Лекция 1.

Теория напряженно-деформированного состояния.

1. ***Понятие об упругой сплошной среде.***

Деформируемые твердые тела меняют свои размеры и форму (*деформируются*) под действием внешних сил (*нагрузок*). В них возникают *внутренние усилия*, величина и распределение которых зависят от нагрузки и геометрической формы тел.

Механическое поведение твердого тела может быт весьма разнообразным и сложным. Общее описание его базируется на теории *сплошной среды*. Известно, что в действительности сплошной среды нет, но для понимания механического поведения материи в макрообъемах можно принять такую модель. При игнорировании дискретной структуры материала предполагается, что объем, занимаемый телом, непрерывно заполнен материей.

Бесконечно малый объем материала можно рассматривать как «*частицу*» сплошной среды. При этом произвольная делимость материи, так же, как и неразличимость отдельных частиц, составляет одно из основных понятий механики сплошной среды.

Основанием для введения модели сплошной среды является опыт, делающий возможным экспериментальную проверку рассматриваемой теории. При нагружении под действием внешних сил материальные частицы меняют свое положение в пространстве, т.е. сплошная среда движется. Предполагается также, что движение сплошной среды непрерывно. Это означает, что все величины, определяющие деформирование, являются непрерывными функциями координат.

Рассмотрим произвольное твердое тело с наложенными на него опорными реакциями. Воздействие окружающих тел заменяется силами, которые называются *внешними*. Внешние нагрузки можно разделить на *объемные (массовые), поверхностные* и *сосредоточенные*. Последние могут рассматриваться как предельный случай приложения поверхностных нагрузок на малой части поверхности тела.

Теория упругости является частью механики сплошной среды и занимается определением деформаций и внутренних сил в упругих телах при заданных нагрузках. При этом принимаются следующие *основные гипотезы и допущения* относительно свойств материала, нагрузок и характера деформаций.

Все материалы обладают в известной мере свойством упругости, которое состоит в том, что если внешние силы, вызывающие деформацию элемента конструкции, не превосходят определенной границы, то деформация исчезает после прекращения действия силы. В настоящем курсе принято, что тела, подвергающиеся действию внешних сил, являются совершенно упругими, т.е. полностью возвращаются к своей первоначальной форме после устранения сил.

Теория упругости изучает действие сил на упругие тела и возникающее при этом напряжении и деформации, как в состоянии равновесия, так и в состоянии движения.

Теория упругости имеет дело с идеализированным (абстрактным) твердым деформируемым телом, наделенным свойствами, учитывающими лишь основные качества реального тела.

Основной предпосылкой в теории упругости является ***гипотеза об однородности и сплошности*** строения упругого тела. По этой гипотезе тело сплошное, т. е. непрерывное до деформации, остается непрерывным (без пустот, без разрывов непрерывности) и после деформации, непрерывным остается любой объем тела и элементарный (микрообъем) в том числе. В связи с этим деформации и перемещения точек тела считаются непрерывными функциями координат, что позволяет использовать аппарат дифференциального исчисления.

Второй гипотезой является ***гипотеза о естественном ненапряженном состоянии тела***. Согласно ей, существующие до приложения поверхностных нагрузок начальные напряжения в теле, характер и величина которых зависят от истории возникновения тела, полагаются равными нулю.

Материал тела обладает ***свойствами идеальной упругости***, шаровой изотропии, совершенной однородности и принимается линейная зависимость между деформациями и напряжениями (обобщенный закон Гука).

Идеальная упругость есть способность тела, получившего деформацию, после устранения причин, ее вызвавших, полностью восстановить свою первоначальную форму.

Шаровая изотропия материала понимается в том смысле, что физико-механические свойства одинаковы по всем направлениям, проведенным из данной точки материала. Полагая, что этим свойством и в тех же числовых выражениях обладают все частицы материала, приходят к понятию однородного изотропного тела.

