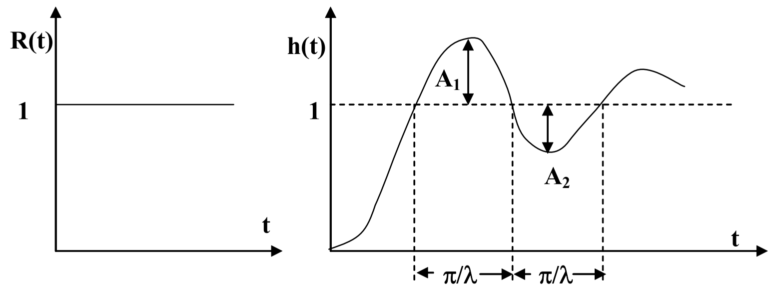


Рис. 5.13

Уравнение (5.1) позволяет определить коэффициент затухания колебаний

$$\gamma = \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{A_1}{A_2},$$

где λ - частота затухающих колебаний, причем $\gamma=\gamma(\mathbf{k_p,k_v})$.

Очевидно, что при росте коэффициентов усиления $\mathbf{k_p,k_v}$ увеличивается коэффициент γ, что приводит к появлению нежелательных скачков углов поворота вала двигателя, а установившаяся ошибка в отработке задания не зависит от коэффициентов усиления $\mathbf{k_p,k_v}$, т.к. $\mathbf{E(t=\infty)=R(t=\infty)-h(t=\infty)=0}$.

Применение обратного преобразования Лапласа к передаточной функции замкнутой системы позволяет получить уравнение для управления:

$$\mathbf{U(t)=k_p E(t)-k_p k_v \dot{Q}(t)}.$$

Если $\dot{Q}(t) = \frac{dQ}{dt} \approx \frac{\Delta Q}{\tau}$, где τ - шаг дискретизации, то получим уравнение $U=k_pE-k_pk_v\frac{\Delta Q}{\tau}$, которое применяют для реализации ПД-регулятора в виде программы контроллера.

ПД-регулятор может быть применен также и ввиде последовательного корректирующего звена, как это показано на рис. 5.14.

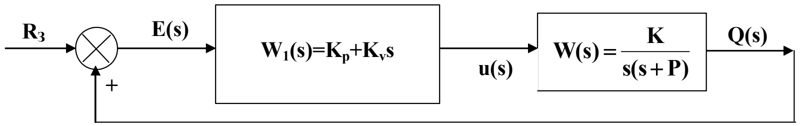


Рис. 5.14

Передаточная функция замкнутой системы управления определится формулой

$$W_{зам1}(s) = \frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{W_1 \cdot W_2}{1 + W_1 \cdot W_2 \cdot 1} = \frac{k(k_p + s \cdot k_p)}{s^2 + (p + k \cdot k_v) \cdot s + k \cdot k_p},$$

из которой получим:

$$\ddot{Q}(t) + (p + k \cdot k_v)\dot{Q}(t) + k \cdot k_p Q(t) = k \cdot k_v \dot{R}(t) + k \cdot k_v R(t),$$

$$Q(t = 0) = 0, \quad \dot{Q}(t = 0) = 0, \quad R(t = 0) = 0. \qquad (5.2)$$

Из уравнений (5.1) и (5.2) следует, что при реализации первой (см. рис. 5.12) и второй (см. рис. 5.14) систем управления учитываются разные виды дифференциальных уравнений, которые описывают замкнутую систему управления. Первой и второй структурам систем управления присущ общий недостаток, состоящий в том, что из-за отсутствия знаменателей в передаточных функциях регуляторов происходит усиление высокочастотных колебаний, которые подаются на вход объекта управления, что приводит к нежелательным последствиям (перегрев, пробой изоляции и т.д.).

Осуществим решение задачи подавления высокочастотных колебаний путем проектирования замкнутой системы управления, структура которой представлена на рис. 5.15.

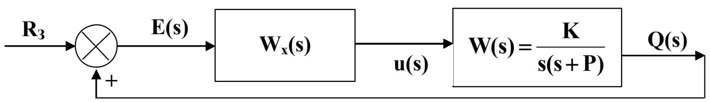


Рис. 5.15

Передаточная функция регулятора может быть выбрана из условия

$$W_{зам3}(s)=W_{зам1}(s), \qquad (5.3)$$

где $\mathbf{W_{зам3}(s)}$ - передаточная функция замкнутой системы, приведенной на рис. 5.15, либо из условия $\mathbf{W_{зам3}(s)=W_{зам2}(s)}$.

