Л.1. Метод скалярних функцій Ляпунова, основні положення

Analysis of stability for dynamic systems

The study of the stability properties is of fundamental importance for the analysis of dynamic systems and the design of control laws.

In the following, we discuss two methods applicable to both linear and non linear systems expressed in state form

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t), \qquad x(t_0) = x_0$$

1) First Lyapunov method (local linearization)

2) Second Lyapunov method (direct method)

***Aleksandr Mikhailovich Lyapunov** (1857 – 1918) was a Russian mathematician, mechanician and physicist. Lyapunov is known for his development of the stability theory of a dynamical system, as well as for his many contributions to mathematical physics and probability theory.*

Claudio Melchiorri
Dipartimento di Ingegneria dell’Energia Elettrica e dell’Informazione (DEI)
Università di Bologna

Stability of the equilibrium

Stability of an equilibrium state

Let consider an autonomous system

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad (1)$$

Note: A system is autonomous if it is without input and does not depend explicitly on time.

Def. 2: The zero state of system (1) is stable in the sense of Lyapunov at time instant t_0 if for all $\varepsilon > 0$ there exists a parameter $\eta > 0$ such that

$$\|x(t_0)\| < \eta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

Def. 3: The zero state of system (1) is *asymptotically stable in the sense of Lyapunov* at time instant t_0 if it is stable and if

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$$

Note: These definitions apply to the equilibrium state, not to "the system." A dynamic system can have several equilibrium points.

Stability of the equilibrium

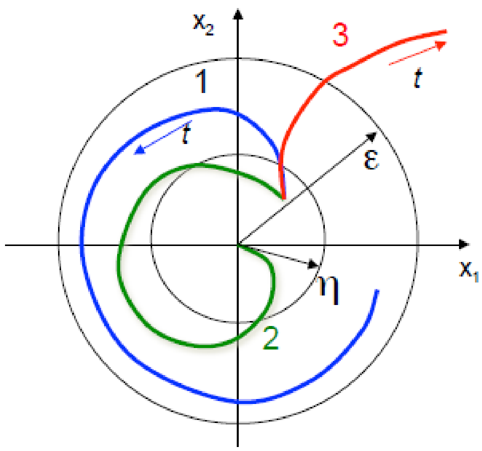
Def. 4: The zero state of system (1) is said to be *globally asymptotically stable* or *asymptotically stable at large* in the sense of Lyapunov at time instant t_0 if it is stable and if

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0, \qquad \forall x(t_0) \in X$$

where X is the whole state space.

In this case, since no other equilibrium state exists, the system (1) is said to be *globally asymptotically stable*.

Stability of the equilibrium



In summary:

1. Stable
2. Asymptotically stable
3. Unstable

If the previous definitions hold for all initial time instants $t_1 \in [t_0, \infty]$, the stability property is said to be uniform in $[t_0, \infty]$.

First Lyapunov method (local linearization)

Let us consider the autonoumous system

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad , \quad 0 = f(0) \qquad (2)$$

where $x = 0$ is an equilibrium point. If it is possible to compute the derivative of the functions $f(\cdot)$, then in a proper neighbourhood of the origin it is possible to write, by using the Taylor series expansion:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) = f(0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} x(t) + f_0(x(t))$$

where $f_0(x(t))$ are the residuals of the Taylor series expansion, assumed negligible.
Since $f(0) = 0$, by defining

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x'=0}$$

then the homogeneous linear system

$$\dot{x}(t) = A\ x(t) \qquad (3)$$

represents the *local linearization* or *local approximation* of the non linear system (2).

First Lyapunov method (local linearization) – Example 1

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 sin(x_2) - x_1^2 - sin(x_1) \\ x_1^2 - 2sin(x_2) \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin x_2 - 2x_1 - \cos x_1 & -x_1 \cos x_2 \\ 2x_1 & -2\cos x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=x_0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= -2 \end{aligned}$$

Asimptotycally stable system

Lyapunov method

Lyapunov theorems

1. *(simple stability):* The zero state *is stable in the sense of Lyapunov* if there exists a Lyapunov function V in a neighbourhood of the origin $\vartheta(0,\rho)$.

2. *(asymptotic stability):* The zero state is *asymptotically stable (AS) in the sense of Lyapunov* if there exists a Lyapunov function V in a neighbourhood of the origin $\vartheta(0,\rho)$ such that $dV(x)/dt < 0$ for all $x \in \vartheta(0,\rho)$, $x \neq 0$.