Если механические свойства зависят от направления, то тела называются анизотропными, а в частном случае ортотропными, если в точке есть взаимно ортогональные плоскости, относительно которых механические свойства симметричны.

Линейная зависимость между деформациями и напряжениями (обобщенный закон Гука) означает, что если внешние силы, одновременно и статически прикладываемые к упругому телу, возрастают или убывают в каком-либо известном отношении, то в той же пропорции возрастают или убывают напряжения, деформации и перемещения в любой точке тела.

Большое количество задач теории упругости решается с использованием ***принципа локальности эффекта самоуравновешенных внешних нагрузок (это принцип Сен-Венана)*** согласно которому в точках твердого тела, достаточно удаленных от места приложения внешних нагрузок, напряжения весьма мало зависят от детального способа осуществления этих нагрузок.

В классической теории упругости принимается, что:

1. перемещения тела малы, по сравнению с линейными размерами тела;

2. относительные удлинения, а также относительные сдвиги, т.е. углы сдвига в материале пренебрежимо малы по сравнению с единицей;
3. углы поворота малы по сравнению с единицей, а квадраты углов поворота пренебрежимо малы по сравнению с относительными удлинениями и сдвигами.

Перечисленные гипотезы, применяемые или одновременно все или частично, позволяют решать широкий круг задач, окончательные результаты которых в большинстве случаев удовлетворительно согласуются с данными практики.