Из условия (5.3) определим $\mathbf{W_x(s)}$:

$$\mathbf{W_{зам\,3}(s) = \frac{W_x \cdot W}{1 + W_x \cdot W \cdot 1} = \frac{k \cdot W_x}{s^2 + (p \cdot s + k \cdot W_x)} =}$$

$$\mathbf{= \frac{k \cdot k_p}{s^2 + (p + k \cdot k_v \cdot k_p) \cdot s + k \cdot k_p} = W_{зам\,1}(s)}.$$

Это позволяет определить, что

$$\mathbf{W_x(s) = \frac{k_p \cdot (s + p)}{s + (p + k \cdot k_v \cdot k_p)}}.$$

Из вида $\mathbf{W_x(s)}$ следует, что $\mathbf{W_x(s)}$ представляет собой ПИД-регулятор, который фильтрует высокочастотные колебания, причем

$$\mathbf{W_x(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{k \cdot (s + p)}{s + (p + k \cdot k_v \cdot k_p)}},$$

откуда

$$\mathbf{k_p(s+p)E(s)=[s+(p+kk_vk_p)]U(s).}$$

Обратное преобразование Лапласа позволяет перейти в пространство оригиналов и получить дифференциальное уравнение:

$$\mathbf{k_p \cdot \dot{E}(t) + k_p \cdot p \cdot E(t) = \dot{u}(t) + (p + k \cdot k_v \cdot k_p) \cdot u(t)}.$$

При $\mathbf{\dot{E}(t) \approx \frac{\Delta E}{\tau},\ \dot{u}(t) = \frac{\Delta u}{\tau}}$, $\mathbf{\Delta E=E(t)-E(t-\tau), \Delta u=u(t)-u(t-\tau)}$ получим

$$\mathbf{u(t) = \frac{u(t - \tau) + k_p \cdot \Delta E + k_p \cdot p \cdot \tau \cdot E(t)}{1 + (p + k \cdot k_v \cdot k_p)\tau}}.$$

Данное уравнение является моделью ПИД-регулятора в цифровой форме.

Структура замкнутой системы управления асинхронным двигателем, приведенная на рис. 5.15, позволяет решить задачу фильтрации высокочастотных колебаний при задании $\mathbf{R(t)\neq 1(t)}$. При любом другом виде задания $\mathbf{R(t)}$ эта структура не обеспечивает должной по скорости обработки этого сигнала. Поэтому предлагается в структуру замкнутой системы управления ввести нечеткий регулятор, в котором существует алгоритм обработки нечетких высказываний относительно зависимости коэффициента усиления от ошибки $\mathbf{G(E)}$. Структура замкнутой системы управления асинхронным двигателем примет вид, приведенный на рис. 5.16.

В данной системе обычный ПИД-регулятор настраивает коэффициент усиления $\mathbf{G}$ в зависимости от величины ошибки $\mathbf{E(t)}$. Если величина ошибки $\mathbf{E(t)}$ невелика, то в гибридном регуляторе используется величина коэффициента усиления $\mathbf{G}$, принятая для обычного ПИД-регулятора. При больших значениях величины ошибки $\mathbf{E(t)}$ скорость изменения коэффициента усиления $\mathbf{G}$ уменьшается.

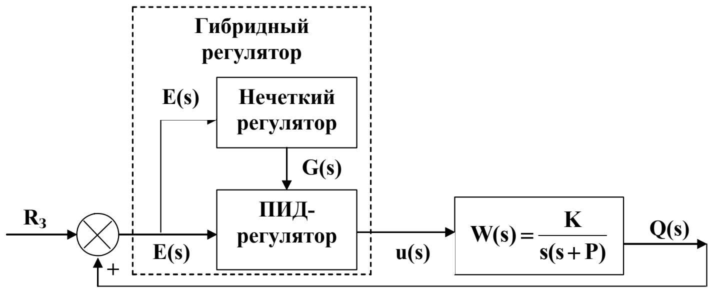


Рис. 5.16

Зависимость коэффициента усиления от ошибки **G(E)** представлена на рис. 5.17.

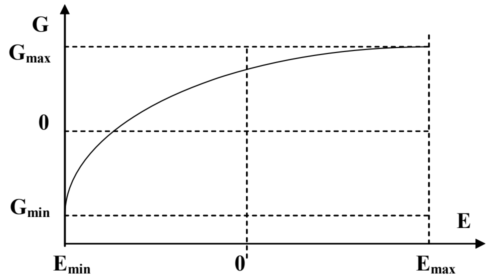


Рис. 5.17

Введем лингвистические переменные (ЛП): ε - «величина ошибки **E**», δ – «величина коэффициента усиления **G**».

Определим терм-множество ЛП ε: T(ε)={PB_ε - величина ошибки **E** положительная и большая; PM_ε - величина ошибки **E** положительная и средняя; PS_ε - величина ошибки **E** положительная и небольшая; ZR_ε - величина ошибки **E** нулевая; NS_ε - величина ошибки **E** отрицательная и небольшая; NM_ε – величина ошибки **E** отрицательная и средняя; NB_ε – величина ошибки **E** отрицательная и большая}. На рис. 5.18 приведены функции принадлежности μ_ε для нечетких переменных терм-множества T(ε).