3. *(global asymptotic stability):* System (2) is *globally asymptotically stable (GAS)* in x = 0 if there exists a Lyapunov function V defined in all the state space such that:

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \ , \quad \lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty$$

   (radially unlimited Lyapunov function).

Applications of the Lyapunov method

First order systems

Let consider the following first order system:

$$\dot{x} + f(x) = 0 \qquad (1)$$

with $f(x)$ continuous, and the condition:

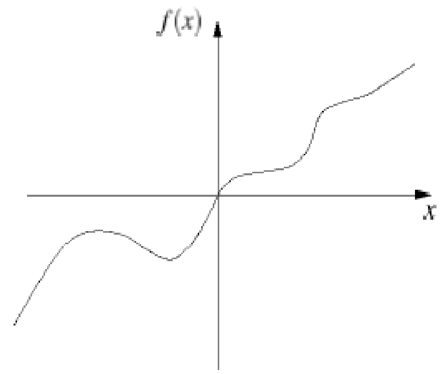
$$x\ f(x) > 0, \qquad x \neq 0 \qquad (2)$$

Let consider the Lyapunov function $V = x^2$, then

$$\dot{V} = 2x\dot{x} = -2xf(x) < 0 \quad \text{for} \quad x \neq 0$$

The origin $x = 0$ is a global asymptotically stable (GAS) point.

In fact V is unlimited for x $\rightarrow \infty$



Геометрична інтерпретація теорем другого методу Ляпунова

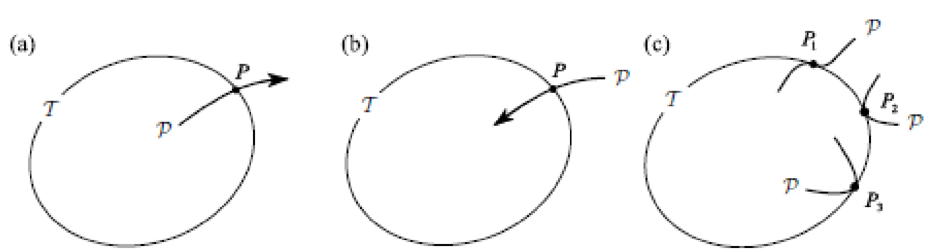


Figure 10.6 Phase path $\mathcal{P}$ crossing topographic curves $\mathcal{T}$. (a) $\dot{V} > 0$ at P. (b) $\dot{V} < 0$ at P. (c) $\dot{V} = 0$ at P: the paths are tangential and the directions undetermined.

Example 10.4 *By using the Liapunov test function $V(x,y) = x^2 + xy + y^2$, show that the zero solution of the linear system $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x - y$ is uniformly and asymptotically stable.*

The proposed test function $V(x, y)$ does define a topographic system, since

$$V(x,y) = x^2 + xy + y^2 = (x + \tfrac{1}{2}y)^2 + \tfrac{3}{4}y^2 > 0$$

for $(x, y) \neq (0, 0)$. Also

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,y) &= y(2x+y) + (-x-y)(x+2y)\\ &= -(x^2+xy+y^2) = -V(x,y) < 0.\end{aligned}$$

for $(x, y) \neq (0, 0)$. Therefore, by Theorem 10.7, the zero solution is uniformly and asymptotically stable. (Also, by Theorem 8.1, all the solutions have the same property since the system equations are linear.) ●

Example 10.5 *Investigate the stability of the system $\dot{x} = -x - 2y^2$, $\dot{y} = xy - y^3$.*

The family of curves defined by

$$V(x,y) = x^2 + by^2 = \alpha, \quad \alpha > 0, \ b > 0$$

constitutes a topographic system (of ellipses) everywhere. We obtain

$$\dot{V}(x,y) = -2(x^2 + (2-b)xy^2 + by^4).$$

It is difficult to reach any conclusion about the sign of $\dot{V}$ by inspection, but if we choose the value $b = 2$ we obtain the simple form

$$\dot{V}(x,y) = -2(x^2 + 2y^4)$$

which is negative everywhere (excluding the origin). Therefore $V(x, y)$ is a strong Liapunov function for the system when

$$V(x,y) = x^2 + 2y^2.$$

By Theorem 10.7 the zero solution is uniformly and asymptotically stable. ●

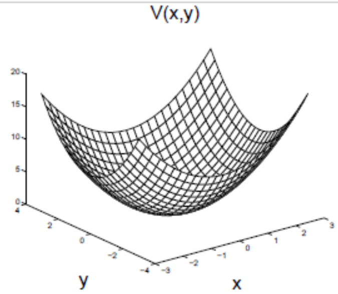
Производная вспомогательной функции в силу системы уравнений возмущенного движения:

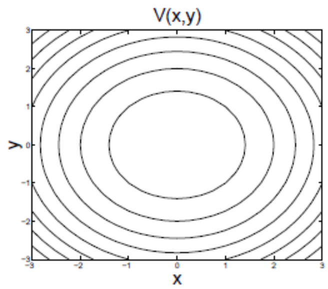
$$V' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = (gradV(x), f(x)). \tag{1.1}$$

Сами вспомогательные функции наперед не известны, поэтому метод еще называют методом функций Ляпунова.