2. Тензор напряжений

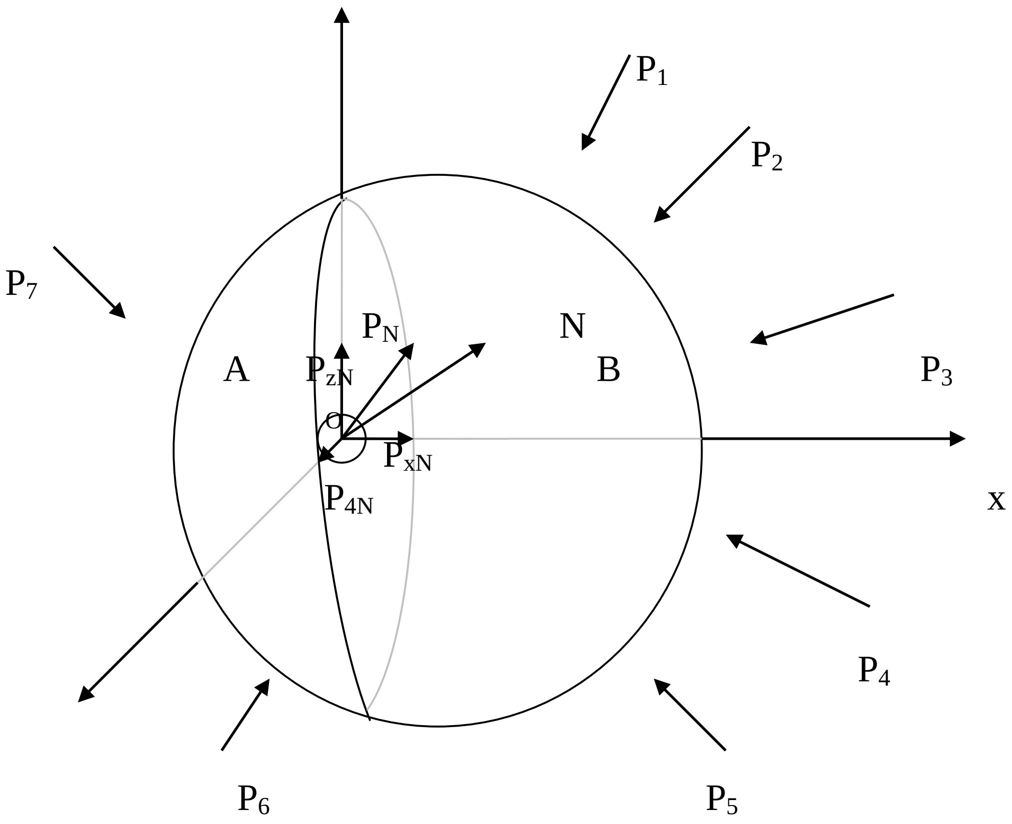

Рис. 1

Рассматривается тело, находящееся в равновесии. Под действием внешних сил $P_i \;\; i = \overline{1,7}$ возникнут внутренние усилия между частями тела. Чтобы изучить величину этих усилий в любой точке O, представим тело разделенным на две части A и B сечением mm, проходящим через эту точку. Рассмотрим одну из этих частей, например часть A. Можно сказать, что она находится в равновесии под действием внешних сил P_6, P_7 и внутренних усилий, распределенных по сечению mm и представляющих действие часть B на часть

А. Допустим, что эти силы непрерывно распределены по площади сечения mm таким же образом, как непрерывно распределяются гидростатическое давление или давление ветра по поверхностям, на которые они действуют.

Величины внешних, т.е. поверхностных нагрузок, а также внутренних сил характеризуются их *интенсивностью*, т. е. величиной усилия, приходящегося на единицу площади поверхности, на которую они действуют. При рассмотрении внутренних усилий эта интенсивность называется ***напряжением***.

В простейшем случае призматического стержня, подвергающегося растяжению силами, равномерно распределенными по концам, внутренние усилия также равномерно распределены по любому сечению mm.

Следовательно, интенсивность таким образом распределенных усилий, т.е. напряжение, может быть получено так:

В общем случае (рис 1) напряжения не является равномерно распределенным по сечению mm. Чтобы получить величину напряжения, действующего по элементарной площадке δF, вырезанной из поперечного сечения mm в точке О, предположим, что усилия, возникающие по этой площадке вследствие воздействия части В на А, могут быть приведены к равнодействующей δP. Если постепенно уменьшать элементарную площадку δF, то предельное значение отношения $\delta P / \delta F$ даст величину напряжения, действующего по сечению mm в точке О. Направление равнодействующей δP при этом предельном значении является направлением напряжения.

$\lim\limits_{\Delta F \to 0} \Delta \mathrm{P} / \Delta F = P_{\mathrm{N}}$ - полное напряжение в точке О по площадке с нормалью N …

$\left(\left[\text{кг} / см^2 \right] = P_{\mathrm{N}} \right)$

Очевидно, имеет место равенство $p_{\mathrm{N}}^2 = p_{x\mathrm{N}}^2 + p_{YN}^2 + p_{zN}^2$ - проекции полного напряжения на координатные оси.

Существует два рода внешних сил, которые могут действовать на тело. Силы, распределенные по поверхности тела, например, давление одного тела на другое, или гидростатическое давление, называются поверхностными силами. Поверхностную силу, приходящуюся на единицу площади,

раскладывают на 3 составляющие и обозначают через $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$. Силы, распределенные по объему тела, например, сила тяжести, магнитные силы, или для тела, находится в движении, силы инерции, называются объемными силами. Объемную силу, приходящуюся на единицу объема, раскладывают на 3 составляющие и обозначают через X, У , Z.–
Буквой σ обозначают нормальное напряжение, τ – касательные.
Возьмем очень малый элемент объема в виде куба в близи т. О.