Определим терм-множество ЛП γ: T(γ)={PB_γ - величина коэффициента усиления **G** положительная и большая; PM_γ - величина коэффициента усиления **G** положительная и средняя; PS_γ - величина коэффициента усиления **G** положительная и небольшая; ZR_γ - величина коэффициента усиления **G** нулевая; NS_γ - величина коэффициента усиления **G** отрицательная и небольшая; NM_γ – величина коэффициента усиления **G** отрицательная и средняя; NB_γ – величина коэффициента усиления **G** отрицательная и большая}. На рис. 5.19 приведены функции принадлежности μ_γ для нечетких переменных терм-множества T(γ).

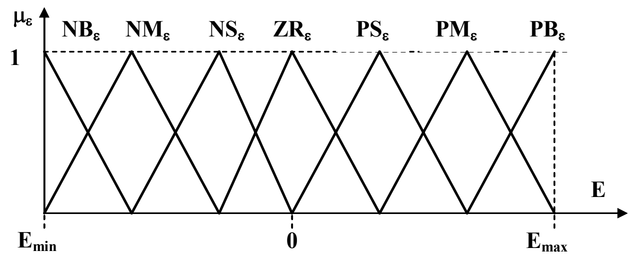


Рис. 5.18

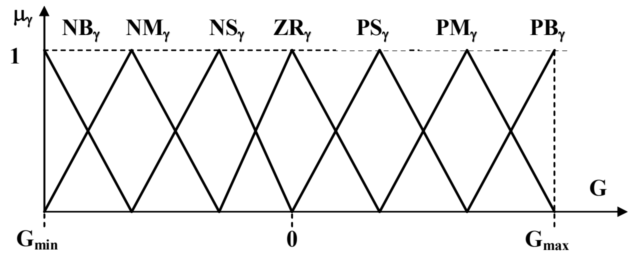


Рис. 5.19

На рис. 5.20 приведена зависимость изменения сигнала управления **u(t)** для ПИД- и гибридного регулятора [11]. При управлении частотным преобразователем гибридный регулятор обладает преимуществами перед ПИД- регулятором.

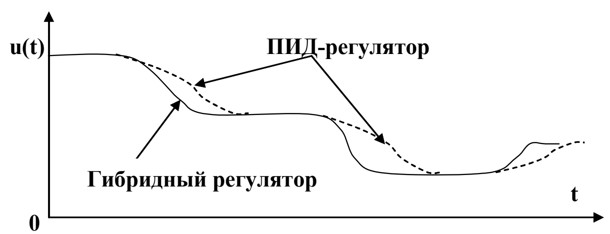


Рис. 5.20

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир, 1965. – 455с.
2. Мелихов А.Н., Берштейн Л.С. Конечные четкие и расплывчатые множества. Часть I. Четкие множества. – Таганрог: ТРТИ, 1980. – 101с.
3. Аверкин А.Н., Батыршин И.З., Блишун А.Ф., Силов В.Б., Тарасов В.Б. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Поспелова Д.А. - М.: Наука, 1986.
4. Мелихов А.Н., Берштейн Л.С., Коровин С.Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой. - М.: Наука, 1990.
5. Борисов А.Н., Алексеев А.В., Крумберг О.А. и др. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной. - Рига: Зинатне, 1982.
6. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 165 с.
7. Мелихов А.Н., Баронец В.Д. Проектирование микропроцессорных устройств обработки нечеткой информации. - Ростов-на-Дону.: Изд-во Ростовского университета, 1990. 128 с.
8. Берштейн Л.С., Финаев В.И. Адаптивное управление с нечеткими стратегиями. - Ростов н/Д.: Изд-во Рост. ун-та, 1993. 134 с.
9. Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Нечеткий логический вывод на основе определения истинности нечеткого правила modus ponens // Методы и системы принятия решений. Системы, основанные на знаниях. Рига: РПИ, 1989. С. 74-80.
10. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике: Пер. с фр. М.: Радио и связь. 1990. 288 с.
11. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления: Учебник/Под ред. Н.Д.Егупова; издание 2-ое, стереотипное. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 744 с.
12. Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Нечеткие модели принятия решений: дедукция, индукция, аналогия. Монография. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2001. – 110 с.
13. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М.: Наука, 1966.

Финаев Валерий Иванович

МОДЕЛИ СИСТЕМ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Ответственный за выпуск Финаев В.И.
Редактор Белова Л.Ф.
Корректор Селезнева Н.И.

ЛП №020565 Подписано к печати 23.11.05
Офсетная печать Усл. п.л. – 8,1 Уч.-изд.л. – 7,9
Заказ №_______ Тирах 350 “С”

Издательство Таганрогского государственного
радиотехнического университета
ГСП 17А, Таганрог, 28, Некрасовский, 44
Типография Таганрогского государственного
радиотехнического университета
ГСП 17А, Таганрог, 28, Энгельса, 4