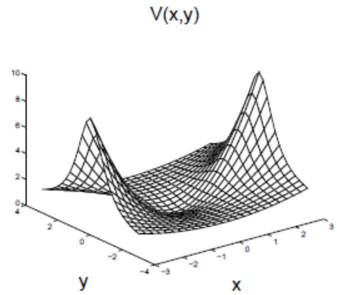
Додатньо визначена функція:

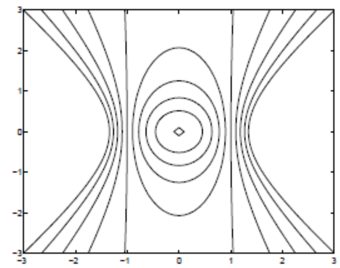
1) $V(x,y) = x^2 + y^2$



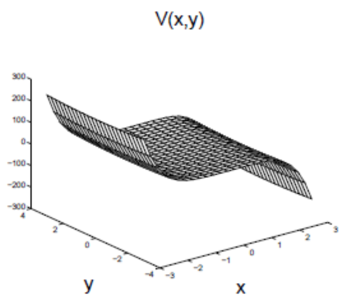


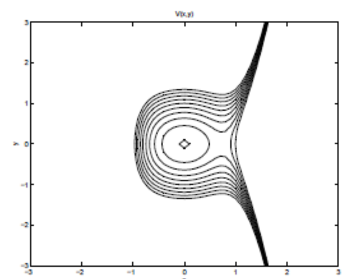
2) $V(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{(1+y^2)}$





3) $V(x,y) = x^2+y^2-x^5$





Визначити стійкість нульового ров’язку нелінійної динамічної системи методом функцій Ляпунова

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 + x_2^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 \end{cases}$$

Якобіани систем:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ -3x_1^2 & -3x_2^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & 1 \\ -3x_1^2 & 3x_2^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Матриці лінійного наближення – не дають можливості провести аналіз стійкості (критичний випадок нульового кореня):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Відповідь може дати наступна Ф.Л. (додатньо визначена функція):

$$V(\mathbf{x}) = x_1^4 + 2x_2^2$$

Її похідна в силу вихідних нелінійних систем:

$$\dot{V} = -4x_1^6 - 4x_2^4 < 0, \qquad \dot{V} = 4x_1^6 + 4x_2^4 > 0, \qquad \dot{V} = 0$$

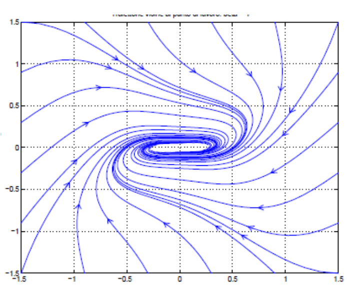
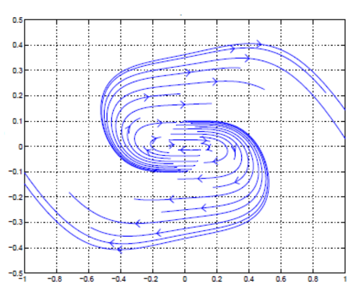
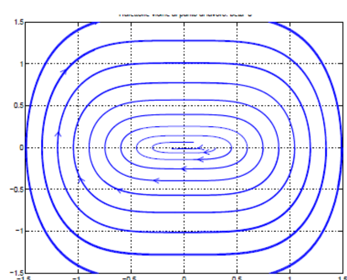
Теор. Нульовий розв'язок системи

$$\dot{x} = f(x)$$

глобально асимптотично стійкий, якщо існує Ф.Л., V(x):

- $V(0) = 0$ and $V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0$
- $\|x\| \to \infty \Rightarrow V(x) \to \infty$
- $\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \neq 0.$

Тому нульовий розв'язок першої системи глобально асимптотично стійкий – другої системи нестійкий, а третьої стійкий, але неасимптотично.

Понятие положительно определенной функции.

