Метод Бубнова – Галёркина.

С формально – математической точки зрения этот метод состоит в следующем. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$L(\omega)=0, \tag{2.2.1}$$

где $\omega=\omega(x,y)$ - искомая функция, которую для определённости считают зависящей от двух аргументов: x, y. Символом L обозначен дифференциальный оператор уравнения. Например, для изгиба пластин

$$L(\omega)=D\left(\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\omega}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\omega}{\partial y^4}\right)-q(x,y). \tag{2.2.2}$$

Задают ω в виде суммы:

$$\omega=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j f_j(x,y), \tag{2.2.3}$$

где α_j - неизвестные постоянные множители, подлежащие определению; $f_j(x,y)$ - функции, которые задаются так, чтобы они удовлетворяли всем (кинетическим и силовым) граничным условиям. Их называют базисными или координатными функциями. При подстановке ω в уравнение (2.2.1) в общем случае не получится тождественного нуля, т. е. $L(\omega)\neq 0.$ В каждой точке (x, y) области интегрирования A величина $L(\omega)$ будет иметь своё значение вместо требуемого по (2.2.1) нуля. Её называют функцией – ошибкой. Если бы $L(\omega)$ был точный ноль, то функция $L(\omega)$ была бы ортогональна любой функции F(x,y) в области A, т.е.

$$\iint_A L(\omega)F(x,y)dxdy=0. \tag{2.2.4}$$

Не имея такой возможности, стремятся к минимальной величине функции – ошибки, требуют, чтобы она была ортогональна к каждой из базисных функций f_i:

$$\iint_A L(\omega)f_i(x,y)dxdy=0, i=1,2,\ldots,N. \tag{2.2.5}$$

Для линейного дифференциального уравнения (2.2.1) $L(\omega)=\sum_j \alpha_j L(f_j)$.

Поэтому после подстановки (2.2.3) в (2.2.5) и замены интеграла от суммы суммой интегралов, получают систему линейных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1N}\alpha_N + b_1 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{N1}\alpha_1 + a_{N2}\alpha_2 + \ldots + a_{NN}\alpha_N + b_N = 0, \end{array}\right\} \qquad (2.2.6)$$

где

$$a_{ij} = \iint_A L^*\left(f_j\right) f_i dxdy; \qquad (2.2.7)$$

$$b_i = \iint_A L^0(x,y) f_i dxdy; \qquad (2.2.8)$$

L^0 - свободные члены оператора L [например, в (2.2.2) $L^0 = q(x,y)$];

L^* - оператор L, за исключением свободных членов, т.е. $L^* = L - L^0$.

Решение системы уравнений (2.2.6) и даёт искомые коэффициенты разложения α_j (2.2.3). Если уравнение (2.2.1) нелинейное, то и система уравнений (2.2.5) относительно α_j будет также нелинейной. Уравнениям (2.2.5) данного метода можно дать вариационную трактовку, если задача, описываемая исходным дифференциальным уравнением (2.2.1), допускает вариационную формулировку. Пусть это будет задача изгиба пластины. Тогда $L(\omega)$ в (2.2.2) можно написать в виде двух слагаемых:

$$L(\omega) = q_1 - q = 0, \qquad (2.2.9)$$

где $q_1 = D\nabla^2\nabla^2\omega$ - интенсивность упругого отпора изогнутой пластины, с которым она противодействует внешней нагрузке q в данной точке.

Как известно, уравнение Софи Жермен – Лагранжа как раз выражает условие равновесия элемента пластины dxdy, что и подчёркивается записью (2.2.9). Следовательно, $L(\omega)$ - это интенсивность неуравновешенной суммарной нагрузки, возникающей по области интегрирования A (площади пластины) при задании прогибов в виде суммы (2.2.3). Удержание N членов в нём означает, что действительную систему заменили системой с N степенями свободы, в которой $\alpha_i (i = 1,2,\ldots,N)$ - это обобщённые перемещения, каждому из которых отвечает деформированное состояние, определяемое функцией $f_i(x,y)$. Для того чтобы дискретная система находилась в равновесии по принципу Лагранжа, надо, чтобы работа всех элементарных сил системы, т. е. $L(\omega)dxdy,$ на каждом из возможных перемещений, т.е. $\delta\alpha_i f_i(x.y)$, была равна нулю:

$$\delta A_i = \delta\alpha_i \iint_A L(\omega)dxdy f_i(x,y) = 0, \qquad (2.2.10)$$

что после отбрасывания произвольной вариации $\delta\alpha_i$ и даёт уравнения (2.2.5).

Вариационная трактовка метода позволяет обосновать так называемый обобщённый метод Бубнова – Галёркина. Пусть базисные функции f_i в отличие от (2.2.3) удовлетворяют всем кинематическим граничным условиям, но не удовлетворяют силовым условиям. Это значит, что в действительности, например, внутренние усилия на контуре пластины M_n и V_n, где n – нормаль к контуру (рис.2.2.1, а, б), равны нулю, то изгиб пластины по поверхности $f_i(x,y)$ может вызвать появление некоторых усилий $M_{ni} \neq 0$ и $V_{ni} \neq 0$.

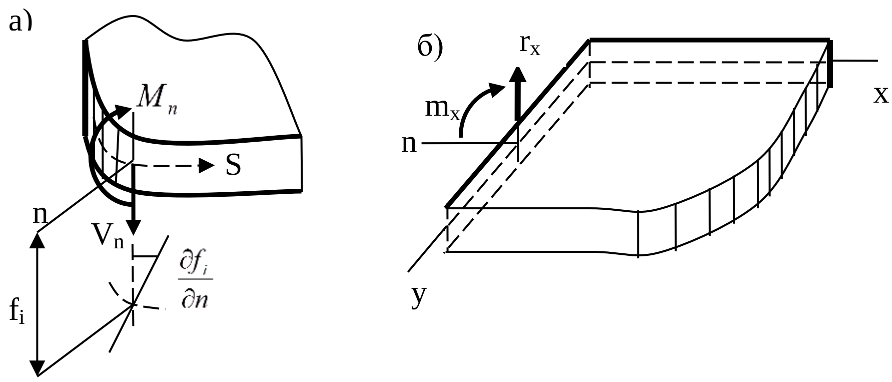

Рис. 2.2.1

Тогда из вариационного условия $\delta A_i = 0$ вместо (2.2.5) следуют уравнения

$$\iint_A L(\omega) f_i(x,y)dxdy - A_i^{конт} = 0, i = 1,2,\dots,N, \qquad (2.2.11)$$

где $A_i^{конт}$ - работа сил на границе области интегрирования на перемещениях $f_i(x,y)$. Для изгиба пластины это будет

$$A_i^{конт} = \oint_S \Delta M_n \frac{\partial f_i}{\partial n} dS + \oint_S \Delta V_n f_i dS, \qquad (2.2.12)$$

где ΔM_n и ΔV_n - неуравновешенные части момента и поперечной силы на контуре при прогибе пластины по поверхности ω. Так, например, на кромке x=0 (рис. 2.2.1,б)

$$\left.\begin{aligned} \Delta M_x &= m_x - \left[-D\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \right]; \\ \Delta V_x &= r_x - \left[-D \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + (2-\mu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \right]; \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.13)$$

где m_x и r_x - интенсивности внешней нагрузки, приложенной к кромке.