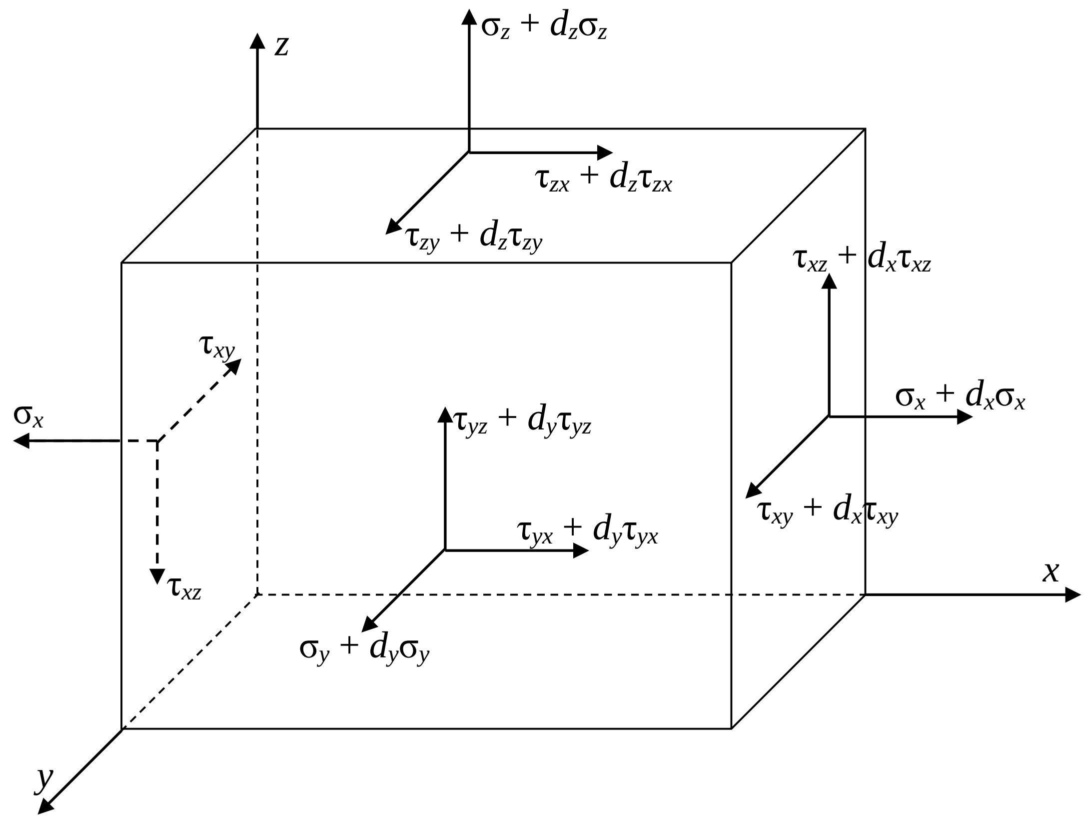

Рис. 2. Равновесие элементарного параллелепипеда

Правило формирования индексов у напряжений

Нормальные напряжения имеют один индекс, соответствующий направлению нормали к площадке, на которой действует напряжение. У касательных напряжений два индекса: первый соответствует направлению нормали к площадке, второй – направлению оси координат, параллельно которой действует касательное напряжение.

Правило знаков

Все три напряжения на какой-либо площадке считаются положительными, если:

а) нормаль к площадке совпадает с положительным направлением оси;

б) сами напряжения действуют вдоль положительных направлений осей.

Или:

а) нормаль совпадает с отрицательным направлением оси;

б) сами напряжения направлены против осей.

Далее будет доказан закон взаимности касательных напряжений т. е. в $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, таким образом, всего неизвестных компонентов будет 6. Расположим их в виде матрицы, называемой тензором напряжений:

$$T_{\text{n}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$ - тензор напряжений

Напряженное состояние в точке вполне определенно, если задан тензор напряжений для этой точки.

3.Связь компонентов напряжений вблизи наружной поверхности тела с компонентами нагрузки на той же поверхности тела.

Возле какой-либо точки границы тела мысленно плоскостями, параллельными координатам, вырежем бесконечно малый элемент. В общем случае тела, (когда оно не призматической формы) таким элементарным объемом окажется тетраэдр. Рассмотрим условия равновесия такого элементарного тетраэдра. На наклонную грань тетраэдра действуют внешние силы и уравновешивающие их внутренние силы действуют на остальные грани.