Функция V(x1,...,xn) > 0 при $x \neq 0$ и V(0)=0 называется положительно определенной. В начале координат V(x) имеет глобальный минимум.

Если разложение некоторой функции Z(x): Z(0)=0 в ряд Тейлора в окрестности нуля (x=0) начинается с квадратичных членов, то условия положительной определенности (локального минимума в нуле) определяются из критерия Сильвестра (наличие линейных членов гарантировало бы знакопеременность функции).

Так, например, фукция от двух переменных в малой окрестности нуля представляется квадратичной формой

$$Z(x_1,x_2)\approx\frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2}\Big|_{(0,0)}x_1^2+2\frac{\partial^2 Z}{\partial x_1\partial x_2}\Big|_{(0,0)}x_1x_2+\frac{\partial^2 Z}{\partial x_2^2}\Big|_{(0,0)}x_2^2=$$

$$=q_{11}x_1^2+2q_{12}x_1x_2+q_{22}x_2^2=(x_1\ x_2)\begin{pmatrix}q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=(x)^T Q(x). \tag{1.2}$$

Положительность всех главных диагональных миноров матрицы квадратичной формы Q (критерий Сильвестра) гарантирует положительную определенность функции Z(x) в достаточно малой окрестности нуля

$$|q_{11}|>0;\begin{vmatrix}q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{vmatrix}>0;$$

$$\begin{cases}q_{11}>0;\\ q_{11}q_{22}-q_{12}^2>0.\end{cases} \tag{1.3}$$

Если эти условия выполнены, то линии уровня функции Z(x) = C при достаточно малых значениях константы C представляют собой замкнутые кривые, охватывающие начало координат; линия уровня с большим значением этой константы C охватывает все линии уровня с меньшим значением этой константы. Линии уровня знакопеременной функции в окрестности начала координат либо гиперболы, либо прямые.

Линии уровня (поверхности уровня) положительно определенной функции V(x) (функции Ляпунова) представляют замкнутые линии (поверхности). Условие неположительности производной V’ в силу уравнений возмущенного движения означает, что фазовые траектории системы прошивают линии уровня (поверхности уровня), «вливаясь» вовнутрь (траектория не может «застрять» на линии уровня, так как множество {x: V’= 0} не содержит целых траекторий системы). Следовательно, за конечное время все фазовые траектории, начинающиеся внутри некоторой линии уровня (поверхности уровня) войдут в произвольно малую ε-окрестность начала координат.

Теорема Четаева.

Если система уравнений возмущенного движения x'=f(x) такова, что возможно найти функцию V(x), для которой существует область V(x) > 0, и если полная производная V' в силу системы является определенно-положительной в области V>0, то невозмущенное движение $x \equiv 0$ неустойчиво.

Замечание. Если условие V>0 выполняется во всем фазовом пространстве, то получим, как частный случай, теорему Ляпунова о неустойчивости (любая возмущенная траектория, выходящая из δ-окрестности покидает ε-окрестность начала координат).

При анализе влияния параметров конструктивной схемы экипажа на устойчивость прямолинейного движения может применяться прямой метод Ляпунова, в частности, успешно разрабатываемые в последнее время приемы конструирования квадратичных функций Ляпунова, учитывающие математическую структуру разбиения сил исходной системы.

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\dot{x} = Ax$ функцию Ляпунова следует искать в виде квадратичной формы

$$V(x) = x^T Bx, \tag{1.4}$$

где матрица B является искомой. Производная V(x) в силу системы $\dot{x} = Ax$ также представляется в виде квадратичной формы

$$\dot{V} = \dot{x}^T Bx + x^T B\dot{x} = \dot{x}^T (A^T B + BA)x. \tag{1.5}$$

Потребуем, чтобы квадратичная форма V(x) удовлетворяла уравнению

$$\dot{V} = W, \tag{1.6}$$

где $W(x) = -x^T Cx$ –определенно-отрицательная квадратичная форма (C - положительно определенная матрица). Тогда матрица B определяется из матричного уравнения Ляпунова

$$A^T B + BA = -C. \tag{1.7}$$

Разрешимость матричного уравнения следует из следующей теоремы Ляпунова.

Если корни характеристического уравнения системы $\dot{x} = Ax$ таковы, что λj+λk≠0 ни при каких j, k=1,…, n, то, какова бы ни была наперед заданная квадратичная форма $W(x) = -x^T C x$, существует единственная квадратичная форма $V(x) = x^T B x$, удовлетворяющая уравнению $\dot{V} = W$.

Замечание. Если все Reλj<0, j=1,…n, то условие λj+λk≠0 будет заведомо выполнено.