Выделим элементарную площадку, образованную тремя гранями параллелепипеда и наклонной площадкой, рис. 3, а. Нормаль *n* к площадке составляет с осями координат углы, косинусы которых *l, m, n*:

$$\cos(n,x) = l,$$
$$\cos(n,y) = m,$$
$$\cos(n,z) = n.$$

Величины *l, m, n* – направляющие косинусы – связаны соотношением

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

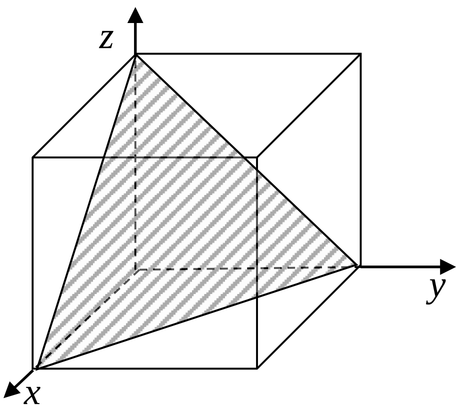

Рис. 3, а.
Элементарное наклонное сечение

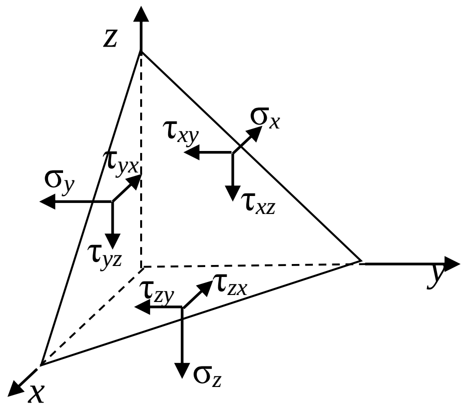

Рис. 3, б.
Равновесие отсеченной части

Обозначим площадь наклонной площадки *F*, тогда

$$F_x = Fl, \quad F_y = Fm, \quad F_z = Fn,$$

т.к. отношение площади любой из 3-х ортогональных граней к площади наклонной грани составляет косинус угла наклона между нормалями к тем же граням.

К выделенной пирамиде приложены напряжения, действующие по граням, рис. 3, б. Проекции полного напряжения P_n, действующего на наклонной грани, на оси координат обозначим P_{nx}, P_{ny}, P_{nz}.

Составим суммы проекций сил на оси *x*, *y*, *z*.

$$P_{nx}F - \sigma_x F_x - \tau_{yx} F_y - \tau_{zx} F_z = 0,$$

$$P_{ny}F - \tau_{xy} F_x - \sigma_y F_y - \tau_{yz} F_z = 0,$$

$$P_{nx}F - \tau_{xz} F_x - \tau_{yz} F_y - \sigma_z F_z = 0.$$

Сокращая A, получаем уравнения равновесия на наклонной площадке (условия на контуре тела или статические граничные условия примут вид:)

$$\begin{cases} P_{xN} = \ell\sigma_x + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} n \\ P_{yN} = \tau_{xy}\ell + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ P_{zN} = \tau_{xz}\ell + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{cases} \qquad (1)$$

$$X_n = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n\,,$$

$$Y_n = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n\,,$$

$$Z_n = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n\,,$$

где обозначено: $X_n = P_{nx}$, $Y_n = P_{ny}$, $Z_n = P_{nz}$.

В случае, если наклонная грань проведена не внутри тела, а совпадает с поверхностью, принадлежащей границе тела, полученные уравнения носят название граничных уравнений (или условий) теории упругости в напряжениях. В этом случае X_n, Y_n, Z_n – поверхностные нагрузки.

Таким образом, составляющие напряжения по любой площадке, определяемой направляющими косинусами могут быть найдены по формулам , если в данной точке О известны шесть составляющих напряжения.

Нормальное напряжение на наклонной грани определяется по формуле

$$\sigma_N = p_{xN} l + p_{yN} m + p_{zN} n\,.$$

Касательное напряжение на той же площадке определяется из уравнения

$$\sigma_N^2 + \tau_N^2 = p_N^2\,.$$